DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXI, Nr. 1

# UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE RADIOMETERFUNKTION UND DIE KNUDSEN'SCHE RADIOMETERKRAFT

VON

SOPHUS WEBER

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1944

Printed in Denmark
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

1. In einer früheren Arbeit[1] habe ich eine formale Einteilung von den bekannten Radiometererscheinungen gegeben und das absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN, wie auch das Einplattenradiometer im Wärmestrom, näher untersucht; über das letzte sind neuerdings einige neue experimentelle Untersuchungen von E. FREDLUND[2] veröffentlicht worden. Ich hoffe in einer späteren Arbeit hierauf zurückzukommen.

Anschliessend an meine obengenannte Untersuchung ist es nicht ohne Interesse, die Radiometerkraft auf einer Kugel im Wärmestrom näher zu betrachten, auch weil die Erklärung von der von F. EHRENHAFT[3] entdeckten Erscheinung der Bewegung kleiner Materieteilchen im Lichte — die Photophorese — in der Radiometerkraft zu suchen ist.

Nach den grundlegenden theoretischen Arbeiten von A. RUBINOWICZ[4], G. HETTNER[5] und P. EPSTEIN[6] und nach den experimentellen Arbeiten von J. MATTAUCH[7] und den Schülern EHRENHAFT's besteht hierüber wohl kein Zweifel mehr, dass sowohl die positive als auch die negative Photophorese als Radiometereffekt zu deuten ist; auch die aufschlussreichen Experimente und Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN[8] über die negative Radiometerkraft haben diese Auffassung bestätigt.

Es ist aber in dieser Verbindung von Bedeutung, zu untersuchen, wie die Radiometerkraft auf einer Kugel im Wärme-

[1] SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. XIV, 13, 1937.

[2] ERNST FREDLUND: Phil. Mag. 7. XXVI, 1938, S. 987. Arkiv f. Mat. Astr. Fys. 27 A, No. 12, 1940.

[3] F. EHRENHAFT: Ann. d. Ph. 56, 1918, S. 81.

[4] A. RUBINOWICZ: Ann. d. Ph. 62, 1920, S. 691.

[5] G. HETTNER: Z. S. Ph. 37, 1926, S. 179.

[6] P. EPSTEIN: Z. S. Ph. 54, 1929, S. 537.

[7] J. MATTAUCH: Ann. d. Ph. 85, 1938, S. 967.

[8] MARTIN KNUDSEN: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. XI, 1, 1930.

strom oder Strahlungsfeld in dem gesamten Druckgebiet von dem Radius der Kugel, $r_0$, und von der Natur des Gases abhängt.

Nach der theoretischen Arbeit von RUBINOWICZ für den Grenzfall $r_0 \ll \lambda$, wo $\lambda$ die mittlere freie Weglänge des Gases bezeichnet, und nach den Arbeiten von G. HETTNER und insbesondere von P. EPSTEIN für den Fall $r_0 \gg \lambda$, sind die Werte der Radiometerkraft, $K$, für die zwei Grenzfälle, bezw. $K_\infty = \frac{A'}{p}$ und $K_0 = B' \cdot p$, bekannt.

Um eine Übersicht über den Verlauf der Radiometerkraft im gesamten Druckgebiet zu erhalten, hat HETTNER diese zwei Grenzformeln durch eine einfache Interpolationsformel:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \frac{1}{K_\infty}, \tag{1}$$

verbunden, worin $K$ die Radiometerkraft bei dem Druck $p$ bezeichnet; es ist aber möglich, durch Einführung der erweiterten MAXWELL'schen Grenzbedingung[9] in der Berechnung theoretisch abzuleiten, — jedenfalls annäherungsweise —, wie der Verlauf von der Radiometerkraft, $K$, im ganzen Druckgebiet $0 \leqq \frac{r_0}{\lambda} \leqq \infty$ wird, oder, mit andern Worten, die von W. WESTPHAL[10] eingeführte Radiometerfunktion: $K = f(\log p)$, zu bestimmen.

2. Bei der Berechnung können wir am einfachsten der von EPSTEIN[11] gegebenen Ableitung für $r_0 \gg \lambda$ folgen und seine Terminologie verwenden. Wir müssen also das Wärmeleitungsproblem und das Strömungsproblem lösen, für den Fall, dass sich eine Kugel in einem Gasraum befindet, in welchem in grosser Entfernung von der Kugel ein homogenes Temperaturfeld mit dem Temperaturgradienten, $G = \frac{dT}{dx}$, herrscht; an der Oberfläche der Kugel gilt aber nun die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung:

$$u_s - k_2 \cdot \gamma \cdot \frac{du_s}{dr} = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{dT}{ds} \cdot \frac{1}{1 + \psi_1\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)}, \tag{2}$$

[9] SOPHUS WEBER: Comm. Kamerlingh Onnes Lab. Leiden No. 246b, 1937.
[10] W. WESTPHAL: Z. S. Ph. 4, 1921, S. 221.
[11] P. EPSTEIN: loc. cit. S. 540.

wo $u_s$ die tangentielle Gleitgeschwindigkeit des Gases an der Oberfläche der Kugel und $T$ die Temperatur der an die Oberfläche grenzenden Gasschicht bezeichnen, während $\gamma$, $\eta$ und $\varrho$ der Gleitungskoeffizient, die innere Reibung und die Dichte des Gases sind. $\psi_1\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)$ ist eine Funktion von $\frac{\lambda}{r_0}$, die in erster Annäherung gleich $m \cdot \frac{\lambda}{r_0}$ gesetzt werden kann; ausserdem ist $k_1 = k_2 = \frac{4}{3}$. Die Richtung der Gleitströme an der Oberfläche ist von Stellen niedrieger Temperatur nach Stellen höherer Temperatur; die Kugel wird sich also in die entgegengesetzte Richtung bewegen.

Da das Gas im Unendlichen ruht, wird die Lösung des hydrodynamischen Problems nach LAMB[12]:

$$u_r = \left(\frac{A}{\eta r} - \frac{2B}{r^3}\right) \cos\theta, \tag{3}$$

$$u_\theta = -\left(\frac{A}{2\eta r} + \frac{B}{r^3}\right) \sin\theta, \tag{4}$$

$$u_\varphi = 0, \tag{5}$$

wenn Polarkoordinaten, $r$, $\theta$ und $\varphi$ verwendet werden, und die Richtung der polaren Achse als $x$-Richtung angenommen wird, so dass $x = r\cos\theta$. Die Schubspannung $p_{x,r}$ wird:

$$p_{x,r} = -\frac{x}{r} p_0 + \left(Ar - \frac{6\eta}{r} B\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} - \frac{A}{r^2}, \tag{6}$$

woraus, der Symmetrie wegen, die totale Radiometerkraft auf der Kugel, bezw. der totale Impulstransport durch die Kugeloberfläche, folgendermassen wird:

$$K = \int p_{x,r_0} \cdot dS = 2\pi r_0^2 \int_0^\pi p_{x,r_0} \sin\theta \, d\theta. \tag{7}$$

Aus der Bedingung, $u_r = 0$ für $r = r_0$, folgt:

$$2B = \frac{A}{\eta} \cdot r_0^2, \tag{8}$$

und also:

[12] H. LAMB: Hydrodynamics, 4th Edition, Cambridge 1924, S. 565.

$$u_r = \frac{A}{\eta}\left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^2}{r^3}\right)\cos\theta, \tag{9}$$

$$u_\theta = -\frac{A}{2\eta}\left(\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)\sin\theta \tag{10}$$

und

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{A}{2\eta}\left[3\frac{r_0^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}\right]\sin\theta. \tag{11}$$

Um den Wert von $A$ zu finden, müssen wir das Wärmeleitungsproblem lösen. Nach EPSTEIN ist:

$$T_a - T_0 = G \cdot r\cos\theta + P \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \tag{12}$$

und

$$T_i - T_0 = Q \cdot r\cos\theta, \tag{13}$$

mit den Bedingungen an der Oberfläche der Kugel:

$$T_a = T_i \quad \text{und} \quad \varkappa_i \frac{dT_i}{dr} = \varkappa_a \frac{dT_a}{dr}, \tag{14}$$

wo $\varkappa_i$ und $\varkappa_a$ die Wärmeleitfähigkeiten der Kugel und des umgebenden Gasmediums bedeuten.

Hieraus erhält man:

Ausserhalb der Kugel:

$$T_a = T_0 + \left(r + \frac{\varkappa_a - \varkappa_i}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} \cdot \frac{r_0^3}{r^2}\right) G\cos\theta \tag{15}$$

und innerhalb der Kugel:

$$T_i = T_0 + \frac{3\varkappa_a}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} \cdot rG\cos\theta. \tag{16}$$

$T_0$ ist die Temperatur in dem Plan $x = 0$ und kann annäherungsweise, wenn der Temperaturunterschied in der Kugel klein ist, mit der Temperatur des Gases in dem Plan $x = 0$ gleich gesetzt werden.

Die Temperaturverteilung auf der Kugeloberfläche wird also:

$$T = T_0 + 3 \cdot \frac{\varkappa_a}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} \cdot r_0 G\cos\theta, \tag{17}$$

oder:

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \Delta T \cdot \cos\theta, \tag{18}$$

wo:

$$\Delta T = 6 \cdot \frac{\varkappa_a}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} \cdot r_0 G,$$

die Temperaturdifferenz zwischen den Polen der Kugel, bezw. $y = 0$ und $x = \pm r_0$, bezeichnet.

Wir sehen hieraus, dass der Temperaturunterschied zwischen den Polen, $\Delta T$, innerhalb eines sehr grossen Druckgebiets konstant bleibt, weil $\varkappa_a$ unabhängig von dem Gasdruck $p$ ist, solange das Gas in dem MAXWELL'schen Gaszustand bleibt.

Die Druckunabhängigkeit von $\Delta T$ wird noch grösser, wenn die Temperaturdifferenz zwischen den Polen durch eine einseitige Bestrahlung, parallel zur $x$-Achse, erzeugt wird. Wird die Strahlung in der Oberflächenschicht der Kugel vollständig absorbiert, und ist die Intensität der Strahlung per cm$^2$, $I$, erhält man die folgenden Grenzbedingungen:

$$T_a = T_i \quad \text{und} \quad \varkappa_i \cdot \frac{dT_i}{dr} = \varkappa_a \cdot \frac{dT_a}{dr} + I \cos\theta, \tag{19}$$

woraus:

$$\Delta T_1 = \frac{2I}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} r_0 \text{ [13]}. \tag{20}$$

Ist $\varkappa_i$ gegenüber $\varkappa_a$ gross, wird $\Delta T_1$ praktisch gesprochen unabhängig von dem Gasdruck $p$.

Aus der erweiterten MAXWELL'schen Grenzbedingung erhält man nun, weil:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{ds} = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{d\theta}\right)_{r=r_0} &= -\frac{3\varkappa_a}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} \cdot G \sin\theta, \\ u_s = \left(u_\theta\right)_{r=r_0} \quad \text{und} \quad \frac{du_s}{dr} &= \left(\frac{du_\theta}{dr}\right)_{r=r_0} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

nach Einsetzung in (2):

[13] In diesem Wert von $\Delta T_1$ ist der Einfluss von dem Temperatursprung an der Oberfläche der Kugel vernachlässigt. Wird auch hiermit gerechnet, muss die Bedingung:

$$T_a = T_i \text{ durch } T_i = T_a - \gamma_1 \cdot \left(\frac{dT_a}{dr}\right)_{r=r_0}$$

ersetzt werden.

Sind aber die Temperaturerhöhungen an den Polen der Kugel dem umgebenden Gase gegenüber klein, kann diese Korrektion vernachlässigt werden.

$$A = \frac{9}{4} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0} \cdot \frac{\varkappa_a}{\varkappa_i + 2\varkappa_a} \cdot Gr_0 \cdot \frac{1}{\left(1 + 2k_2 \frac{\gamma}{r_0}\right)\left(1 + m\frac{\lambda}{r_0}\right)} \tag{22}$$

oder:

$$A = \frac{3}{8} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2k_2 \frac{\lambda}{r_0}\right)\left(1 + m\frac{\lambda}{r_0}\right)} \cdot \Delta T \tag{23}$$

weil:

$$p\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{{}_1\varrho}} = {}_1\lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1+n} \quad \text{und} \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{p\sqrt{{}_1\varrho}} = \lambda.$$

Wir finden nun aus (7), da $2B = \frac{A}{\eta} \cdot r_0^2$:

$$K = 2\pi r_0^2 \int_0^\pi p_{x, r_0} \sin\theta \, d\theta = 6\pi A \int_0^\pi (2\cos^2\theta - 1) \sin\theta \, d\theta = -4\pi A,$$

oder:

$$K = -\frac{3\pi}{2} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0} \Delta T \cdot \frac{1}{\left(1 + 2k_2 \frac{\lambda}{r_0}\right)\left(1 + m\frac{\lambda}{r_0}\right)}. \tag{24}$$

Für $\frac{\lambda}{r_0} \rightleftharpoons 0$, findet man hieraus:

$$K_{1,\infty} = \frac{K_\infty}{\Delta T} = -\frac{3\pi}{2} k_1 \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0}, \tag{25}$$

oder den von HETTNER und EPSTEIN abgeleiteten Ausdruck, multipliciert mit dem Faktor $k_1 = \frac{4}{3}$.

Für $\frac{\lambda}{r_0} \rightleftharpoons \infty$ erhält man:

$$K_{1,0} = \frac{K_0}{\Delta T} = -\frac{3\pi}{2} k_1 \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0} \cdot \frac{1}{2k_2 \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^2 m}, \tag{26}$$

oder, weil:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0} = \lambda^2 \cdot \frac{p}{T_0},$$

$$K_{1,0} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{p}{T_0} r_0^2 \cdot \frac{1}{m}, \tag{27}$$

worin der Wert von $m$ noch unbekannt ist. —

Den Wert von $K_{1,0}$ können wir aber auch auf direkte Weise

ableiten; für $\frac{r_0}{\lambda} = 0$ hat man nach KNUDSEN für die Radiometerkraft $dK_\nu$ auf dem Oberflächenelement $dS$:

$$dK_\nu = -\frac{1}{4} a \cdot p \frac{T - T_0}{T} \cdot dS. \tag{28}$$

$dK_\nu$ ist die Radiometerkraft in der Richtung der Normale; $T$ ist die Temperatur des Elementes $dS$, und $p$ und $T_0$ der Druck und die Temperatur des Gases; $a$ ist der Akkommodationskoefficient des Gases gegenüber der Oberfläche $S$.

Ist die Temperaturverteilung auf der Oberfläche der Kugel gegeben durch:

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \Delta T \cos\theta,$$

erhält man, der Symmetrie wegen, die totale Radiometerkraft $K_0$ auf der Kugel mit Radius $r_0$:

$$\left.\begin{aligned} K_{1,0} = \frac{K_0}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \int dK_{\nu,x} = -\int \frac{1}{4} \frac{ap}{T_0} \cdot \frac{1}{2} \cos^2\theta \, dS \\ = -\frac{1}{8} \frac{ap}{T_0} \int_0^\pi \cos^2\theta \cdot 2\pi r_0 \sin\theta \cdot r_0 \, d\theta = -\frac{\pi}{6} \frac{a r_0^2}{T_0} \cdot p, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

in Übereinstimmung mit der von RUBINOWICZ abgeleiteten Formel.

Aus (27) und (29) folgt:

$$m = \frac{9}{\pi a} \quad \text{für} \quad \frac{r_0}{\lambda} = 0.$$

Inwieweit $m$ in dem ganzen Gebiet $0 \leqq \frac{r_0}{\lambda} \leqq \infty$ diesen konstanten Wert hat, kann man a priori nicht mit Sicherheit sagen; erst wenn hinreichendes experimentelles Material vorliegt, kann dies festgestellt werden. Messungen in dem Gebiet $0 \leqq \frac{r_0}{\lambda} \leqq$ ca. 5 wären hierfür wünschenswert.

