

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab

Matematisk-fysiske Meddelelser, bind **26**, nr. 16

Dan. Mat. Fys. Medd. **26**, no. 16 (1952)

STABILITÄTSUNTERSUCHUNGEN  
IM RESTRINGIERTEN  
VIERKÖRPERPROBLEM

VON

PEDER PEDERSEN



København

i kommission hos Ejnar Munksgaard

1952

Printed in Denmark  
Bianco Lunos Bogtrykkeri

### Einleitung.

Der spezielle Fall des Vierkörperproblems, der in der vorliegenden Abhandlung behandelt werden soll, ergibt sich, wenn drei endliche Massen in der relativen Bewegung in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks fest liegen, während die vierte Masse, die unendlich klein ist, sich in der von den drei endlichen Massen bestimmten Ebene bewegt. In Analogie zu der Bezeichnung des problème restreint als das restringierte Dreikörperproblem wollen wir dieses Problem das restringierte Vierkörperproblem nennen.

In einer früheren Abhandlung<sup>1</sup> ist das Problem, die Lage der Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem zu bestimmen, ausführlich behandelt. Die Untersuchung zeigte, dass je nach der Lage des gemeinsamen Schwerpunktes der drei endlichen Massen 8, 9 oder 10 Librationspunkte bestehen. Ausserhalb des von den drei endlichen Massen gebildeten gleichseitigen Dreiecks (Massendreieck) liegen immer 6 Librationspunkte. Innerhalb des Massendreiecks liegen entweder 2, 3 oder 4 Librationspunkte, je nachdem der Schwerpunkt der drei endlichen Massen ausserhalb, auf oder innerhalb einer gewissen Kurve liegt, die als Schwerpunktsgrenzkurve bezeichnet wurde.

Die Frage der Stabilitätsverhältnisse der so gefundenen Librationspunkte soll nun näher untersucht werden, indem die in der erwähnten Abhandlung gefundenen Resultate als Ausgangspunkt der Untersuchung dienen werden. Besonderes Gewicht wird auf eine genaue numerische Bestimmung derjenigen Kurven gelegt werden, die die Grenze zwischen den Gebieten mit verschiedenen Stabilitätsverhältnissen bilden. Ausserdem sollen ver-

<sup>1</sup> Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem, Dan. Mat. Fys. Medd. 21, no. 6 (1944); Publikationen der Kopenhagener Sternwarte Nr. 137.

schiedene Spezialfälle einer theoretischen und numerischen Behandlung unterworfen werden.

Bei Hinweisen auf meine frühere Abhandlung steht die Seitenzahl in eckigen Klammern.

### 1. Die allgemeinen Bedingungen der Stabilität der periodischen Lösungen.

Die drei endlichen Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  und eine vierte unendlich kleine Masse befinden sich in einem gegebenen Augenblick in derselben Ebene, mit Geschwindigkeiten, die in dieser Ebene liegen. Diese vier Massen werden, falls sie keinen anderen Einwirkungen als ihrer gegenseitigen Anziehung ausgesetzt sind, stets in dieser Ebene bleiben. Wir wählen nun in dieser Ebene ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem und bezeichnen die Koordinaten der drei endlichen Massen mit  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  und  $(X_3, Y_3)$ , während die unendlich kleine Masse die Koordinaten  $(X, Y)$  hat. Wir bezeichnen ferner die Distanzen zwischen den endlichen Massen und der unendlich kleinen Masse mit  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$ . Indem  $k^2$  die Gravitationskonstante zum Ausdruck bringt, erhalten wir die folgenden Differentialgleichungen für die Bewegung der unendlich kleinen Masse [6]:

$$\left. \begin{aligned} X'' &= -k^2 m_1 (X - X_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (X - X_2) / \varrho_2^3 - k^2 m_3 (X - X_3) / \varrho_3^3, \\ Y'' &= -k^2 m_1 (Y - Y_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (Y - Y_2) / \varrho_2^3 - k^2 m_3 (Y - Y_3) / \varrho_3^3. \end{aligned} \right\} (1)$$

Wir ersetzen danach das feste Koordinatensystem  $X, Y$  durch ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $n$  rotierendes Koordinatensystem  $x, y$ . Die Bewegung der unendlich kleinen Masse wird dann durch folgende Differentialgleichungen bestimmt [6]:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2ny' - n^2x &= -k^2 m_1 (x - x_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (x - x_2) / \varrho_2^3 \\ &\quad - k^2 m_3 (x - x_3) / \varrho_3^3, \\ y'' + 2nx' - n^2y &= -k^2 m_1 (y - y_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (y - y_2) / \varrho_2^3 \\ &\quad - k^2 m_3 (y - y_3) / \varrho_3^3. \end{aligned} \right\} (2)$$

Sollen die drei endlichen Massen in dem rotierenden Koordinatensystem feste Lagen in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $\varrho$  einnehmen, muss man [7, 8]:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$k^2 M - n^2 \varrho^3 = 0, \quad (4)$$

haben, wo

$$M = m_1 + m_2 + m_3. \quad (5)$$

Die Bedingungsgleichungen (3) sind der Ausdruck dafür, dass der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Schwerpunkt der drei endlichen Massen fallen muss; die Bedingungsgleichung (4) bestimmt die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems.

Die Einheiten der Länge, des Masses und der Zeit werden nun so gewählt, dass

$$\varrho = \sqrt{3}, \quad n = 1, \quad k^2 M = 3\sqrt{3}, \quad (6)$$

wodurch die Bedingungsgleichung (4) befriedigt wird. Ferner werden statt  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  die relativen Massen  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  eingeführt, die durch die Gleichungen

$$\mu_1 = m_1/M, \quad \mu_2 = m_2/M, \quad \mu_3 = m_3/M \quad (7)$$

definiert werden.

Die Bewegungsgleichungen (2) der unendlich kleinen Masse können danach folgende Form erhalten

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}, \\ y'' + 2x' &= \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 3\sqrt{3}(\mu_1/\varrho_1 + \mu_2/\varrho_2 + \mu_3/\varrho_3). \quad (9)$$

Wir führen jetzt ein neues Koordinatensystem ein mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt des Massendreiecks und mit der

$\xi$ -Achse und der  $\eta$ -Achse parallel mit bzw. der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse. Bezeichnen  $(\sigma, \tau)$  die Koordinaten des Schwerpunktes in dem neuen Koordinatensystem, so haben wir

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sigma + x, \\ \eta &= \tau + y, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wonach die Bewegungsgleichungen (8) durch

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

umschrieben werden können, wo

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - 2\sigma\xi - 2\tau\eta) + 3\sqrt{3}(\mu_1/\varrho_1 + \mu_2/\varrho_2 + \mu_3/\varrho_3). \quad (12)$$

Soll der Punkt  $(\xi, \eta)$  ein Librationspunkt sein, müssen  $\xi$  und  $\eta$  Wurzeln in den Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0 \quad (13)$$

sein.

Denken wir uns den Punkt  $(\xi_0, \eta_0)$  als einen Librationspunkt. Ein Punkt in unmittelbarer Nähe des Librationspunktes kann dann die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + u, \\ \eta &= \eta_0 + v \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

haben, wo  $u$  und  $v$  unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind. Die Bewegungsgleichungen der unendlich kleinen Masse, wenn sie sich in der Nähe des Librationspunktes befindet, sind dann

$$\left. \begin{aligned} u'' - 2v' &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} u + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} v, \\ v'' + 2u' &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} u + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} v, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

indem in den Reihenentwicklungen auf der rechten Seite der Gleichungen nur Glieder erster Ordnung mitgenommen worden sind, und die Werte der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung für  $\xi = \xi_0$  und  $\eta = \eta_0$  zu nehmen sind.

Wir führen jetzt die Abkürzungen

$$r = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta}, \quad t = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \quad (16)$$

ein, wonach die zwei Bewegungsgleichungen durch

$$\left. \begin{aligned} u'' - 2v' &= ru + sv, \\ v'' + 2u' &= su + tv \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

umschrieben werden können.

Das System (17) linearer, homogener Differentialgleichungen kann durch Integrale der Form

$$u = P e^{\lambda t}, \quad v = Q e^{\lambda t} \quad (18)$$

befriedigt werden, wo  $P$  und  $Q$  Integrationskonstanten sind. Durch Einführung der Werte (18) in den Gleichungen (17) erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 - r)P - (2\lambda + s)Q &= 0, \\ (2\lambda - s)P + (\lambda^2 - t)Q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Falls die Gleichungen (19) durch Werte von  $P$  und  $Q$ , die von Null verschieden sind, befriedigt werden sollen, muss die Determinante des Systems Null sein. Hierdurch erhalten wir folgende Gleichung, die zur Bestimmung von  $\lambda$  dient:

$$\lambda^4 + (4 - r - t)\lambda^2 + rt - s^2 = 0. \quad (20)$$

Der Charakter der Lösungen (18) ist von denjenigen Werten von  $\lambda$  abhängig, die sich durch die Lösung der Gleichung (20) ergeben. Unter der Voraussetzung, dass keine Wurzel der Gleichung Null ist, liegen bei der Bestimmung von  $\lambda^2$  aus der Gleichung (20) 4 Möglichkeiten vor:

- 1°  $\lambda^2$  hat 2 negative Werte
- 2°  $\lambda^2$  hat 1 positiven und 1 negativen Wert
- 3°  $\lambda^2$  hat 2 positive Werte
- 4°  $\lambda^2$  hat 2 komplexe Werte.

Im ersten Falle wird  $\lambda$  4 rein imaginäre Werte haben, und die vollständigen Integrale werden, wenn sie auf eine reelle Form gebracht werden, allein Cosinus- und Sinusfunktionen enthalten. Lösungen dieser Art wollen wir als ganz-stabile Lösungen bezeichnen, und die Gebiete der Ebene, die solche Lösungen aufweisen, wollen wir *NN-Gebiete* nennen.

