DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXII, NR. 6

EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

VIERTE MITTEILUNG

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1945

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

Diese vierte Mitteilung behandelt die allgemeine Kongruenzlehre des offenen Raumes beliebig vieler Dimensionen[1].

---

§ 1. Totalbeschreibung des Raumes.

I. Punkte, gerade Linien, Transporte (Bewegungen).

Es gibt Punkte $A, B, C, \cdots$ Es gibt Punktmengen $a, b, c, \cdots$, welche gerade Linien (Geraden) heissen. Es gibt Transformationen, welche Transporte (oder Bewegungen) heissen. Ein Transport ist eine Zuordnung, durch welche jeder Geraden und jedem auf ihr gelegener Punkt eine Gerade und ein auf ihr gelegener Punkt umkehrbar eindeutig entspricht. Die Transporte bilden eine Gruppe. Zwei Figuren, welche durch einen Transport auseinander abgeleitet werden können, sollen kongruent heissen. Alle Punkte sind kongruent. Alle Geraden sind kongruent.

II. Innere Bewegung einer Geraden.

Es gibt Transporte, welche eine beliebig vorgegebene Gerade g stehen lassen. Man spricht dann von kongruenten Punktreihen auf g, wobei man die entsprechenden Transformationen von g in sich als innere Transporte (Bewegungen) der Geraden bezeichnet.

Es gibt ausser der Identität einen und nur einen inneren Transport einer beliebig gegebenen Geraden, welche einen beliebig

[1] Die früher veröffentlichten Mitteilungen:
Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, Erste Mitteilung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math-fys. Medd. VIII, 11, 1929; Zweite Mitteilung, ibd. X, 1 1929; Dritte Mitteilung, ibd. XIX, 12, 1942, sollen im folgenden als Einl. I, II, III zitiert werden.

gegebenen Punkt A dieser Geraden stehen lässt. Dieser Transport soll als innere Spiegelung (Umwendung) um A als Zentrum bezeichnet werden.

III. Punktspiegelung.

Einem Punkt O entspricht eine Spiegelung um O, d. h. ein involutorischer Transport, welcher O und jede Gerade durch O stehen lässt. Kein anderer Punkt als O soll bei der Bewegung stehen bleiben.

A heisst Zentrum der Spiegelung. Die Spiegelung soll mit demselben Buchstaben wie das Zentrum bezeichnet werden.

IV. Mittelpunkt.

Es gibt eine und nur eine Punktspiegelung M, welche zwei beliebig vorgegebene Punkte A, B ineinander überführt. Der Punkt M heisst Mittelpunkt der beiden Punkte A, B.

Folgerung. Jeder Transport, welcher zwei Punkte vertauscht, oder jeden von ihnen stehen lässt, muss ihren Mittelpunkt stehen lassen.

V. Achsenspiegelung.

1. Einer Geraden a entspricht ein involutorischer Transport, welcher alle Punkte von a, und keine anderen, stehen lässt. Dieser Transport soll Achsenspiegelung (Spiegelung) um a als Achse, oder Umwendung um a heissen, und wird mit demselben Buchstaben wie die Achse selbst bezeichnet.

2. Jede von a verschiedene Gerade, welche einen Punkt A von a enthält, und bei der Spiegelung a stehen bleibt, soll senkrecht zu a ($\perp a$) oder Normale zu a in A heissen. Durch jeden Punkt ausserhalb a geht mindestens eine Senkrechte b zu a.

Folgerungen.

1°. Jede zu a in einem Punkte A senkrechte Gerade wird nach II durch eine innere Spiegelung um A transformiert und hat demnach keinen anderen Punkt mit a gemein.

2°. Zwei Spiegelungen um verschiedene Achsen sind verschieden.

3°. Die Beziehung $b \perp a$ ist eine reziproke; die Transformationsgleichungen $b^a = b$, und $a^b = a$, sind nämlich gleichbedeutend mit $ab = ba$.[1]

4°. Jede Verbindungsgerade g zweier Punkte A, B muss den Mittelpunkt M von A, B enthalten. Die Spiegelung g lässt nämlich A und B, und sonach M, ungeändert.

VI. Zwei kongruente Punktreihen $ABC\cdots$ und $AB'C'\cdots$, welche auf zwei Geraden mit einem einzigen gemeinsamen Punkt A gelegen sind, können immer durch eine, und nur eine, Achsenspiegelung ineinander übergeführt werden.

VII. Eindeutiges Schneiden zweier Geraden.

Wenn eine Gerade durch den Schnittpunkt zweier Geraden, welche einander eindeutig schneiden, hindurchgeht, so muss sie jedenfalls eine von diesen Geraden eindeutig schneiden.

VIII. Eindeutige Verbindung zweier Punkte.

Wenn ein Punkt P und eine Gerade a beliebig vorgegeben sind, so gibt es immer auf der Geraden a einen Punkt Q derart, dass die beiden Punkte P, Q eine und nur eine Verbindungsgerade haben.

Gelegentlich wollen wir die folgenden Ausdrücke verwenden:

Nachbarpunkte sind zwei Punkte mit mehreren Verbindungsgeraden.

Fernpunkte sind solche mit einer und nur einer Verbindungsgeraden.

Schmieggeraden sind zwei Geraden mit mehreren gemeinsamen Punkten.

Kreuzgeraden sind solche mit einem und nur einem gemeinsamen Punkt.

[1] Wie früher bezeichnen wir die Transformation $P^{-1}QP$ mit Q^P. Es wird dann $(T^U)^V = T^{UV}$, und $T^U V^U = (TV)^U$.

§ 2. Aufeinander senkrechte Geraden.

Satz 1. Zwei Kreuzgeraden a, b mit dem Schnittpunkt O haben zwei aufeinander senkrechte Spiegelungsachsen durch O.

Beweis. Wir betrachten (Fig. 1) zwei auf a und b gelegene kongruente Reihen $OA\cdots$ und $OB\cdots$. Ihre Spiegelungsachse heisse x (VI). Die Spiegelung O führt diese Reihen in zwei Reihen $OA_1\cdots$ und $OB_1\cdots$ mit derselben Spiegelungsachse x über. Die Reihen $OA\cdots$ und $OB_1\cdots$ haben eine andere Spiegelungsachse y, welche auch als Spiegelungsachse der beiden Reihen $OA_1\cdots$ und $OB\cdots$ hervortritt. Da nun die Spiegelung y die beiden Reihen $OA\cdots$ und $OB\cdots$ in $OB_1\cdots$ bezw. $OA_1\cdots$ überführt, muss die Achse x bei dieser Spiegelung ungeändert bleiben, d. h. $x \perp y$.

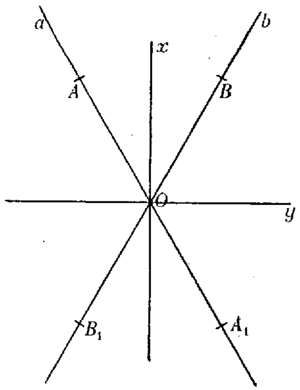

Fig. 1.

Wenn es in einem Punkt einer Geraden a nur eine Senkrechte zu a gibt, dann kann in jedem Punkt jeder Geraden eine und nur eine Senkrechte zu dieser errichtet werden. In diesem besonders wichtigen Falle soll unser Raum als Ebene bezeichnet werden. Es soll im folgenden nachgewiesen werden, dass für diesen Fall das in Einl. I S. 5. aufgestellte Axiomsystem erfüllt ist, und dass infolgedessen die Geometrie der Ebene durch unsere frühere Darstellung erledigt ist.

Satz 2. Steht eine Gerade n senkrecht auf den beiden Kreuzgeraden a, b in ihrem Schnittpunkt O, so steht sie auch senkrecht auf ihren Spiegelungsachsen x, y.

Die Spiegelung n führt nämlich die kongruenten Reihen $OA\cdots$ auf a und $OB\cdots$ auf b in $OA_1\cdots$ und $OB_1\cdots$ über, und jeder der beiden Achsen x, y muss deshalb bei der Spiegelung n stehen bleiben.

Unter einem n-Kreuz verstehen wir ein System von n Geraden, welche durch denselben Punkt (den Scheitel des Kreuzes) gehen und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Wenn in unserem Raume ein n-Kreuz existiert, das durch $n-1$ seiner Geraden eindeutig bestimmt ist, so soll der Raum n-dimensional (ein n-Raum, R_n) heissen.

Eine Gerade soll Normale eines n-Kreuzes heissen, wenn sie zusammen mit diesem ein $(n+1)$-Kreuz bildet.

Wenn ein $(n-1)$-Kreuz existiert, welche mehr als eine Normale aufweist, können zwei Hauptfälle eintreten:

1°. Je zwei Normalen p, q des Kreuzes sind Schmieggeraden. Durch Spiegelung von p um q und wiederholte ähnliche Spiegelungen entstehen beispielsweise andere Normalen des Kreuzes. Alle Normalen des Kreuzes bilden ein Normalenbüschel von Schmieggeraden. Der Raum soll in diesem Falle als R_n-Erweiterung oder R_n-Nachbarschaft bezeichnet werden.

2°. Es gibt zwei Normalen p, q des Kreuzes, welche nur einen Punkt gemein haben. Die Spiegelungsachsen x, y dieser Normalen sind dann auch Normalen des Kreuzes und bilden mit diesem ein $(n+1)$-Kreuz. Der Raum ist dann wenigstens von $n+1$ Dimensionen.

Unsere Totalbeschreibung enthält schliesslich auch die Möglichkeit, dass der Raum unendlich viele Dimensionen aufweist, d. h. dass unendlich viele paarweise zueinander senkrecht stehende Geraden durch denselben Punkt vorkommen können.

§ 3. Die Geometrie der Ebene.

In Einl. I Axiom II wurde die Spiegelung an einer Geraden a als eine von der Identität verschiedene Bewegung, welche alle Punkte von a stehen lässt, definiert. Dass diese Eigenschaft auf Grund unserer allgemeinen Totalbeschreibung des Raumes erfüllt ist, wenn der Raum eine Ebene ist, soll nun nachgewiesen werden.

Bei einem Transport τ in einer Ebene, wo alle Punkte einer Geraden a stehen bleiben, muss jede Normale zu a stehen bleiben. Betrachten wir eine dieser Normalen, n, mit dem Fusspunkt A. Entweder erfährt diese Normale bei der Bewegung τ eine innere Spiegelung mit dem Zentrum A, oder alle ihre Punkte sind fest. Wenn alle Normalen von a innere Spiegelungen erfahren, ist die Bewegung τ eine Spiegelung um a. Wenn aber alle ihre Punkte feststehen, ist die Bewegung die Identität. Man hat also nur zu beweisen, dass wenn es für eine Normale, z. B. n, gilt, dass alle ihre Punkte fest liegen, dann ist jeder Punkt P der Ebene fest. Um dies einzusehen, fällen wir Normalen q, r von P auf a und n; ihre Fusspunkte seien Q und R. Die Normalen q, r müssen so bei der Bewegung τ fest liegen. Wenn sie Kreuzgeraden sind, muss also P unverändert bleiben. Wenn sie aber Schmieggeraden wären, könnte vielleicht der Fall eintreten, dass P in einen anderen gemeinsamen Punkt P_1 von q und r übergehen könnte. Hierbei müsste aber das Paar PP_1 seinen Mittelpunkt in Q, und zugleich in R, haben, was unmöglich ist. Wir haben also hiermit den Beweis erbracht und können den folgenden Satz aufstellen:

Satz 3. Jeder Transport der Ebene in sich, welcher alle Punkte einer Geraden in Ruhe lässt, ist entweder die Identität oder eine Spiegelung um diese Gerade.