Mit diesem Wert von $m$ erhält man für die Radiometerkraft in dem ganzen Gebiet: $0 \leqq \frac{r_0}{\lambda} \leqq \infty$, den Ausdruck:

$$K_1 = \frac{K}{\Delta T} = -\frac{3\pi}{2} k_1 \frac{\eta^2}{\varrho_0 T_0} \cdot \frac{1}{1 + \left(2k_2 + \frac{9}{\pi a}\right) \frac{\lambda}{r_0} + 2k_2 \cdot \frac{9}{\pi a} \cdot \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^2} \tag{30}$$

oder:
$$K_1 = \frac{K}{\Delta T} = -\frac{\pi}{6}\alpha\frac{r_0^2}{T_0}\cdot\frac{p}{1+\beta\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)p+\alpha\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2\cdot p^2}, \tag{31}$$

worin:
$$\alpha = \frac{\pi}{24}a \quad \text{und} \quad \beta = \frac{3}{8}+\frac{\pi}{9}a, \text{ weil } k_1 = k_2 = \frac{4}{3}^{14)}.$$

Aus dem Ausdruck für $K_1$ sehen wir, dass die Radiometerkraft bei dem Druck $p_{\max}$ ein Maximum, $K_{1,\max}$, hat, wo:

$$p_{\max} = \frac{1\lambda}{r_0}\sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1\lambda}{r_0}\sqrt{\frac{24}{\pi a}}, \tag{32}$$

oder:
$$r_0 = \sqrt{\frac{24}{\pi}}\cdot\frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{a}} = \frac{2{,}763}{\sqrt{a}}\cdot\lambda_{\max}.$$

Der Wert von $p_{\max}$ ist also unabhängig von der Temperaturdifferenz $\Delta T$, wenn diese als unabhängig von $p$ angesehen werden kann.

Der maximale Wert von $K_1$ wird in diesem Falle:

$$K_{1,\max} = \frac{K_{\max}}{\Delta T} = -\frac{\pi}{6}a\cdot\frac{1\lambda}{T_0}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha}+\beta},$$

oder:
$$K_{1,\max} = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{r_0}{T_0}\cdot\frac{1\lambda\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{9}\sqrt{a}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}. \tag{33}$$

Werden $K_{\max}$ und $p_{\max}$ als Einheiten für $K$ und $p$ verwendet, erhält man die »reducierte« Radiometerkurve:

$$\frac{K}{K_{\max}} = \frac{K_1}{K_{1,\max}} = \frac{2+\delta}{\frac{p}{p_{\max}}+\frac{p_{\max}}{p}+\delta}, \quad \text{wo} \quad \delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}, \tag{34}$$

14) Obwohl die Formel (31) den richtigen Grenzwert für $\frac{r_0}{\lambda} = 0$ gibt, ist nicht anzunehmen, dass der Wert $\beta = \frac{3}{8}+\frac{\pi}{9}a$ für das Gebiet $\frac{r_0}{\lambda}\to 0$ der Form nach richtig ist. Ausgehend von der Formel (29) für $\frac{r_0}{\lambda} = 0$, wird es möglich sein, den Einfluss von einsetzenden gegenseitigen Molekülstössen auf die Formel (29) zu berechnen, und hierdurch für das Gebiet $\frac{r_0}{\lambda}\to 0$ einen der Form nach besseren Wert für $\beta$ zu berechnen.

oder:

$$\delta = \sqrt{\frac{24}{\pi}}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\pi}{9}\sqrt{a}\right).$$

Für $a = 1$ wird $\delta = 2{,}00$, für $a = 0{,}81$ $\delta = 2{,}02$ und für $a = 0{,}36$ $\delta = 2{,}30$, woraus erhellt, dass der Wert von $a$ keinen grossen Einfluss auf den Wert von $\delta$ hat.

Durch die »reducierte« Radiometerkurve ist die von W. WESTPHAL eingeführte Radiometerfunktion:

$$\frac{K}{K_{\max}} = f\left(\log \frac{p}{p_{\max}}\right) = f(x)$$

eindeutig bestimmt; wir finden aus der »reducierten« Radiometerkurve hierfür:

$$f(x) = \frac{2+\delta}{e^x + e^{-x} + \delta}, \quad \text{wo} \quad x = \log_e \frac{p}{p_{\max}}.$$

Wenn $\Delta T$ als konstant angesehen werden kann, kann die »reducierte« Radiometerkurve mit Vorteil verwendet werden, weil diese unabhängig ist von $\Delta T$, die im Allgemeinen unbekannt ist.

Aus dem Ausdruck für $K_1$ sehen wir, dass die Radiometerkraft für $\frac{r_0}{\lambda} \gtrless 0$ mit $\pi r_0^2$ proportional ist, also ein Oberflächeneffekt; für $\frac{r_0}{\lambda} \to \infty$ wird $K_1$, die Radiometerkraft für einen Temperaturunterschied von einem Grad zwischen den Polen, unabhängig von dem Radius der Kugel, während der Maximalwert, $K_{1,\max}$, proportional mit dem Radius ist.

Da aber die Temperaturdifferenz, $\Delta T$, mit dem Radius der Kugel proportional ist, jedenfalls wenn die einfallende Strahlung vollständig in der Oberflächenschicht der Kugel absorbiert wird, sieht es aus, als ob die totale Radiometerkraft $K$ für $\frac{r_0}{\lambda} \to \infty$ ein Randeffekt wäre.

Aus den zwei Formeln (32) und (33) kann man $r_0$ eliminieren und findet hieraus zur Bestimmung von $\Delta T$:

$$K_{\max} \cdot p_{\max} = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{1}{T_0}\lambda^2 \cdot \frac{\Delta T}{\sqrt{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{9}\sqrt{a} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}. \qquad (35)$$

3. Aus den in Par. 2 abgeleiteten Formeln erhellt die vollständige Analogie mit anderen bekannten Radiometererscheinungen, z. B. mit dem absoluten Manometer von MARTIN KNUDSEN, und mit der thermomolekularen Druckdifferenz. So finden wir auch für die Kugel, dass das Verhältnis zwischen der massgebenden Abmessung, $r_0$, und $\lambda_{max}$ eine reine Zahl ist, weil:

$$\frac{r_0}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}763}{\sqrt{a}}.$$

Wird der Wert von $p_{max}$ gemessen, kann man aus dieser Formel $r_0$ bestimmen, weil der Einfluss von dem im Allgemeinen nicht so genau bekannten Akkommodationskoefficienten nicht sehr bedeutend ist; wird keine grosse Genauigkeit für $r_0$ verlangt, ist ein Annäherungswert für $a$ hinreichend.

Da es bisher für mikroskopische Partikeln nur möglich war, mit Hilfe der Fallgeschwindigkeit und des Gesetzes von STOKES einen zuverlässigen Wert von $r_0$ zu erhalten, wäre es in dieser Verbindung von Interesse, durch Präcisionsmessungen die Formel für $r_0$ experimentell zu prüfen.

Aus den vorliegenden Messungen von J. MATTAUCH über die photophoretische Kraft auf mikroskopischen Tellurkugeln mit Radien von 3 bis $4 \cdot 10^{-5}$ cm ergibt sich, das $p_{max}$ ca. 400 mm Hg ist; das benutzte Gas war Stickstoff, und wir können also annäherungsweise $a = 0{,}81$ setzen.

Aus der Formel erhält man somit:

$$\left(\frac{r_0}{\lambda_{max}}\right)_{ber.} = \frac{2{,}763}{\sqrt{a}} = 3{,}07,$$

während man mit $r_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm und $p_{max} = 400$ mm Hg $= 400 \cdot 1330$ Bar findet:

$$\left(\frac{r_0}{\lambda_{max}}\right)_{obs.} = \frac{3.5 \cdot 10^{-4}}{6{,}42} \cdot 400 \cdot 1330 = 2{,}91,$$

weil für Stickstoff $(p\lambda)_{20°} = 6{,}42$.

Wenn die Unsicherheit der experimentellen Grössen in Betracht gezogen wird, muss die Übereinstimmung als befriedigend angesehen werden.

Später hat MATTAUCH eine experimentelle, sehr ausgebreitete Untersuchung mit sechs Probekörpern aus Selen durchgeführt; die Radien von diesen Probekörpern lagen nach seiner Angabe zwischen 2 und $3 \cdot 10^{-5}$ cm. —

MATTAUCH[15] hat in dieser Untersuchung mit einem verbesserten EHRENHAFT'schen Kondensator die Radiometerkraft oder die photophoretische Kraft auf diesen sechs Probekörpern in atm. Luft in einem grossen Druckgebiet untersucht und den Wert von $\frac{K}{e}$ ($e$ = electr. Elementarquantum = $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ e.st.E.) bei verschiedenen Drucken, $p$, gemessen, so dass die Werte von $K_{max}$ und $p_{max}$ bestimmt werden konnten, da die Probekörper nur eine Elementarladung hatten.

In der Tabelle I, Kolonne 2 und 3, sind die gemessenen Werte von $p_{max}$ und $\left(\frac{K}{e}\right)_{max}$ angegeben, und in Kolonne 4 die Werte von $K_{max}$; diese sind von der Grössenordnung 5 bis $10 \cdot 10^{-10}$ Dyn. In Kolonne 5 stehen die aus den Werten für $p_{max}$ berech-

Tabelle I.

| Nö. des Pk. | $p_{max}$ mm Hg | $\frac{K_{max}}{e}$ | $K_{max}$ | $r_0$, ber. ($a$ = 0,81) | $p_{max} \cdot K_{max}$ ($p$ in Bar.) | $\Delta T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 282 | 1,44 | $6{,}86 \cdot 10^{-10}$ | $5{,}35 \cdot 10^{-5}$ | $2{,}57 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}77 \cdot 10^{-3}$ |
| 37 | 399 | 0,94 | 4,48 » | 3,79 » | 2,38 » | 1,63 » |
| 59 | 620 | 1,08 | 5,15 » | 2,44 » | 4,25 » | 2,92 » |
| 69 | 473 | 1,17 | 5,58 » | 3,20 » | 3,51 » | 2,41 » |
| 74 | 452 | 2,37 | 11,30 » | 3,35 » | 6,79 » | 4,67 » |
| 76 | 570 | 1,41 | 6,72 » | 2,66 » | 5,09 » | 3,50 » |

neten Radien der Probekörper; bei der Berechnung ist $a = 0{,}81$ und $(p\lambda)_{20} = {}_1\lambda_{20} = 6{,}65$ verwendet. In Kolonne 6 sind die Werte von $K_{max} \cdot p_{max}$ angegeben, und in Kolonne 7 die hieraus nach Formel (35) berechneten Werte für $\Delta T$.

Die Werte von $K_{max}$ in Kolonne 4 sind nicht für den überlagerten Lichtdruck korrigiert, weil MATTAUCH mitteilt, dass der Lichtdruck jedenfalls um mehr als eine Grössenordnung kleiner ist als die photophoretischen Kräfte.

[15] J. MATTAUCH: loc. cit. S. 978.

MATTAUCH hat selber das ganze Beobachtungsmaterial für die sechs Probekörper bei den verschiedenen Drucken durch die reducierte Kurve $\left(\frac{K}{K_{max}}, \log_{10}\frac{p}{p_{max}}\right)$ wiedergegeben, und in Fig. 1 ist seine graphische Darstellung von dem Beobachtungsmaterial

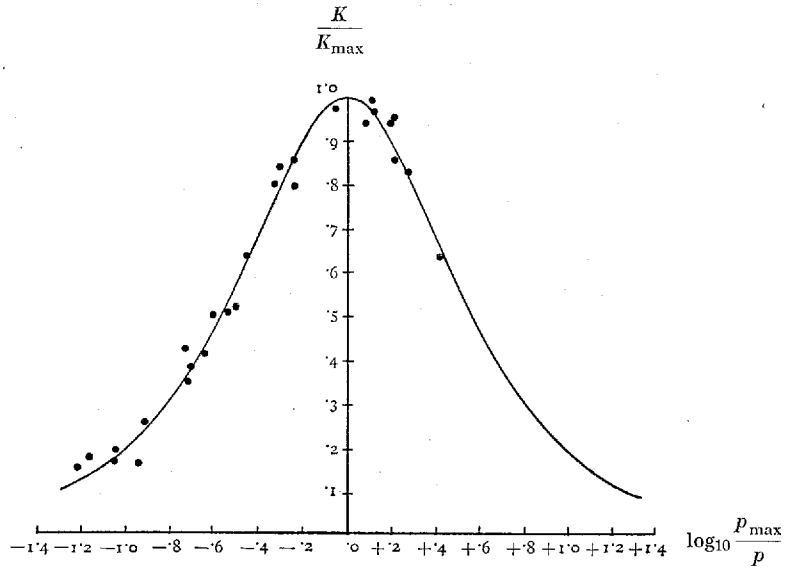


Fig. 1.

reproduciert. Diese Kurve muss also mit der theoretischen »reducierten« Formel:

$$\frac{K}{K_{max}} = \frac{2+\delta}{\frac{p}{p_{max}}+\frac{p_{max}}{p}+\delta}, \quad \text{wo} \quad \delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}},$$

übereinstimmen; nach der Berechnung muss für $a = 0{,}81$ $\delta =$ ca. 2,00 sein. In der Tabelle II sind in Kolonne 6 die Werte für $\frac{K}{K_{max}}$, genommen aus der graphischen Darstellung von MATTAUCH, angegeben und zur Vergleichung in den Kolonnen 3, 4 und 5 die theoretischen Werte, berechnet mit $\delta = 0$, $\delta = 1$ und $\delta = 2$. Der Wert $\delta = 0$ ist natürlich nicht theoretisch möglich,

ist aber hier mitgenommen, weil $\delta = 0$ der HETTNER'schen Interpolationsformel:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \frac{1}{K_\infty},$$

entspricht.

Aus der Tabelle II sieht man, dass die Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werten besser ist mit $\delta = 1$ als mit dem theoretischen Wert $\delta = 2$; ob die Genauigkeit dieser schwierigen Messungen so gross ist, dass dies eine Realität ist, dürfte aber ausserordentlich zweifelhaft sein. In grossen Zügen ist aber die Übereinstimmung befriedigend, und erst neue experimentelle Untersuchungen können über den genauen Wert von $\delta$ Auskunft geben.

Tabelle II.

| $\log_{10}\frac{p}{p_{max}}$ | $\frac{p}{p_{max}} + \frac{p_{max}}{p}$ | $\frac{K}{K_{max}}$, teor. | | | $\frac{K}{K_{max}}$, beob. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta = 2$ | $\delta = 1$ | $\delta = 0$ | |
| 0,0 | 2,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,00 |
| 0,1 | 2,054 | 0,985 | 0,980 | 0,975 | 0,98 |
| 0,2 | 2,217 | 0,950 | 0,935 | 0,905 | 0,93 |
| 0,3 | 2,496 | 0,890 | 0,855 | 0,800 | 0,82 |
| 0,4 | 2,911 | 0,815 | 0,770 | 0,690 | 0,70 |
| 0,6 | 4,232 | 0,643 | 0,575 | 0,473 | 0,48 |
| 0,8 | 6,469 | 0,473 | 0,402 | 0,308 | 0,33 |
| 1,0 | 10,10 | 0,330 | 0,270 | 0,198 | 0,21 |
| 1,2 | 16,40 | 0,218 | 0,172 | 0,122 | 0,15 |
| 1,4 | 25,15 | — | — | — | — |

MATTAUCH hat auch versucht, den Einfluss des Gases zu bestimmen, wobei er mit zwei metallischen Probekörpern in Stickstoff, Wasserstoff und Kohlensäure gemessen hat.