Im zweiten Falle hat  $\lambda$  2 reelle und 2 imaginäre Werte, und

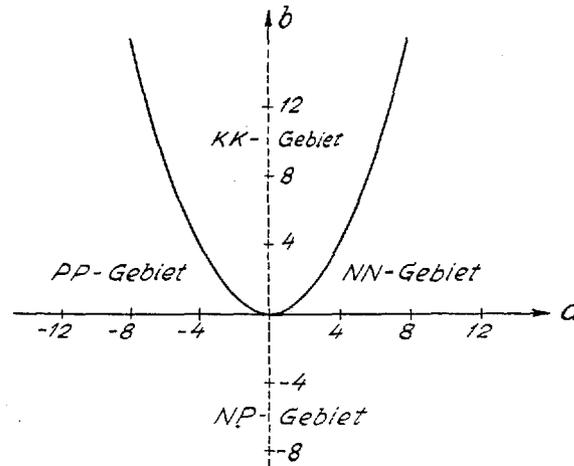


Abb. 1.

die vollständigen Integrale werden in diesem Falle, nachdem sie auf eine reelle Form gebracht worden sind, teils Glieder mit Exponentialfunktionen, teils Glieder mit Cosinus- und Sinusfunktionen enthalten. Diese Lösungen wollen wir als halb-stabile Lösungen bezeichnen, und die entsprechenden Gebiete der Ebene wollen wir *NP-Gebiete* nennen.

Im dritten Falle hat  $\lambda$  4 reelle Werte, und die vollständigen Integrale werden auf reeller Form allein Glieder mit Exponentialfunktionen enthalten. Lösungen dieser Art wollen wir als reell-instabile Lösungen bezeichnen, und die entsprechenden Gebiete der Ebene sollen *PP-Gebiete* genannt werden.

Im vierten Falle hat  $\lambda$  4 komplexe Werte. Die vollständigen Integrale auf reeller Form bestehen dann aus Gliedern, die Produkte von Exponentialfunktionen und Cosinus- oder Sinusfunktionen sind. Diese Lösungen wollen wir als komplex-instabile

Lösungen bezeichnen, und die entsprechenden Gebiete der Ebene wollen wir *KK*-Gebiete nennen.

Setzen wir

$$a = 4 - r - t, \quad b = rt - s^2, \quad (21)$$

kann Gleichung (20) in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0, \quad (22)$$

und die Bedingungen dafür, dass der Librationspunkt sich in einem der 4 erwähnten Gebiete befindet, sind:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \frac{a^2}{4} > b > 0, \quad a > 0 & \quad (NN\text{-Gebiet}) \\ 2^\circ \quad b < 0 & \quad (NP\text{-Gebiet}) \\ 3^\circ \quad \frac{a^2}{4} > b > 0, \quad a < 0 & \quad (PP\text{-Gebiet}) \\ 4^\circ \quad \frac{a^2}{4} < b & \quad (KK\text{-Gebiet}) \end{aligned}$$

Wird  $a$  als Abszisse und  $b$  als Ordinate in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgefasst, werden den 4 obenerwähnten Fällen 4 Gebiete im Koordinatensystem entsprechen, wie aus Abb. 1 hervorgeht. Die Begrenzung der Gebiete ist teils die Parabel  $b = \frac{a^2}{4}$ , teils die Abszissenachse. Im folgenden wird Abb. 1 als Stabilitätsdiagramm bezeichnet werden, und Punkte im Diagramm werden als die den Librationspunkten entsprechenden charakteristischen Punkte bezeichnet werden.

## 2. Nähere Berechnung der Stabilitätsbedingungen.

Wir suchen jetzt die Stabilitätsbedingungen in einfacher Weise mittels der Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  des Librationspunktes auszudrücken.

$\Omega$  kann so verkürzt werden:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - 2\sigma\xi - 2\tau\eta) + 3\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu}{\varrho_\nu}. \quad (23)$$

Die Summation hier sowie in den folgenden Gleichungen soll für die Werte 1, 2 und 3 mit dem Kennbuchstaben  $\nu$  vorgenommen werden.

$$\text{Da} \quad \varrho_\nu^2 = (\xi - \xi_\nu)^2 + (\eta - \eta_\nu)^2, \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (24)$$

erhalten wir aus (23):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= \xi - \sigma - 3\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu (\xi - \xi_\nu)}{\varrho_\nu^3}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} &= \eta - \tau - 3\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu (\eta - \eta_\nu)}{\varrho_\nu^3}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Aus (25) erhalten wir dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} &= 1 - 3\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu}{\varrho_\nu^3} + 9\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu (\xi - \xi_\nu)^2}{\varrho_\nu^5}, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} &= 9\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu (\xi - \xi_\nu) (\eta - \eta_\nu)}{\varrho_\nu^5}, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} &= 1 - 3\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu}{\varrho_\nu^3} + 9\sqrt{3} \sum \frac{\mu_\nu (\eta - \eta_\nu)^2}{\varrho_\nu^5}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Wir führen jetzt in Übereinstimmung mit (16) die Bezeichnungen  $r$ ,  $s$  und  $t$  ein. Der Kürze wegen schreiben wir ferner:

$$\left. \begin{aligned} f &= \sum \frac{\mu_\nu (\xi - \xi_\nu)^2}{\varrho_\nu^5}, \\ g &= \sum \frac{\mu_\nu (\xi - \xi_\nu) (\eta - \eta_\nu)}{\varrho_\nu^5}, \\ h &= \sum \frac{\mu_\nu (\eta - \eta_\nu)^2}{\varrho_\nu^5}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wonach die Gleichungen (26) folgendermassen verkürzt geschrieben werden können:

$$\left. \begin{aligned} r &= 1 + 3\sqrt{3} (2f - h), \\ s &= 9\sqrt{3} g, \\ t &= 1 + 3\sqrt{3} (2h - f). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Werden die gefundenen Werte von  $r$ ,  $s$  und  $t$  in (21) eingesetzt, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - 3\sqrt{3}(f+h), \\ b &= 1 + 3\sqrt{3}(f+h) - 54(f+h)^2 + 243(fh-g^2). \end{aligned} \right\} (29)$$

$a$  und  $b$  sind hiermit mit Hilfe von  $f+h$  und  $fh-g^2$  ausgedrückt.

Aus (27) erhalten wir:

$$f+h = \sum \frac{\mu_p}{\varrho_p^3}, \quad (30)$$

während  $fh-g^2$  folgendermassen reduziert werden kann:

$$\left. \begin{aligned} fh-g^2 &= \frac{\mu_1\mu_2}{\varrho_1^5\varrho_2^5} [(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_2) - (\xi-\xi_2)(\eta-\eta_1)]^2 \\ &+ \frac{\mu_2\mu_3}{\varrho_2^5\varrho_3^5} [(\xi-\xi_2)(\eta-\eta_3) - (\xi-\xi_3)(\eta-\eta_2)]^2 \\ &+ \frac{\mu_1\mu_3}{\varrho_1^5\varrho_3^5} [(\xi-\xi_3)(\eta-\eta_1) - (\xi-\xi_1)(\eta-\eta_3)]^2 \\ &= \frac{\mu_1\mu_2}{\varrho_1^5\varrho_2^5} [(\eta_1-\eta_2)\xi - (\xi_1-\xi_2)\eta + \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1]^2 \\ &+ \frac{\mu_2\mu_3}{\varrho_2^5\varrho_3^5} [(\eta_2-\eta_3)\xi - (\xi_2-\xi_3)\eta + \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2]^2 \\ &+ \frac{\mu_1\mu_3}{\varrho_1^5\varrho_3^5} [(\eta_3-\eta_1)\xi - (\xi_3-\xi_1)\eta + \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3]^2. \end{aligned} \right\} (31)$$

Bezeichnen  $q_{1,2}$ ,  $q_{2,3}$  und  $q_{1,3}$  die Distanzen vom Librationspunkt zu den 3 Seiten  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$  und  $M_1M_3$  im Massendreieck  $M_1M_2M_3$ , ergibt sich für die drei Grössen in eckigen Klammern in (31) bzw.  $\sqrt{3} q_{1,2}$ ,  $\sqrt{3} q_{2,3}$  und  $\sqrt{3} q_{1,3}$ . Werden diese Ausdrücke in (31) eingesetzt, erhalten wir:

$$fh-g^2 = \frac{3\mu_1\mu_2}{\varrho_1^5\varrho_2^5} q_{1,2}^2 + \frac{3\mu_2\mu_3}{\varrho_2^5\varrho_3^5} q_{2,3}^2 + \frac{3\mu_1\mu_3}{\varrho_1^5\varrho_3^5} q_{1,3}^2. \quad (32)$$

Es geht aus (30) und (32) hervor, dass sowohl  $f+h$  als auch  $fh-g^2$  nun auf eine solche Form gebracht sind, dass jede einzelne Grösse, die auf die rechte Seite der Gleichungen eingeht,

von der Lage des gewählten Koordinatensystems unabhängig ist. Werden (30) und (32) in (29) eingeführt, werden sich Gleichungen zur Bestimmung von  $a$  und  $b$  ergeben, für die sich dasselbe geltend macht. Dadurch haben wir erreicht, dass die Stabilitätsbedingungen unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem ausgedrückt werden können, indem sie auf einfache Weise durch folgende 9 Grössen bezeichnet werden können:

$$\begin{array}{ccc} \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ q_{1,2}, & q_{2,3}, & q_{1,3} \end{array}$$

wobei die Grössen in erster Reihe die drei endlichen Massen, die Grössen in zweiter Reihe die Distanzen des Librationspunktes von den drei endlichen Massen und die Grössen in dritter Reihe die Distanzen des Librationspunktes von den Seiten des Massendreiecks bezeichnen.

