

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.  
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIX**, 7.

---

DIE LIBRATIONSELLIPSEN UM  
DIE DREIECKSLIBRATIONSPUNKTE  
IM ALLGEMEINEN DREIKÖRPER-  
PROBLEM

VON

PEDER PEDERSEN



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1941

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

## 1. Einleitung.

Um die LAGRANGESchen Dreieckslibrationspunkte im allgemeinen Dreikörperproblem gibt es infinitesimale periodische Librationen, wenn die Bewegung auf ein rotierendes Koordinatensystem bezogen wird, das den Anfangspunkt im gemeinsamen Schwerpunkt der drei Massen hat, und das mit einer Winkelgeschwindigkeit rotiert, die dieselbe ist wie die Winkelgeschwindigkeit der Massen in der absoluten Bewegung. Von solchen Librationen gibt es zwei Sorten. Die eine Sorte kann als LAGRANGESche Librationen bezeichnet werden, weil sie beim Übergang von dem rotierenden Koordinatensystem auf das feste mit den von LAGRANGE gefundenen Lösungen identisch werden, in Übereinstimmung damit, dass die Umlaufszeit der Librationen dieselbe ist wie die Umlaufszeit des Systems in der absoluten Bewegung. Bei der zweiten Sorte Librationen stimmt die Umlaufszeit nicht mit der Umlaufszeit in der absoluten Bewegung überein; diese Librationen geben deshalb in der absoluten Bewegung keine periodischen Bahnen. Die Librationen dieser zweiten Sorte wollen wir als nicht-LAGRANGESche Librationen bezeichnen.

In einer früheren Abhandlung<sup>1</sup> habe ich die erwähnten Librationen behandelt. Es wurde vorausgesetzt, dass die Abstände der Massen von den Librationspunkten unend-

<sup>1</sup> Die Erweiterung der LAGRANGESchen Dreieckslösungen im allgemeinen Dreikörperproblem [Astr. Nachrichten 5043 und Publikation der Kopenhagener Sternwarte Nr. 35 (1920)].

lich klein 1. Ordnung waren. In den Reihenentwicklungen wurden keine Glieder mitgenommen, die höher als 1. Ordnung waren. Es ging aus der Untersuchung hervor, dass — während die LAGRANGESchen Librationen für alle Werte der Massenverhältnisse existieren — die nicht-LAGRANGESchen Librationen nur dann existieren, wenn die Massenverhältnisse die Gleichung

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 \leq \frac{1}{27} \quad (1)$$

befriedigen, wo  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  die Grösse der drei Massen angeben, in der Einheit der Gesamtmasse ausgedrückt. Diese Bedingung sagt aus, dass der gemeinsame Schwerpunkt der drei Massen ausserhalb eines Kreises oder auf demselben liegen muss, dessen Zentrum im Zentrum des gleichseitigen Dreiecks (des Librationsdreiecks) liegt und einen Radius besitzt, der nur wenig kleiner ist als der Radius des dem Dreieck umschriebenen Kreises. Die Gebiete ausserhalb des Kreises, wo der Schwerpunkt liegen kann, wenn die Gleichung (1) befriedigt werden soll, ist deshalb auf drei ganz kleine Eck-Gebiete beschränkt (Abb. 1). Die nicht-LAGRANGESchen Librationen existieren deshalb nur, wenn eine der drei Massen dominierend ist. Wenn eine der drei Massen gleich Null ist, geht die Bedingung (1) auf die im problème restreint bekannte Bedingung

$$\mu_1 \mu_2 \leq \frac{1}{27} \quad (2)$$

über.

Die in der oben zitierten Abhandlung mitgeteilte Untersuchung umfasste nur die Berechnung der Umlaufszeit in den infinitesimalen periodischen Bahnen, wogegen keine Untersuchung der Form der Librationsellipsen und ihrer Orientierung ausgeführt wurde. Veranlasst durch eine An-

frage seitens Professor E. STRÖMGREN in Bezug auf die Orientierung der Achsen habe ich jetzt die Untersuchung wieder aufgenommen. Im folgenden werde ich die erhaltenen Resultate über die Verhältnisse der Achsen und ihre Orientierung mitteilen. Der Vollständigkeit wegen sind die

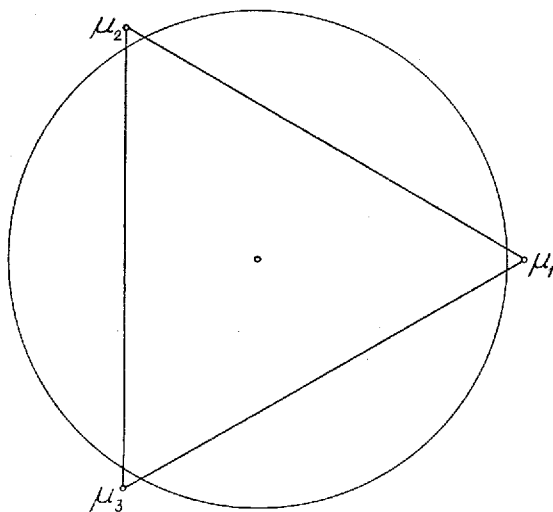


Abb. 1.

LAGRANGESchen Librationsellipsen auch behandelt worden. Als Grundlage der Untersuchung dienen die in der oben zitierten Abhandlung gefundenen Differentialgleichungen.