Diese Versuche sind aber, der grossen experimentellen Schwierigkeiten wegen, nicht hinreichend gelungen, und es ist nicht möglich, hieraus einen Einfluss des Gases experimentell festzustellen; dies war aber auch theoretisch nicht zu erwarten, weil nach Formel (33) die Radiometerkraft praktisch gesprochen proportional mit ${}_1\lambda\sqrt{a}$ ist. Aus der Tabelle III, worin die Werte

Tabelle III.

| Gas | $(p\lambda)_{273,1} = {}_1\lambda_0$ | Akkommodations-koefficient $a$ | ${}_1\lambda_0\sqrt{a}$ |
|---|---|---|---|
| Argon | 6,23 | 0,85 | 5,75 |
| $H_2$ | 11,32 | 0,28 | 6,00 |
| $O_2$ | 6,36 | 0,81 | 5,73 |
| $N_2$ | 5,91 | 0,81 | 5,32 |
| Atm. Luft | 6,20 | 0,81 | 5,58 |
| Neon | 11,75 | 0,65 | 9,55 |
| Helium | 17,85 | 0,34 | 10,40 |
| $CO_2$ | 4,00 | 0,81 | 3,60 |

von ${}_1\lambda\sqrt{a}$ für die verschiedenen Gase angegeben sind, erhellt, dass für metallische Probekörper in atm. Luft, Stickstoff und Wasserstoff kein grosser Unterschied zu erwarten ist. Nur wenn Neon oder Helium verwendet wird, kann man einen grösseren Unterschied erwarten.

4. Es liegt nahe, zu versuchen, die für die Kugel gebrauchte Ableitung auch für einen zirkularen Zylinder zu verwenden, um die Radiometerkraft in einem WESTPHAL'schen Quarzfadenradiometer und verwandten Radiometersystemen zu bestimmen.

Es ist der Verdienst von G. FANSELAU[16], dass er für diesen Fall eine brauchbare Lösung des Strömungsproblemes abgeleitet und anschliessend hieran die Radiometerkraft auf einem runden Faden berechnet hat, und zwar für den Fall, dass $\frac{r_0}{\lambda} \gtrless \infty$.

Zu diesem Zweck untersuchte er den Strömungszustand für eine zähe Flüssigkeit und eine sehr langsame Strömung um einen zirkularen Zylinder mit Radius $r_0$, umgeben von einem coaxialen Zylinder mit Radius $R$; die Strömung findet in Ebenen senkrecht zur Achse der coaxialen Zylinder statt. Mit der Zylinderachse als $z$-Achse erhielt FANSELAU für die Stromfunktion:

$$\psi_5 = y f_3(r) = y\left[c_1 r^2 + c_2 \ln r + \frac{c_3}{r^2} + c_4\right]. \qquad (36)$$

[16] G. FANSELAU: Dissertation, Berlin, 1927, S. 8.

Auf bekannte Weise wird hieraus der Drucktensor $p$ berechnet und hiernach der Impulstransport, bzw. die Radiometerkraft per Längeneinheit des Zylinders:

$$K = \int (p_{x,r})_{r=r_0} \cdot r_0 d\theta.$$

FANSELAU findet nach Ausführung der Integration hierfür:

$$K = -4\pi\eta \cdot c_2. \tag{37}$$

Wir werden nun untersuchen, ob es möglich ist, die Konstante $c_2$ durch die bekannten Grenzbedingungen zu bestimmen.

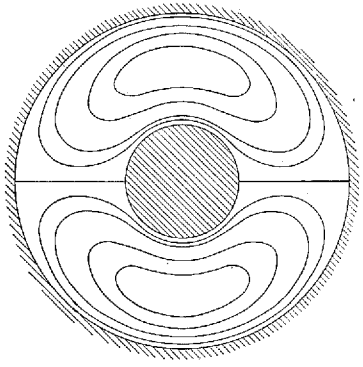

Fig. 2.

Die Stromlinien in den Ebenen, $z$ = konst. (Fig. 2), sind gegeben durch:

$$\psi_5 = y\left[c_1 r^2 + c_2 \ln r + \frac{c_3}{r^2} + c_4\right] = \text{const.} \tag{38}$$

und die Strömungsgeschwindigkeiten $u$ und $v$ in der $x$- und $y$-Richtung durch:

$$u = \frac{d\psi_5}{dy} = f_3(r) + \frac{y^2}{r} f_3'(r)$$

und

$$v = -\frac{d\psi_5}{dx} = -\frac{xy}{r} f_3'(r).$$

Für die tangentiale Geschwindigkeit, $u_s$, und für die normale Geschwindigkeit, $u_r$, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} u_s &= u\frac{y}{r} - v\frac{x}{r} = \frac{y}{r}\left[f_3(r) + rf_3'(r)\right] \\ \text{und} \qquad u_r &= u\frac{x}{r} + v\frac{y}{r} = \frac{x}{r}f_3(r). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Für $r = r_0$ und $r = R$ muss für alle Werte von $x$, $u_{r_0} = u_R = 0$ sein, woraus:

$$f_3(r) = 0 \quad \text{für} \quad r = r_0 \quad \text{und} \quad r = R.$$

Für $r = r_0$ ist die Tangentialgeschwindigkeit $u_s$ durch die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung bestimmt, während wir, jedenfalls wenn $r \ll R$, die Tangentialgeschwindigkeit $u_s$ an der Oberfläche des äusseren Zylinders gleich Null setzen können; da für $r = R$, $f_3(r) = 0$, erhält man hierdurch aus (39):

$$f_3'(r) = 0 \quad \text{für} \quad r = R,$$

wozu also die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung für $r = r_0$ kommt:

$$u_s - k_2\gamma \cdot \frac{du_s}{dr} = \frac{3}{4}k_1\frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{1+\varphi\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)} \cdot \frac{dT}{ds}, \tag{40}$$

worin:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{dT}{d\theta},$$

und in erster Annäherung:

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{r_0}\right) = m\frac{\lambda}{r_0}.$$

Aus den drei ersten Bedingungen wird erhalten:

$$c_1 = \alpha' \frac{1}{R^2 - r_0^2} C', \quad c_2 = \frac{\alpha'}{ln\frac{R}{r_0}}, \quad c_3 = \alpha' \frac{R^2 \cdot r_0^2}{R^2 - r_0^2}[1 + C']$$

und:

$$c_4 = -c_1 r_0^2 - c_2 \ln r_0 - \frac{c_3}{r_0^2}, \quad \text{wo} \quad C' = \frac{r_0^2 - R^2 + 2 r_0^2 \ln \frac{R}{r_0}}{(R^2 - r_0^2)\, 2 \ln \frac{R}{r_0}}.$$

$\alpha'$ ist eine willkürliche Konstante, die durch die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung bestimmt werden muss.

Wir finden für $r = r_0$:

$$u_s = \left(u \frac{y}{r} - v \frac{x}{r}\right)_{r=r_0} = \frac{y}{r} \left[f_3(r) + r f_3'(r)\right]_{r=r_0} = \left[f_3(r_0) + r_0 f_3'(r_0)\right] \sin\theta,$$

oder, da $f_3(r_0) = 0$:

$$\left(u_s\right)_{r=r_0} = r_0 f_3'(r_0) \sin\theta = \alpha' C'' \sin\theta,$$

wo:

$$C'' = \frac{1}{R^2 - r_0^2}\left[r_0^2 - R^2(1 + C')\right] + \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}},$$

oder, wenn $r_0 \ll R$:

$$C_\infty'' = \underset{\lim \frac{r_0}{R} \to 0}{C''} = -2 \cdot \frac{\ln \frac{R}{r_0} - 1}{\ln \frac{R}{r_0}}. \tag{41}$$

Für $r = r_0$ und $r_0 \ll R$ wird:

$$\frac{du_s}{dr} = \left[2 f_3'(r) + r f_3''(r)\right]_{r=r_0} \cdot \sin\theta = 2 f_3'(r) \cdot \sin\theta \left[1 + \frac{r}{2} \cdot \frac{f_3''(r)}{f_3'(r)}\right]_{r=r_0},$$

oder:

$$\frac{du_s}{dr} = 2 \cdot \frac{u_s}{r_0}\left[1 + \frac{r_0}{2} \cdot \frac{f_3''(r_0)}{f_3'(r_0)}\right] = \frac{u_s}{r_0} \cdot \frac{\ln \frac{R}{r_0}}{1 - \ln \frac{R}{r_0}}.$$

Nach Einsetzung in (40) bekommt man:

$$\left(u_s\right)_{r=r_0} = \frac{3}{4} k_1 \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{r_0\left[1 + k_2 \frac{\gamma}{r_0} \cdot \frac{\ln \frac{R}{r_0}}{\ln \frac{R}{r_0} - 1}\right]\left[1 + m \frac{\lambda}{r_0}\right]} \cdot \frac{dT}{d\theta} = q \cdot \frac{dT}{d\theta}.$$

Aus den zwei Ausdrücken für $(u_s)_{r=r_0}$ erhält man:

$$(u_s)_{r=r_0} = q \cdot \frac{dT}{d\theta} = \alpha' C'' \sin\theta. \tag{42}$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn:

$$T = M\cos\theta + \text{const.}$$

oder:

$$T = T_0 + \frac{1}{2}\Delta T \cdot \cos\theta,$$

wo $\Delta T$ den Temperaturunterschied zwischen den Punkten, $y = 0$ und $x = \pm r_0$, bezeichnet.

Diese Temperaturverteilung auf der Zylinderoberfläche ist in Übereinstimmung mit der Lösung des Wärmeleitungsproblemes, wenn die Temperatur innerhalb des Zylinders, $T_i$, und die Temperatur ausserhalb des Zylinders, $T_a$, wie folgt angesetzt werden:

$$T_i - T_0 = P\cos\theta \quad \text{und} \quad T_a - T_0 = Q + S \cdot \frac{\cos\theta}{r}.$$

Nach Einsetzung von $C''$ und $\frac{dT}{d\theta}$ in (42) wird erhalten:

$$\alpha' = -\frac{1}{2}\Delta T \frac{q}{C''} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Delta T \cdot \frac{3}{4} k_1 \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{C''} \cdot \frac{1}{r_0\left[1 + k_2 \frac{\gamma}{r_0} \cdot \frac{ln\frac{R}{r_0}}{ln\frac{R}{r_0} - 1}\right]\left[1 + m\frac{\lambda}{r_0}\right]} \tag{43}$$

woraus nach (37) für $r_0 \ll R$, da $\gamma = \lambda$:

$$K = -4\pi\eta c_2 = -4\pi\eta \frac{\alpha'}{ln\frac{R}{r_0}} =$$

$$= -\frac{3\pi}{2} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \Delta T \cdot \frac{1}{2 r_0\left(ln\frac{R}{r_0} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\left\langle 1 + k_2 \frac{\lambda}{r_0} \frac{ln\frac{R}{r_0}}{ln\frac{R}{r_0} - 1} \right\rangle \left(1 + m\frac{\lambda}{r_0}\right)} \tag{44}$$

Da $k_1 = k_2 = \frac{4}{3}$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} = p \frac{\lambda^2}{T}$, wird für $\frac{\lambda}{r_0} \rightleftarrows \infty$ erhalten:

$$K_{1,0} = \frac{K_0}{\Delta T} = -3 k_1 \frac{p}{T_0} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{r_0}{2 m k_2 \cdot \lambda^2 \ln \frac{R}{r_0}} = -\frac{3}{2} \frac{p}{T_0} \cdot \frac{r_0}{\ln \frac{R}{r_0}} \cdot \frac{1}{m}. \quad (45)$$

Für $\frac{\lambda}{r_0} \to \infty$ finden wir durch direkte Berechnung, wenn die Temperaturverteilung auf der Oberfläche des Zylinders ist:

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \Delta T \cdot \cos \theta,$$

$$K_0 = -2 \int_0^{\pi} \frac{1}{4} a \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{2} \Delta T \cdot \cos^2 \theta \cdot r_0 \, d\theta$$

oder:

$$K_{1,0} = \frac{K_0}{\Delta T} = -\frac{\pi}{8} a \frac{p}{T} \cdot r_0.$$

Aus den zwei Ausdrücken für $K_{1,0}$ erhält man:

$$m = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}},$$

wo $a$ der Akkommodationskoefficient des Gases gegenüber der Zylinderoberfläche ist. Mit diesem Wert für $m$ findet man leicht aus (44):

$$K_1 = -\frac{\pi}{8} a \frac{r_0}{T_0} \cdot \frac{p}{1 + \beta \left(\frac{r_0}{\lambda}\right) p + \alpha \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \cdot p^2}, \quad (47)$$

worin:

$$\alpha = \frac{\pi}{16} a \left[ \ln \frac{R}{r_0} - 1 \right] \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\pi}{12} a \ln \frac{R}{r_0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\ln \frac{R}{r_0} - 1}{\ln \frac{R}{r_0}}.$$

Aus der Formel für $K_1$ wird, wenn $\Delta T$ unabhängig von $p$ ist, auf bekannte Weise gefunden:

$$\left.\begin{aligned} p_{\max} &= \frac{{}_1\lambda}{r_0}\sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{oder} \quad \lambda_{\max} = r_0\sqrt{\alpha} \\ \text{und:} \qquad K_{1,\max} &= -\frac{\pi}{8}\,a\cdot\frac{{}_1\lambda}{T_0}\cdot\frac{1}{\beta+2\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Hieraus erhellt, dass in diesem Falle $p_{\max}$ proportional mit ${}_1\lambda$ und unabhängig von $\Delta T$ wird.

$K_{1,\max} = \frac{K_{\max}}{\Delta T}$ wird praktisch gesprochen unabhängig von $r_0$, weil $\beta + 2\sqrt{\alpha}$ nur von $ln\,\frac{R}{r_0}$ abhängig ist und sich also nur langsam mit $r_0$ ändert, während die Radiometerkraft, $K$, für $\frac{\lambda}{r_0} \to 0$ praktisch gesprochen umgekehrt proportional mit dem Diameter, $2r_0$, des Fadens ist. Bei Bestrahlung wird die erzeugte Temperaturdifferenz, $\Delta T$, proportional mit dem Radius, $r_0$, sodass die totale Radiometerkraft, $K$, auf dem Faden für $\frac{\lambda}{r_0} \to 0$ praktisch gesprochen unabhängig von der Dicke des Fadens wird.

Der Verlauf von der Radiometerkraft $K$ in dem ganzen Gebiet $0 \leqq \frac{\lambda}{r} \leqq \infty$ wird auch, wenn $\Delta T$ konstant ist, gegeben durch:

$$\frac{K_1}{K_{1,\max}} = \frac{K}{K_{\max}} = \frac{2+\delta}{\frac{p}{p_{\max}} + \frac{p_{\max}}{p} + \delta}, \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}},$$

also durch die bekannte »reducierte« Radiometerfunktion; $\delta$ ändert sich also in diesem Falle mit dem Wert von $ln\,\frac{R}{r_0}$; wird $ln\,\frac{R}{r_0} \gg 1$, erhält man:

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\sqrt{a\,ln\,\frac{R}{r_0}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{3}\sqrt{a\,ln\,\frac{R}{r_0}}},$$

woraus hervorgeht, dass der Wert von $\delta$ sich nur langsam mit $a\,ln\,\frac{R}{r_0}$ ändert, wenn der Wert von $\frac{\sqrt{\pi}}{3}\sqrt{a\,ln\,\frac{R}{r_0}}$ in der Nähe von 1 ist.