### 3. Die Orientierung des Massendreiecks im Koordinatensystem.

Wie im Vorhergehenden gezeigt, können die Stabilitätsbedingungen unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem ausgedrückt werden. Aus Rücksicht auf die theoretischen und numerischen Untersuchungen im folgenden wird es jedoch notwendig sein, dem Massendreieck eine bestimmte Orientierung im Verhältnis zum Koordinatensystem beizulegen. In Abb. 2 ist gezeigt, wie diese Orientierung gewählt worden ist. Das Koordinatensystem  $x, y$  hat seinen Anfangspunkt im Schwerpunkt der drei endlichen Massen, die sich in den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks  $M_1M_2M_3$  befinden. Das Koordinatensystem  $\xi, \eta$  hat den Anfangspunkt im Mittelpunkt des Massendreiecks und die Achsen parallel zu den entsprechenden Achsen des Koordinatensystems  $x, y$ . Die Orientierung des Massendreiecks ist nun so gewählt, dass  $M_2M_3$  mit der  $\eta$ -Achse und der  $y$ -Achse parallel ist. Da die Einheiten früher so gewählt worden sind, dass  $\varrho = \sqrt{3}$  ist, erhalten wir für die Koordinaten der drei endlichen Massen:

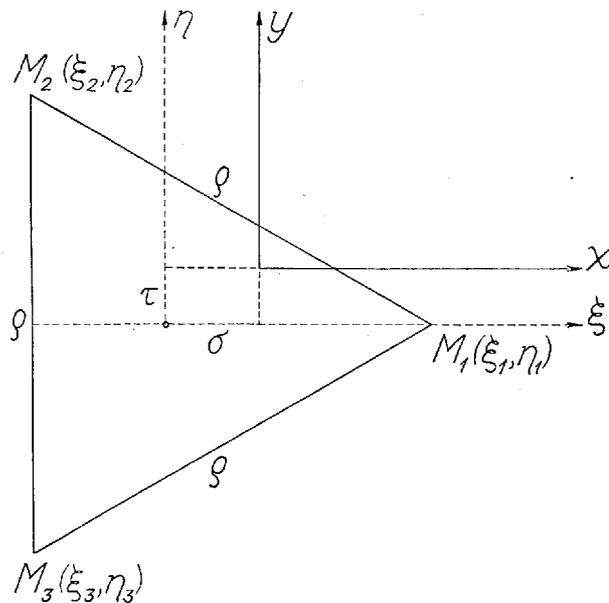


Abb. 2.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2}, \quad \xi_3 = -\frac{1}{2}, \\ \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \eta_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned} \right\} (33)$$

Daraus erhalten wir wiederum:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= (\xi - 1)^2 + \eta^2, \\ \varrho_2^2 &= \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2, \\ \varrho_3^2 &= \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2, \end{aligned} \right\} (34)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{1,2} &= \frac{1}{2}(\xi - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\eta, \\ q_{2,3} &= \xi + \frac{1}{2}, \\ q_{1,3} &= \frac{1}{2}(\xi - 1) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\eta, \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sigma, \\ \mu_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sigma + \frac{1}{3} \sqrt{3} \tau, \\ \mu_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sigma - \frac{1}{3} \sqrt{3} \tau. \end{aligned} \right\} (36)$$

Ausgehend von den Koordinaten  $(\xi, \eta)$  des Librationspunktes und den Koordinaten  $(\sigma, \tau)$  des Schwerpunktes erhält man aus den Gleichungen (34), (35) und (36) die Werte der 9 Grössen, die bei der Berechnung von  $f + h$  und  $fh - g^2$  notwendig sind. Die Koordinaten  $a$  und  $b$  des charakteristischen Punktes im Stabilitätsdiagramm ergeben sich danach aus den Gleichungen (29).

#### 4. Die Stabilitätsverhältnisse in der Nähe einer der endlichen Massen.

Wir wollen nun die Stabilitätsverhältnisse in der unmittelbaren Nähe einer der drei endlichen Massen näher untersuchen. Wenn der Librationspunkt sich in der Nähe der Masse  $m_1$  befindet, setzen wir [26]:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 + r \cos \varphi, \\ \eta &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (37)$$

worin wir  $r$ , das die Distanz des Librationspunktes von der Masse  $m_1$  bezeichnet, als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ansehen. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind dann [27, 28]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}(1 + 2 \cos 2\varphi)}{8 \cos 2\varphi} r^3, \\ \tau &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi. \end{aligned} \right\} (38)$$

Mit den Werten in (37) und (38) erhalten wir sodann:

$$\left. \begin{aligned} f + h &= \frac{\sqrt{3}(3 + 10 \cos 2\varphi)}{36 \cos 2\varphi}, \\ fh - g^2 &= \frac{4 \cos^2 2\varphi - 1}{4 \cos^2 2\varphi}, \end{aligned} \right\} (39)$$

woraus sich wieder

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{3 + 2 \cos 2\varphi}{4 \cos 2\varphi}, \\ b &= -\frac{27(1 + 2 \cos 2\varphi)}{8 \cos^2 2\varphi} \end{aligned} \right\} (40)$$

ergibt.

Die Koordinaten der charakteristischen Punkte des Stabilitätsdiagramms sind somit von  $r$  unabhängig und nur Funktionen von  $\varphi$ .

Wird  $\varphi$  aus den zwei Gleichungen (40) eliminiert, erhalten wir die Gleichung

$$b = 3(1 - a)(1 + 2a), \quad (41)$$

die im Stabilitätsdiagramm eine Parabel mit dem Scheitelpunkt im Punkte  $\left(\frac{1}{4}, \frac{27}{8}\right)$  und der Achse parallel der Ordinatenachse darstellt; sie schneidet die Abszissenachse in den Punkten  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  und  $(1, 0)$ , die Ordinatenachse im Punkt  $(0, 3)$ .

Bei einer näheren Untersuchung des Zusammenhanges zwischen  $\varphi$  einerseits und  $a$  und  $b$  andererseits können wir uns auf die Betrachtung der Werte von  $\varphi$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  beschränken. Bezeichnet nämlich  $\varphi_0$  einen in diesem Intervall liegenden Wert von  $\varphi$ , werden die im zweiten, dritten und vierten Quadranten liegenden Winkel  $180^\circ - \varphi_0$ ,  $180^\circ + \varphi_0$  und  $360^\circ - \varphi_0$  durch Einsetzung in (40) dieselben Werte von  $a$  und  $b$  ergeben wie  $\varphi_0$ . Im Intervall von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  können wir zunächst das Intervall von  $30^\circ$  bis  $60^\circ$  ausser Betracht lassen; dies geht bei einer näheren Betrachtung aus Abb. 3 und 4 hervor. Abb. 3 zeigt uns das Massendreieck  $M_1M_2M_3$  und die drei Librationskreise  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$ , die sich teils in den Eckpunkten des Massendreiecks, teils in den Punkten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  schneiden. Abb. 4 zeigt uns die drei Gebiete I, II und III, in denen die Librationspunkte sich befinden müssen, wenn die entsprechenden endlichen Massen alle positiv sein sollen. Aus den zwei Abb. geht ferner hervor, dass den Werten von  $\varphi$  im Intervall von  $0^\circ$  bis  $30^\circ$  Librationspunkte im Gebiete II entsprechen, während den Werten von  $\varphi$  im Intervall von  $60^\circ$  bis  $90^\circ$  Librationspunkte im Gebiete III entsprechen.

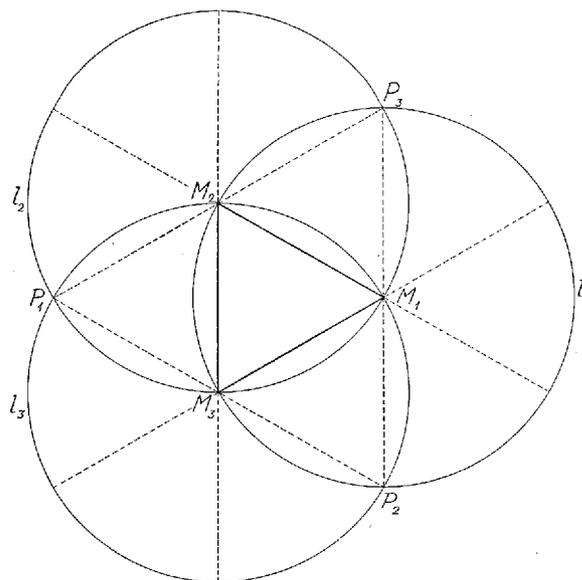


Abb. 3.