Wir haben in der Grundtatsache VI unserer Totalbeschreibung die Bedingung gestellt, dass die in Rede stehenden Geraden nur einen Punkt gemein haben, was wir in der entsprechenden Aussage in Einl. I Axiom V nicht gefordert haben. Wir wollen aber nun zeigen, dass wir, einstweilen für die ebene Geometrie, auf den hier vorgetragenen Grundlagen die betreffende Aussage für Schmieggeraden beweisen können:

Satz 4. Wenn in der Ebene zwei kongruente Punktreihen $ABC\cdots$ und $AB'C'\cdots$ auf zwei Schmieggeraden p, q liegen, so können sie immer durch eine und nur eine Achsenspiegelung um eine Gerade durch A ineinander übergeführt werden.

Zunächst beweisen wir den folgende Hilfssatz:

Wenn p, q, r drei Gerade durch ein und denselben Punkt A bedeuten, und p, q Schmieggeraden, p, r Kreuzgeraden sind, so ist der Transport pqr einer Spiegelung gleichwertig.

Beweis. Eine der Spiegelungsachsen von p, r sei mit x bezeichnet. Durch den Transport pqx geht eine Punktreihe $AP\cdots$ auf p in eine Punktreihe $AP'\cdots$ auf einer Schmieggeraden r' zu r über. Die beiden Punktreihen haben dann eine Spiegelungsachse x' (VI), und es wird so entweder $pqx = x'$, oder $pqx = px'$; die letztere Möglichkeit ist aber ausgeschlossen, weil qx keine Spiegelung darstellen kann. Also ist $pqx = x'$, und deshalb $= xqp$, oder

$$(qp)^x = pq. \qquad (1)$$

Nun bestimmen wir eine Gerade s derart, dass $q^x = s$, also, da $p^x = r$:

$$(qp)^x = sr. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt dann $pq = sr$, oder

$$pqr = s, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Um nun den Satz 4 zu beweisen, betrachten wir zunächst zwei kongruente gleich orientierte Punktreihen $AP\cdots$ und $AQ\cdots$ auf p und q und ausserdem eine ihnen kongruente Reihe $AR\cdots$ auf r. Es sei ferner x die Spiegelungsachse der Reihen $AP\cdots$ und $AR\cdots$, und y die Spiegelungsachse von $AQ\cdots$ und $AR\cdots$. Es zeigt sich dann, dass die Reihe $AP\cdots$ durch den Transport xy, und somit auch durch den Transport xyq, in $AQ\cdots$ übergeht. Letzterer Transport ist aber nach dem obigen Hilfssatz einer Spiegelung z gleichwertig, weil x, y untereinander Schmieggeraden sind, aber Kreuzgeraden zu q. Dass x, y Schmieggeraden sind, ist sofort ersichtlich: ist nämlich $P = Q$ und der entsprechende Punkt R auf r, so fallen die Mittelpunkte der Paare PR und QR zusammen und bestimmen dann einen von A verschiedenen gemeinsamen Punkt der Spiegelungsachsen x, y.

Es hat sich so herausgestellt, dass die Punktreihen $AP\cdots$ und $AQ\cdots$ durch eine Spiegelung $xyq = z$ in einander übergehen.

Dass zwei Spiegelungsachsen z, z' nicht vorkommen können, folgt daraus, dass der Transport zz' die Reihe $AP\cdots$ in Ruhe lassen müsste, also $zz' = p$, was unmöglich ist.

Der Fall, wo die Punktreihen entgegengesetzt orientiert sind, wird mittels einer Punktspiegelung A auf den vorigen zurückgeführt.

In der ebenen Geometrie gilt somit in allen Fällen der Satz:

Satz 5. Zwei kongruente Punktreihen $ABC\cdots$ und $AB'C'\cdots$ auf einer oder auf zwei Geraden mit dem gemeinsamen Punkt A können durch eine und nur eine Achsenspiegelung ineinander übergeführt werden.

Hieraus folgt nun für die ebene Geometrie, wie früher in Einl. I S. 10:

Satz 6. Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen a, b, c, deren Achsen durch denselben Punkt O gehen, kann durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden. Die Achse der Spiegelung geht durch O.

Die Gleichung $ab = xc$ ist durch $x = abc$ befriedigt. Ist $a \perp b$, so wird auch $x \perp c$, denn aus $ab = ba$ folgt $xc = cx$. Hieraus schliesst man:

Zwei beliebige zueinander senkrechte Geraden a, b durch den Punkt O bestimmen einen Transport ab, welcher jede Gerade c durch O stehen lässt. Der Transport ist involutorisch, weil $ab = ba$. Er lässt keinen von O verschiedenen Punkt stehen. Wäre nämlich P ein fester Punkt, könnte der Transport durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen r, s ersetzt werden, deren Achsen r, s durch P gehen und senkrecht aufeinander stehen müssten (weil der Transport involutorisch ist), und durch O könnte man dann eine Gerade $l \perp r$ ziehen, deren Fusspunkt und somit alle Punkte auf l fest liegen müssten, d. h. der Transport ab müsste entweder $= l$ oder die Identität sein, was unmöglich ist. Es geht dann hieraus hervor, dass $ab = O$.'

Einem beliebigen Punkte P ausserhalb a entspricht bei der Spiegelung a ein Punkt P_1. Der Mittelpunkt M von PP_1 muss auf a liegen. Von P geht nach Voraussetzung mindestens eine Senkrechte auf a. Sie trifft a in M. Da ferner M und die Senkrechte auf a in M eindeutig sind, so ist die Senkrechte von P auf a auch eindeutig.

Nach diesen Überlegungen steht es dann völlig klar, dass für die Ebene durch unsere Totalbeschreibung das ganze Axiomsystem aus der Einl. I zur Verfügung steht, und wir können dann für den weiteren Ausbau der Geometrie der Ebene auf die frühere Darstellung verweisen.

Eine Frage müssen wir doch noch etwas ausführlicher, als wir es früher getan haben, besprechen, nämlich die Frage von den *Spiegelungsachsen zweier Schmieggeraden*.

Um die nötigen Hilfsmittel bereit zu haben, müssen wir auf die Untersuchung in Einl. I S. 18 zurückgreifen:

Zwei Schmieggeraden l, m Fig. 2 haben die Punkte A, B gemein. Auf l wählen wir den Punkt C, welcher nicht auf m liegt. Das Lot p von C auf m hat den Fusspunkt D.

Es wird nun $ABD = E$ gesetzt, wo E ein Punkt von m ist. Hieraus folgt

$$ABC = EDC,$$

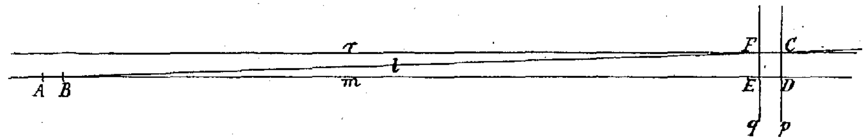

Fig. 2.

und da A, B, C einer Geraden angehören, ist ABC, also EDC ein involutorischer Transport.

Errichtet man nun das Lot q auf m in E, und das Lot r auf p in C, so wird

$$E = qm, \quad D = mp, \quad C = pr,$$

also

$$EDC = qmmppr = qr.$$

qr ist also ein involutorischer Transport, d. h. $q \perp r$. Setzt man $qr = F$, gehen q und r durch F. Hieraus ersieht man, dass die beiden Linienpaare rm und pq einander senkrecht schneiden, dass also die Schnittpunkte $EDCF$ ein »Rechteck« bilden; ferner, dass l Schmieggerade zu r und sonach (VII) Kreuzgerade zu q ist; man kann dann die naheliegende Redeweise einführen, dass l, q fast-senkrecht zueinander sind. Es gilt also der Satz:

Satz 7. Wenn eine Gerade l zwei zueinander senkrechte Geraden m, q schneidet und Schmieggerade zu einer der Geraden ist, so ist sie Kreuzgerade zu der anderen und fast-senkrecht zu dieser.

Sind a, b zwei zueinander senkrechte Geraden mit dem Schnittpunkt O, und c, d zwei Geraden durch O, welche durch jede der Spiegelungen a, b in einander übergehen, und sind c, d beide Kreuzgeraden zu a und b, so sind c und d Kreuzgeraden zueinander. Hätten nämlich c, d einen gemeinsamen Punkt P ausserhalb a und b, so müsste das Spiegelbild P_1 von P bezüglich a auch den Geraden c, d gemeinsam sein, und die Normale n von P auf a müsste dann Schmieggerade zu c und dem vorigen Satz zufolge b und c Schmieggeraden zueinander sein, was unserer Annahme widerspricht.

Es seien nun p, q zwei Schmieggeraden mit den beiden gemeinsamen Punkten A, B. Es gehen dann durch A zwei zueinander senkrechte Spiegelungsachsen x, y von p, q. Sie können nach obiger Untersuchung nicht beide Kreuzgeraden zu p

und q sein. Nehmen wir an, dass x Schmieggerade zu p und q sei; y ist dann Kreuzgerade zu p und q. Durch A gehen keine weitere Spiegelungsachse von p und q. Es lässt sich nun zeigen, dass x notwendig durch B gehen muss. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde das Spiegelbild B_1 von B bezüglich x auch den Geraden p, q angehören, und die Normale a zu x durch B hätte dann zwei Punkte B, B_1 mit p und q gemein d. h. n wäre Schmieggerade zu p, was unserer Annahme dass x, p Schmieggeraden sind, widersprechen würde.

Also:

Satz 8. Zwei Schmieggeraden p, q haben eine Spiegelungsachse x, welche alle gemeinsame Punkte von p, q enthält, und eine Reihe anderer Spiegelungsachsen $\perp x$, deren jede durch einen gemeinsamen Punkt von p und q geht.

Irgend zwei Punkte P, Q auf p, q, welche einander bei der Spiegelung x entsprechen, sind Nachbarpunkte.

§ 4. Der dreidimensionale Raum.

Wir gehen nun daran, den dreidimensionalen Raum R_3 näher zu untersuchen.

Es liege in diesem Raum ein 3-Kreuz npq mit dem Scheitel O vor, wo n also die einzige gemeinsame Normale von p und q in O ist. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass auch $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$ die einzige gemeinsame Normale von $\begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}$ und n ist. Andere 3-Kreuze lassen sich durch Bewegungen aus dem gegebenen ableiten.

Wir wollen nun das System Σ aller Fixpunkte des Transportes On ($= nO$, weil $n^O = n$) ableiten. Dieses System enthält alle Punkte auf den Normalen zu n in O, und es enthält keine anderen Punkte. Es sei nämlich O_1 ein Punkt von Σ. O_1 und sein Spiegelbild O_2 bezüglich O sind dann auch Spiegelbilder bezüglich n. Eine Senkrechte von O_1 auf n muss auch O_2 enthalten und trifft also n in O.

Es sei nun M der Mittelpunkt von OO_1. Es gilt dann

$$M^{On} = M, \quad \text{oder} \quad (On)\,M\,(On) = M,$$

also

$$On = M\,(On)\,M = O^M n^M = O_1 n_1,$$

wo n_1 die Gerade bezeichnet, in welche n durch die Spiegelung M übergeht.

Hieraus folgt:

Satz 9. Alle Fixpunkte des Transportes On sind auch Fixpunkte des Transportes $O_1 n_1$, und umgekehrt.

Ferner:

Satz 10. Das System Σ der Fixpunkte wird durch jeden seiner Punkte in sich selbst gespiegelt.