5. In dem WESTPHAL'schen Quarzfadenradiometer besteht der Radiometerkörper aus einem vertikalen berussten Quarzfaden mit Radius $r_0$, der in der Achse eines coaxialen Glaszylinders mit dem Radius $R$ aufgehängt worden ist. Wird der berusste Quarzfaden durch eine einseitige Strahlung mit der Intensität $I$ per cm$^2$ senkrecht zur Röhre bestrahlt, entsteht zwischen den Punkten, $y = 0$, $x = \pm r_0$, in dem berussten Quarzdraht eine Temperaturdifferenz, $\Delta T$, und eine Radiometerkraft in der Richtung der Strahlung. Wird die ganze Strahlung in der Oberfläche des Fadens absorbiert, erhält man für $\Delta T$:

$$\Delta T = \frac{2\,I}{\varkappa_i + \varkappa_a} r_0. \tag{49}$$

Für geschmolzenes Quarz ist $\varkappa_i = 33 \cdot 10^{-4}$ cal/cm Gr. Sek., während für Wasserstoff $\varkappa_a = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$ cal/cm Gr. Sek. ist, woraus erhellt, dass $\Delta T$ sich nur wenig ändert, selbst wenn der Gasdruck sehr niedrig wird. — Für das WESTPHAL'sche Radiometer ist die in Par. 4 entwickelte Theorie brauchbar, wenn $\frac{r_0}{R} \ll 1$, und wenn die Strömung in Ebenen senkrecht zu dem Quarzfaden, bzw. zur Röhrenachse, verläuft.

WILHELM WESTPHAL hat auch sein Instrument experimentell untersucht und hat sowohl die Abmessungen des berussten Quarzfadens und der Röhre, als auch das benutzte Gas variiert; für die verwendeten Apparate war $\frac{r_0}{R}$ = ca. 2 à $3 \cdot 10^{-3}$, sodass die erste Bedingung für seine Messungen erfüllt gewesen ist.

Für die reducierte Radiometerfunktion:

$$\frac{K}{K_{\max}} = f\left(\log \frac{p}{p_{\max}}\right),$$

hat WESTPHAL die richtige symmetrische Form gefunden; es stellt sich aber heraus, dass die beobachteten Werte für $p_{\max}$ nicht mit den aus der Formel (48):

$$p_{\max} = \frac{1}{r_0}\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{oder} \quad \lambda_{\max} = r_0\sqrt{\alpha},$$

wo:

$$\alpha = \frac{\pi}{16} a \left( ln \frac{R}{r_0} - 1 \right),$$

berechneten Werten übereinstimmen.

Ausserdem fand WESTPHAL für atm. Luft, dass:

$$\lambda_{max} = 8{,}0 \cdot r_0 \cdot d,$$

wo $d$ der Abstand des Fadens von der Glaswand ist.

Für die untersuchten Gase, $H_2$, $CO_2$ und atm. Luft stellte es sich auch heraus, dass $p_{max}$ nicht proportional mit ${}_1\lambda$ war.

In der Tabelle IV sind zur Erläuterung der Abweichungen die berechneten und beobachteten Werte für $p_{max}$ angegeben:

Tabelle IV.

Quarzfadenradiometer $\begin{cases} 2\,r_0 \text{ (berusst)} = 0{,}0025 \text{ cm.} \\ 2\,R = 0{,}80 \text{ cm.} \end{cases}$

| Gas | Akkommodations-koefficient $a$ | $p_{max,\,ber.}$ | $p_{max,\,obs.}$ |
|---|---|---|---|
| $H_2$ ..... | 0,72 | 4,3 mm Hg | 0,98 mm Hg |
| Atm. Luft ..... | 0,96 | 2,0 — — | 0,93 — — |
| $CO_2$ ..... | 0,96 | 1,3 — — | 0,73 — — |

Hieraus erhellt, dass die Abweichungen so gross sind, dass nicht angenommen werden kann, dass die zweite principielle Voraussetzung für die Ableitung der Formel (47), nämlich, dass die Strömung nur in Ebenen senkrecht zu dem Quarzfaden stattfindet, erfüllt gewesen ist.

Bei den WESTPHAL'schen Experimenten, worin die Strahlung von der Nernstlampe wahrscheinlich nicht hinreichend abgeblendet oder auf dem Faden fokussiert war, muss man erwarten, dass bei den verhältnissmässig hohen Drucken, bei welchen $K_{max}$ eintritt, vertikale Konvektionsströme einsetzen und den Verlauf der Radiometerkraft ändern, so dass die Werte von $K_{max}$ und $p_{max}$ bedeutend geändert und erniedrigt werden. Die in atm. Luft gefundene Relation, $\lambda_{max} = \text{const.}\ r_0 \cdot d$, deutet auch darauf hin.

Da das WESTPHAL'sche Radiometer durch seine einfache Konstruktion, momentane Einstellung und grosse Erschütterungs-

freiheit grosse experimentelle Vorteile bietet, wäre es von grosser Bedeutung, zu versuchen hierfür eine rationelle Konstruktion, z. B. durch zweckmässige Erzeugung von dem Temperaturgefälle in der Oberfläche des Fadens, zu finden. Durch passende Wahl der Form und Abmessungen, kombiniert mit Abschirmvorrichtungen, wäre es wahrscheinlich möglich, den Einfluss von eventuellen Konvektionsströmen zu beseitigen[17].

6. Aus dem vorigen Abschnitt erhellt, dass es nicht möglich ist, mit dem vorliegenden experimentellen Material für das WESTPHAL'sche Fadenradiometer die abgeleiteten Formeln zu prüfen; dies kann aber annäherungsweise gemacht werden durch die von MARTIN KNUDSEN[18] und von R. E. H. RASMUSSEN[19] ausgeführten Messungen über die KNUDSEN'sche Radiometerkraft, welche in verschiedenen Akkommodationskoefficienten der beiden Seiten eines geheizten Radiometerkörpers ihre Ursache hat.

Diese Untersuchungen können sowohl mit einem runden Draht, als auch mit einem flachen Band ausgeführt werden, wenn nur die zwei Hälften des Drahtes oder die zwei Seiten des Bandes dem Gase gegenüber verschiedene Akkommodationskoefficienten haben. Ein dünnes, flaches Band hat grosse experimentelle Vorteile, verursacht aber bei der theoretischen Berechnung grosse Schwierigkeiten, insbesondere bei hohen Drucken.

MARTIN KNUDSEN wie auch R. E. H. RASMUSSEN arbeiteten in ihren Untersuchungen mit einem oben und unten festmontierten flachen Platinband; dies wurde durch elektrische Heizung auf der konstanten Temperatur, $T_1$, gehalten. Die zwei Seiten des Bandes hatten verschiedene Akkommodationskoefficienten, $a_2$ und $a_1$ ($a_2 > a_1$), weil die eine Seite mit Platinschwarz rauh gemacht war, während die andere Seite blank war.

Der Temperaturunterschied zwischen den zwei Seiten, d. h. die Temperaturdifferenz der an das Band grenzenden Gasschich-

[17] Eine Konstruktion von dem WESTPHAL'schen Quarzfaden-radiometer in Analogie mit dem Quarzfaden-electrometer von PERUCCA und LEISS (Z. f. Ph. 49, 1928 S. 604) wäre z. B. eine Möglichkeit; wird der Quarzfaden vor der Berussung nur an einer Seite vergoldet, kann eine angemessene Temperaturdifferenz in der Oberfläche des Fadens durch elektrische Heizung erzeugt werden. —

[18] MARTIN KNUDSEN: loc. cit.

[19] R. E. H. RASMUSSEN: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XI, 9, 1932. D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XIII, 9, 1935.

ten, $\Delta T$, wird durch den Unterschied des Temperatursprunges an beiden Seiten des Bandes bestimmt.

Bei der Messung der Radiometerkraft muss im Allgemeinen die Aufmerksamkeit darauf gelenkt sein, dass sich in den meisten Apparaten die Radiometerkraft mit der Bewegung des Radiometerkörpers ändert, sodass es in den meisten Fällen notwendig ist, eine Kompensationsmethode zu verwenden.

In der einen von KNUDSEN und RASMUSSEN gebrauchten Aufstellung, worin das Band mit Breite $B$ in der Achse eines zylindrischen Glasrohres mit dem Diameter $2R$ und der Temperatur $T_0$ ausgespannt war, wurde eine hübsche magnetische Kompensation von dem Ausschlage des Bandes verwendet. In dem anderen Messapparat waren zwei gleiche Bänder symmetrisch in einer Drehwaage montiert, deren Achse mit der Achse des umgebenden Glaszylinders zusammenfiel. In dieser Aufstellung hat die Drehung des Radiometerkörpers keinen Einfluss auf die ausgeübte Radiometerkraft. Diese letzte Methode ist sehr empfindlich, hat aber den Nachteil, dass die Messbänder ausserhalb der Achse des umgebenden Zylinders stehen, so dass hierfür eine Korrektion in die Formeln eingeführt werden muss. Die Beobachtungen nach den zwei Methoden stimmen aber befriedigend überein, wenn die Messgenauigkeit in Betracht gezogen wird.

Die Ableitung der hydrodynamischen Strömung und der Radiometerformel für ein flaches Band konnte man, wenn $\frac{B}{\lambda} \to \infty$, wahrscheinlich durch einen Grenzübergang aus der Strömung und der Radiometerformel für einen elliptischen Zylinder ableiten; hierdurch konnte man einerseits die bereits abgeleitete Formel für den zirkularen Zylinder und andererseits die Formel für ein flaches Band erhalten. In dem analogen Fall »Kugel-zirkulare Planscheibe« ist diese Berechnung bereits von TH. SEXL[20] und P. EPSTEIN[21] durchgeführt, nachdem sie laut unabhängigen Methoden die hydrodynamische Strömung und die Radiometerkraft für ein Rotationsellipsoid berechnet haben.

Für den Zustand, karakterisiert durch $\frac{r_0}{\lambda} \to \infty$, haben beide

[20] TH. SEXL: Z. S. Ph. 52, 1928, S. 249.
[21] P. EPSTEIN: loc. cit.

dasselbe Resultat erhalten und für eine Kugel und eine zirkulare Planscheibe mit demselben Radius gefunden:

$$\frac{K'_{1,\infty}\,(\text{Scheibe})}{K'_{1,\infty}\,(\text{Kugel})} = \sigma = 2. \tag{50}$$

In Analogie hiermit wollen wir, ausgehend von der abgeleiteten Formel für den zirkularen Zylinder mit Diameter, $2\,r_0$:

$$K_1 = \frac{K}{\Delta T} =$$

$$= -\frac{3\,\pi}{2}\,k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho\,T} \cdot \frac{1}{2\,r_0\left[ln\,\frac{R}{r_0} - 1\right]\left[1 + k_2\,\frac{ln\,\frac{R}{r_0}}{ln\,\frac{R}{r_0} - 1}\,\frac{\lambda}{r_0}\right]\left[1 + m\,\frac{\lambda}{r_0}\right]}$$

für das flache Band mit Breite $B$ schreiben:

$$K'_1 = \frac{K'}{\Delta T} =$$

$$= -\sigma \cdot \frac{3\,\pi}{2}\,k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho\,T} \cdot \frac{1}{\frac{2\,B}{\pi}\,(f-1)\left(1 + k_2\,\frac{f}{f-1} \cdot \pi\,\frac{\lambda}{B}\right)\left(1 + m_1\,\frac{\lambda}{B}\right)}, \tag{51}$$

indem wir in Analogie mit der Wärmeleitung setzen:

$$2\,\pi\,r_0 = 2\,B \quad \text{und} \quad ln\,\frac{R}{r_0} = ln\,\frac{2\,\pi R}{2\,B} = f.$$

Hieraus folgt für $\frac{\lambda}{r_0}$, bzw. $\frac{\lambda}{B} \rightrightarrows 0$, dass:

$$\frac{K_{1,\infty}\,(\text{Band})}{K'_{1,\infty}\,(\text{Zylinder})} = \frac{\pi}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{2\,r_0}{B} \cdot \frac{ln\,\frac{2\,\pi R}{2\,\pi\,r_0} - 1}{ln\,\frac{2\,\pi R}{2\,B} - 1}. \tag{52}$$

Betrachten wir nun den Fall: $\frac{r_0}{\lambda}$ bzw. $\frac{B}{\lambda} = 0$, erhalten wir leicht durch direkte Berechnung für den zirkularen Zylinder mit

Radius $r_0$, wenn die zwei Hälften des Zylinders verschiedene Akkommodationskoefficienten, $a_2$ und $a_1$, haben:

$$K_0 = -\frac{1}{4}(a_2 - a_1) \cdot p \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r_0 \cos\theta \, d\theta$$

oder:

$$K_0 = -\frac{1}{4}(a_2 - a_1) \cdot p \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot 2\, r_0 .$$

Bemerken wir, dass der Temperaturunterschied $\Delta T_{p=0} = \Delta T_0$ laut der Definition des Akkommodationskoefficienten ist:

$$\Delta T_0 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_0),$$

erhalten wir für $\frac{r_0}{\lambda} = 0$:

$$K_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T_0} \cdot 2\, r_0 \cdot \Delta T_0 . \tag{53}$$

Für das Band mit Breite $B$ erhalten wir in derselben Weise für $\frac{B}{\lambda} = 0$:

$$K_0' = -\frac{1}{4}(a_2 - a_1) \cdot p \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T_0} \cdot B \cdot \Delta T_0 \tag{54}$$

und hieraus:

$$\frac{K_0'}{K_0} = \frac{K_{1,0}'}{K_{1,0}} = \frac{B}{2\, r_0} .$$

Der Faktor $\sigma$ wird also in dem ganzen Bereich $0 \leqq \frac{B}{\lambda} \leqq \infty$ keine Konstante sein, sondern sich mit dem Wert von $\frac{B}{\lambda}$ ändern.

Wir können nun den Wert von $m_1$ bestimmen, so dass der Grenzwert von Formel (51) für $\frac{B}{\lambda} = 0$ mit dem direkt abgeleiteten Wert:

$$K_0' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T_0} \cdot B \cdot \Delta T_0$$

übereinstimmt. Hieraus erhält man $m_1 = 3 \cdot \frac{\sigma}{f}$, wodurch die Formel (51) geschrieben werden kann:

$$K' = -\frac{1}{2}\frac{p}{T_0}\cdot B\cdot \frac{\Delta T}{1+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{f}{\sigma}+\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{f-1}{f}\right]\left(\frac{B}{\lambda}\right)p+\frac{f-1}{4\pi\sigma}\left(\frac{B}{\lambda}\right)^2\cdot p^2}$$

oder:

$$K' = -\frac{1}{2}\frac{p}{T_0}\cdot B\cdot \frac{\Delta T}{1+\beta\left(\frac{B}{\lambda}\right)p+\alpha\left(\frac{B}{\lambda}\right)^2\cdot p^2}, \qquad (55)$$

wo:

$$\beta = \frac{1}{3}\cdot\frac{f}{\sigma}+\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{f-1}{f} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\sigma}(f-1),$$

während $f = ln\frac{2\pi R}{2B}$.

7. Bevor wir den abgeleiteten Ausdruck für $K'$ näher prüfen und mit den Beobachtungen vergleichen, werden wir versuchen, den Wert von $\Delta T$, der Temperaturdifferenz zwischen den an die zwei Seiten des Bandes grenzenden Gasschichten, abzuleiten.

Ist ein Band mit der Temperatur $T_1$ und Breite $B$ in der Achse eines Zylinders mit der Temperatur $T_2$ und dem inneren Diameter $2R$ aufgehängt, können wir für den Wärmeverlust des Bandes per cm², Sek., Grad., $q_p$, schreiben:

$$q_p(T_1-T_2) = a\cdot\varepsilon\cdot p(T_1-t_1).$$

$a$ ist der Akkommodationskoefficient der Oberfläche und $t_1$ die mittlere Temperatur der auf dem Bande auffallenden Moleküle; $p$ ist der Druck und $\varepsilon$ das molekulare Wärmeleitungsvermögen des Gases.

Die Temperatur der an das Band grenzenden Gasschicht wird:

$$T_s = \frac{1}{2}(t_1+t_2),$$

wo $t_2$ die mittlere Temperatur der von der Oberfläche zurückgeworfenen Molekülen bezeichnet.