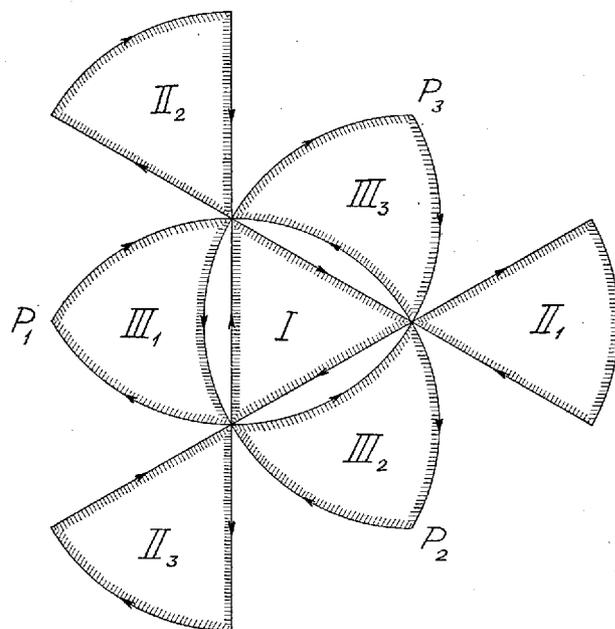


Abb. 4

Die Werte von  $a$  und  $b$  für  $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  gehen aus folgendem Schema hervor:

Gebiet	$\varphi$	$a$	$b$
II	$0^\circ$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{81}{8}$
	$30^\circ$	$-2$	$-27$
III	$60^\circ$	$1$	$0$
	$90^\circ$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{8}$

Im Stabilitätsdiagramm in Abb. 5 bezeichnen die voll ausgezogenen Bogen diejenigen Teile der Parabel, die dem Gebiete II (Bogen links) und dem Gebiete III (Bogen rechts) entsprechen. Die gestrichelten Bogen unter diesen zwei Bogen entsprechen den

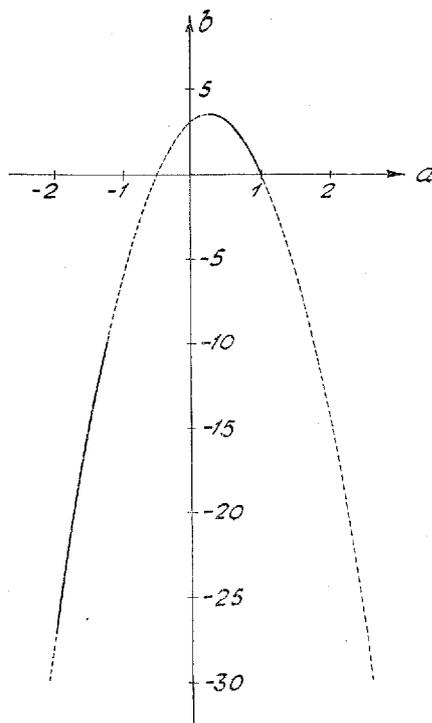


Abb. 5.

Werten von  $\varphi$  im Intervall von  $30^\circ$  bis  $60^\circ$ , während dem gestrichelten Bogen zwischen den zwei voll ausgezogenen Bogen keine reellen Werte von  $\varphi$  entsprechen. Aus einem Vergleich der Abb. 1 mit der Abb. 4 geht nun hervor, dass für Librationspunkte in unmittelbarer Nähe einer der endlichen Massen von

- 1° halb-stabilen Lösungen ( $0^\circ < \varphi < 30^\circ$ )
- 2° ganz-stabilen Lösungen ( $60^\circ < \varphi < 60^\circ + \Delta_1$ )
- 3° komplex-instabilen Lösungen ( $60^\circ + \Delta_1 < \varphi < 90^\circ$ )

die Rede sein kann. Hier bezeichnet  $60^\circ + \Delta_1$  den Wert von  $\varphi$ , der dem einen der zwei Schnittpunkte zwischen den Parabeln

$$\left. \begin{aligned} b &= 3(1-a)(1+2a), \\ b &= \frac{a^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

entspricht. Diesen Wert wollen wir genau zu bestimmen versuchen. Aus (42) erhalten wir

$$a = \frac{6 \pm 4\sqrt{21}}{25}; \quad (43)$$

da es offensichtlich ist, dass es der positive Wert von  $a$  ist, der angewandt werden muss, wird dieser Wert in die erste Gleichung (40) eingesetzt, woraus sich

$$\cos 2(60^\circ + \Delta_1) = -\frac{111}{2} + 12\sqrt{21} \quad (44)$$

ergibt, die die Lösung

$$\Delta_1 = 18' 6''0 \quad (45)$$

hat.

Die Resultate können folgendermassen zusammengefasst werden:

In der unmittelbaren Nähe der Masse  $m_1$  existieren ganz-stabile Lösungen (NN-Lösungen) in den vier kleinen Winkelräumen

$$\left. \begin{aligned} 60^\circ &< \varphi < 60^\circ + \Delta_1, \\ 120^\circ - \Delta_1 &< \varphi < 120^\circ, \\ 240^\circ &< \varphi < 240^\circ + \Delta_1, \\ 300^\circ - \Delta_1 &< \varphi < 300^\circ, \end{aligned} \right\} \text{Gebiet III}$$

halbstabile Lösungen (*NP*-Lösungen) in den Winkelräumen

$$\begin{aligned} 0^\circ \leq \varphi < 30^\circ, & \quad \text{Gebiet II} \\ 150^\circ < \varphi < 210^\circ, & \quad \text{Gebiet I} \\ 330^\circ < \varphi < 360^\circ, & \quad \text{Gebiet II} \end{aligned}$$

und komplex-instabile Lösungen (*KK*-Lösungen) in den Winkelräumen

$$\left. \begin{aligned} 60^\circ + \Delta_1 < \varphi < 120^\circ - \Delta_1, \\ 240^\circ + \Delta_1 < \varphi < 300^\circ - \Delta_1. \end{aligned} \right\} \text{Gebiet III}$$

### 5. Die Stabilitätsverhältnisse in der Nähe der Punkte, die mit den Eckpunkten des Massendreiecks in Bezug auf dessen Seiten symmetrisch liegen.

Wir gehen jetzt dazu über, die Stabilitätsverhältnisse in der Nähe der Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  zu untersuchen. Für einen Librationspunkt in der Nähe von  $P_1$  können wir

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -2 + r \cos \varphi, \\ \eta &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} (46)$$

setzen, wo  $r$  eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung bezeichnet. Die Koordinaten des Schwerpunktes werden dann in erster Annäherung [33, 34]:

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \tau = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (47)$$

Mit den Werten in (46) und (47) erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} f+h &= \frac{1}{9} \sqrt{3}, \\ fh-g^2 &= \frac{1}{432} (3 - \operatorname{tg}^2 \varphi), \end{aligned} \right\} (48)$$

woraus sich wieder

$$\left. \begin{aligned} a &= 1, \\ b &= \frac{9}{16} (3 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \end{aligned} \right\} (49)$$

ergibt.

Die Koordinaten der charakteristischen Punkte im Stabilitätsdiagramm sind auch in diesem Fall von  $r$  unabhängig und allein Funktionen von  $\varphi$ . Als den Gleichungen (49) entsprechende Kurve im Stabilitätsdiagramm ist derjenige Teil der Geraden  $a = 1$  anzusehen, wo  $b \leq \frac{27}{16}$  ist. Da jedoch die Bedingung für positive Massen

$$\left. \begin{array}{l} 0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ, \\ 300^\circ \leq \varphi < 360^\circ \end{array} \right\} \quad (50)$$

ist, kommt von dem erwähnten Liniestück nur der Teil in Frage, der die Bedingung

$$0 \leq b \leq \frac{27}{16} \quad (51)$$

befriedigt.

Der Schnittpunkt zwischen der Parabel  $b = \frac{a^2}{4}$  und der Linie  $a = 1$  hat die Koordinaten  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{4}$ , woraus hervorgeht, dass sich ganz-stabile Lösungen für  $0 < b < \frac{1}{4}$  und komplex-instabile Lösungen für  $\frac{1}{4} < b \leq \frac{27}{16}$  ergeben.

Wir wollen den  $b = \frac{1}{4}$  entsprechenden Wert  $\varphi_0$  von  $\varphi$  bestimmen. Wir finden

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{23}{9}, \quad (52)$$

die in dem für  $\varphi$  erlaubten Intervall die zwei Lösungen

$$\varphi_0 = \left\{ \begin{array}{l} 57^\circ 58' 20''.1, \\ 302^\circ 1' 39''.9 \end{array} \right\} \quad (53)$$

ergibt.

Führen wir die Bezeichnung

$$\Delta_2 = 2^\circ 1' 39''.9 \quad (54)$$

ein, kann das Resultat folgendermassen ausgedrückt werden:

In der unmittelbaren Nähe von  $P_1$  existieren ganz-stabile Lösungen ( $NN$ -Lösungen) für

$$\left. \begin{array}{l} 60^\circ - \Delta_2 < \varphi < 60^\circ, \\ 300^\circ < \varphi < 300^\circ + \Delta_2 \end{array} \right\} \text{Gebiet III}$$

und komplex-instabile Lösungen (*KK-Lösungen*) für

$$\left. \begin{array}{l} 0^\circ \leq \varphi < 60^\circ - \Delta_2, \\ 300^\circ + \Delta_2 < \varphi < 360^\circ. \end{array} \right\} \text{Gebiet III}$$

Diese Resultate können in interessanter Weise mit den Resultaten, die vom restringierten Dreikörperproblem (*problème restreint*) her wohlbekannt sind, in Relation gesetzt werden. Die Bedingung für ganz-stabile Lösungen, die hier  $0 < b < \frac{1}{4}$  war, kann nämlich durch Einführung der relativen Massen  $\mu_2$  und  $\mu_3$  in die folgende Bedingung:

$$0 < \mu_2 \mu_3 < \frac{1}{27} \quad (55)$$

umgewandelt werden, die im *problème restreint* die Stabilitätsbedingung der Dreieckslibrationspunkte  $L_4$  und  $L_5$  ausdrückt. Denken wir uns in dem hier vorliegenden Problem den Librationspunkt durch einen der zwei kleinen Winkelräume der Grösse  $\Delta_2$ , die ganz-stabile Lösungen bedingt, in  $P_1$  einrücken, wird (55) immer noch befriedigt sein; wenn zuletzt der Librationspunkt mit  $P_1$  zusammenschmilzt, erhalten wir  $\mu_1 = 0$ , wodurch das Problem auf das *problème restreint* mit stabilen Librationspunkten  $L_4$  und  $L_5$  reduziert wird. Erfolgt dagegen das Einrücken des Librationspunktes in  $P_1$  durch den Winkelraum, der komplex-instabile Lösungen bedingt, erhalten wir

$$\mu_2 \mu_3 > \frac{1}{27}; \quad (56)$$

wenn zuletzt der Librationspunkt in  $P_1$  fällt, wird das Problem auf das *problème restreint* mit instabilen Librationspunkten  $L_4$  und  $L_5$  reduziert werden.