Satz 11. Durch O gehen unendlich viele Geraden, die in Σ liegen, nämlich die Normalen von n in O. Durch jeden anderen Punkt O_1 von Σ gehen unendlich viele Geraden in Σ, nämlich die Normalen der entsprechenden Geraden n_1 in O_1. Jedes dieser Normalenbüschel erschöpft das ganze System Σ.

Es folgt hieraus:

Satz 12. Je zwei Punkte von Σ haben wenigstens eine Verbindungsgerade, welche in Σ liegt.

Es sei nun l eine beliebige Gerade in Σ und P ein beliebiger Punkt in Σ. Das Spiegelbild von P bezüglich l, dargestellt durch $P^l = lPl$, wird dann auch Σ angehören. Da nämlich P und l bei dem Transport On stehen bleiben, gilt

$$P^{On} = P, \quad l^{On} = l,$$

und sonach

$$(lPl)^{On} = lPl,$$

d. h. P^l wird durch den Transport On in sich selbst transformiert, oder:

Satz 13. Σ wird durch Spiegelung um jede seiner Geraden in sich selbst transformiert.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 14. In jedem Punkte einer Geraden in Σ kann eine und nur eine Senkrechte in Σ errichtet werden. Hierzu braucht man nur den Spezialfall zu betrachten, wo die in Rede stehende Gerade eine Normale r zu n in O ist, indem wir zeigen, dass wir eine und nur eine andere Normale s zu n in O auffinden können, welche senkrecht auf r steht. Die Normale r ist nun Kreuzgerade zu wenigstens einer der beiden Geraden p, q, z. B. zu p. Eine der Spiegelungsachsen von p und r sei mit x bezeichnet. Spiegelt man q an x, erhält man die gesuchte Gerade S. Es gibt nur eine Lösung, weil q die einzige gemeinsame Normale von p und n ist.

Wir haben noch zu beweisen, dass man in Σ durch einen gegebenen Punkt P eine Senkrechte auf eine beliebig gegebene Gerade in Σ fällen kann, um danach feststellen zu können, dass Σ als eine Ebene im früher angegebenen Sinne bezeichnet werden muss. Wir wollen doch, schon bevor wir diesen Beweis bringen, Punktsysteme, die in ähnlicher Weise wie Σ als Ort der Normalen einer Geraden n in einem Punkte O von ihr erzeugt werden, Ebenen benennen, und im besonderen Σ als Normalebene von n in O bezeichnen. Ebenso bezeichnen wir n als Normale der Ebene Σ in O.

In jedem Punkte P von Σ gibt es eine und nur eine Normale zu Σ; diese wird durch den Transport On um das Zentrum P in sich gespiegelt. Der Transport On soll deshalb als Spiegelung an der Ebene Σ, und mit demselben Buchstaben Σ, bezeichnet werden.

Durch jeden Punkt Q des Raumes kann eine und nur eine Normale zu Σ gezogen werden. Der Transport On führt nämlich Q in einen Punkt Q_1 über, derart, dass der Mittelpunkt S von QQ_1 in der Ebene Σ liegt. Die Normale von Σ in S sei mit s bezeichnet. Durch den Transport Ss geht nun Q_1 in Q über; aber schon durch die Spiegelung S geht Q_1 in Q über, und durch die Spiegelung s muss also Q stehen bleiben d. h. s geht durch Q. Dass nur eine Normale s existiert, folgt aus der Eindeutigkeit des Mittelpunktes S.

Satz 15. *Durch jeden Punkt P des Raumes kann eine und nur eine Normalebene zu einer Geraden l gelegt werden.*

Nach Voraussetzung geht nämlich durch P eine Normale n zu l; sie schneidet l in einem Punkte Q und geht durch das Spiegelbild P_1 von P bezüglich l. Q ist der Mittelpunkt von PP_1 und ist also durch P und l eindeutig bestimmt. Die Normalebene Σ zu l in Q geht durch n und also auch durch P. Die Eindeutigkeit der Ebene folgt aus der Eindeutigkeit von Q.

Eine Ebene Σ_1 soll senkrecht zu einer Ebene Σ heissen, wenn sie eine Normale n in einem Punkt O von Σ enthält. Die Normale n_1 von Σ_1 in O liegt dann auch in Σ. Die beiden Ebenen

enthalten die gemeinsame Normale s von n und n_1 in O; die Gerade s soll deshalb als Schnittlinie der Ebenen bezeichnet werden.

Die Ebenen haben keinen gemeinsamen Punkt ausserhalb s. Wäre nämlich ein solcher Punkt P vorhanden, so könnte man eine Verbindungsgerade von P nach O ziehen, einmal in Σ und ein andermal in Σ_1; fielen diese Geraden zusammen, hätte man zwei gemeinsame Normalen zu n und n_1 in O, was unmöglich ist; und fielen sie nicht zusammen, so wäre P Nachbarpunkt von O. In diesem Falle könnte man aber einen anderen Punkt, O_1, auf s statt O derart wählen, dass O, O_1 Fernpunkte wären, und sodann in O_1 zwei Normalen n' und n_1' zu den beiden Ebenen Σ und Σ_1 errichten. Die vorhergehende Betrachtung betreffs des Systems snn_1OP liesse sich dann auf das neue System $sn'n_1'O_1P$ anwenden, und wir sehen so, dass die Gerade PO_1 mit s zusammenfallen muss, was unserer Annahme, dass P ausserhalb s liegen solle, widerspricht.

Wir gehen nun an den Beweis des früher angekündigten Satzes:

Satz 16. *Wenn in einer Ebene Σ eine beliebige Gerade l und ein Punkt P ausserhalb l vorgegeben sind, so lässt sich immer in Σ eine Gerade g ziehen, welche durch P geht und zu l senkrecht ist.*

Durch P geht nämlich eine Ebene Σ_1 senkrecht zu l, und Σ_1 schneidet dann Σ in der gesuchten Geraden. Wir fügen hinzu, dass die Ebene Σ_1 eindeutig bestimmt ist, und dass die gesuchte Gerade g alsdann auch eindeutig bestimmt wird.

Wir haben somit den Beweis dafür erbracht, dass dasjenige Punktsystem Σ, welches wir in diesem Abschnitte schon als Ebene bezeichnet haben, wirklich alle die durch unsere Totalbeschreibung gegebenen Bedingungen erfüllt, um eine Ebene (R_2) darzustellen.

Es folgt nun leicht der Satz:

Satz 17. *Für jedes 3-Kreuz xyz gilt im R_3 die Spiegelungsgleichung*

$$xyz = 1.$$

Und ebenso leicht:

Satz 18. *Ein Transport im R_3, welcher alle Punkte einer Ebene Σ stehen lässt, ist entweder die Identität oder eine Spiegelung an Σ.*

Satz 19. Ein Transport im R_3, welcher alle Punkte einer Geraden a stehen lässt, ist entweder einer einzigen Spiegelung um eine Ebene durch a, oder der Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen um Ebenen durch a, gleichwertig.

In letzterem Falle lässt sich die Bewegung auch durch die Aufeinanderfolge zweier Achsenspiegelungen, deren Achsen Normalen zu a in demselben Punkte von a sind, darstellen.

Satz 20. Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen um Ebenen, welche durch dieselbe Gerade gehen, kann durch eine einzige Spiegelung um eine Ebene durch dieselbe Gerade ersetzt werden.

Satz 21. Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen um Punkte derselben Geraden kann durch eine einzige Spiegelung um einen Punkt dieser Geraden ersetzt werden.

Satz 22. Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen um Achsen, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, kann durch eine einzige Spiegelung um eine Achse, senkrecht auf derselben Geraden, ersetzt werden.

Eine Bewegung PQ, welche durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen um zwei Punkte P, Q einer Geraden a bestimmt ist, soll als Schiebung längs a bezeichnet werden. Sie lässt alle Ebenen durch a fest stehen. Die Schiebung lässt sich auch durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen um Normalebenen α und β von a in P und Q ersetzen. Man hat nämlich

$$aP = \alpha, \quad aQ = \beta,$$

also

$$PQ = \alpha\beta.$$

Eine Schiebung längs a zusammengesetzt mit einer Drehung um a (durch zwei Spiegelungen um Ebenen durch a oder zwei Spiegelungen um Normalen zu a dargestellt) ergibt eine Schraubung um a. Dieselbe kann durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen um Normalen zu a dargestellt werden.

Zwei zueinander senkrechte Geraden bestimmen eine Ebene, welche die beiden Geraden enthält. Dasselbe lässt sich von

zwei beliebigen Kreuzgeraden aussagen, weil wir zur Bestimmung der Ebene die beiden Spiegelungsachsen der beiden Geraden wählen können. Wenn hingegen zwei Schmieggeraden l, m vorgelegt sind, dann lassen sich unendlich viele Ebenen durch die beiden Geraden legen. Um das nachzuweisen, wählen wir auf l einen Fernpunkt L zu einem gemeinsamen Punkt O der beiden Geraden. Durch L legen wir eine Ebene λ senkrecht zu m, welche m in M schneidet. Ferner werden L und l auf eine Ebene α durch m in L_1 und l_1 projiziert. Die Geraden l, l_1, m sind benachbart, und aus Einl. III, 17 folgt dann, dass L, L_1 sowie L_1, M also auch L, M benachbart sind. L und M haben somit in der Ebene λ unendlich viele Verbindungsgeraden, alle senkrecht zu m in M. Jede dieser Geraden bestimmt mit m zusammen eine Ebene, welche l und m enthält. Also:

Satz 23. Zwei Schmieggeraden l, m bestimmen ein Büschel von Schmiegebenen.

Jede Ebene senkrecht zu m (oder l) schneidet aus diesem Büschel ein Element E aus, welches in allen Ebenen des Büschels enthalten ist. Durch Schiebung längs m beschreibt dieses Element einen Bereich, welcher allen Ebenen des Büschels angehört. Dieser Bereich soll als (ebener) Schmiegstreif und das erzeugende Element E als Breite des Streifs bezeichnet werden.

Zugleich ergibt sich, dass die beiden Schmieggeraden l, m eine Spiegelungsachse x haben, welche in allen Ebenen durch l, m enthalten ist, und ausserdem in jedem gemeinsamen Punkt ein Schmiegbüschel von Spiegelungsachsen, welche in der Normalebene zu x in diesem Punkt liegen. Dies lässt sich auch so ausdrücken:

Satz 24. Zwei Schmieggeraden l, m haben eine bestimmte Spiegelungsachse x, welche durch alle gemeinsamen Punkte der beiden Geraden hindurchgeht und in allen ihren gemeinsamen Ebenen liegt; ausserdem haben sie eine unendliche Reihe von Spiegelungsebenen, nämlich die Normalebenen zu x in den gemeinsamen Punkten der beiden Geraden.

Satz 25. Zwei Ebenen, welche einen Punkt P gemein haben, haben entweder eine einzige Gerade oder einen Schmiegstreif gemein.

Die beiden Normalen in P sind nämlich entweder Kreuzlinien, und in diesem Falle haben sie eine eindeutig bestimmte gemeinsame Normale, welche die Schnittlinie der beiden Ebenen darstellt, oder sie sind Schmieggeraden, und in diesem Falle bestimmen sie ein Büschel von Schmiegebenen, deren Normalen in P ein Büschel von Schmieggeraden ausmachen, welche alle in den beiden gegebenen Ebenen liegen.