Laut der Definition des Akkommodationskoefficienten, $a$, ist:

$$t_2 = t_1 + a(T_1-t_1),$$

und also:

$$T_s = \frac{1}{2}(t_1+t_2) = t_1+\frac{a}{2}(T_1-t_1).$$

Haben die zwei Seiten des Bandes verschiedene Akkommodationskoefficienten $a_2$ und $a_1$, erhalten wir:

$$\Delta T = T_s'' - T_s' = t'' + \frac{a_2}{2}(T_1 - t'') - \left[t' + \frac{a_1}{2}(T_1 - t')\right]$$

oder

$$\Delta T = T_s'' - T_s' = \left(1 - \frac{a_1}{2}\right)(T_1 - t') - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)(T_1 - t'').$$

Vernachlässigen wir den Einfluss der eventuellen Strömungen auf die Wärmeabgabe, erhalten wir für den Wärmeverlust der zwei Seiten des Bandes:

$$q_p''(T_1 - T_2) = a_2 \cdot \varepsilon p (T_1 - t'')$$

und

$$q_p'(T_1 - T_2) = a_1 \cdot \varepsilon p (T_1 - t'),$$

und also:

$$\Delta T = (T_1 - T_2)\left[\left(1 - \frac{a_1}{2}\right)\frac{q_p'}{a_1 \varepsilon p} - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)\frac{q_p''}{a_2 \varepsilon p}\right]. \qquad (56)$$

In einer früheren Arbeit[22] habe ich nachgewiesen, dass man auch annäherungsweise für die Wärmeabgabe eines flachen Bandes in einem zirkularen Zylinder die Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{a \varepsilon p} + \frac{1}{q_\alpha}, \quad \text{wo} \quad q_\alpha = \frac{2\pi\varkappa}{2\pi r_0} \cdot \frac{1}{ln \dfrac{R + \frac{1}{2}k\lambda}{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}},$$

verwenden darf, wenn $B = \pi r_0$ gesetzt wird. Hieraus erhält man nach Einsetzung in die Formel (56):

$$\Delta T = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2) \cdot \frac{1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p}{1 + (a_2 + a_1)\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p + a_2 a_1 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 \cdot p^2}. \qquad (57)$$

Für $p \gtreqless 0$ wird: $\Delta T = \Delta T_0 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2)$.

[22] Sophus Weber: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XIX, 11, 1942.

Da $\varkappa = k\varepsilon p\lambda$, wird:

$$\Delta T_\infty = (a_2 - a_1)(T_1 - T_2)\frac{1}{a_1 a_2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}\, k\,\frac{\lambda}{r_0}\,\frac{T_1 - T_2}{ln\,\dfrac{R + \frac{1}{2}k\lambda}{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}}.$$

Aus Formel (57) sehen wir leicht, dass $\Delta T$ ein Maximum erreicht, wenn:

$$1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p_{\max} = \sqrt{n} = \sqrt{\frac{(2 - a_2)(2 - a_1)}{a_1 a_2}}, \qquad (58)$$

während der Wert von $\Delta T_{\max}$ wird:

$$\Delta T_{\max} = \Delta T_0 \frac{1}{\frac{1}{2}(a_2 + a_1 - a_1 a_2) + \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(2 - a_2)(2 - a_1)}}\left[2 - (a_2 + a_1) + \frac{1}{2}a_2 a_1\right]},$$

mit:

$$\Delta T_0 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2).$$

Wir finden hieraus für Wasserstoff und $a_2 = 0{,}715$, $a_1 = 0{,}315$:

$$2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p_{\max} = \sqrt{n} - 1 = 2{,}1005$$

und:

$$\Delta T_{\max} = 1{,}3303 \cdot \Delta T_0.$$

Für Helium und $a_2 = 0{,}909$, $a_1 = 0{,}411$:

$$2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p_{\max} = \sqrt{n} - 1 = 1{,}1540$$

und:

$$\Delta T_{\max} = 1{,}1420 \cdot \Delta T_0.$$

Für atm. Luft und $a_2 = 0{,}980$, $a_1 = 0{,}835$:

$$2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p_{\max} = \sqrt{n} - 1 = 0{,}2062$$

und:

$$\Delta T_{\max} = 1{,}009 \cdot \Delta T_0.$$

Das Maximum von $\Delta T$ ist ein ziemlich flaches Maximum, wie aus den folgenden Werten für Wasserstoff und $a_2 = 0{,}715$, $a_1 = 0{,}315$ hervorgeht:

$$p = \frac{9}{10} p_{\max} : \Delta T = 1{,}3291 \cdot \Delta T_0,$$

$$p = \quad p_{\max} : \Delta T = 1{,}3303 \cdot \Delta T_0,$$

$$p = \frac{11}{10} p_{\max} : \Delta T = 1{,}3292 \cdot \Delta T_0.$$

8. Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass der vollständige Ausdruck für $K'$, die KNUDSEN'sche Radiometerkraft per cm Länge des Bandes, für $\frac{B}{R} \ll 1$, geschrieben werden kann:

$$K' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot B \frac{1}{1 + \beta \left(\frac{B}{{}_1\lambda}\right) p + \alpha \left(\frac{B}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2} \Delta T_0 \frac{1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) \cdot p}{1 + (a_2 + a_1)\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p + a_2 a_1 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 \cdot p^2} \quad (60$$

oder:

$$K' = F(p) \cdot \Delta T_0 \cdot f(p),$$

wo $F(p)$ die gewöhnliche Radiometerfunktion ist.

In diesem Ausdruck sind alle Konstanten mit Ausnahme von $\sigma$ bekannt; der Wert von $\sigma$ wird wahrscheinlich zwischen 1 und 2 liegen.

Wäre die Temperaturdifferenz, $\Delta T$, konstant oder beinahe unabhängig von dem Druck, $p$, würde man das Maximum von $K'$ erhalten, wenn $F(p)$ sein Maximum erreicht; dies geschieht, wenn:

$$p = p_{\max} = \frac{{}_1\lambda}{B} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{{}_1\lambda}{B} \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{f-1}}, \quad \text{oder} \quad \lambda_{\max} = B\sqrt{\alpha}. \qquad (61)$$

In diesem Falle wird der Maximumswert von $K'$:

$$K'_{\max} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}_1\lambda}{T} \cdot \frac{\Delta T}{\beta + 2\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2} \cdot {}_1\lambda \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{f}{\sigma} + \frac{3}{4\pi} \frac{f-1}{f} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{f-1}{\sigma}}}. \qquad (62)$$

Hieraus geht hervor, dass $p_{max}$ in diesem Falle umgekehrt proportional mit der Breite des Bandes $B$ ist, und das $K'_{max}$ sich nur wenig mit dem Wert von $B$ ändert, weil $K'_{max}$ nur von $ln\frac{\pi R}{B}$ abhängt.

Fallen die Maxima von $F(p)$ und $\Delta T$ praktisch gesprochen zusammen, wird die Bestimmung von der Grösse und Lage des Maximumwertes von $K'$ sehr einfach, weil das Maximum von $\Delta T$ sehr flach ist. Im Allgemeinen kann aber kein Zusammenfallen der Maxima erwartet werden, und es wird darum etwas umständlicher, die Grösse und die Lage des Maximums zu bestimmen. Bei der folgenden Vergleichung zwischen der hier entwickelten Theorie und dem RASMUSSEN'schen Beobachtungsmaterial werde ich hierauf zurückkommen.

Für $p \gtrsim 0$ gibt die Formel für $K'$ den Wert:

$$K'_0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{T}\cdot B\Delta T_0 = -\frac{1}{4}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2)\frac{p}{T}\cdot B,$$

eine Formel, die bereits von MARTIN KNUDSEN abgeleitet ist.

Für sehr grosse Werte von $p$ erhält man, wenn die Variation von $ln\frac{\pi R}{B}$ mit $B$ vernachlässigt wird:

$$K'_\infty \backsim (T_1 - T_2)\cdot\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}\cdot\frac{{}_1\lambda^3}{B^2\cdot p^2},$$

weil:

$$\frac{q_\alpha}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{\varkappa}{B}\cdot\frac{1}{ln\frac{\pi R}{B}} = \frac{\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{k\varepsilon p\lambda}{B}\cdot\frac{1}{ln\frac{\pi R}{B}} = \pi k\frac{{}_1\lambda}{B\,ln\frac{\pi R}{B}}.$$

Auf diese Abhängigkeit hat bereits R. E. H. RASMUSSEN in Verbindung mit seiner empirischen Formel für $K'_{obs.}$, vgl. S. 35, hingewiesen.

Wir sehen also, dass die KNUDSEN'sche Radiometerkraft bei grossen Werten von $p$ umgekehrt proportional mit $(B\cdot p)^2$ wird, weil $\Delta T_\infty \backsim \frac{1}{B\cdot p}$ ist.

In dem Folgenden werde ich nun die Formel für $K'$ mit den Messungen von R. E. H. RASMUSSEN vergleichen.

9. Über die KNUDSEN'sche Radiometerkraft liegen drei Untersuchungen vor; die erste Abhandlung ist die Pionierarbeit von MARTIN KNUDSEN[23]; diese Arbeit ist insbesondere auf grosse Genauigkeit bei den niedrigsten Drucken eingestellt.

Ausserdem hat R. E. H. RASMUSSEN[24] zwei Arbeiten veröffentlicht. In seiner ersten Arbeit wird für dasselbe Band, $B = 0{,}2540$ cm, nach der magnetischen Kompensationsmethode der Einfluss von dem äusseren Diameter, $2R$, untersucht. In der zweiten Arbeit von RASMUSSEN ist ein grosses und wertvolles Beobachtungsmaterial über die KNUDSEN'sche Radiometerkraft geschaffen, und man kann, da die Messungen nach der Torsionsmethode durchgeführt sind, annehmen, dass die Genauigkeit befriedigend ist. In dieser Untersuchung wurde in einem grossen Behälter mit dem Diameter, $2R_0 =$ ca. 23 cm, die Radiometerkraft auf drei verschiedenen Bändern, $B_1 = 0{,}253$ cm, $B_2 = 0{,}502$ cm und $B_3 = 1{,}001$ cm, in dem ganzen Druckbereich gemessen. Für alle drei Bänder ist praktisch gesprochen, auch wenn in Betracht genommen wird, dass die Bänder ca. 5 cm ausserhalb der Achse des Behälters stehen, die Bedingung $\frac{B}{2R} \ll 1$ erfüllt. Die eine Seite von den Bändern war glatt und blank, während die andere Seite, und zwar bei allen drei Bänder in derselben Weise, durch Platinierung schwarz und rauh gemacht war. Die Radiometerkraft und die Wärmeabgabe der Bänder wurden gleichzeitig gemessen; die Messungen von der Radiometerkraft bei den verschiedenen Werten von $T_1 - T_2$ in Wasserstoff und atm. Luft sind in der Abhandlung[25] veröffentlicht. Die folgenden Messungen von der Wärmeabgabe in Wasserstoff hat Dr. R. E. H. RASMUSSEN zu meiner Verfügung gestellt, wofür ich ihm auch hier meinen besten Dank aussprechen möchte.

Das ganze Beobachtungsmaterial über die Radiometerkraft hat RASMUSSEN auf $T_1 - T_2 = 40°$ C., $T_2 = 20°$ C. umgerechnet und graphisch dargestellt. Es stellte sich heraus, dass das ganze Versuchsmaterial für alle drei Bänder befriedigend durch die empirische Formel:

[23] MARTIN KNUDSEN: loc. cit.

[24] R. E. H. RASMUSSEN: loc. cit.

[25] In derselben Arbeit ist auch ein Spezialfall von der KNUDSEN'schen Radiometerkraft untersucht. Dieser Fall, $B = 1{,}00$ cm und $2R_0 =$ ca. 1,2 cm, wurde früher von mir theoretisch behandelt (D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XIX, 11, 1942). Vgl. Zusammenfassung, Punkt 2.

$$K'_{\text{obs.}} = \frac{1}{4}(a''_2 - a''_1)\frac{B}{T_0} \cdot \frac{p\,(T_1 - T_2)}{1 + c\left(\frac{B}{\lambda}\right)p + c^2\left(\frac{B}{\lambda}\right)^2 \cdot p^2 + \frac{c^3}{27}\left(\frac{B}{\lambda}\right)^3 \cdot p^3}$$

dargestellt werden kann, woraus sofort erhellt, dass die Übereinstimmung mit der theoretischen Formel (60), der Form nach sowohl für $p \to 0$ als auch für grosse Werte von $p$, befriedigend ist.

Aus den Kurven hat RASMUSSEN folgende Werte von $p_{\max}$ und $K'_{\max}$ gefunden:

Tabelle V.

| | No. | $B$, cm | $10^5 \cdot \left(\frac{K'_{\max}}{T_1 - T_2}\right)_{\text{obs.}}$ | $p_{\max,\,\text{obs.}}$ (Bar.) |
|---|---|---|---|---|
| Wasserstoff: | | | | |
| $T_2 = 20°$ C... | 1 | 0,253 | 247 | 107 |
| $T_1 - T_2 = 40°$ C... | 2 | 0,502 | 272 | 59 |
| | 3 | 1,001 | 304 | 33 |
| Atm. Luft: | | | | |
| $T_2 = 20°$ C... | 1 | 0,253 | 29,2 | 51 |
| $T_1 - T_2 = 40°$ C... | 2 | 0,502 | 25,8 | 22,4 |
| | 3 | 1.001 | 21,9 | 11,5 |

Wir sehen hieraus, das $K'_{\max}$ ziemlich unabhängig von $B$ ist, und dass annäherungsweise $p_{\max} \sim \frac{1}{B}$; auffallend ist aber, dass die Maximalkraft in atm. Luft zehnmal kleiner ist als in Wasserstoff.

Wir werden nun erst aus den Wärmeabgabemessungen die Werte von $a_2 - a_1$, $\Delta T$, und $R$ bestimmen. Da die Bänder ausserhalb der Achse des Behälters stehen, muss der mittlere Wert von $R$ auch durch die Wärmeabgabe abgeleitet werden.

10. Nach den Messungen von MARTIN KNUDSEN können wir für die blanke Seite der Messbänder in Wasserstoff $a_1 = 0{,}315$ setzen. Durch die Messungen der Wärmeabgabe bei sehr niedrigem Druck lässt sich der Wert von $(a_1 + a_2)$ bestimmen. In den folgenden Tabellen VI, VII und VIII sind für jedes Messband, bestehend aus 2 identischen Längen $L$, zwei Messreihen von $q'_p$, der Wärmeabgabe des Bandes per cm Länge und für eine Temperaturdifferenz von einem Grad, bei dem Druck $p$ angegeben.

Tabelle VI.

$B_1 = 0{,}253$ cm, $T_1 - T_2 = 40°$ C., $T_2 = 20°$ C.

$q'_p$ ist für die Strahlung und die Ableitung durch die Enden des Bandes korrigiert.

| $p$ (Bar.) | $\Delta p$ | $q'_p \cdot 10^3$ | $\Delta q'_p \cdot 10^3$ | $\frac{\Delta q'_p}{\Delta p} \cdot 10^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | | |
| | 3,08 | | 0,033 | 0,0107 |
| 3,08 | | 0,033 | | |
| | 3,01 | | 0,032 | 0,0106 |
| 6,09 | | 0,065 | | |
| | 2,98 | | 0,031 | 0,0104 |
| 9,07 | | 0,096 | | |
| | 5,89 | | 0,058 | 0,0099 |
| 14,96 | | 0,154 | | |
| | 5,78 | | 0,057 | 0,0099 |
| 20,84 | | 0,211 | | |
| | 5,76 | | 0,052 | 0,0091 |
| 26,60 | | 0,263 | | |
| | 5,80 | | 0,048 | 0,0083 |
| 32,4 | | 0,311 | | |
| | 8,60 | | 0,069 | 0,0080 |
| 41,0 | | 0,380 | | |
| | 8,60 | | 0,064 | 0,0075 |
| 49,6 | | 0,444 | | |

$$\lim \left(\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}\right)_{p=0} = 0{,}0110 \cdot 10^{-3}; \left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0 = 218 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | | |
| | 5,24 | | 0,061 | 0,0117 |
| 5,24 | | 0,061 | | |
| | 5,22 | | 0,045 | 0,0087 |
| 10,46 | | 0,106 | | |
| | 5,18 | | 0,046 | 0,0089 |
| 15,64 | | 0,151 | | |
| | 5,17 | | 0,050 | 0,0097 |
| 20,81 | | 0,201 | | |

$$\lim \left(\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}\right)_{p=0} = 0{,}0114 \cdot 10^{-3}; \left(\frac{\Delta q}{\Delta p}\right)_0 = 225 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

Mittelwert von $\left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0 = 222$ Erg/cm$^2$ Sek. Gr.