## 6. Die Stabilitätsverhältnisse der Librationspunkte auf einer Verbindungslinie zwischen zwei Massen.

Die Untersuchung des Falles, in dem der Librationspunkt auf einer der drei Linien liegt, die zwei der endlichen Massen ver-

bindet, gestaltet sich am einfachsten, wenn der Librationspunkt sich auf der Linie befindet, die die Massen  $m_2$  und  $m_3$  ( $M_2M_3$  in Abb. 2) verbindet. Unter der Voraussetzung, dass  $\eta \neq \frac{1}{2}\sqrt{3}$  und  $\eta \neq -\frac{1}{2}\sqrt{3}$  ist, haben wir [17]:

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, \quad \mu_1 = 0, \quad q_{2,3} = 0, \quad (57)$$

was wiederum

$$fh - g^2 = 0 \quad (58)$$

zur Folge hat.

Aus (29) erhalten wir dann

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - 3\sqrt{3}(f+h), \\ b &= 1 + 3\sqrt{3}(f+h) - 54(f+h)^2, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

woraus sich nach Elimination von  $f+h$

$$b = (a-1)(5-2a) \quad (60)$$

ergibt.

Im Stabilitätsdiagramm stellt (60) eine Parabel mit dem Scheitelpunkt im Punkte  $\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{8}\right)$  und der Achse parallel der Ordinatenachse dar; sie schneidet die Abszissenachse in den Punkten  $(1, 0)$  und  $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ , die Ordinatenachse im Punkte  $(0, -5)$  (Abb. 6).

Vorausgesetzt, dass wie gewöhnlich die endlichen Massen positiv sind, wird jedoch nur ein Teil der Parabel den Librationspunkten auf der Linie  $M_2M_3$  entsprechen. Der  $\eta = 0$  entsprechende Punkt der Parabel wird  $a = -6$ ,  $b = -119$ . Für den Librationspunkt in  $M_2$  oder  $M_3$  erhalten wir durch Anwendung der Theorie für Librationspunkte in der Nähe einer der endlichen Massen  $a = -2$ ,  $b = -27$ . Für die zwei Ausstellungen des Librationspunktes auf der Linie  $M_2M_3$  (die Schnittpunkte zwischen  $M_2M_3$  und den Librationskreisen  $l_2$  und  $l_3$ ) erhalten wir endlich  $a = 1$ ,  $b = 0$ . — Librationspunkten auf dem Liniestück  $M_2M_3$ , d. h. auf der Grenze des Gebietes I, entspricht der Parabelbogen von  $(-6, -119)$  bis  $(-2, -27)$ ; Librationspunkten auf den ausserhalb  $M_2$  und  $M_3$  liegenden

Linienstücken, die einen Teil der Grenze der Gebiete  $\Pi_2$  und  $\Pi_3$  ausmachen, entspricht der Parabelbogen von  $(-2, -27)$  bis  $(1, 0)$ . Da beide Parabelbogen im Stabilitätsdiagramm unter der Abszissenachse liegen, werden die auf der Linie  $M_2M_3$  und damit

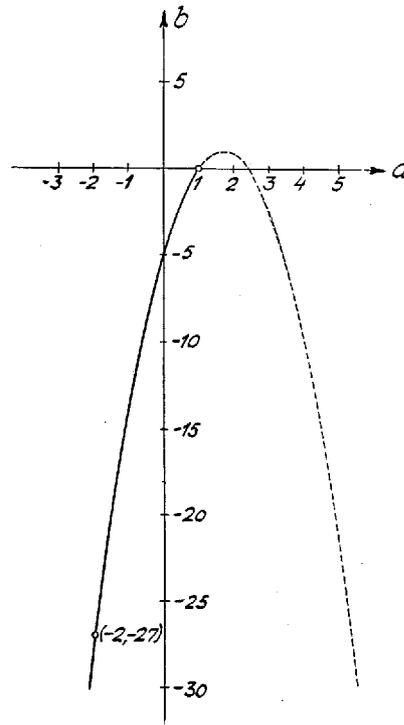


Abb. 6.

auch auf den zwei anderen Linien  $M_1M_2$  und  $M_1M_3$  liegenden Librationspunkte halb-stabile Lösungen (*NP*-Lösungen) repräsentieren.

Im vorliegenden Spezialfall ist das restringierte Vierkörperproblem auf das problème restreint reduziert, und das Resultat ist denn auch in Übereinstimmung mit dem wohlbekannten Verhältnis, dass die Librationspunkte  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  im problème restreint halb-stabile Lösungen repräsentieren.

In der Tabelle I sind Werte von  $a$  und  $b$  angegeben, die den positiven Werten von  $\eta$  entsprechen; wechselt  $\eta$  Vorzeichen, bleiben  $a$  und  $b$  unverändert.

TABELLE I.

$\eta$	$a$	$b$
+ 0.0	— 6	— 119
0.1	5.8655	114.87
0.2	5.4935	103.81
0.3	4.9584	88.88
0.4	4.3494	73.28
0.5	3.7423	59.21
+ 0.6	— 3.1705	— 47.30
+ 1.0660	— 1.4138	— 18.894
1.2660	0.9487	13.441
1.4660	0.5500	9.455
1.6660	— 0.1918	6.416
1.8660	+ 0.1309	4.118
2.0660	0.4173	2.427
2.2660	0.6663	1.224
+ 2.4660	+ 0.8786	— 0.394

### 7. Die Stabilitätsverhältnisse der Librationspunkte auf einer Symmetrieachse.

Wir denken uns nun, dass der Librationspunkt sich auf einer der Symmetrieachsen des Massendreiecks befindet. Liegt er auf der Symmetrieachse durch  $M_1$ , erhalten wir  $\eta = 0$ , woraus sich  $\varrho_2 = \varrho_3$  ergibt. Lassen wir die zwei Punkte  $M_1$  und  $P_1$  ausser Betracht, erhalten wir ausserdem  $\mu_2 = \mu_3$ . Wir erhalten dann

$$\left. \begin{aligned} f+h &= \frac{\mu_1}{\varrho_1^3} + \frac{2\mu_2}{\varrho_2^3}, \\ fh-g^2 &= \frac{3\mu_2}{\varrho_2^5} \left[ \frac{\mu_1(\xi-1)^2}{2\varrho_1^5} + \frac{\mu_2\left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2}{\varrho_2^5} \right], \end{aligned} \right\} (61)$$

woraus  $a$  und  $b$  berechnet werden können.

In der Tabelle II sind die Werte von  $\xi$ ,  $\sigma$ ,  $a$  und  $b$  für gewisse Spezialpunkte auf der Symmetrieachse durch  $M_1$  angegeben.

TABELLE II.

No.	$\xi$	$\sigma$	$a$	$b$
1	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{27}{16}$
2	$1-\sqrt{3}$	1	1	0
3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-6	-119
4	0	0	$2-3\sqrt{3}$	$\frac{31}{4}+3\sqrt{3}$
5	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{81}{8}$
6	$1+\sqrt{3}$	1	1	0

No. 1. Der Punkt  $P_1$ .

No. 2. Punkt auf dem Librationskreis  $l_1$ .

No. 3. Punkt auf der Linie  $M_2M_3$ .

No. 4. Der Mittelpunkt des Massendreiecks.

No. 5. Der Punkt  $M_1$ .

No. 6. Punkt auf dem Librationskreis  $l_1$ .

In der Tabelle III sind die Werte von  $a$  und  $b$  für eine Reihe von Librationspunkten auf der Symmetrieachsen angegeben, die positiven Massen entsprechen.

TABELLE III.

$\xi$	$a$	$b$	Stabilität	Gebiet
-2.0	+ 1	+ 1.6875	KK	III
1.9	0.9226	1.8232	KK	
1.8	0.8406	1.9921	KK	
1.7	0.7543	2.1964	KK	
1.6	0.6645	2.4348	KK	
1.5	0.5723	2.6986	KK	
1.4	0.4795	2.9696	KK	
1.3	0.3892	3.2187	KK	
1.2	0.3066	3.4095	KK	
1.1	0.2412	3.5124	KK	
1.0	0.2119	3.5272	KK	
0.9	0.2615	3.4655	KK	
0.8	+ 0.5105	+ 2.8941	KK	
0.7	—	—	—	
-0.6	—	—	—	—

(Fortsetzung folgt)

Tabelle III (fortgesetzt).