Der Schmiegstreif ist ein Spezialfall allgemeinerer ebener Bereiche, welche wir als Schmiegbereiche bezeichnen wollen, d. h. Bereiche, welche die gemeinsamen Punkte von irgend einer Gesamtheit von Schmiegebenen umfassen. Wenn z. B. drei Ebenen α, β, γ vorliegen, welche je zwei und zwei Schmiegebenen sind, und alle einen Punkt gemein haben, so bestimmen die Paare $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ drei Schmiegstreife, welche einen Schmiegbereich gemein haben.

Die Schmiegbereiche können aber von sehr verchiedener Struktur sein. Einige der einfachsten, welche wir schon früher in anderem Zusammenhang (Einl. I S. 32) getroffen haben, sind solche, die bei einer Drehung um einen ihrer Punkte in sich selbst übergehen. Sie entstehen als Fixpunktmenge einer Bewegung ab, welche durch zwei Spiegelungen a, b in der Ebene erzeugt wird, wenn a und b Schmieggeraden sind (a. a. O). Ein anderes Beispiel bildet die Menge der gemeinsamen Punkte aller Tangentenebenen eines Ovaloids, deren Berührungspunkte Nachbarpunkte eines bestimmten Punktes der Fläche sind.

Satz 26. Die Aufeinanderfolge von zwei Ebenenspiegelungen α, β lässt sich durch eine andere, α_1, β_1, ersetzen, wo α_1 (oder β_1) durch einen vorgegebenen Punkt P geht.

Beweis. Durch P legen wir durch die beiden von P auf α und β gefällten Normalen eine gemeinsame Normalebene γ von α und β; diese schneidet α und β in zwei Geraden a, b. In der Ebene γ lassen sich nun zwei Geraden a_1, b_1 derart bestimmen, dass a_1 durch P geht, und $a_1\, b_1 = ab$ (I, 47). Die gesuchten Ebenen α_1, β_1 gehen dann durch a_1, b_1 senkrecht zu γ.

Fallen die beiden Normalen durch P zusammen, ist die Sache besonders einfach: Die gemeinsame Normale ist dann auch Normale der beiden gesuchten Ebenen.

Unbestimmtheit trifft ein, wenn die beiden vorgegebenen Ebenen α, β Nachbarebenen sind.

§ 5. Allgemeine Transporte im R_3.

Es sei ein Transport im R_3 vorgelegt, welcher einen Punkt O stehen lässt. Eine Punktreihe $OP\cdots$ auf einer Geraden p durch O gehe dabei in die Punktreihe $OQ\cdots$ auf der Geraden q über. Die beiden Punktreihen liegen in einer Ebene α, welche nicht notwendig eindeutig bestimmt ist und haben in dieser die Spiegelungsachse a. Durch a legen wir eine Ebene $\alpha_1 \perp \alpha$. Die Spiegelung α_1 führt nun die Reihe $OP\cdots$ in $OQ\cdots$ über, und der vorgelegte Transport kann somit durch diese Spiegelung und einen nachfolgenden Transport, welcher die Reihe $OQ\cdots$ stehen lässt, ersetzt werden. Letzterer Transport muss aber entweder einer Ebenenspiegelung α_2 oder der Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen α, β gleichwertig sein. Der vorgelegte Transport lässt sich also entweder durch $\alpha_1\alpha_2$ oder durch $\alpha_1\alpha\beta = a\beta$ ausdrücken, d. h. es gilt

Satz 27. Jeder Transport im R_3, welcher einen Punkt O stehen lässt, ist entweder durch zwei Ebenenspiegelungen α_1, α_2 oder durch eine Achsenspiegelung a und eine Ebenenspiegelung β darstellbar.

Wenn im ersteren Falle α_1 und α_2 Kreuzebenen sind, ist die Bewegung eine Drehung um ihre Schnittlinie als Achse. Wenn hingegen α_1 und α_2 Schmiegebenen sind, haben wir den Fall einer »Schmiegdrehung«, wo alle Punkte des gemeinsamen Schmiegstreifs der beiden Ebenen fest liegen. Aber nicht nur diese Punkte sind fest, alle Punkte des »Schmiegrohrs«, welches durch Drehung des Streifs um eine seiner Geraden entsteht müssen ebenfalls stehen bleiben.

Im letzteren Falle, wo der Transport durch $a\beta$ ausgedrückt wurde, können wir — wenn nicht schon $a \perp \beta$, in welchem Falle $a\beta = O$ — eine Vereinfachung der Darstellung einführen, indem wir eine Ebene β_1 durch a senkrecht zu β legen und die Normale b in $O \perp \beta_1$ errichten. Wenn nun die Schnittlinie $\beta\beta_1$ mit a_1 bezeichnet wird, lässt sich unser Transport durch des Symbol $aa_1\beta_1$ ausdrücken, d. h. er kann durch eine Drehung aa_1 um die Achse b und eine Spiegelung um die Ebene β_1 ersetzt werden. Tritt der Sonderfall ein, dass a und a_1 Schmieggeraden sind, so haben wir eine Schmiegdrehung aa_1 und eine nachfolgende Spiegelung β_1. Die Fixpunkte unseres Transportes bilden dann einen Schmiegbereich in der Ebene β_1.

Satz 28. In allen Fällen gilt, dass ein Transport mit einem festen Punkt O durch 1, 2 oder 3 Ebenenspiegelungen, deren Spiegelungsebenen durch O gehen, ersetzt werden kann.

Ein Transport $\alpha\beta\gamma\delta$, welcher durch die Aufeinanderfolge von 4 Spiegelungen um 4 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch denselben Punkt O dargestellt ist, lässt sich immer auf 2 Ebenenspiegelungen reduzieren. Durch eine gemeinsame Gerade l von α und β lässt sich nämlich immer eine Ebene γ_1 derart legen, dass $\gamma_1\gamma\delta$ einer Ebenenspiegelung δ_1 gleichwertig wird, d. h.

$$\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma_1\delta_1.$$

Da aber α, β, γ_1 durch dieselbe Gerade l gehen, lässt sich hier $\alpha\beta\gamma_1$ durch eine einzige Ebenenspiegelung δ_2 ausdrücken, d. h.

$$\alpha\beta\gamma\delta = \delta_2\delta_1.$$

Da ferner die Aufeinanderfolge von 3 Ebenenspiegelungen, deren Ebenen α, β, γ durch O gehen, niemals die Identität darstellen kann (weil $\alpha\beta\gamma$ sich immer auf die Form $\alpha\beta_1$ abändern lässt), so folgt, dass alle Transporte mit festem Punkt O in zwei verschiedene Klassen fallen, eine, wo die Transporte sich auf 0 oder 2 Ebenenspiegelungen reduzieren lassen (die direkten Transporte, »Inbewegungen«) und eine andere, wo die Transporte sich auf 1 oder 3 Ebenenspiegelungen reduzieren lassen (die inversen Transporte, »Umbewegungen«).

Wir gehen nun daran, den allgemeinen Transport τ in R_3 zu untersuchen. Ein beliebiger Punkt A gehe durch τ in A_1 über. Der Transport lässt sich dann in eine Ebenenspiegelung α, welche A nach A_1 führt, und einen Transport τ_1 mit dem Fixpunkt A_1 auflösen. Nach dem vorhergehenden Satz folgt dann sofort:

Satz 29. Jeder Transport im R_3 lässt sich durch die Aufeinanderfolge von höchstens 4 Ebenenspiegelungen ersetzen.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 30. Eine Folge von 5 Ebenenspiegelungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ lässt sich immer auf 3 Ebenenspiegelungen reduzieren.

Zu dem Zweck wählen wir einen Punkt P in α und ersetzen $\beta\gamma$ durch $\beta_1\gamma_1$, wo β_1 durch P geht (Satz 26). Das System $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ wird so durch $\alpha\beta_1\gamma_1\delta\varepsilon$ ersetzt, wo α und β_1 durch P gehen. In derselben Weise ersetzen wir nun $\gamma_1\delta$ durch $\gamma_2\delta_1$, wo γ_2 durch P geht. Und wir haben dann das ursprüngliche System in $\alpha\beta_1\gamma_2\delta_1\varepsilon$ verwandelt, wo $\alpha, \beta_1, \gamma_2$ durch P gehen. Schliesslich wird $\delta_1\varepsilon$ durch $\delta_2\varepsilon_1$ ersetzt, wo δ_2 durch P geht, und wir erhalten so statt der ursprünglichen Folge eine neue Folge $\alpha\beta_1\gamma_2\delta_2\varepsilon_1$, wo die 4 ersten Ebenen durch P gehen.

Den vorhergehenden Untersuchungen zufolge lassen sich nun diese 4 Ebenen durch zwei andere ξ, η ersetzen, und wir erhalten danach

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \xi\eta\varepsilon_1,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Es ergibt sich schliesslich hieraus, dass eine Folge von einer geraden Anzahl von Ebenenspiegelungen sich immer auf 4 (oder 2 oder 0) Ebenenspiegelungen reduzieren lässt; und ebenso, dass eine Folge von einer ungeraden Anzahl von Ebenenspiegelungen sich auf 3 (oder 1) Ebenenspiegelungen reduzieren lässt.

Ferner zeigt sich, dass eine Folge einer geraden Anzahl von Ebenenspiegelungen nie durch eine Folge einer ungeraden Anzahl von Ebenenspiegelungen ersetzt werden kann. Es müsste dann die Aufeinanderfolge von 3 Ebenenspiegelungen mit der Identität gleichwertig sein, was unmöglich ist.

Es zerfällt also die ganze Gruppe von Transporten im R_3 in zwei verschiedene Klassen:

1°. Direkte Transporte (»In-Bewegungen«), welche durch eine gerade Anzahl Ebenenspiegelungen (4, 2, 0) dargestellt werden können, und

2°. Inverse Transporte (»Um-Bewegungen«), welche durch eine ungerade Anzahl Ebenenspiegelungen (3, 1) dargestellt werden können.

Wir wollen nun eine andere Reduktion des allgemeinen Transportes im R_3 beschreiben.

Es gehe der Punkt A durch τ in A_1 über. Durch Wiederholungen des Transportes gehe A_1 in A_2 und A_2 in A_3 über, wobei wir voraussetzen wollen, dass A_1, A_2, A_3 von A verschieden sind. (Die hierbei ausgeschlossenen Fälle werden immer Fixpunkte darbieten.)

Wir legen eine Gerade g durch A und A_1 (eindeutig oder nicht). Diese Gerade wird durch τ in eine Gerade g_1 durch A_1 und A_2 übergeführt, welche durch τ in eine Gerade g_2 durch A_2 und A_3 weitergeführt wird. Wir legen ferner eine Ebene α_1 durch g und g_1. Diese wird durch τ in eine Ebene α_2 durch g_1 und g_2 übergeführt.

In α_1 bestimmen wir die Spiegelungsachse a_1 der beiden kongruenten Punktreihen $A_1A\cdots$ und $A_1A_2\cdots$ auf den Geraden g und g_1. Die Achsenspiegelung a_1 führt nun AA_1A_2 in A_2A_1A über, und letzteres System lässt sich dann in $A_1A_2A_3$ überführen durch eine weitere Achsenspiegelung a_2, deren Achse a_2 durch den Mittelpunkt von A_1A_2 geht, senkrecht auf der Geraden g_1 steht und in einer Spiegelungsebene von α_1 und α_2 liegt, m. a. W. das System $AA_1A_2gg_1\alpha_1$ geht durch die Transformation a_1a_2 in $A_1A_2A_3g_1g_2\alpha_2$ über. Hieraus folgt aber entweder

$$\tau = a_1a_2,$$

oder

$$\tau = a_1a_2\alpha_2 \text{ oder } \alpha_1a_1a_2.$$

Wählt man im letzteren Falle den Ausdruck $\alpha_1a_1a_2$, und ersetzt man dann α_1a_1 durch eine Spiegelung α, deren Ebene durch a_1 geht und senkrecht zu α_1 steht, hat man also das folgende Resultat:

Der allgemeine Transport τ im R_3 lässt sich durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen ersetzen, nämlich entweder zwei Achsenspiegelungen a_1, a_2 oder eine Spiegelung α und eine Achsenspiegelung a_2. Dass man im letzteren Falle auch die Achsenspiegelung a_1 und eine nachfolgende Ebenenspiegelung α' wählen kann, wo α' die Spiegelungsebene von $A_2A_1g_1$ und $A_2A_3g_2$ ist, ist einleuchtend.