Tabelle VII.

$B_2 = 0{,}502$ cm, $T_1 - T_2 = 40°$ C., $T_2 = 20°$ C.

$q'_p$ ist für die Strahlung und die Ableitung durch die Enden des Bandes korrigiert.

| $p$ (Bar.) | $\Delta p$ | $q'_p \cdot 10^3$ | $\Delta q'_p \cdot 10^3$ | $\frac{\Delta q'_p}{\Delta p} \cdot 10^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | | |
| | 2,39 | | 0,054 | 0,0226 |
| 2,39 | | 0,054 | | |
| | 2,33 | | 0,051 | 0,0218 |
| 4,72 | | 0,105 | | |
| | 2,32 | | 0,048 | 0,0207 |
| 7,04 | | 0,153 | | |
| | 2,31 | | 0,050 | 0,0216 |
| 9,35 | | 0,203 | | |
| | 2,28 | | 0,040 | 0,0175 |
| 11,63 | | 0,243 | | |
| 0 | | 0 | | |
| | 7,49 | | 0,168 | 0,0224 |
| 7,49 | | 0,168 | | |
| | 7,40 | | 0,148 | 0,0200 |
| 14,89 | | 0,316 | | |
| | 7,39 | | 0,131 | 0,0177 |
| 22,28 | | 0,447 | | |
| | 7,32 | | 0,118 | 0,0161 |
| 29,60 | | 0,565 | | |

$$\lim \left(\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}\right)_{p=0} = 0{,}0233 \cdot 10^{-3} \text{ (Mittelwert)}$$

$$\left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0 = 232 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

Tabelle VIII.

$B_3 = 1{,}001$ cm, $T_1 - T_2 = 40°$ C., $T_2 = 20°$ C.

$q'_p$ ist für die Strahlung und die Ableitung durch die Enden des Bandes korrigiert.

| $p$ (Bar.) | $\Delta p$ | $q'_p \cdot 10^3$ | $\Delta q'_p \cdot 10^3$ | $\frac{\Delta q'_p}{\Delta p} \cdot 10^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | | |
| | 0,98 | | 0.044 | 0,0450 |
| 0,98 | | 0,044 | | |
| | 0,93 | | 0,042 | 0,0450 |
| 1,91 | | 0,086 | | |
| | 0,93 | | 0,043 | 0,0463 |
| 2,84 | | 0,129 | | |
| | 0,92 | | 0,042 | 0,0456 |
| 3,76 | | 0,171 | | |
| | 0,91 | | 0,040 | 0,0440 |
| 4,67 | | 0,211 | | |
| | 0,92 | | 0,040 | 0,0435 |
| 5,59 | | 0,251 | | |
| | 0,90 | | 0,039 | 0,0432 |
| 6,49 | | 0,290 | | |
| | 0,91 | | 0,039 | 0,0430 |
| 7,40 | | 0,329 | | |
| | 0,90 | | 0,035 | 0,0390 |
| 8,30 | | 0,364 | | |
| 0 | | 0 | | |
| | 5,46 | | 0,236 | 0,0433 |
| 5,46 | | 0,236 | | |
| | 5,36 | | 0,214 | 0,0400 |
| 10,82 | | 0,450 | | |
| | 5,34 | | 0,188 | 0,0353 |
| 16,16 | | 0,638 | | |
| | 5,31 | | 0,151 | 0,0284 |
| 21,47 | | 0,789 | | |

$$\lim \left(\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}\right)_{p=0} = 0{,}0462 \cdot 10^{-3} \text{ (Mittelwert)}$$

$$\left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0 = 231 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

Aus den elektrischen Messungen bekommt man:

$$q'_p = \frac{w \cdot i^2}{2L(T_1 - T_2)} \text{ Watt/Sek. Gr.} = 2B \cdot q_p.$$

$i$ ist die Stromstärke in Amp. und $w$ der elektrische Widerstand des Bandes in Ohm bei der Temperatur $T_1$; $q_p$ wird also die Wärmeabgabe per cm$^2$. Aus den Messreihen wird $\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}$ berechnet und hieraus der Grenzwert $\left(\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}\right)_0$ für $p = 0$ graphisch bestimmt.

Wenn $\varepsilon_{20}$ das molekulare Wärmeleitungsvermögen in Wasserstoff bei $T_2 = 20°$ C. bezeichnet, wird:

$$\left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0 = \left(\frac{\Delta q'_p}{\Delta p}\right)_{p=0} \cdot \frac{1}{2B} \cdot 10^7 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.} = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) \cdot \varepsilon_{20}.$$

Für $H_2$ ist $\varepsilon_{T_2} = \varepsilon_{20} = 441{,}4$ Erg/cm$^2$ Sek. Gr., sodass hieraus $(a_1 + a_2)$ bestimmt werden kann.

Wir sehen aus den Tabellen, dass die experimentellen Werte von $\left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0$ für die drei Bänder nur wenig von einander abweichen, so dass wir denselben Wert von $(a_1 + a_2)$ für alle drei Bänder verwenden können. Wir finden im Mittel für die drei Bänder:

$$\left(\frac{\Delta q_p}{\Delta p}\right)_0 = 228 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1)\,\varepsilon_{20} = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) \cdot 441{,}4$$

und also:

$$a_2 + a_1 = 1{,}030,$$

oder:

$$a_2 = 0{,}715, \quad \text{da} \quad a_1 = 0{,}315.$$

---

Nachdem $a_2$ auf diese Weise bestimmt ist, werden wir die Temperaturdifferenz, $\Delta T$, zwischen den zwei Seiten des Bandes näher betrachten. Die Temperaturdifferenz $\Delta T$ wird durch Formel (58):

$$\Delta T = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2) \frac{1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) \cdot p}{1 + (a_2 + a_1)\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p + a_2 a_1 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 \cdot p^2},$$

berechnet, nachdem die Werte von $\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)$ in Wasserstoff für die drei Bänder $B_1$, $B_2$ und $B_3$ aus den RASMUSSEN'schen Messungen bei höheren Drucken bestimmt sind.

Mit Hilfe der Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha}, \quad \text{wo} \quad q_0 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1)\,\varepsilon_T \cdot p,$$

können wir aus den RASMUSSEN'schen Messungen von der Wärmeabgabe in Wasserstoff die Werte von $\left(\frac{\varepsilon_T}{q_\alpha}\right)$ für die drei Bänder bestimmen; hierdurch ist laut der obenstehenden Formel der Wert von $\Delta T$ in dem ganzen Druckbereich bestimmt.

Wir erhalten auf diese Weise die in Kolonne 4 der Tabellen IX, X und XI angegebenen Werte von $\frac{\varepsilon_T}{q_\alpha}$ für die drei Bänder, $B_1$, $B_2$ und $B_3$, in Wasserstoff:

a) $B_1 = 0{,}253$ cm; $T_1 - T_2 = 40°$ C.; $T_2 = 20°$ C.

und

$$\varepsilon_{40} = \frac{7555}{\sqrt{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}} = 427{,}1 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

Tabelle IX.

| $p$ (Bar.) | $q'_{p,\,\text{obs.}}$ (cm Länge) Erg/Sek. Gr. | $q_{p,\,\text{obs.}}$ (per cm²) | $\frac{\varepsilon}{q_\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0 | — |
| 64,6 | $0{,}561 \cdot 10^4$ | $1{,}109 \cdot 10^4$ | $84{,}7 \cdot 10^{-4}$ |
| 125,9 | 0,886 — | 1,751 — | 89,7 — |
| 183,8 | 1,112 — | 2,198 — | 88,7 — |
| 347,0 | 1,502 — | 2,968 — | 87,9 — |
| 499,0 | 1,708 — | 3,376 — | 87,6 — |
| 814,0 | 1,930 — | 3,814 — | 88,1 — |
| 1408,0 | 2,150 — | 4,249 — | 86,8 — |

woraus im Mittel: $\frac{\varepsilon}{q_\alpha} = 87{,}5 \cdot 10^{-4}$ für $B_1$.

Aus der Formel (58):

$$1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p''_{\max} = 3{,}1005,$$

erhalten wir, dass $\Delta T$ sein Maximum für $B_1 = 0{,}253$ und für Wasserstoff erreicht bei dem Druck:

$$p''_{\max} = \frac{2{,}1005}{2 \cdot 87{,}5 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ Bar.}$$

---

b) $B_2 = 0{,}502$ cm; $T_1 - T_2 = 43°$ C.; $T_2 = 20°$ C.

Tabelle X.

| $p$ (Bar.) | $q'_{p,\,\text{obs.}}$ (cm Länge) Erg/Sek. Gr. | $q_{p,\,\text{obs.}}$ (per cm²) | $\frac{\varepsilon}{q_\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | — |
| 33,1 | $0{,}592 \cdot 10^4$ | $0{,}590 \cdot 10^4$ | $137{,}2 \cdot 10^{-4}$ |
| 64,5 | 0,957 — | 0,953 — | 147,1 — |
| 94,2 | 1,207 — | 1,202 — | 149,2 — |
| 122,4 | 1,388 — | 1,382 — | 150,4 — |

woraus im Mittel: $\frac{\varepsilon}{q_\alpha} = 146{,}0 \cdot 10^{-4}$ für $B_2$.

Aus der Formel (58):

$$1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p''_{\max} = 3{,}1005,$$

erhalten wir für $B_2$:

$$p''_{\max} = 72{,}0 \text{ Bar.}$$

---

c) $B_3 = 1{,}001$ cm; $T_1 - T_2 = 42°$ C.; $T_2 = 20°$ C.

Tabelle XI.

| $p$ (Bar.) | $q'_{p,\,\text{obs.}}$ (cm Länge) Erg/Sek. Gr. | $q_{p,\,\text{obs.}}$ (per cm$^2$) | $\frac{\varepsilon}{q_\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | — |
| 17,9 | $0{,}638 \cdot 10^4$ | $0{,}319 \cdot 10^4$ | $255{,}4 \cdot 10^{-4}$ |
| 29,2 | 0,937 — | 0,468 — | 247,6 — |
| 39,8 | 1,164 — | 0,581 — | 245,7 — |
| 49,9 | 1,340 — | 0,669 — | 248,7 — |
| 59,5 | 1,499 — | 0,749 — | 244,0 — |

woraus im Mittel: $\frac{\varepsilon}{q_\alpha} = 248{,}0 \cdot 10^{-4}$ für $B_3$.

Hieraus erhalten wir für $B_3$:

$$1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p''_{\max} = 3{,}1005 \quad \text{oder} \quad p''_{\max} = 42{,}3 \text{ Bar.}$$

---

Die Wärmeabgabe der Bänder ist gleichzeitig mit der Radiometerkraft gemessen. Bei den Messungen waren, wie früher erwähnt, zwei identische Bänder, symmetrisch zur Achse und ungefähr 5 cm ausserhalb dieser, in der KNUDSEN'schen Drehwaage ausgespannt; diese war wieder coaxial in einem zirkularen Zylinder mit Diameter $2R_0 =$ ca. 23 cm aufgehängt. Bei niedrigen Drucken ist es ohne Bedeutung, dass die Bänder ausserhalb der Achse stehen; bei höheren Drucken ist es aber notwendig, dieser Abweichung Rechnung zu tragen, weil der Wert von $R_0 =$ ca. 11,5 cm in diesem Falle nicht in dem Ausdruck $ln \frac{R}{r_0}$ verwendet werden kann. Der wahre Wert von $R$ wird in diesem Falle kleiner als ca. 11,5 cm sein und kann am besten durch die gemessene Wärmeabgabe bei höheren Drucken bestimmt werden.

Aus den RASMUSSEN'schen Bestimmungen findet man hierfür,

nach Bildung von Mittelwerten und Auswertung der verschiedenen Messungen, aus den Beobachtungen für $B_1 = 0{,}253$ cm:

$$p = 9210 \text{ Bar.}; \; q'_p \text{ (cm Länge)} = 2{,}330 \cdot 10^{-3} \text{ Watt/Sek. Gr.}$$
$$= 2{,}330 \cdot 10^4 \text{ Erg/Sek. Gr.},$$

wenn:

$$(T_1 - T_2) \to 0 \quad \text{und} \quad T_2 = 20^\circ \text{ C.}$$

Hieraus erhält man:

$$q_p \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{q'_p}{2B_1} = 4{,}605 \cdot 10^4 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

Mit Hilfe der Formeln:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha} \quad \text{und} \quad q_0 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1)\, \varepsilon_{20} \cdot p,$$

erhält man hieraus:

$$\frac{\varepsilon_{20}}{q_\alpha} = 93{,}8 \cdot 10^{-4}$$

oder:

$$q_\alpha = 4{,}705 \cdot 10^4 \text{ Erg},$$

weil $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 0{,}515$ und

$$\varepsilon_{20} = \frac{7555}{\sqrt{293 \cdot 1}} = 441{,}4 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

Für Wasserstoff ist $(p\lambda)_{20} = 12{,}32$ und

$$k = 3{,}34, \text{ sodass } \frac{1}{2}k\lambda = 0{,}0022 \text{ für } p = 9210 \text{ Bar.}$$

Aus der Formel:

$$q_\alpha = \frac{\varkappa_{20}}{r_0} \cdot \frac{1}{ln \dfrac{R + \frac{1}{2}k\lambda}{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}},$$

erhalten wir mit $r_0 = \frac{B_1}{\pi} = 0{,}08053$ cm und

$$\varkappa_{20} = 4130 \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}19 \cdot 10^{7} \left(\frac{293{,}1}{273{,}1}\right)^{0{,}70} = 18188 \text{ Erg/cm}^2 \text{ Sek. Gr.}$$

$$R = 9{,}96 \text{ cm},$$

wodurch die Werte $f_1$, $f_2$ und $f_3$ von $f = ln \frac{R}{r_0} = ln \frac{\pi R}{B}$ für die drei Bänder berechnet werden können.

11. Wir können nun dazu übergehen, die abgeleitete theoretische Formel (60) für die KNUDSEN'sche Radiometerkraft:

$$K' = F(p)\,\Delta T = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot B \cdot \frac{\Delta T}{1 + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{f}{\sigma} + \frac{3}{4\pi} \frac{f-1}{f}\right] \left(\frac{B}{{}_1\lambda}\right) p + \frac{f-1}{4\pi\sigma} \left(\frac{B}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot B \cdot \frac{\sigma}{\sigma + \left[\frac{f}{3} + \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{f-1}{f} \cdot \sigma\right] \left(\frac{B}{{}_1\lambda}\right) p + \frac{f-1}{4\pi} \left(\frac{B}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2} \cdot \Delta T,$$

wo:

$$\Delta T = \frac{1}{4}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2) \cdot \frac{1 + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{q_\alpha} \cdot p}{1 + (a_2 + a_1) \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p + a_2 a_1 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 \cdot p^2}$$

mit den Beobachtungen von R. E. H. RASMUSSEN zu vergleichen. Wir werden hierfür erst die von ihm bestimmten Maximalwerte: $K'_{1,\max} = \left(\frac{K'}{T_1 - T_2}\right)_{\max}$ und dessen Lage $p_{\max}$, gebrauchen.