$\xi$	$a$	$b$	Stabilität	Gebiet
— 0.5	— 6	— 119	<i>NP</i>	I
0.4	3.7394	25.99	<i>NP</i>	
0.3	3.2903	— 5.28	<i>NP</i>	
0.2	3.1876	+ 5.34	<i>KK</i>	
— 0.1	— 3.1856	+ 11.13	<i>KK</i>	
0.0	— 3.1962	+ 12.946	<i>KK</i>	
+ 0.1	— 3.1749	+ 11.404	<i>KK</i>	
0.2	3.0979	7.551	<i>KK</i>	
0.3	2.9575	+ 2.682	<i>KK</i>	
0.4	2.7592	— 2.039	<i>NP</i>	
0.5	2.5175	5.841	<i>NP</i>	II
0.6	2.2512	8.442	<i>NP</i>	
0.7	1.9794	9.917	<i>NP</i>	
0.8	1.7150	10.497	<i>NP</i>	
0.9	— 1.4700	— 10.483	<i>NP</i>	
1.0	— 1.2500	— 10.125	<i>NP</i>	
1.1	— 1.0563	— 9.594	<i>NP</i>	
1.2	0.8822	8.958	<i>NP</i>	
1.3	0.7196	8.238	<i>NP</i>	
1.4	0.5693	7.501	<i>NP</i>	
1.5	0.4243	6.733	<i>NP</i>	
1.6	0.2829	5.952	<i>NP</i>	
1.7	0.1459	5.185	<i>NP</i>	
1.8	— 0.0118	4.442	<i>NP</i>	
1.9	+ 0.1185	3.736	<i>NP</i>	
2.0	0.2447	3.078	<i>NP</i>	
2.1	0.3662	2.476	<i>NP</i>	
2.2	0.4826	1.933	<i>NP</i>	
2.3	0.5934	1.450	<i>NP</i>	
2.4	0.6980	1.026	<i>NP</i>	
2.5	0.7964	0.659	<i>NP</i>	
2.6	0.8884	0.344	<i>NP</i>	
+ 2.7	+ 0.9739	— 0.076	<i>NP</i>	

Es geht aus der Tabelle hervor, dass für die berechneten Punkte nur von zwei Arten von Stabilität (*NP*- und *KK*-Stabilität) die Rede ist. Werden indessen die charakteristischen Punkte in das Stabilitätsdiagramm eingezeichnet, sehen wir sofort, dass auf gewissen kurzen Strecken der Symmetrieachse sowohl *NN*- als auch *PP*-Stabilität existieren. Wir werden später auf diese Frage zurückkommen.

### 8. Numerische Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse in den Librationspunktgebieten I, II und III.

In meiner früheren Abhandlung habe ich Bestimmungen des Schwerpunktes der endlichen Massen für Librationspunkte in den drei Gebieten I, II und III vorgenommen, und nun folgen Berechnungen der charakteristischen Punkte im Stabilitätsdiagramm. Die Untersuchung hat jedoch nicht sämtliche Librationspunkte, die einer Schwerpunktsbestimmung unterzogen worden sind, umfasst, da der Zweck der Untersuchung eigentlich nur der gewesen ist, genügendes Zahlenmaterial zu beschaffen, um in grossen Zügen zu zeigen, wie die Stabilität innerhalb der einzelnen Librationspunktgebiete variiert. In den folgenden drei Tabellen ist das Wesentliche des gefundenen Zahlenmaterials wiedergegeben.

Wegen der Symmetrieverhältnisse des Massendreiecks genügt es bei der Behandlung des Gebietes I, die Stabilitätsverhältnisse eines der sechs kongruenten Dreiecke, wovon das gleichseitige Dreieck durch die Symmetrieachsen geteilt wird, zu untersuchen. Wie bei der Schwerpunktsberechnung ist auch bei der Stabilitätsberechnung dasjenige der sechs kleinen Dreiecke angewandt, das den einen Eckpunkt in  $M_2$  und die eine Seite an  $M_2M_3$  hat.

TABELLE IV (Gebiet I).

$\xi$	$\eta$	$a$	$b$	Stabilität
— 0.1	+ 0.1	— 3.155	+ 9.90	<i>KK</i>
— 0.2	+ 0.1	— 3.144	+ 4.62	<i>KK</i>
— 0.2	+ 0.2	— 3.024	+ 2.63	<i>KK</i>
— 0.2	+ 0.3	— 2.849	— 0.38	<i>NP</i>
— 0.3	+ 0.1	— 3.234	— 5.41	<i>NP</i>
— 0.3	+ 0.2	— 3.076	— 5.76	<i>NP</i>
— 0.3	+ 0.3	— 2.842	— 6.29	<i>NP</i>
— 0.3	+ 0.4	— 2.569	— 7.01	<i>NP</i>
— 0.4	+ 0.1	— 3.664	— 25.27	<i>NP</i>
— 0.4	+ 0.2	— 3.452	— 23.28	<i>NP</i>
— 0.4	+ 0.3	— 3.137	— 20.45	<i>NP</i>
— 0.4	+ 0.4	— 2.762	— 17.28	<i>NP</i>
— 0.4	+ 0.5	— 2.369	— 14.20	<i>NP</i>
— 0.4	+ 0.6	— 1.993	— 11.62	<i>NP</i>

Man ersieht aus der Tabelle IV, dass die Librationspunkte im Gebiet I *KK*-Stabilität um die Mitte des Gebietes und *NP*-Stabilität am Rand des Gebietes haben; dass die Librationspunkte am Rand des Gebietes *NP*-Stabilität haben, stimmt damit überein, was wir früher für die Librationspunkte auf den Seiten des Massendreiecks geltend gemacht haben. Zeichnen wir die charakteristischen Punkte in das Stabilitätsdiagramm ein, sehen wir sofort, dass sich zwischen den zwei erwähnten Stabilitätsgebieten ein schmales Gebiet befinden muss, wo die Librationspunkte *PP*-Stabilität haben. Zufälligerweise fällt keiner der bei der Berechnung benutzten Punkte in dieses Stabilitätsgebiet. Die genaue Bestimmung der Kurven, die die drei Stabilitätsgebiete begrenzen, wird im folgenden Abschnitt vorgenommen werden.

Bei der Behandlung der Librationspunkte im Gebiet II können wir die Untersuchung auf einen einzelnen Teil der drei kongruenten Teile, woraus das Gebiet besteht, beschränken. Es wird dabei wie bei der Schwerpunktberechnung natürlich sein, die Librationspunkte in demjenigen Teil des Gebietes zu wählen, der bei  $M_1$  liegt und  $II_1$  bezeichnet wird. Wegen der Symmetrie

TABELLE V (Gebiet II).

$\varrho_1$	$\xi$	$\eta$	$a$	$b$	Stabilität
0.2	1.1970	0.0347	— 0.920	— 9.52	<i>NP</i>
0.4	1.3939	0.0695	— 0.599	— 7.87	<i>NP</i>
0.6	1.5909	0.1042	— 0.306	— 6.19	<i>NP</i>
0.8	1.7878	0.1389	— 0.028	— 4.58	<i>NP</i>
1.0	1.9848	0.1736	+ 0.234	— 3.16	<i>NP</i>
1.2	2.1818	0.2084	+ 0.476	— 1.97	<i>NP</i>
1.4	2.3787	0.2431	+ 0.695	— 1.04	<i>NP</i>
1.6	2.5757	0.2778	+ 0.887	— 0.35	<i>NP</i>
0.2	1.1879	0.0684	— 1.058	— 11.76	<i>NP</i>
0.4	1.3759	0.1368	— 0.702	— 9.28	<i>NP</i>
0.6	1.5638	0.2052	— 0.382	— 7.07	<i>NP</i>
0.8	1.7518	0.2736	— 0.081	— 5.10	<i>NP</i>
1.0	1.9397	0.3420	+ 0.200	— 3.44	<i>NP</i>
1.2	2.1276	0.4104	+ 0.456	— 2.11	<i>NP</i>
1.4	2.3156	0.4788	+ 0.685	— 1.10	<i>NP</i>
1.6	2.5035	0.5472	+ 0.884	— 0.36	<i>NP</i>

in Bezug auf die Symmetrieachse durch  $M_1$  genügt es, die Stabilitätsverhältnisse in demjenigen Teil von  $II_1$  zu untersuchen, der oberhalb der Symmetrieachse liegt.

Aus der Tabelle V ersehen wir, dass alle mitbehandelten Librationspunkte  $NP$ -Stabilität haben; früher haben wir ausserdem festgestellt, dass die geraden Begrenzungen des Gebietes II  $NP$ -Stabilität haben. Werden die charakteristischen Punkte in das Stabilitätsdiagramm eingezeichnet, sehen wir deutlich, dass alle Librationspunkte im Gebiet II  $NP$ -Stabilität haben; für denjenigen Teil der Begrenzung, der von Teilen der Librationskreise gebildet wird, haben wir immer noch  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

Von den drei kongruenten Teilen, die das Gebiet III ausmachen, wählen wir bei der Untersuchung den Teil, der an der Seite  $M_2M_3$  liegt und  $III_1$  bezeichnet wird. Wegen der Symmetrie in Bezug auf die Symmetrieachse durch  $M_1$  genügt es, die Stabilitätsverhältnisse in demjenigen Teil von  $III_1$  zu untersuchen, der oberhalb der Symmetrieachse liegt.

TABELLE VI (Gebiet III).

$q_1$	$\xi$	$\eta$	$a$	$b$	Stabilität
1.8	— 0.7859	0.2248	0.494	2.958	$KK$
1.8	— 0.7439	0.4460	0.439	3.138	$KK$
1.8	— 0.6745	0.6603	0.324	3.355	$KK$
2.0	— 0.9884	0.2154	0.216	3.516	$KK$
2.0	— 0.9536	0.4284	0.235	3.478	$KK$
2.0	— 0.8961	0.6363	0.315	3.375	$KK$
2.2	— 1.1911	0.1972	0.321	3.381	$KK$
2.2	— 1.1646	0.3929	0.373	3.274	$KK$
2.2	— 1.1207	0.5854	0.506	2.933	$KK$
2.4	— 1.3941	0.1690	0.496	2.925	$KK$
2.4	— 1.3762	0.3371	0.552	2.756	$KK$
2.4	— 1.3466	0.5035	0.677	2.260	$KK$
2.6	— 1.5968	0.1288	0.678	2.377	$KK$
2.6	— 1.5872	0.2574	0.723	2.164	$KK$
2.6	— 1.5713	0.3853	0.815	1.615	$KK$
2.8	— 1.7990	0.0742	0.849	1.914	$KK$
2.8	— 1.7961	0.1483	0.874	1.653	$KK$
2.8	— 1.7912	0.2223	0.921	1.104	$KK$

Aus der Tabelle VI ersehen wir, dass alle mitberücksichtigten Librationspunkte  $KK$ -Stabilität haben. Gebiet  $III_1$  wird jedoch von drei Kreisbogen begrenzt, die den drei Librationskreisen angehören; aber wie früher erwähnt entspricht den Librationskreisen nur ein charakteristischer Punkt, nämlich der Punkt  $a = 1, b = 0$ . Dieser Umstand in Verbindung mit der Anbringung der Punkte der Tabelle im Stabilitätsdiagramm zeigt, dass an dem Rand des Gebietes  $III_1$  ein schmaler Gürtel mit  $NN$ -Stabilität liegen muss. Dies stimmt mit dem überein, was früher von der Stabilität der Librationspunkte in der Nähe der endlichen Massen dargetan worden ist; die schmalen Winkelräume der Grösse  $\Delta_1$  mit  $NN$ -Stabilität lagen gerade im Gebiet III. Dasselbe macht sich geltend für die bei den Punkten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  liegenden kleinen Winkelräume der Grösse  $\Delta_2$ ; auch hier handelt es sich um  $NN$ -Stabilität für Punkte, die im Gebiet III liegen.