Da jede Achsenspiegelung durch zwei Ebenenspiegelungen (deren Ebenen durch die Achse gehen und senkrecht zueinander sind) ersetzt werden kann, kommen wir im Falle $\tau = a_1a_2$ zu 4 Ebenenspiegelungen, und im Falle $\tau = \alpha a_2$ zu 3. Also:

Satz 31. *Jeder direkter Transport im R_3 lässt sich auf zwei Achsenspiegelungen a_1, a_2 zurückführen; jeder inverser Transport hingegen auf eine Ebenenspiegelung und eine Achsenspiegelung, oder umgekehrt.*

Wir betrachten nun näher den ersteren Fall, $\tau = a_1a_2$. Das Geradenpaar a_1, a_2 kann nach den obigen Entwicklungen in mannigfacher Weise durch ein anderes Paar b_1, b_2 ersetzt werden, wobei man verlangen kann, dass eine der Geraden, etwa b_1, durch einen gegebenen Punkt P gehen soll. Um das zu zeigen, bestimmen wir die Punkte

$$P_1 = P^{a_1a_2}, \quad P_2 = P^{a_2a_1}.$$

Die Spiegelungsachse von $PP_1\cdots$ und $PP_2\cdots$ liefert dann die gesuchte Gerade b_1, wobei wir jedoch der Eindeutigkeit halber voraussezten müssen, dass P und P_1 (oder P und P_2) Fernpunkte sind, welche Bedingung immer erfüllt ist, wenn a_1 und a_2 nicht benachbart sind.

Gleichzeitig haben wir die Aufgabe gelöst, durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade b_1 zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden zusammen einen involutorischen Transport $b_1a_1a_2$, und zwar eine Achsenspiegelung darstellt.

Haben a_1, a_2 eine gemeinsame Normale, so hat b_1 (und b_2) dieselbe Normale. Der Transport $\tau = a_1a_2$ $(= b_1b_2)$ ist dann eine Schraubung um diese Normale, in Spezialfällen eine Drehung oder Schiebung.

§ 6. Die Geometrie des R_n.

Für höhere Räume R_n $(n > 3)$ können wir genau dieselbe Methode wie für R_3 benutzen.

Es liege im R_n ein n-Kreuz $a_1a_2\cdots a_n$ mit dem Scheitel O vor, wo a_1 die einzige gemeinsame Normale von $a_2,\cdots a_n$ ist. Durch Bewegungen lassen sich neue n-Kreuze aus dem gegebenen ableiten, und es lässt sich zeigen, dass alle n-Kreuze kongruent sind. Fassen wir in der Tat ein beliebiges n-Kreuz $b_1b_2\cdots b_n$ in die Augen. Wir können gleich durch eine Punktspiegelung erzielen, dass sein Scheitel in O übergeht, und wir denken uns deshalb das Kreuz schon in dieser Lage vorgelegt. Um dann b_1 in a_1 überzuführen, benützen wir eine Umwendung um eine Spiegelungsachse von a_1 und b_1; das setzt allerdings voraus, dass diese Geraden Kreuzgeraden sind, aber wenn sie Schmieggeraden wären, könnte man zuerst b_1 in a_2 überführen, und nachher weiter in a_1. Wir denken uns nun das Kreuz $b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$ schon in eine Lage gebracht, wo $b_1 = a_1$. Die Gerade b_2 soll nun in a_2 hinüber; das geschieht aber wieder durch eine Umwendung, nämlich um eine Spiegelungsachse von a_2 und b_2; bei dieser Umwendung bleibt b_1 in a_1 liegen, und wir haben nun eine Lage des b-Kreuzes, wo $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, erhalten. (Sollte a_2 und b_2 Schmieggeraden sein, führt man zuerst b_2 in a_3 über und dann weiter in a_2.) Dieser Vorgang lässt sich unmittelbar fortsetzen bis das Kreuz $b_1 b_2 \cdots b_n$ schliesslich mit dem Kreuz $a_1 a_2 \cdots a_n$ zur Deckung gebracht ist.

Wir wollen nun das System Σ aller Fixpunkte des Transportes Oa_1 untersuchen. Unsere Betrachtungen sind den früheren ganz analog (§ 4). Das gesuchte System Σ ist der Ort der Normalen zu a_1 in O und soll sonach als Normalraum von a_1 in O bezeichnet werden. Es wird durch jeden seiner Punkte in sich selbst gespiegelt. Durch jeden Punkt P von Σ geht eine Normale zu Σ, d. h. eine Gerade, deren Normalen in P in Σ gelegen sind. Durch Spiegelung um eine beliebige seiner Geraden geht Σ in sich selbst über. Alles dies wird ganz wie die entsprechenden Tatsachen im R_3 nachgewiesen.

Ebenso leicht ist es zu beweisen, dass in Σ in jedem Punkt einer Geraden g ein $(n-2)$-Kreuz von Normalen errichtet werden kann. Hierbei brauchen wir nur denjenigen Spezialfall zu betrachten, wo die in Rede stehende Gerade eine Normale r zu a_1 in O ist, indem wir zeigen, dass sich ein $(n-2)$-Kreuz von gemeinsamen Normalen zu a_1 und r in O bestimmen lässt. Das geht aber schon aus den eingangs angestellten Betrachtungen hervor.

Durch jeden Punkt P ausserhalb Σ kann eine und nur eine Normale zu Σ gezogen werden. Der Transport Oa_1 führt nämlich P in einen neuen Punkt P_1 über; im Mittelpunkt S von PP_1 errichten wir eine Normale s zu Σ. Durch den Transport Ss geht nun P_1 in P über; aber schon durch die Spiegelung S geht P_1 in P über, und bei der Achsenspiegelung s muss also P stehen bleiben, d. h. die Gerade s geht durch P. Dass nur eine Normale von Σ durch P existiert, folgt aus der Eindeutigkeit des Mittelpunktes S und der Normalen s.

Durch jeden Punkt P ausserhalb einer vorgelegten Geraden g geht ein und nur ein Normalraum zu g. Nach Voraussetzung existiert nämlich eine Normale durch P zu g. Sie schneidet g in einem Punkt Q. Der Normalraum zu g in Q ist dann der gesuchte. Er ist eindeutig, weil Q eindeutig ist.

Die Normalräume $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ der Geraden $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ des Kreuzes $a_1 a_2 \cdots a_n$ im Scheitel O haben die Gerade a_n und ausserhalb dieser keinen weiteren Punkt gemein. Durch jeden gemeinsamen Punkt P von $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ lassen sich nämlich Senkrechten auf $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ mit demselben Fusspunkt O fällen. Sind O, P Fernpunkte, müssen also diese Senkrechten zusammenfallen, d. h. die Gerade OP fällt nach a_n. Sollten hingegen O, P Nachbarpunkte sein, so könnte man auf a_n einen neuen Punkt O_1 statt O derart wählen, dass O_1, P Fernpunkte wären, und in O_1 könnten dann Normalen $a'_1, a'_2, \cdots, a'_{n-1}$ auf $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ errichtet werden, wonach wir durch Wiederholung unserer Betrachtung für das neue System sofort schliessen, dass die Gerade O_1P mit a_n zusammenfallen muss.

In ähnlicher Weise untersuchen wir den gemeinsamen Raum der $n-2$ Normalräume $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-2}$ zu $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$ in O. Es zeigt sich hier ganz analog, dass dieser Raum aus allen den gemeinsamen Normalen zu $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$ besteht. Und ebenso leicht erhält man das allgemeine Resultat, dass der gemeinsame Raum von den r Normalräumen zu $a_1, a_2, \cdots, a_r$, in O aus allen gemeinsamen Normalen zu $a_1, a_2, \cdots, a_r$ besteht. Der so bestimmte Raum soll als Normalraum des Kreuzes $a_1 a_2 \cdots a_r$ bezeichnet werden. Er enthält das reziproke Kreuz $a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n$ und soll auch Σ-Raum dieses Kreuzes (in Zeichen: $\Sigma(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n)$) genannt werden. Umgekehrt wird dann natürlich der Σ-Raum von $a_1 a_2 \cdots a_r$ den Normalraum des Kreuzes $a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n$ bedeuten.

Es soll nun bewiesen werden, dass der Σ-Raum eines r-Kreuzes ein r-dimensionaler Raum ist. Die vorhergehenden Untersuchungen haben die meisten hierzu nötigen Grundelemente zu Wege gebracht. Es fehlt nur noch zu beweisen, dass in einem Σ-Raum eines jeden r-Kreuzes der Satz gültig ist, dass von jedem

Punkt P ausserhalb einer Geraden g eine Senkrechte auf g gefällt werden kann. Das haben wir schon früher (Satz 16) für den Fall $n = 3$, $r = 2$, bewiesen. Unser Beweis lässt sich aber unmittelbar für ein beliebiges n und $r = 2$ verallgemeinern. Und für allgemeine Werte von n und r können wir analog vorgehen:

Es sei in $\Sigma(a_1 a_2 \cdots a_r)$ ein beliebiger Punkt P vorgelegt, von welchem eine Senkrechte auf a_1 in Σ gefällt werden soll. Wir wissen, dass im Totalraum R_n jedenfalls eine Senkrechte PQ mit eindeutigem Fusspunkt Q auf a_1 gefällt werden kann. In Q errichten wir einen Normalraum zu Σ und schneiden ihn mit dem Normalraum zu a_1 in Q. Der Schnittraum ist ein Σ-Raum ω, welcher durch $(r-1)$ zu einander senkrechte Normalen zu a_1 im Punkte Q bestimmt ist. Dieser Schnittraum enthält so eine Gerade, welcher P mit Q verbindet, und diese Gerade ist das gesuchte Lot von P auf a_1.

Wir resumieren:

Im R_n bestimmt jedes r-Kreuz $a_1 a_2 \cdots a_r$, $1 < r < n$, einen Raum von r Dimensionen Σ, welcher das Kreuz enthält.

Alle Normalen des Kreuzes bestimmen einen Raum Σ' von $n-r$ Dimensionen, den Normalraum des Kreuzes oder des Raumes Σ im Scheitel O. Die beiden Räume Σ, Σ' sind Normalräume (reziproke Räume) zueinander in O. Sie haben nur den Punkt O gemein.

In jedem Punkt von Σ lässt sich ein Normalraum von $n-r$ Dimensionen errichten. Längs einer geraden Linie g in Σ erzeugen sonach die Normalräume zu Σ einen Raum von $n-r+1$ Dimensionen, senkrecht zu Σ längs g. Und allgemeiner: Längs eines Raumes von p Dimensionen in Σ bilden die Normalräume zu Σ einen Raum von $n-r+p$ Dimensionen, senkrecht zu Σ.

Durch jeden Punkt ausserhalb Σ geht eine Normale zu Σ.