1° Wasserstoff. Für Wasserstoff stellt sich heraus, dass die Lagen der Maxima für die Radiometerfunktion $F(p)$, und die Temperaturdifferenz, $\Delta T$, bezw. $p'_{\max}$ und $p''_{\max}$ praktisch gesprochen zusammenfallen. Wir finden aus der Formel für $\Delta T$:

Tabelle XII.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B_1 = 0{,}253$ cm | $\frac{\varepsilon}{q_\alpha} = 87{,}5 \cdot 10^{-4}$ | $p''_{\max} = 120$ Bar. | $\Delta T_{\max} = 1{,}3303 \cdot \Delta T_0$ |
| $B_2 = 0{,}502$ – | – = 146,0 – | – = 72 – | – = – – |
| $B_3 = 1{,}001$ – | – = 248,0 – | – = 42,3 – | – = – – |

und aus der Formel für $F(p)$, die Radiometerfunktion, mit $\sigma = 1{,}33$ und $f_1 = ln\frac{\pi R}{B} = 4{,}818$, $f_2 = 4{,}133$, $f_3 = 3{,}443$, ${}_1\lambda_{40°} = 13{,}35$:

Tabelle XIII.

| | | |
|---|---|---|
| $B_1 = 0{,}253$ cm | $p'_{max} = 110$ | $F(p)_{max} \cdot \frac{\Delta T_{max}}{T_1 - T_2} = 239{,}6 \cdot 10^{-5}$ |
| $B_2 = 0{,}502$ – | – = 61,2 | – – = 270,3 – |
| $B_3 = 1{,}001$ – | – = 34,8 | – – = 313,7 – |

Wir sehen hieraus, dass die Werte von $p'_{max}$ und $p''_{max}$ für Wasserstoff nicht sehr verschieden sind, so dass die Maxima von $F(p)$ und $\Delta T$ einander verstärken.

Berechnet man aus Formel (60) die Werte von $K'_1$ für verschiedene Werte von $p$ in der Nähe von den Maximalwerten $p'_{max}$ und $p''_{max}$, kann man eine graphische Darstellung von dem Verlauf von $K'_1$ in diesem Druckbereich aufzeichnen und hieraus die zusammengehörigen Werte von $K'_{1,max}$ und $p_{max}$ bestimmen. Auf diese Weise erhält man mit $\sigma = 1{,}33$ die folgende Werte:

Tabelle XIV.

| $B$ | $\left(\frac{K'}{T_1 - T_2}\right)_{max,ber.}$ | $p_{max,ber.}$ | $\left(\frac{K'}{T_1 - T_2}\right)_{max,obs.}$ | $p_{max,obs.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,253 | $239{,}7 \cdot 10^{-5}$ | 113,0 | $247 \cdot 10^{-5}$ | 107 |
| 0,502 | 270,5 – | 64,5 | 272 – | 59 |
| 1,001 | 313,8 – | 36,8 | 304 – | 33 |

Durch Vergleichung mit den beobachteten Werten, die in Kolonne 4 und 5 der Tabelle XIV angegeben sind, erhellt, dass die Übereinstimmung sowohl für $K'_{1,max}$ als auch für $p_{max}$ befriedigend ist, wenn $\sigma = 1{,}33$.

Um den Verlauf von $\sigma$ in dem ganzen Druckbereich zu untersuchen, wurden alle Beobachtungen von $K'$ für $B_1 = 0{,}253$ cm von neuem auf $T_1 - T_2 = 40°$ C. und $T_2 = 20°$ C. umgerechnet; dieses Observationsmaterial wurde dann in einem Diagramm ($K'_1$, log $p$) dargestellt und graphisch ausgewertet; im Allgemeinen liegen die Punkte befriedigend auf der Kurve; bei der Neubestimmung des Maximums wurde gefunden:

$$B_1 = 0{,}253\text{ cm},\ \left(\frac{K'}{T_1 - T_2}\right)_{max} = 243 \cdot 10^{-5},\ p_{max} = 110\text{ Bar.},$$

wodurch die Übereinstimmung mit den berechneten Werten noch besser wird.

In der folgenden Tabelle XV sind die zusammengehörigen Werte von $K'_{1,40}$ und $p$ aus dieser Kurve angegeben; in Kolonne 4 stehen die aus der Formel (60) berechneten Werte, und in Kolonne 3 sind die bei der Berechnung benutzten Werte von $\sigma$ angegeben. Aus der Tabelle erhellt, dass sich der Wert von $\sigma$ von 1 für $\frac{B_1}{\lambda} \rightarrow 0$ auf ca. 2,50 für $\frac{B_1}{\lambda} \rightarrow \infty$ ändert und also der Grössenordnung nach mit dem Resultat in dem analogen Fall »Kugel-zirkulare Planscheibe« in Übereinstimmung ist, worin sich $\sigma$ in dem ganzen Druckgebiet von 1 auf 2 ändert.

Tabelle XV.

| $p$ (Bar.) | $\frac{K'_{40}}{T_1 - T_2} \cdot 10^5{}_{obs.}$ | $\sigma$ | $\frac{K'_{40}}{T_1 - T_2} \cdot 10^5{}_{ber.}$ | $\frac{B}{\lambda}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | — | 0 | 0 |
| 3,16 | 23,5 | 1,00 | 23,6 | 0,06 |
| 6,31 | 44,0 | 1,01 | 44,0 | 0,12 |
| 10,00 | 66,0 | 1,04 | 66,2 | 0,19 |
| 17,78 | 105,0 | 1,19 | 105,1 | 0,34 |
| 31,62 | 155,0 | 1,25 | 155,2 | 0,60 |
| 56,2 | 210,0 | 1,31 | 209,2 | 1,00 |
| 100,0 | 241,0 | 1,32 | 241,1 | 1,9 |
| 112,0 | 243,0 | 1,33 | 240,0 | 2,1 |
| 177,8 | 226,0 | 1,35 | 227,1 | 3,4 |
| 316,2 | 175,0 | 1,37 | 174,9 | 6,0 |
| 562 | 110,0 | 1,42 | 110,4 | 10,6 |
| 1000 | 59,0 | 1,59 | 59,0 | 19,0 |
| 1778 | 30,0 | 1,92 | 30,0 | 34,0 |
| 3162 | 15,0 | 2,50 | 14,7 | 60,0 |
| 5623 | 5,5 | 2,50 | 5,6 | 106 |
| 10000 | 2 | 2,50 | 1,8 | 190 |
| 14130 | < 1 | 2,50 | 0,9 | 270 |

Eine weitere Diskussion von dem Wert von $\sigma$ hat aber erst Zweck, wenn eine einwandfreie mathematische Berechnung der Radiometerkraft für ein flaches Band in dem Falle, $\frac{B}{\lambda} \rightarrow \infty$,

vorliegt, und wenn neue Beobachtungen, insbesondere in dem Gebiet, $\frac{B}{\lambda} \to \infty$, durchgeführt sind.

Annäherungsweise kann $\sigma$ durch die Formel:

$$\sigma = \frac{1 + 0{,}333 \frac{B}{\lambda}}{1 + 0{,}133 \frac{B}{\lambda}},$$

dargestellt werden.

2° Atm. Luft. RASMUSSEN hat auch mit demselben Apparat Messungen für die drei Bänder in atmosphärischer Luft ausgeführt. Es stellte sich heraus, dass die maximale Radiometerkraft in atm. Luft ca. 10 Mal kleiner ist als in Wasserstoff; die Genauigkeit der Messreihen in atm. Luft ist aber bedeutend geringer als in Wasserstoff, weil der Einfluss von den nötigen Korrektionen in atm. Luft verhältnismässig viel grösser wird.

In atm. Luft können wir für die drei Bänder, $B_1$, $B_2$ und $B_3$, $a_1 = 0.835$ und $a_2 = 0{,}98$ setzen. Dadurch wird:

$$a_2 - a_1 = 0{,}145, \quad a_1 + a_2 = 1{,}815 \quad \text{und} \quad a_1 \cdot a_2 = 0{,}8183.$$

Mit diesen Werten wird:

$$1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)' p''_{\max} = \sqrt{\frac{(2 - a_2)(2 - a_1)}{a_2 a_1}} = 1{,}2062,$$

und:

$$\Delta T_{\max} = 1{,}0090\ \Delta T_0.$$

Die Werte von $\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)'$ in atm. Luft für die drei Bänder können wir am einfachsten durch Umrechnung der beobachteten Werte von $\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)$ in Wasserstoff finden. Mit Hilfe der Formel für die Wärmeleitungsfähigkeit: $\varkappa = k \varepsilon p \lambda$, wo $k = 3{,}34$ für Wasserstoff und $k = 3{,}20$ für atm. Luft, erhalten wir leicht, für atm. Luft:

$$B_1 = 0{,}253 \text{ cm}, \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)' = 171{,}0 \cdot 10^{-4},$$
$$B_2 = 0{,}502 \text{ —}, \quad \text{»} \quad = 285{,}3 \text{ —},$$
$$B_3 = 1{,}001 \text{ —}, \quad \text{»} \quad = 485{,}0 \text{ —}.$$

In atm. Luft liegen die Maxima von $\Delta T$ und $F(p)$ weit auseinander, wie aus der folgenden Tabelle XVI zu ersehen ist. In

Kolonne 4 sind die Werte von $p''_{max}$, bezw. die Lagen der Maxima von $\Delta T$, und in Kolonne 5 die Werte von $p'_{max}$, bezw. die Lagen der Maxima von $F(p)$, angegeben; die Werte von $p'_{max}$ sind wie für Wasserstoff mit $\sigma = 1{,}33$, $f_1 = 4{,}818$, $f_2 = 4{,}133$ und $f_3 = 3{,}443$ berechnet; ${}_1\lambda_{40} = 7{,}21$ für atm. Luft.

Tabelle XVI.
Atm. Luft.

| $B$ in cm | $\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)'$ | $\Delta T_{max}$ | $p''_{max}$ (Lage $\Delta T_{max}$) | $p'_{max}$ (Lage $F(p)_{max}$) |
|---|---|---|---|---|
| 0,253 | $171{,}0 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}009 \cdot \Delta T_0$ | 6,05 Bar. | 59,4 Bar. |
| 0,502 | 285,3 — | — — | 3,62 — | 33,0 — |
| 1,001 | 485,0 — | — — | 2,14 — | 18,8 — |

Berechnet man nach Formel (60) und mit $\sigma = 1{,}33$ die Werte von $K'_1 = \frac{K'}{T_1 - T_2}$ in atm. Luft für verschiedene Werte von $p$ in der Nähe von den observierten Maximalwerten von $K'_1$, dann erhält man in derselben Weise wie für Wasserstoff die berechneten Maximalwerte von $K'_{max}$ und die dazu gehörigen Werte von $p_{max}$, welche in Kolonne 2 und 3 der folgende Tabelle XVII angegeben sind, während die von R. E. H. Rasmussen experimentell gefundenen Maximalwerte in Kolonne 4 und 5 angegeben sind.

Tabelle XVII.
Atm. Luft.

| $B$ in cm | $\left(\frac{K'}{T_1 - T_2}\right)_{max,ber.}$ | $p_{max,ber.}$ | $\left(\frac{K'}{T_1 - T_2}\right)_{max,obs.}$ | $p_{max,obs.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,253 | $28{,}7 \cdot 10^{-5}$ | 53,0 | $29{,}2 \cdot 10^{-5}$ | 51 |
| 0,502 | 34,2 — | 22,0 | 25,8 — | 22,4 |
| 1.001 | 39,8 — | 12,5 | 21,9 — | 11,5 |

Aus dieser Tabelle ersehen wir, dass die Übereinstimmung in atm. Luft, sowohl für $K'_{1,max}$ als für $p_{max}$ für das Band $B_1 = 0{,}253$, befriedigend ist, wenn $\sigma = 1{,}33$; für die Bänder $B_2$ und $B_3$ ist die Übereinstimmung, was $p_{max}$ betrifft, auch befriedigend. Die theoretischen Werte von $K'_{1,max}$ stimmen aber für diese zwei Bänder mit den beobachteten Werten nicht überein;

die theoretischen Werte wachsen nämlich wie in Wasserstoff mit wachsendem Wert von $B$, während die beobachteten Werte für $K_1$ mit wachsendem $B$, im Gegensatz zu den Observationen in Wasserstoff, abnehmen.

Es wäre von Bedeutung, durch neue Experimente, auch mit anderen Gasen, zu untersuchen, ob dieser Verlauf eine Realität ist, oder ob unbekannte Fehlerquellen, z. B. Undichtigkeiten im Apparat oder Konvektionsströmungen, bei den Messungen in atm. Luft für $B_2$ und $B_3$ eine Rolle gespielt haben.

---

Ausser den obenerwähnten Untersuchungen in Wasserstoff und atm. Luft von R. E. H. RASMUSSEN hat MARTIN KNUDSEN in seiner Pionierarbeit Messungen in Helium und Wasserstoff ausgeführt. Er verwendete hierfür hauptsächlich die Aufstellung mit der magnetischen Kompensationseinrichtung; die Breite des Bandes war 0,2428 cm und der innere Diameter des Glaszylinders ca. 6,5 cm.

Werden die KNUDSEN'schen Messungen mit der Formel (60) verglichen, dann stellt sich heraus, dass die Formel (60) mit $\sigma = 1{,}33$ auch die experimentellen Maximalwerte $K'_{1,\max}$ und $p_{\max}$ befriedigend wiedergibt, und zwar sowohl für Helium als auch für Wasserstoff, wenn die experimentelle Genauigkeit in Betracht gezogen wird.

R. E. H. RASMUSSEN hat auch nach derselben Methode eine Untersuchung in Wasserstoff durchgeführt. In dieser verwendete er ein Band, $B = 0{,}2540$ cm, umgeben von verschiedenen Zylindern, deren Diameter $2R = 4{,}11$ cm, 3,21 cm, 2,24 cm und 1,27 cm waren. Die Formel (60) gibt auch diese Messreihen befriedigend wieder; für die Maximalwerte von $K'_1$ und $p$ gilt wieder $\sigma =$ ca. 1,30.

Für die kleinsten Zylinder sind aber die berechneten Werte von $K'_{1,\max}$ etwas zu klein, ca. 10 bis 15 %. Die Ursache hierzu wird sein, dass die Bedingung für Formel (60), $\frac{B}{R} \ll 1$, in diesem Falle nicht erfüllt ist, und dass es ausserdem, wenn die Bedingung $\frac{B}{R} \ll 1$ nicht erfüllt ist, unzulässig wird, in der Berechnung

das flache Band mit Breite $B$ durch einen runden Faden mit Radius $r_0 = \frac{B}{\pi}$ zu ersetzen. Diese Ersetzung wird nämlich nur dann eine brauchbare Annäherung sein, wenn $\frac{B}{2R} \to 0$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, werden die Widerstandsverhältnisse für die Zurückströmung des Gases der Aussenwand entlang sich ändern, so dass der experimentelle Wert von $K_1'$ für ein flaches Band mit Breite $B$ grösser wird als für einen runden Draht mit Radius $\frac{B}{\pi}$ [26].

## Zusammenfassung.

1° Nach den grundlegenden Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN über den molekularen Zustand der Gase, d. h. den Zustand, in welchem die mittlere freie Weglänge, $\lambda$, im Vergleich mit der massgebenden Abmessung des Apparates, $\mu$, sehr gross ist, ist auch die Theorie der Radiometerkraft auf einer Fläche, bezw. des totalen Impulstransportes durch die Fläche, in diesem Gebiet, wo $\frac{\mu}{\lambda} \to 0$, geklärt.

Für den Zustand $\frac{\mu}{\lambda} \to \infty$ wird die Theorie der Radiometererscheinungen etwas komplizierter, weil die in der Oberfläche des Radiometerkörpers anwesenden Temperaturunterschiede an der Oberfläche des Radiometerkörpers Gleitströme hervorrufen; diese Gleitströme veranlassen, wegen der inneren Reibung des Gases, eine hydrodynamische Strömung im Gase. Die Richtung der Gleitströme ist von Stellen niedriger Temperatur nach Stellen höherer Temperatur, und somit wird die Richtung der auf dem Radiometerkörper ausgeübten Kraft die entgegengesetzte. Die Theorie der Radiometerkraft wird in diesem Gebiet, wo $\frac{\mu}{\lambda} \to \infty$, ganz analog mit der abgeleiteten Theorie für die thermischen Molekulardrucke.