Die genaue Bestimmung der Kurven, die die Grenze zwischen den zwei Stabilitätsgebieten bilden, wird im folgenden Abschnitt vorgenommen werden.

### 9. Numerische Bestimmung der Kurven, die Gebiete verschiedener Stabilität begrenzen.

Während es innerhalb des Librationspunktgebietes II nur Librationspunkte mit  $NP$ -Stabilität gibt, werden, wie es im Vorhergehenden hervorgehoben worden ist, innerhalb des Gebietes III Librationspunkte mit sowohl  $NN$ - als  $KK$ -Stabilität vorhanden sein, und innerhalb des Gebietes I sogar Librationspunkte mit drei Arten von Stabilität, nämlich  $KK$ -,  $PP$ - und  $NP$ -Stabilität. Was das Gebiet III betrifft, handelt es sich deshalb um eine numerische Bestimmung der Kurve, die das Gebiet mit  $NN$ -Stabilität von dem Gebiet mit  $KK$ -Stabilität trennt. Diese Kurve wollen wir im folgenden als die Stabilitätsgrenzkurve  $C$  bezeichnen. Was das Gebiet I betrifft, handelt es sich dagegen um eine numerische Bestimmung von zwei Kurven; der innere Teil des Gebietes um den Mittelpunkt des Massendreiecks mit  $KK$ -Stabilität grenzt an das Gebiet mit  $PP$ -Stabilität längs einer Kurve, die wir als die Librationsgrenzkurve  $A$  bezeichnen wollen, während das Gebiet mit  $PP$ -Stabilität seinerseits an das Gebiet mit  $NP$ -Stabilität

längs einer Kurve grenzt, die wir als die Librationsgrenzkurve  $B$  bezeichnen.

Die genaue numerische Bestimmung dieser Librationsgrenzkurven ist ein recht weitläufiger Vorgang. Fangen wir mit der Kurve  $A$  an, die im Gebiet I die Grenze zwischen dem Gebiet mit  $KK$ -Stabilität und dem mit  $PP$ -Stabilität bildet. Librationspunkte auf dieser Kurve sind dadurch bestimmt, dass die Koordinaten  $a$  und  $b$  die Gleichung  $b = \frac{a^2}{4}$  befriedigen. Um die polaren Koordinaten der Punkte der Kurve zu bestimmen, wird  $\varphi$  ein fester Wert beigemessen, während man  $r$  in möglicher Nähe des richtigen Wertes wählt, indem man das Zahlenmaterial verwertet, das sich bei der numerischen Behandlung der Stabilität der im Gebiet I zerstreuten Librationspunkte ergab. Von den Koordinaten  $\xi, \eta$  des Librationspunktes aus werden zunächst die Koordinaten  $\sigma, \tau$  des Schwerpunktes bestimmt, wonach  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$  berechnet werden können; danach können die Koordinaten  $a$  und  $b$  des charakteristischen Punktes berechnet werden, und das Vorzeichen für  $\frac{a^2}{4} - b$  wird sodann entscheiden, ob der Librationspunkt in das  $KK$ - oder  $PP$ -Gebiet fällt. Die Berechnungen werden dann mit einem etwas geänderten Wert von  $r$  wiederholt, und  $\frac{a^2}{4} - b$  wird wiederum berechnet. Durch Interpolation oder Extrapolation findet man sodann einen verbesserten Wert von  $r$ , der als Ausgangspunkt einer neuen Berechnung von  $a$  und  $b$  dienen kann, und dies wird fortgesetzt, bis  $r$  mit der gewünschten Genauigkeit bestimmt worden ist. Danach wird  $\varphi$  ein anderer fester Wert zugeteilt, und man wendet dasselbe Verfahren wie früher an, wodurch ein neuer Punkt der Kurve bestimmt werden kann. In dieser Weise fährt man mit der Bestimmung neuer Punkte fort, bis man so viele Punkte der Kurve gefunden hat, dass ihre Lage mit der gewünschten Genauigkeit festgelegt worden ist.

Wegen der Symmetrie der Kurve in Bezug auf die drei Symmetrieachsen des Massendreiecks genügt es, die Werte von  $r$  im Winkelintervall  $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$  zu berechnen. In der Tabelle VII ist  $r$  mit 5 Dezimalen für Werte von  $\varphi$  im erwähnten Intervall angegeben.

TABELLE VII.

$\varphi$	$r_A$
0°	0.31049
5	30744
10	29939
15	28870
20	27741
25	26676
30	25734
35	24939
40	24296
45	23803
50	23456
55	23250
60	0.23181

Mit Hilfe der Zahlen der Tabelle kann  $r$  durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 10^5 r_A = & 26380.3 + 3757.0 \cos 3\varphi + 686.7 \cos 6\varphi \\
 & + 162.8 \cos 9\varphi + 44.1 \cos 12\varphi \\
 & + 12.8 \cos 15\varphi + 3.8 \cos 18\varphi \\
 & + 1.3 \cos 21\varphi + 0.2 \cos 24\varphi \\
 & + 0.2 \cos 27\varphi - 0.1 \cos 36\varphi.
 \end{aligned}$$

TABELLE VIII.

$\varphi$	$r_B$
0°	0.35511
5	35086
10	33995
15	32597
20	31168
25	29855
30	28715
35	27766
40	27006
45	26428
50	26022
55	25782
60	0.25702

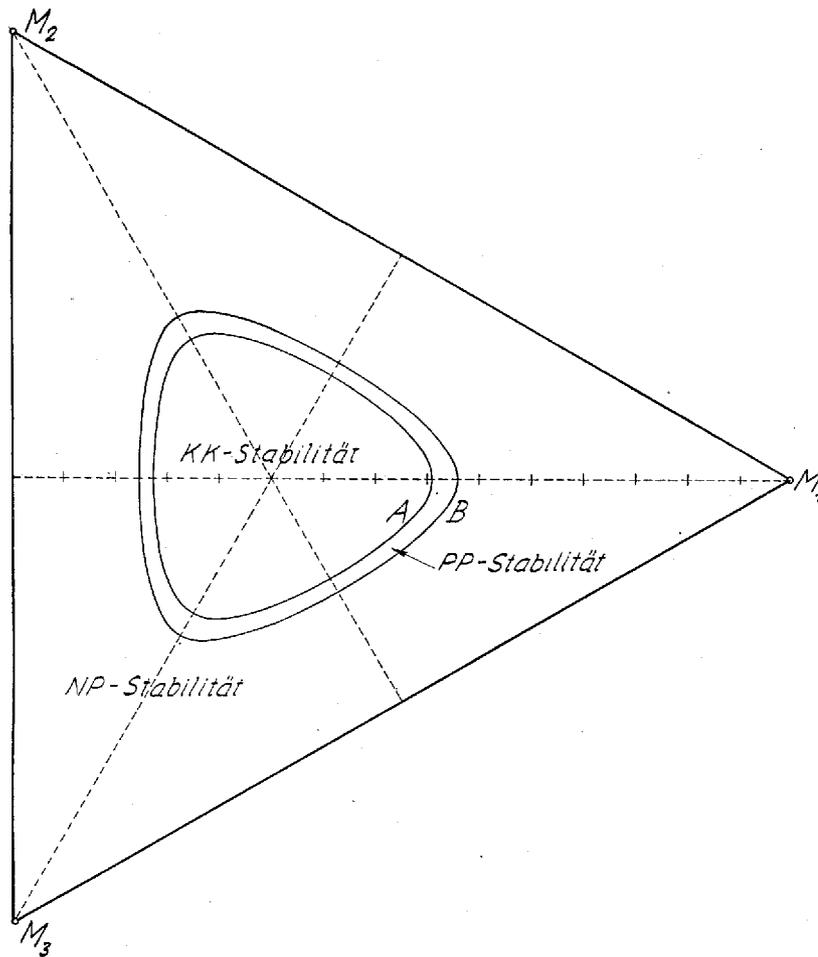


Abb. 7.

Die Stabilitätskurve  $B$ , die die Grenze zwischen dem Gebiet mit  $PP$ -Stabilität und dem mit  $NP$ -Stabilität bildet, kann auf dieselbe Weise wie die Grenzkurve  $A$  bestimmt werden; jedoch ist die Bedingung dafür, dass ein Librationspunkt auf die Grenzkurve fällt, in diesem Falle  $b = 0$ . Auch für diese Kurve genügt es, die Werte von  $r$  im Winkelintervall  $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$  zu berechnen. In der Tabelle VIII ist  $r$  mit 5 Dezimalen für Werte von  $\varphi$  im erwähnten Intervall angegeben.

Mit Hilfe der Zahlen der Tabelle kann  $r$  durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden.