Irgend zwei Punkte P, Q von Σ lassen sich durch eine gerade Linie, welche ganz in Σ enthalten ist, verbinden. Es folgt hieraus sofort, dass irgend zwei Punkte P, Q in R_n $(n > 2)$ mindestens eine Verbindungsgerade haben.

Wenn zwei Geraden einen Punkt gemein haben, gibt es mindestens eine Ebene, welche die beiden Geraden enthält. Dies wurde schon (S. 17) für den R_3 bewiesen, und der Beweis ist für höhere Räume ganz analog. Der Satz lässt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Satz 32. Wenn r Geraden $g_1, g_2, \cdots g_r$ durch ein und denselben Punkt O gehen, so gibt es wenigstens einen Raum von r Dimensionen, welcher die Geraden enthält.

Für ein Geradensystem, welches ein r-Kreuz bildet, ist die Sache schon erledigt. In diesem Falle gibt es einen und nur einen Raum R_r, welcher die Geraden enthält. In den anderen Fällen lässt sich das Geradensystem »orthogonalisieren«, d. h. wir können es durch ein anderes System, welches ein r-Kreuz bildet, ersetzen. Dies wird in folgender Weise ausgeführt:

Durch g_1 legen wir ein System von Ebenen $g_1 g_2, g_1 g_3, \cdots, g_1 g_r$, welche $g_2, g_3, \cdots, g_r$ enthalten. In diesen Ebenen bestimmen wir nun diejenigen Geraden $g_2', g_3', \cdots g_r'$, welche senkrecht auf g_1 in O stehen. Das gegebene System wird dann zunächst durch $g_1, g_2', g_3', \cdots, g_r'$ ersetzt.

Danach legen wir ein neues System von Ebenen $g_2' g_3'$, $g_2' g_4', \cdots, g_2' g_r'$, welche senkrecht auf g_1 stehen, und in diesen Ebenen errichten wir die Normalen $g_3'', g_4'', \cdots, g_r''$ zu g_2' in O. Hierdurch erhalten wir ein drittes Geradensystem

$$g_1 g_2' g_3'' g_4'' \cdots g_r'',$$

wo die 3 ersten ein 3-Kreuz bilden.

Auf diese Weise gehen wir nun weiter. Das nächste Mal erhalten wir so ein System

$$g_1 g_2' g_3'' g_4''' \cdots g_r''',$$

wo die ersten 4 Geraden ein 4-Kreuz bilden. Und schliesslich erhalten wir ein r-Kreuz

$$g_1 g_2' g_3'' \cdots g_r^{(r-1)},$$

und der gesuchte Raum wird dann durch dieses Kreuz bestimmt.

Treten Zusammenfälle der entstehenden Geraden ein, so kann man das orthogonalisierte System mit entsprechend kleinerer Dimensionenzahl bilden, und das vorgelegte Geradensystem ist dann in einem Raum, dessen Dimensionenzahl $< r$ ist, enthalten.

Es folgt nun ferner:

Satz 33. Durch ein System von $r+1$ Punkten im R_n, $r<n$, kann mindestens **ein** Raum R_r gelegt werden. Wenn nur ein Raum existiert, sollen die Punkte als freie Punkte (freies System von Punkten) bezeichnet werden.

In einem freien System von $r+1$ Punkten haben je zwei Punkte eine eindeutige Verbindungsgerade, je 3 Punkte eine eindeutige Verbindungsebene, je 4 Punkte einen eindeutigen Verbindungsraum von 3 Dimensionen, u. s. w.

In ähnlicher Weise spricht man von einem freien System von r Geraden durch einen Punkt O (r freien Geraden durch O), wenn die Geraden einen R_r eindeutig bestimmen.

§ 7. Involutorische Transporte im R_n.

Satz 34. Wenn bei einem Transport alle Punkte der Geraden eines r-Kreuzes $a_1a_2\cdots a_r$ fest liegen, so liegen alle Punkte des Raumes $\Sigma(a_1a_2\cdots a_r)$ fest.

Der Satz ist schon im Falle $r=2$ bewiesen worden (Satz 3), und für höhere Werte von r lässt er sich durch Induktion beweisen. Erstens im Falle $r=3$: Von einem beliebigen Punkt P fällen wir die Normalen PP_1, PP_2, PP_3 auf die Ebenen a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2. Die Fusspunkte P_1, P_2, P_3 liegen dann fest, also auch die Normalen selbst, und wenn P der einzige gemeinsame Punkt dieser Normalen ist, so liegt auch P fest. Aber auch in dem Falle, wo die Normalen Nachbargeraden sind, liegt P fest; sollte nämlich P durch den vorgelegten Transport in einen andern Punkt Q übergehen, so wäre Q das Spiegelbild von P bezüglich jeder der Ebenen a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2. P_1, P_2, P_3 müssten dann alle im Mittelpunkt von PQ fallen, was ausgeschlossen ist.

Wie man nun zu höheren Werten von r weiter geht, ist klar.

Ist r eine ungerade Zahl, so lässt der Transport $a_1a_2\cdots a_r$ alle Punkte der Geraden des Kreuzes stehen, d. h. alle Punkte des Raumes $\Sigma(a_1a_2\cdots a_r)$ sind Fixpunkte dieses Transports. Jede Normale des Kreuzes wird hingegen durch den Scheitel O des Kreuzes und jede Normale des Raumes Σ durch ihren Fusspunkt in sich gespiegelt. Der Transport soll als Spiegelung um Σ bezeichnet werden.

Ist r hingegen eine gerade Zahl, so lässt der Transport $a_1a_2\cdots a_r$ alle Punkte im Normalraum Σ' des Kreuzes $a_1a_2\cdots a_r$ fest stehen, während der Raum Σ durch O in sich gespiegelt wird. Der Transport ist dann eine Spiegelung um den Normalraum Σ' von Σ. Also:

Satz 35. Die Spiegelung um Σ $(a_1a_2\cdots a_r)$ lässt sich entweder durch die Transformation $Oa_1a_2\cdots a_r$ oder $a_1a_2\cdots a_r$ darstellen, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Für den Totalraum R_n bedeutet $a_1a_2\cdots a_n$, wenn n ungerade ist, die Identität, und wenn n gerade ist, die Punktspiegelung O.

Indem wir die Spiegelungen um Σ und Σ' mit denselben Buchstaben bezeichnen wie die Räume selbst, können wir schreiben:

$$\Sigma = O^{r-1}a_1a_2\cdots a_r, \quad \Sigma' = O^{n-r-1}a_{r+1}a_{r+2}\cdots a_n.$$

Es folgt hieraus

$$\Sigma\Sigma' = O^n a_1a_2\cdots a_n = O,$$

oder

$$\Sigma' = O\Sigma.$$

Satz 36. Ausser der Identität sind die Spiegelungen (um einen Punkt, eine Achse, eine Ebene u. s. w., um einen R_r) die einzigen involutorischen Transporte. Der Beweis wird durch Induktion geführt. In der Ebene und im R_3 ist die Sache klar: für R_n brauchen wir so nur den Satz zu beweisen unter der Voraussetzung, dass der Satz schon für R_{n-1} gültig ist. Es sei nun τ ein beliebiger involutorischer Transport in R_n, wobei ein Punkt A in einen anderen Punkt A_1 übergeht. Der Mittelpunkt O von AA_1 wird dann stehen bleiben. Von O aus wählen wir zwei einander entsprechende, nicht zusammenfallende Punktreihen $OP\cdots$ und $OP_1\cdots$ Wenn die Träger nun Kreuzgeraden sind, haben die beiden Reihen eine eindeutig bestimmte Spiegelungsachse a_1; wenn sie Nachbargeraden sind, und einander entsprechende Punkte Nachbarpunkte oder zusammenfallend sind, so haben die Reihen auch eine eindeutig bestimmte Spiegelungsachse a_1. Wenn die beiden Reihen hingegen eine solche Lage haben, dass die Spiegelung O die eine Reihe in eine Nachbarreihe der anderen überführt, so fügen wir die Spiegelung O zu dem vorgelegten Transport τ hinzu und fassen sodann statt τ den neuen involutorischen Transport $O\tau$ ins Auge, um unsere Untersuchungen auf den vorigen Fall zurückführen zu können.

Die Achse a_1 steht punktweise fest. Eine Hyperebene (Raum von $n-1$ Dimensionen) α durch O senkrecht zu a_1 wird nun durch τ bezw. $O\tau$ in sich selbst übergeführt, wobei O ein fester Punkt ist. Der Transport in α ist nach Voraussetzung eine Spiegelung σ. Es folgt aber hieraus, dass τ bezw. $O\tau$ mit dem Transport $\alpha\sigma$ gleichwertig ist. Dieser Transport ist aber einer Spiegelung um den reziproken Raum σ' von σ in α gleichwertig, d. h.

$$\tau \text{ oder } O\tau = \sigma',$$

also entweder $\tau = \sigma'$ oder $\tau = O\sigma' = \sigma''$, wo σ'' den reziproken Raum zu σ' im vorgelegten Raum R_n bedeutet. Und hiermit ist unser Beweis zu Ende gebracht.

Soll das Produkt $\alpha\beta$ zweier involutorischer Transporte α, β wieder ein involutorischer Transport sein, also $\alpha\beta = \beta\alpha$, ist hierzu notwendig und hinreichend, dass einer der beiden Räume durch Spiegelung um den anderen in sich selbst übergeht. Es können dann zwei Fälle vorkommen:

1°. Der eine Raum ist in dem anderen ganz enthalten;

2°. Die beiden Räume sind senkrecht zueinander, d. h. jeder von ihnen ist der Ort von Normalen des anderen, welche dem Sammelraum $S(\alpha, \beta)$ angehören.

Ist imbesonderen α ein Punkt O, so muss dieser Punkt in β enthalten sein; das Produkt $\alpha\beta$ wird dann der Spiegelung um den Normalraum zu β in O gleichwertig.

Ist α eine Gerade, β eine Ebene, welche α enthält, und ist der Totalraum von 3 Dimensionen, so ist das Produkt $\alpha\beta$ eine Spiegelung um eine Ebene, welche senkrecht auf β längs α steht. Ist der Totalraum R_n, $n>3$, so wird $\alpha\beta$ eine Spiegelung um einen R_{n-1} darstellen, welcher längs α senkrecht auf β steht.

Als weiteres Beispiel verweisen wir auf die früher besprochenen reziproken Räume Σ, Σ' mit dem gemeinsamen Punkt O. Hier gilt, wie wir gesehen haben, $\Sigma\Sigma' = O$, wenn Sammelraum und Totalraum identisch sind. Ist dies nicht der Fall, müssen wir aber schreiben:

$$\Sigma\Sigma' = OS(\Sigma, \Sigma'),$$

wo $S(\Sigma, \Sigma')$ den Sammelraum bezeichnet.

Satz 37. Im Allgemeinen gilt, dass ein involutorisches Produkt $\alpha\beta$ von zwei Spiegelungen α, β eine Spiegelung darstellen muss, deren Spiegelungsraum als Normalraum des Sammelraumes $S(\alpha, \beta)$ längs des Durchschnittsraums $D(\alpha, \beta)$ bestimmt werden kann.

Wenn im besonderen der Sammelraum mit dem Totalraum zusammenfällt, so fällt der Spiegelungsraum mit dem Schnittraum zusammen. Einfache Beispiele hat man, wenn α, β zwei zueinander senkrechte Ebenen sind, welche eine Gerade gemein haben und in einem R_n liegen; oder wenn α eine Ebene, β ein R_3 und $D(\alpha, \beta)$ eine Gerade, und der Totalraum R_n ist, $n>3$.