Um den totalen Impulstransport durch die Oberfläche des Radiometerkörpers, bezw. die Radiometerkraft auf dem Radiometerkörper, herrührend von der hydrodynamischen Strömung

[26] Vgl. den unter [25]) erwähnten Spezialfall.

in dem Radiometersystem, berechnen zu können, muss erst das Strömungsproblem im Zusammenhang mit dem Wärmeleitungsproblem im Radiometersystem gelöst werden. Da es sich bei kleinen Temperaturdifferenzen nur um langsame Reibungsströmungen handelt, kann die hydrodynamische Strömung als laminar angesehen werden, und es wird darum im Allgemeinen möglich, auch weil keine äusseren Kräfte vorhanden sind, eine befriedigende Lösung des Strömungsproblemes zu finden, wenn das Radiometersystem eine geometrisch einfache Form hat.

Wird die Gleitung, $\gamma$, und die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung, wie diese aus den Untersuchungen von den thermischen Molekulardrucken hervorgegangen ist:

$$u_s - k_2 \cdot \gamma \cdot \frac{du_s}{dr} = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{dT}{ds} \cdot \frac{1}{1 + m \cdot \frac{\lambda}{\mu}},$$

in den Randbedingungen des Strömungsproblemes eingeführt, und wird die unbekannte Konstante, $m$, in der obengenannten MAXWELL'schen Grenzbedingung so bestimmt, dass der abgeleitete Ausdruck für die Radiometerkraft, $K$, für $p \to 0$ mit dem für $\frac{\mu}{\lambda} = 0$ direkt abgeleiteten Ausdruck für $K_0$ übereinstimmt, erhält man einen Ausdruck für die Radiometerkraft, $K$, in dem ganzen Gebiet $0 \leqq \frac{\mu}{\lambda} \leqq \infty$.

Es stellt sich heraus, dass die Radiometerkraft, $K$, in den untersuchten Fällen für das ganze Gebiet, $0 \leqq \frac{\mu}{\lambda} \leqq \infty$, wie folgt geschrieben werden kann:

$$K = F(p) \cdot \Delta T.$$

$F(p)$ ist die Radiometerfunktion, während $\Delta T$ die massgebende oder wirksame Temperaturdifferenz an der Oberfläche des Radiometerkörpers ist. $\Delta T$ wird durch die Lösung des Wärmeleitungsproblemes gefunden und ist im Allgemeinen nicht nur von der Form und den Abmessungen des Radiometersystemes, sondern auch von dem Druck und den Eigenschaften des Gases abhängig. Der Wert von $\Delta T$, der für die entstehenden Gleitströme massgebend ist, kann den Verlauf von $K$ in dem ganzen Druckgebiet sehr stark beeinflussen.

Die Radiometerfunktion, $F(p)$, hat in den untersuchten Fällen, z. B. Kugel, planzirkulare Scheibe, runder Faden, flaches Band u. s. w., die folgende Form:

$$F(p) = A_1 \cdot \frac{p}{1 + \beta\left(\frac{\mu}{{}_1\lambda}\right) p + \alpha\left(\frac{\mu}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2},$$

wo $A_1$ u. A. von den Abmessungen und dem Akkommodationskoefficienten des Radiometerkörpers abhängt; $p$ ist der Druck des Gases und ${}_1\lambda$ die mittlere freie Weglänge des benutzten Gases bei dem Druck 1 Bar.; $\alpha$ und $\beta$ sind Konstanten, die im Allgemeinen von den Abmessungen des Radiometersystemes abhängen.

Die Radiometerkraft, $K_1 = \frac{K}{\Delta T} = F(p)$, hat bei dem Druck $p_{max}$ ein Maximum, $K_{max}$. Werden diese Maximalwerte als Einheiten für $K$ und $p$ gewählt, kann, wenn $\Delta T$ konstant ist, die WESTPHAL'sche »reducierte« Radiometerfunktion geschrieben werden:

$$\frac{K_1}{K_{1,\,max}} = \frac{2 + \delta_1}{e^x + e^{-x} + \delta_1},$$

wo:

$$x = ln\frac{p}{p_{max}} \quad \text{und} \quad \delta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}},$$

2° Der Einfluss der geometrischen Form des Radiometersystemes und der hiermit zusammenhängenden Strömungen bei grösserer Dichte auf die Radiometerkraft geht sehr klar aus zwei Versuchen mit identischem Radiometerkörper von Dr. R. E. H. RASMUSSEN hervor. Er arbeitete mit einem flachen Platinband, $B = 1{,}000$ cm, in Wasserstoff und untersuchte die KNUDSEN'sche Radiometerkraft, welche in verschiedenen Werten des Akkommodationskoefficienten an beiden Seiten des Radiometerkörpers ihre Ursache hat. Für das von RASMUSSEN benutzte Band war im Wasserstoff für die schwarze Seite $a_2 =$ ca. 0,72 und für die blanke Seite $a_1 = 0{,}315$.

Mit diesem Band als Radiometerkörper wurden in den Experimenten folgende Resultate erhalten:

a) In einem Radiometersystem, in dem die entstehenden Strömungen an den beiden Seiten des Bandes praktisch gesprochen

von einander unabhängig waren, so dass auch kein Druckausgleich zwischen den zwei Seiten des Bandes stattfinden konnte, wurde von RASMUSSEN gefunden:

$$\frac{K_{max}}{T_1 - T_0} = 147 \cdot 10^{-4} \text{ Dyn/cm. Grad und } p_{max} = 166 \text{ Bar.}$$

$T_1 - T_0$ ist die Temperaturdifferenz zwischen dem Band und dem umgebenden Zylinder, und in diesem Radiometersystem ist die massgebende Temperaturdifferenz, $\Delta T$, praktisch gesprochen gleich $T_1 - T_0$ (vgl. SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XIX, 11, 1942, S. 28).

b) In einem Radiometersystem, worin das Band vollständig frei in einem grossen Behälter aufgehängt war, sodass sich die Strömungen frei um das Band entwickeln konnten und der sich bildende Druckunterschied zwischen den beiden Seiten des Bandes sich teilweise durch Rückströmung der Aussenwand entlang ausgleichen konnte, wurde gefunden:

$$\frac{K_{max}}{T_1 - T_0} = 30{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ Dyn/cm. Grad und } p_{max} = 33 \text{ Bar.}$$

$T_1 - T_0$ ist wieder die Temperaturdifferenz zwischen dem Radiometerkörper und der Umgebung, aber in diesem Radiometersystem ist die massgebende oder wirksame Temperaturdifferenz hauptsächlich bestimmt durch den Unterschied im Temperatursprung an der schwarzen und blanken Seite des Bandes $B$.

c) In dem molekularen Zustande, $\frac{B}{\lambda} \gtrless 0$, sind in beiden Radiometersystemen die Werte von $K_0$ einander gleich, wenn die Umgebung denselben Akkommodationskoefficienten, z. B. $a = 1$, hat, da in diesem Zustand keine Gleitströme vorhanden sind.

3° Besteht der Radiometerkörper aus einer Kugel mit Radius $r_0$ und herrscht zwischen den zwei Polen, $y = 0$, $x = \pm r_0$, in den die Kugeloberfläche angrenzenden Gasschichten eine Temperaturdifferenz $\Delta T$, wird der abgeleitete Ausdruck für $K$:

$$K = -\frac{\pi}{6} a \cdot \frac{r_0^2}{T} \cdot \frac{p}{1 + \beta \left(\frac{r_0}{{}_1\lambda}\right) p + \alpha \left(\frac{r_0}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2} \cdot \Delta T.$$

$a$ ist der Akkommodationskoefficient der Kugeloberfläche; $\alpha = \frac{\pi}{24} a$ und $\beta = \frac{3}{8} + \frac{\pi}{9} a$.

Hieraus folgt:

$$r_0 = \frac{2{,}763}{\sqrt{a}} \cdot \lambda_{\max}.$$

Wird die Temperaturdifferenz $\Delta T$ durch eine einseitige Bestrahlung von der Intensität, $I$, erzeugt, erhält man, wenn der Temperatursprung an der Oberfläche der Kugel vernachlässigt wird:

$$\Delta T = \frac{2\,I}{\varkappa_i + 2\,\varkappa_a} r_0.$$

Befindet sich die Kugel in einem Raum mit dem konstanten Temperaturgradienten, $G = \frac{dT}{dx}$, in grosser Entfernung von der Kugel, erhält man:

$$\Delta T = 6 \frac{\varkappa_a}{\varkappa_i + 2\,\varkappa_a} r_0 G.$$

Die Übereinstimmung mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial für $K$ ist befriedigend. Eine ähnliche Formel kann für eine planzirkulare Scheibe und für ein Ellipsoid abgeleitet werden.

4° Ist der Radiometerkörper ein zirkularer Zylinder oder runder Faden mit Radius $r_0$, und ist dieser in der Achse eines umgebenden Zylinders mit Radius $R$ aufgehängt, erhält man, wenn $r_0 \ll R$:

$$K = -\frac{3\pi}{2} \cdot k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{2 r_0 \left[ ln \frac{R}{r_0} - 1 \right] \left[ 1 + k_2 \frac{ln \frac{R}{r_0}}{ln \frac{R}{r_0} - 1} \cdot \frac{\lambda}{r_0} \right] \left[ 1 + m \frac{\lambda}{r_0} \right]} \cdot \Delta T,$$

oder nach Anschliessen an den direkt berechneten Wert,

$$K_0 = -\frac{\pi}{8} a r_0 \cdot \frac{p}{T} \cdot \Delta T_0, \quad \text{für} \quad \frac{r_0}{\lambda} = 0:$$

$$K = -\frac{\pi}{8} a r_0 \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{1 + \beta \left(\frac{r_0}{\lambda}\right) p + \alpha \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \cdot p^2} \cdot \Delta T,$$

worin:

$$\alpha = \frac{\pi}{16} a \left( ln \frac{R}{r_0} - 1 \right) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\pi}{12} a \; ln \frac{R}{r_0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{ln \frac{R}{r_0} - 1}{ln \frac{R}{r_0}}.$$

Der Wert von $\Delta T$ wird für einseitige Bestrahlung mit der Intensität, $I$:

$$\Delta T = \frac{2 I}{\varkappa_i + \varkappa_a} r_0.$$

Die quantitative Übereinstimmung mit den Messungen von WESTPHAL für das Quarzfadenradiometer ist nicht befriedigend. Die Ursache hierzu wird in den Messungen gesucht, weil diese wahrscheinlich durch vertikale Konvektionsströmungen beeinflusst sind.

5° Bei der KNUDSEN'schen Radiometerkraft hat der Radiometerkörper eine konstante Temperatur, $T_1$, höher als die Temperatur der Umgebung, $T_2$. Die zwei Seiten des Radiometerkörpers haben aber verschiedene Akkommodationskoefficienten, $a_2$ und $a_1$, $(a_2 > a_1)$, dem Gase gegenüber. Hierdurch wird der Temperatursprung an den zwei Seiten des Radiometerkörpers verschieden, wodurch eine Temperaturdifferenz, $\Delta T$, in den die Oberfläche angrenzenden Gasschichten entsteht. $\Delta T$ kann aus dem Ausdruck für den Temperatursprung, bezw. aus dem Ausdruck für den Wärmeverlust des Fadens, bestimmt werden.

Für einen runden Faden, wovon die zwei Hälften verschiedene Akkommodationskoefficienten haben, kann man die unter 4° abgeleitete Formel, wenn der richtige Wert von $\Delta T$ eingesetzt wird, verwenden.

Für ein flaches Band mit Breite $B$ und mit den verschiedenen Akkommodationskoefficienten $a_2$ und $a_1$ kann, wenn das Band in der Achse eines umgebenden Zylinders mit Radius $R$ aufgehängt ist, die Radiometerkraft in Analogie mit dem Ausdruck für einen zirkularen Faden annäherungsweise, für den Fall $B \ll R$, geschrieben werden:

$$K = -\sigma \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\Delta T}{\frac{2B}{\pi}(f-1)\left[1+\pi \cdot k_2 \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{\lambda}{B}\right]\left[1+m_1 \cdot \frac{\lambda}{B}\right]}.$$

Diese Formel entsteht aus der Formel für den runden Faden, wenn $2\pi r_0 = 2B$ und $f = ln\frac{2\pi R}{2B}$ gesetzt werden; $\sigma$ ist ein Zahlenfaktor.

Nach Anschliessen an den molekularen Zustand, $\frac{B}{\lambda} \rightarrow 0$, für welchen:

$$K_0 = -\frac{1}{2} B \cdot \frac{p}{T} \cdot \Delta T_0,$$

erhält man:

$$K = -\frac{1}{2} B \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{1+\beta\left(\frac{B}{\lambda}\right)p + \alpha\left(\frac{B}{\lambda}\right)^2 \cdot p^2} \cdot \Delta T,$$

mit

$$\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{f}{\sigma} + \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{f-1}{f} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{f-1}{\sigma}.$$

Für $\Delta T$ wird aus der Wärmeabgabe des Bandes gefunden:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2) \cdot \frac{1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) \cdot p}{1 + (a_2 + a_1)\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)p + a_2 a_1 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 \cdot p^2},$$

wo $\varepsilon$ das molekulare Wärmeleitungsvermögen ist, und

$$q_\alpha = \frac{2\pi z}{2B} \cdot \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R + \frac{1}{2}k\lambda}{\frac{B}{\pi} + \frac{1}{2}k\lambda}}.$$

Aus dem Ausdruck für $\Delta T$ erhellt, dass $\Delta T$ bei dem Druck $p''_{max}$ auch ein Maximum, $\Delta T_{max}$, hat; für den Wert von $p''_{max}$ wird leicht erhalten:

$$1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p''_{max} = \sqrt{\frac{(2-a_2)(2-a_1)}{a_2 a_1}}$$

und hieraus:

$$\Delta T_{\max} = \Delta T_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(a_2 + a_1 - a_2 a_1) + \sqrt{\frac{a_2 a_1}{(2-a_2)(2-a_1)}\left(2 - [a_2 + a_1] + \frac{1}{2} a_2 a_1\right)}},$$

wo:

$$\Delta T_0 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(T_1 - T_2).$$

Diese Formeln werden mit dem ganzen vorliegenden Beobachtungsmaterial für die KNUDSEN'sche Radiometerkraft und insbesondere mit dem grossen Beobachtungsmaterial von Dr. R.E.H. RASMUSSEN, der mit Wasserstoff und atm. Luft arbeitete, verglichen.

In Wasserstoff ist die Vergleichung, dem Verlauf und der Grössenordnung nach, sehr befriedigend; $\sigma$ ist aber, wie auch erwartet werden musste, keine Konstante und ändert sich in dem ganzen Gebiet, $0 \leq \frac{B}{\lambda} \leq \infty$, von 1 auf ca. 2,50.

6° Die angegebenen Formeln sind, obwohl bei der Ableitung einige Vernachlässigungen und Annäherungen, insbesondere in dem Gebiet $\frac{B}{\lambda} \to 0$, gebraucht sind, genügend, um den Verlauf und die Grösse der Radiometerkraft in dem ganzen Druckgebiet wiederzugeben; sie können auch für zukünftige experimentelle Untersuchungen über die Radiometerkräfte von Bedeutung sein, wenn einmal diese Untersuchungen in systematischer Weise vorgenommen werden.

---

Auch bei dieser Gelegenheit möchte ich der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds meinen aufrichtigen Dank für die mir gewährte Unterstützung aussprechen.

Indleveret til Selskabet den 17. Maj 1943.
Færdig fra Trykkeriet den 1. September 1944.