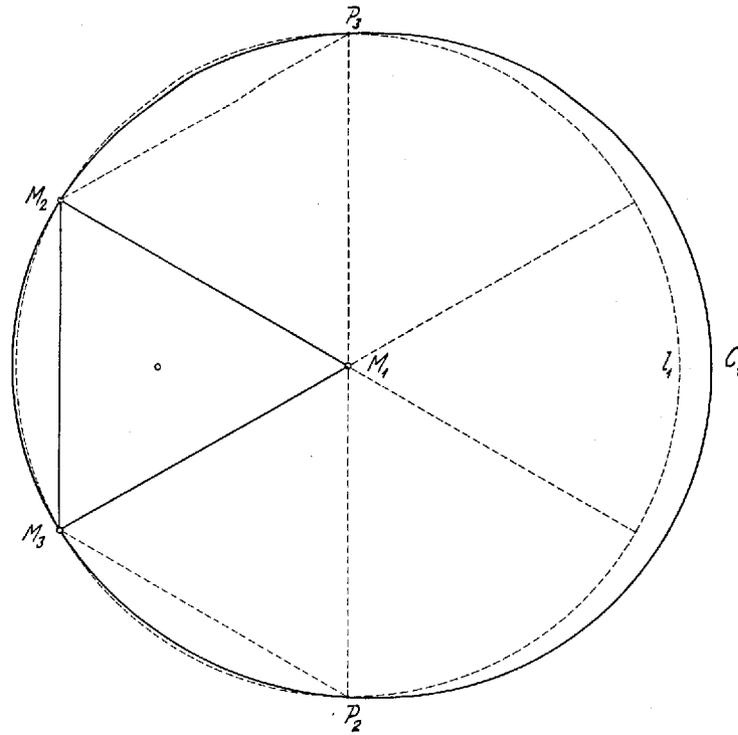


Abb. 8.

$$\begin{aligned}
 10^5 r_B = & 29585.5 + 4630.0 \cos 3\varphi + 937.5 \cos 6\varphi \\
 & + 247.0 \cos 9\varphi + 74.2 \cos 12\varphi \\
 & + 24.1 \cos 15\varphi + 8.1 \cos 18\varphi \\
 & + 2.8 \cos 21\varphi + 1.1 \cos 24\varphi \\
 & + 0.5 \cos 27\varphi + 0.2 \cos 30\varphi \\
 & + 0.1 \cos 33\varphi - 0.1 \cos 36\varphi.
 \end{aligned}$$

Abb. 7 zeigt uns das Massendreieck mit den zwei Grenzkurven A und B.

Jetzt muss noch die Kurve, die im Gebiet III die Grenze zwischen den Gebieten mit *KK*-Stabilität und denen mit *NN*-Stabilität bildet, bestimmt werden. Die Grenze zwischen den zwei Gebieten wird jedoch nicht von einer einzelnen Kurve, sondern von drei Kurven gebildet, die — jede für sich — längs einem der drei Librationskreise  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  laufen. Wir bezeichnen diese drei Kurven  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$ . Da die drei Kurven genau die gleiche

Form besitzen und dieselbe Lage im Verhältnis zum Massendreieck haben, genügt es, numerisch eine einzelne von ihnen zu bestimmen, z. B. die längs des Librationskreises  $l_1$  laufende Kurve  $C_1$ . Diese Kurve schneidet den Librationskreis in vier Punkten, nämlich  $P_3$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  und  $P_2$  (Abb. 3); diese vier Punkte teilen die Kurve in vier Bogen, von denen jeder seine besondere Lage hat. Der Kurvenbogen von  $M_2$  bis  $M_3$  liegt ausserhalb des Kreises im Gebiet  $III_1$ ; die Kurvenbogen  $P_3M_2$  und  $M_3P_2$  liegen dagegen innerhalb des Kreises in den Gebieten  $III_3$  und  $III_2$  (Abb. 8). Endlich liegt der Kurvenbogen  $P_2P_3$  ausserhalb des Kreises, aber auch ausserhalb der Librationspunktgebiete, indem er negativen Werten der endlichen Massen entspricht; aus Rücksicht auf die Darstellung der Kurve durch eine Fouriersche Reihe ist jedoch auch dieser Teil der Kurve bestimmt worden.

Die Grenze zwischen den Stabilitätsgebieten in einem einzelnen Teil des Gebietes III wird deshalb von drei Kurvenstücken der drei Kurven  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  gebildet. So wird im Gebiet  $III_1$  die Grenze von einem Kurvenstück  $M_2M_3$  von  $C_1$  herrührend,

TABELLE IX.

$\varphi$	$\varepsilon$
0°	+ 0.15333
10	0.15164
20	0.14630
30	0.13649
40	0.12103
50	0.09887
60	0.07069
70	0.04065
80	+ 0.01559
90	0
100	— 0.00671
110	0.00781
120	0.00629
130	0.00400
140	— 0.00180
150	0
160	+ 0.00139
170	0.00231
180	+ 0.00264

einem Kurvenstück  $M_3P_1$  von  $C_2$  herrührend und endlich einem Kurvenstück  $P_1M_2$  von  $C_3$  herrührend gebildet.

Bei der numerischen Bestimmung der Kurve  $C_1$  kann man auf eine Weise verfahren, die dem Verfahren bei der Bestimmung der Kurven  $A$  und  $B$  entspricht. Da die Kurve in der Nähe des Librationskreises  $l_1$  verläuft, wird es natürlich sein,  $M_1$  als Pol der polaren Koordinaten zu benutzen. Setzen wir  $r = \sqrt{3} + \varepsilon$ , bezeichnet  $\varepsilon$  die Distanzen der Kurvenpunkte vom Librationskreis, oder auf eine andere Weise ausgedrückt,  $\varepsilon$  bezeichnet die Breite des schmalen Gürtels längs des Librationskreises  $l_1$ , der ganz-stabile Librationspunkte enthält. Wegen der Symmetrie der Kurve in Bezug auf die Symmetrieachse durch  $M_1$  genügt es, die Werte von  $\varepsilon$  im Winkelintervall  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  zu berechnen. In der Tabelle IX ist  $\varepsilon$  mit 5 Dezimalen für Werte von  $\varphi$  im erwähnten Intervall angegeben.

Mit Hilfe der Zahlen der Tabelle kann  $\varepsilon$  durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 10^5 \varepsilon = & 4646.3 + 7732.6 \cos \varphi + 3806.2 \cos 2\varphi - 38.6 \cos 3\varphi \\
 & - 750.7 \cos 4\varphi - 214.9 \cos 5\varphi + 98.1 \cos 6\varphi \\
 & + 69.2 \cos 7\varphi + 2.0 \cos 8\varphi - 15.7 \cos 9\varphi \\
 & - 4.7 \cos 10\varphi + 1.9 \cos 11\varphi + 1.6 \cos 12\varphi \\
 & + 0.1 \cos 13\varphi - 0.5 \cos 14\varphi - 0.1 \cos 15\varphi \\
 & \qquad \qquad \qquad + 0.1 \cos 17\varphi + 0.2 \cos 18\varphi.
 \end{aligned}$$

### 10. Die Stabilitätsgrenzkurve $B$ als Kurve der Librationsdoppelpunkte.

Ein näherer Vergleich zwischen der Stabilitätsgrenzkurve  $B$  und der in meiner früheren Abhandlung bestimmten Kurve der Librationsdoppelpunkte ergibt das interessante Resultat, dass diese zwei Kurven identisch sind. Freilich war die Genauigkeit, womit die Kurve der Librationsdoppelpunkte durch Interpolation von den bei der Rechnung angewandten, zerstreut liegenden Librationspunkten aus bestimmt werden konnte, nicht recht gross; da aber die Schnittpunkte der Kurven mit den Symmetrieachsen Übereinstimmung in den  $r$ -Werten bis zum 5. Dezimal zeigen, habe ich Grund anzunehmen, dass die zwei Kurven identisch

sind. Dass die Vermutung richtig ist, kann folgendermassen gezeigt werden.

Die Bedingung dafür, dass der Punkt  $(\xi, \eta)$  ein Librationspunkt darstellt, ist

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0. \quad (62)$$

Die Anzahl der Librationspunkte ist deshalb dieselbe wie die Anzahl der Wurzelpaare in den zwei Gleichungen (62). Soll nun der Punkt  $(\xi_0, \eta_0)$  ein Librationsdoppelpunkt sein, muss  $\xi = \xi_0$ ,  $\eta = \eta_0$  zwei zusammenfallende Wurzelpaare in (62) bezeichnen. Die Bedingung dafür, dass die zwei Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0 \quad (63)$$

zwei zusammenfallende Wurzelpaare haben, ist jedoch

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0. \quad (64)$$

Soll deshalb  $\xi = \xi_0$ ,  $\eta = \eta_0$  zwei zusammenfallende Wurzelpaare in den Gleichungen (62) bezeichnen, muss das Wurzelpaar ausser (62) auch

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (65)$$

befriedigen; diese Gleichung kann aber auch

$$rt - s^2 = 0 \quad (66)$$

geschrieben werden.

Da  $b = rt - s^2$  ist, sehen wir, dass die Bedingung für zwei zusammenfallende Wurzelpaare in (62), d. h. die Bedingung für Librationsdoppelpunkte,  $b = 0$  ist;  $b = 0$  ist aber gerade die Bedingung, die die Punkte auf der Stabilitätsgrenzkurve  $B$  befriedigen sollten. Es ergibt sich somit:

Die Kurve der Librationsdoppelpunkte und die Kurve, die die Grenze zwischen dem Gebiet mit  $PP$ -Stabilität und dem Gebiet mit  $NP$ -Stabilität bildet, sind identisch.

Færdig fra trykkeriet den 1. maj 1952.