Satz 38. Die Aufeinanderfolge von drei Achsenspiegelungen, deren Achsen a, b, c in ein und derselben Ebene α liegen und durch ein und denselben Punkt O gehen, lässt sich durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzen, deren Achse d durch O geht und in der Ebene α liegt.

Beweis. In der Ebene α bestimmen wir eine Spiegelungsachse x der beiden Geraden a, c, und die Gerade d wird dann von b durch Spiegelung um x abgeleitet. Aus der Geometrie der Ebene wissen wir nämlich zunächst, dass alle Punkte in α bei dem Transporte $abcd$ Fixpunkte sind. Da ferner alle Normalen zu α im Punkte O durch denselben Transport 4 mal in sich gespiegelt werden, und somit punktweise stehen bleiben, so folgt, dass der ganze Raum R_n punktweise fest bleibt. Und hiermit ist der Satz bewiesen.

Satz 39. Die Aufeinanderfolge von 4 Achsenspiegelungen, deren Achsen a, b, c, d in ein und demselben R_3 liegen und durch ein und denselben Punkt O gehen, lässt sich durch eine Folge von 2 Achsenspiegelungen, deren Achsen durch O gehen und demselben R_3 angehören, ersetzen.

Beweis. Wir legen zwei Ebenen, eine durch a, b, eine andere durch c, d, und bestimmen (bezw. wählen) eine gemeinsame Gerade e dieser Ebenen. Dem vorigen Satz zufolge können wir dann schreiben

$$abe = p, \quad ecd = q,$$

wo p, q zwei Geraden in den beiden Ebenen sind. Es folgt dann

$$abcd = (abe)(ecd) = pq.$$

Auf dieselbe Weise gehen wir weiter:

Satz 40. Die Aufeinanderfolge von 5 Achsenspiegelungen, deren Achsen a, b, c, d, e in einem R_4 liegen und durch denselben Punkt O gehen, kann durch eine Folge von 3 Achsenspiegelungen, deren Achsen durch O gehen und in demselben R_4 liegen, ersetzt werden.

Beweis. Ein 3-Raum abc und eine Ebene de haben eine gemeinsame Gerade f (eindeutig oder nicht), und den vorhergehenden Sätzen zufolge können wir dann schreiben:

$$abcf = pq, \quad fde = r,$$

wo p, q Achsen im 3-Raum abc, und r eine Achse in der Ebene de bedeuten. Hieraus folgt aber

$$abcde = (abcf)(fde) = pqr.$$

Durch Induktion erhalten wir schliesslich den Satz:

Satz 41. Die Aufeinanderfolge von $s+1$ Achsenspiegelungen, deren Achsen in einem R_s liegen und durch einen Punkt O gehen, lässt sich durch eine Folge von $s-1$ Achsenspiegelungen, deren Achsen durch O gehen und in demselben R_s liegen, ersetzen.

Und hieraus folgt unmittelbar:

Satz 42. Die Aufeinanderfolge von s Achsenspiegelungen, deren Achsen $a_1, a_2, \cdots a_s$, in einem vorgegebenen R_s liegen und durch denselben Punkt O gehen, lässt sich in diesem R_s durch eine andere Folge von s Achsenspiegelungen $b_1, b_2, \cdots b_s$ ersetzen, wobei die erste Achse b_1 beliebig durch O gewählt werden kann.

Wir können nämlich schreiben:

$$b_1 a_1 a_2 \cdots a_s = b_2 b_3 \cdots b_s,$$

wo b_2 in einem gewissen Raum R_{s-1} frei durch O gewählt werden kann, und nach dieser Wahl b_3 in einem gewissen Raum R_{s-2} frei durch O gewählt werden kann, u. s. w.

Wir möchten nun die folgende Frage untersuchen: Wann können s Achsenspiegelungen, deren Achsen $a_1, a_2, \cdots a_s$ durch denselben Punkt O gehen und ein freies System bilden, einander aufheben?

Zunächst ersieht man, dass die Achsen notwendig paarweise auf einander senkrecht stehen müssen. Da nämlich z. B. $a_1 = a_2 a_3 \cdots a_s$, und dieser Transport den Raum $a_2 \cdots a_s$ stehen lässt, so muss dieser Raum senkrecht zu a_1 stehen, d. h. alle Geraden $a_2, a_3, \cdots a_s$ sind senkrecht zu a_1. Auf diese Weise ergibt sich, dass jede der Geraden senkrecht zu den anderen steht. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend. Es wurde nämlich früher gezeigt, dass innerhalb des durch das s-Kreuz $a_1 a_2 \cdots a_s$ bestimmten R_s, wenn s eine gerade Zahl ist, $a_1 a_2 \cdots a_s = O$, und wenn s ungerade ist, $a_1 a_2 \cdots, a_s = 1$. Und wir haben so die Antwort auf unsere Frage gefunden:

Satz 43. Die Achsenspiegelungen $a_1, a_2, \cdots, a_s$, deren Achsen ein freies Geradensystem durch denselben Punkt O bilden, können dann und nur dann einander aufheben, wenn die Achsen ein s-Kreuz bilden, und s eine ungerade Zahl ist, wozu noch die Bedingung hinzuzufügen ist, dass der Transportraum mit dem durch das Geradensystem bestimmten R_s identisch ist.

Es folgt nun hieraus, dass in einem Raum R_n von gerader Dimensionenzahl $n-1$ Achsenspiegelungen durch denselben Punkt einander nie aufheben können.

Bilden die Achsen ein freies System, folgt diese Tatsache direkt aus dem vorigen Satz; und liegen sie in einem R_{n-2}, kann ihre Anzahl nach dem Reduktionssatz zu $n-3$ herabgesetzt werden, und wir haben dann nur eine Wiederholung der ursprünglichen Aufgabe für eine kleinere Dimensionenzahl. Gehen wir auf diese Weise weiter, so kommen wir schliesslich zu dem Falle $n = 2$, und dann ist die Sache einleuchtend.

Einige Bemerkungen über Punktspiegelungen sollen hier hinzugefügt werden. Zwei Punktspiegelungen O, P erzeugen eine Transformation OP, welche jede Ebene durch O und P stehen lässt (Schiebung längs einer Geraden OP). Zwei Normalen o, p der Geraden OP in O und P und in ein und derselben Ebene ε gelegen bestimmen zwei Spiegelungen, deren Produkt op innerhalb der Ebene gleich dem Produkt OP ist. Dieselbe Transformationsgleichung

$$op = OP$$

besteht aber auch im Totalraum R_n. Es gilt nämlich zunächst:

$$Pp = Oo,$$

weil beide Transformationen Pp und Oo eine Spiegelung um einen Hyperraum $\perp p$ in P und $\perp o$ in O darstellen. Hieraus folgt nun sofort $op = OP$, w. z. b. w.

Eine Folge von zwei Punktspiegelungen kann demnach immer durch eine Folge von zwei Achsenspiegelungen ersetzt werden. Ferner lässt sich jede Transformation aP immer auf die Form Qb bringen, indem man ein Lot PQ auf a fällen und dann auf der Normalhyperebene von a durch P eine Normale b in P errichten kann. Es folgt dann $bP = Qa$, und also gerade $Qb = aP$. Es gilt also:

Satz 44. Jede Folge von Punkt- und Achsenspiegelungen lässt sich immer so umschreiben, dass höchstens eine Punktspiegelung (als erstes oder letztes Glied der Folge) auftritt.

§ 8. Transporte im R_n mit einem Fixpunkt.

Im R_n seien zwei n-Kreuze mit demselben Scheitel O, $a_1 a_2 \cdots a_n$ und $b_1 b_2 \cdots b_n$, vorgegeben. Wir wollen denjenigen Transport bestimmen, welcher das erste Kreuz in das andere überführt, derart, dass auf entsprechenden Geraden, a_1 und b_1, a_2 und $b_2, \cdots a_n$ und b_n, vorgeschriebene von O ausgehende kongruente Punktreihen: $OA_1 \cdots$ und $OB_1 \cdots$, $OA_2 \cdots$ und $OB_2 \cdots, \cdots$, $OA_n \cdots$ und $OB_n \cdots$, in einander übergehen. Wir denken uns also kongruente Punktepaare OA_1 und OB_1, OA_2 und OB_2, u.s.w. auf die Geraden abgetragen, und wir bezeichnen die zu A_i, B_i durch die Punktspiegelung O entsprechenden Punkte mit $\overline{A}_i, \overline{B}_i$. Der Bequemlichkeit halber soll dabei vorausgesetzt werden, dass O und A_i (und somit O und B_i, O und $\overline{A}_i$, O und $\overline{B}_i$) Fernpunkte sind.

Durch eine erste Spiegelung x_1 um die Spiegelungsachse x_1 der beiden Reihen $OA_1 \cdots$ und $OB_1 \cdots$ führen wir das System $O(A_1 A_2 \cdots A_n)$ in $O(B_1 A_2' \cdots A_n')$ über. Wir bestimmen danach eine zweite Spiegelung x_2 derart, dass OA_2' in $O\overline{B}_2$ übergeht, wonach der Transport Ox_2 unser System $O(B_1 A_2' \cdots A_n')$ in eine neue Lage $O(B_1 B_2 A_3'' \cdots A_n'')$ überführt. Wenn nun ferner die Spiegelung x_3 das Paar OA_3'' in $O\overline{B}_3$ überführt, so wird der Transport Ox_3 das System $O(B_1 B_2 A_3'' \cdots A_n'')$ in das neue System $O(B_1 B_2 B_3 A_4''' \cdots A_n''')$ überführen.

Auf diese Weise kommt man nach den Transporten

$$x_1,\ Ox_2,\ Ox_3, \cdots,\ Ox_{n-1}$$

von dem ursprünglichen System $O(A_1 A_2 \cdots A_n)$ zum System $O(B_1 B_2 \cdots B_{n-1} B_n)$ oder $O(B_1 B_2 \cdots B_{n-1} \overline{B}_n)$ d. h. man kommt von dem ersten gegebenen Kreuz zum anderen hinüber mittels eines der beiden Transporte

$$O^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}, \quad O^{n+1} x_1 x_2 \cdots x_n,$$

wobei $x_n = b_n$.

Diese Darstellung kann noch ein wenig vereinfacht werden, indem wir jeden der beiden Fälle, n gerade oder ungerade, für sich behandeln:

1°. n gerade. Die beiden Resultate können dann so geschrieben werden:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1}, \quad O x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Der letztere Ausdruck lässt sich aber (Satz 35) so schreiben: $a_1 a_2 \cdots a_n\, x_1 x_2 \cdots x_n$, also als eine Folge von $2n$ Achsenspiegelungen. Nach dem Reduktionssatz (Satz 41) lässt sich aber diese Folge zu einer Folge von n Achsenspiegelungen abkürzen. Es gilt also der Satz:

Satz 45. In einem Raum R_n mit gerader Dimensionenzahl lässt sich jeder Transport mit dem Fixpunkt O als eine Folge von n oder $n-1$ Achsenspiegelungen, deren Achsen durch O gehen, darstellen.

Die beiden Möglichkeiten schliessen einander aus, weil eine ungerade Anzahl Achsenspiegelungen durch O einander nicht aufheben können.

2°. n ungerade. Die beiden Resultate können dann so ausgedrückt werden:

$$O x_1 x_2 \cdots x_{n-1}, \quad x_1 x_2 \cdots x_n.$$

In diesem Falle ist aber $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, und der letztere Ausdruck lässt sich dann so schreiben:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 x_2 \cdots x_n a_1 a_2 \cdots a_n,$$

also als Produkt von $2n$ Achsenspiegelungen.

Dem Reduktionssatz zufolge ist diese Anzahl aber auf $n-1$ reduzierbar, und es besteht somit der Satz:

Satz 46. In einem Raume R_n mit ungerader Dimensionenzahl lässt sich jeder Transport mit dem Fixpunkt O entweder als eine Folge von $n-1$ Achsenspiegelungen, deren Achsen durch O gehen oder als eine solche Folge in Verbindung mit der Punktspiegelung O darstellen.

§ 9. Allgemeine Transporte im R_n.

Als Hyperspiegelung im R_n bezeichnen wir eine Spiegelung um einen R_{n-1} (eine Hyperebene im R_n). Ist O ein Punkt der Hyperebene und a die Normale der Hyperebene in diesem Punkt, so wird die Hyperspiegelung durch Oa oder aO dargestellt. Jeder Transport im R_n lässt sich, wie wir im folgenden zeigen werden, aus Hyperspiegelungen zusammensetzen.

Zunächst untersuchen wir die Punktspiegelung O. Ist n eine gerade Zahl, und $a_1 a_2 \cdots a_n$ ein n-Kreuz in O, so gilt, dass $O = a_1 a_2 \cdots a_n$, und somit

$$O = Oa_1 \cdot Oa_2 \cdot \cdots Oa_n = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n,$$

wo α_i die Hyperspiegelung Oa_i bezeichnet. Ist hingegen n eine ungerade Zahl, so ist

$$1 = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

also

$$O = Oa_1 \cdot Oa_2 \cdots Oa_n = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n,$$

d. h.

Satz 47. Die Punktspiegelung O lässt sich in allen Fällen durch eine Folge von Hyperspiegelungen um die Normalräume eines n-Kreuzes in O darstellen.

Mit Hilfe dieser Tatsache folgt unmittelbar aus den Sätzen S. 45—46, dass jeder Transport im R_n mit dem Fixpunkt O durch eine Folge von Hyperspiegelungen dargestellt werden kann, und da jeder Punkt in jeden anderen Punkt durch eine Hyperspiegelung übergehen kann, so lässt sich jeder Transport im R_n als Produkt von Hyperspiegelungen darstellen. Wir wollen nun im folgenden die möglichst kleine Anzahl dieser Hyperspiegelungen bestimmen.

Zu dem Zweck müssen wir zunächst einen Hilfssatz beweisen:

Satz 48. In einer Folge von zwei Hyperspiegelungen α, β können die Hyperebenen α, β durch zwei andere α_1, β_1, von denen die erstere durch einen vorgegebenen Punkt P geht, ersetzt werden.

Der Satz ist im R_3 schon bewiesen worden, und der Beweis für den R_n wird ganz analog geführt: Von P fällen wir die Normalen a, b auf α, β. Eine Ebene ω durch a, b (eindeutig oder nicht) schneidet α, β in zwei Geraden a_1, b_1. Wir wissen dann, dass in dieser Ebene zwei Geraden g, h existieren, wo g durch P geht, und $a_1 b_1 = gh$. Längs g, h können dann zwei Hyperebenen $\perp \omega$ gelegt werden, und hiermit haben wir die beiden gesuchten Hyperebenen α, β gefunden.

Wenn die beiden vorgegebenen Räume α, β einen Punkt (Raum) gemein haben, so müssen die neuen Räume α_1, β_1 denselben Punkt (Raum) gemein haben. Und wenn α, β eine gemeinsame Normale haben, so haben α_1, β_1 dieselbe Normale.

Wir schreiten nun daran, den folgenden allgemeinen Reduktionssatz zu beweisen:

Satz 49. Die Aufeinanderfolge von $n+2$ Hyperspiegelungen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n+2}$ lässt sich immer durch eine Folge von n Hyperspiegelungen ersetzen.

In α_1 wählen wir einen Punkt P_1. Nach dem Hilfssatz können wir dann das Produkt $\alpha_2\alpha_3$ durch ein anderes $\alpha'_2\alpha'_3$ ersetzen, wo die Hyperebene α'_2 durch P_1 geht; ferner das Produkt $\alpha'_3\alpha_4$ durch $\alpha''_3\alpha'_4$, wo α''_3 durch P_1 geht, u. s. w. Durch dieses Verfahren erhalten wir ein neues System von $n+2$ Hyperebenen, von denen die ersten $n+1$ aufeinander folgenden durch den Punkt P_1 gehen, und dieses System ist dem vorgegebenen gleichwertig. Wir wollen deshalb bei unseren Überlegungen gleich voraussetzen, dass das vorgegebene System $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n+2}$ diese Eigenschaft schon besitzt, dass also die Hyperebenen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ den Punkt P_1 gemein haben.

Die beiden Hyperebenen α_1, α_2 haben nun einen R_{n-2} gemein, und in diesem wählen wir ein freies Punktsystem $P_1 P_2 \cdots P_{n-1}$. Nach dem Hilfssatz können wir das Produkt $\alpha_3\alpha_4$ durch ein anderes $\alpha'_3\alpha'_4$ ersetzen, wo α'_3 durch P_2 geht; ferner das Produkt $\alpha'_4\alpha_5$ durch $\alpha''_4\alpha'_5$, wo α''_4 durch P_2 geht, u. s. w., d. h. wir können das ganze Produkt $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}$ so umschreiben, dass die ersten $n-1$ Hyperebenen die beiden Punkte P_1, P_2 gemein haben. Es soll deshalb gleich vorausgesetzt werden, dass die vorgegebenen Hyperebenen diese Bedingung schon erfüllen. Auf diese Weise gehen wir nun weiter. Schliesslich erhalten wir das Resultat, dass das vorgegebene System immer durch ein anderes ersetzt werden kann, in welchem die drei ersten Hyperebenen alle $n-1$ Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$, also einen R_{n-2} gemein haben. Das Produkt der drei entsprechenden Hyperspiegelungen wird aber dann einer einzigen Hyperspiegelung gleichwertig, und unser Satz ist hiermit bewiesen.

Durch ein ähnliches Verfahren ergibt sich

Satz 50. Eine ungerade Anzahl Hyperspiegelungen können einander nicht aufheben.

Es liege nämlich eine Folge von Hyperspiegelungen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, vor. Es lässt sich dann, wie wir schon gesehen haben, eine neue ihr gleichwertige Folge bilden, deren ersten $n-1$ Hyperebenen durch ein und denselben Punkt P_1 gehen. Sollen nun die Hyperspiegelungen einander aufheben, so muss die letzte der Hyperebenen auch durch P_1 gehen. Wir schliessen nun weiter: Soll das Produkt $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = 1$ sein, so gibt es ein gleichwertiges System $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n$, dessen Hyperebenen durch denselben Punkt P_1 gehen. Wählt man dann einen neuen Punkt P_2 in β_1, so zeigt sich durch dasselbe Verfahren, dass ein neues gleichwertiges System $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$ existiert, dessen Hyperebenen alle durch die beiden Punkte P_1, P_2 gehen. Durch Weiterführung dieser Betrachtung ergibt sich so ein dem ursprünglichen gleichwertiges System $\varkappa_1\varkappa_2 \cdots \varkappa_n$, dessen Hyperebenen durch ein und dasselbe freie Punktsystem $P_1P_2 \cdots P_{n-1}$ gehen. Wenn aber n ungerade ist, lässt sich dieses System zu einer einzigen Hyperspiegelung reduzieren, und es kann also niemals der Identität gleichwertig sein.

Aus dem oben gefundenen Reduktionssatz (Satz 49) ergibt sich nun die allgemeine Darstellung der Transporte im R_n mittels Hyperspiegelungen:

Satz 51. Jeder Transport im R_n lässt sich aus höchstens $n+1$ Hyperspiegelungen zusammensetzen.

Satz 52. Ist die kleinste Anzahl von Hyperspiegelungen p, kann man immer eine solche Darstellung wählen, dass die ersten (oder die letzten) $p-1$ Spiegelungshyperebenen durch einen vorgegebenen Punkt hindurch gehen.

Die Transporte zerfallen in zwei Klassen: die direkten Transporte (»In-Bewegungen«), welche durch eine gerade Anzahl Hyperspiegelungen, und die inversen Transporte (»Um-Bewegungen«), welche durch eine ungerade Anzahl Hyperspiegelungen, darstellbar sind. Dass die beiden Klassen einander ausschliessen, folgt aus dem obigen Satz 50, wonach eine ungerade Anzahl Hyperspiegelungen einander nicht aufheben können.

Indem wir nun schliesslich an die Sätze 45—46, S. 35—36 erinnern, können wir die folgenden Sätze aufstellen:

Satz 53. In einem Raum R_n von gerader Dimensionenzahl lässt sich jeder $\left\{\begin{matrix}\text{direkter}\\ \text{inverser}\end{matrix}\right\}$ Transport aus einer $\left\{\begin{matrix}\text{Hyperspiegelung}\\ \text{Punktspiegelung}\end{matrix}\right\}$ und $n-1$ Achsenspiegelungen, deren Achsen durch ein und denselben Punkt O gehen, darstellen. Der Punkt O kann dabei beliebig gewählt werden.

Satz 54. In einem Raum R_n von ungerader Dimensionenzahl lässt sich jeder direkte Transport aus $n-1$ Achsenspiegelungen, von denen mindestens $n-2$ durch ein und denselben Punkt O gehen, zusammensetzen; und jeder inverser Transport aus einer Punkt- oder Hyperspiegelung nachgefolgt von $n-1$ Achsenspiegelungen, deren Achsen durch ein und denselben Punkt O gehen. In beiden Fällen kann der Punkt O beliebig gewählt werden.

Um diese Sätze zu beweisen, betrachten wir zunächst denjenigen Punkt P, welcher bei dem vorliegenden Transport τ in O übergeht. Der Mittelpunkt von PO sei M. Im Falle eines direkten Transports τ lässt sich dann schreiben:

$$\tau = MOa_1a_2 \cdots a_{n-1},$$

wo die Geraden $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$ alle durch O gehen. Statt MO können wir aber (S. 33) pq schreiben, wo p und q senkrecht auf einer Verbindungsgerade von P und O in M und O sind, und in ein und derselben Ebene liegen; q kann so in der Hyperebene $\perp$ PO in O beliebig gewählt werden, und wir wählen sie dann in einer Schnittlinie von dieser Hyperebene mit einer Hyperebene durch die Geraden $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$. Es gilt dann

$$\tau = pqa_1a_2 \cdots a_{n-1}.$$

Da aber die letzten n Geraden $q, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$ dieser Folge nun in ein und demselben R_{n-1} enthalten sind, können sie durch $n-2$ Geraden $b_1, b_2, \cdots, b_{n-2}$ ersetzt werden (Satz 41), und es folgt dann

$$\tau = pb_1b_2 \cdots b_{n-2}$$

w. z. b. w.

Im Falle eines inversen Transports schreiben wir sofort:

$$\tau = Ma_1a_2 \cdots a_{n-1},$$

und der Beweis ist hiermit zu Ende gebracht.

Was Beispiele anbetrifft, verweisen wir zunächst auf mehrdimensionale Koordinatengeometrien mit Koordinatenzahlen von der in Einl. III, 59 beschriebenen Art.

In einer folgenden Mitteilung beabsichtigen wir auf die weitere Beschreibung der wichtigen Nachbarfiguren zurückzukommen. Und schliesslich soll die allgemeine analytische Behandlung der singulären Geometrie (d. h. die Geometrie, wo Rechtecke beliebiger Dimensionen existieren) erledigt werden.