## 2. Die Differentialgleichungen der Bewegung.

Wir lassen die drei Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  zur Zeit  $t = 0$  sich in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $\rho$  befinden und geben den Anfangsgeschwindigkeiten solche Werte, dass die drei Massen für immer in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $\rho$  verbleiben. Wir wählen ein Koordinatensystem, das den Anfangspunkt im gemeinsamen Schwerpunkt der drei

Massen hat, und das mit einer Winkelgeschwindigkeit  $n$  rotiert, die in Richtung und Grösse mit der Winkelgeschwindigkeit übereinstimmt, womit das gleichseitige Dreieck rotiert. In einem solchen Koordinatensystem werden die drei Massen feste Stellungen einnehmen. Wenn die drei Massen aber aus den Dreieckspunkten in andere Punkte in der unmittelbaren Umgebung der Dreieckspunkte verschoben werden, werden sie kleine Akzelerationen erfahren. Wenn die Koordinaten der Dreieckspunkte in dem mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$  rotierenden Koordinatensystem  $x, y$  mit  $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$  bezeichnet werden und die Koordinaten der verschobenen Massen mit  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , so haben wir die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, \\ M - n^2 \rho^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo

$$M = m_1 + m_2 + m_3. \quad (4)$$

Wir haben speziell:

$$\left. \begin{aligned} m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 &= 0, \\ m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wenn die Koordinaten der drei Massen im Verhältnis zu den Dreieckspunkten mit  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$  bezeichnet werden, haben wir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 + \xi_1, & x_2 &= p_2 + \xi_2, & x_3 &= p_3 + \xi_3, \\ y_1 &= q_1 + \eta_1, & y_2 &= q_2 + \eta_2, & y_3 &= q_3 + \eta_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wegen (3) und (5) erhalten wir dann:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 &= 0, \\ m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + m_3 \eta_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wenn die Entfernungen der Massen von den Dreiecks-  
punkten als unendlich kleine Grössen 1. Ordnung betrach-  
tet werden, und wenn wir in den Reihenentwicklungen  
nur Glieder bis zur 1. Ordnung inkl. mitnehmen und die

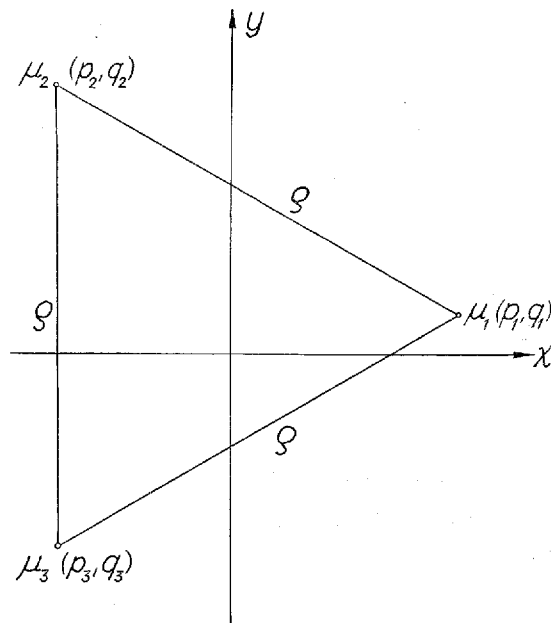


Abb. 2.

Ordinatenachse des Koordinatensystems einer Dreiecksseite  
parallel legen (Abb. 2), erhalten wir die folgenden Differen-  
tialgleichungen für die Bewegung der Massen  $m_1$  und  $m_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n\eta_1' - \frac{9}{4}n^2\xi_1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}(1-2\mu_2)n^2\eta_1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\mu_2n^2\eta_2 &= 0, \\ \eta_1'' + 2n\xi_1' - \frac{3}{4}n^2\eta_1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}(1-2\mu_2)n^2\xi_1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\mu_2n^2\xi_2 &= 0, \\ \xi_2'' - 2n\eta_2' - \frac{9}{4}\mu_1n^2\xi_2 + \frac{9}{4}\mu_1n^2\xi_1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}\mu_1n^2\eta_2 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\mu_1n^2\eta_1 &= 0, \\ \eta_2'' + 2n\xi_2' - \left(3 - \frac{9}{4}\mu_1\right)n^2\eta_2 - \frac{9}{4}\mu_1n^2\eta_1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}\mu_1n^2\xi_2 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\mu_1n^2\xi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

### 3. Lösung der Differentialgleichungen.

Wir suchen jetzt Lösungen der Differentialgleichungen (8) von der Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A_1 e^{\lambda t}, & \xi_2 &= A_2 e^{\lambda t}, \\ \eta_1 &= B_1 e^{\lambda t}, & \eta_2 &= B_2 e^{\lambda t}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Indem  $\lambda = nz$  gesetzt wird, erhalten wir aus (8) und (9) die folgenden vier Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \left[ z^2 - \frac{9}{4} \right] A_1 & - \left[ 2z + \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] B_1 & - \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 B_2 & = 0, \\ \frac{9}{4} \mu_1 A_1 & + \left[ z^2 - \frac{9}{4} \mu_1 \right] A_2 & - \frac{3}{4} \sqrt{3} \mu_1 B_1 - \left[ 2z - \frac{3}{4} \sqrt{3} \mu_1 \right] B_2 & = 0, \\ \left[ 2z - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] A_1 & - \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 A_2 + \left[ z^2 - \frac{3}{4} \right] B_1 & & = 0, \\ -\frac{3}{4} \sqrt{3} \mu_1 A_1 & + \left[ 2z + \frac{3}{4} \sqrt{3} \mu_1 \right] A_2 & - \frac{9}{4} \mu_1 B_1 + \left[ z^2 - 3 + \frac{9}{4} \mu_1 \right] B_2 & = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wenn es in diesem System linearer, homogener Gleichungen Wurzeln geben soll, die von Null verschieden sind, muss die Determinante des Systems gleich Null sein.

Wenn die Determinante berechnet und gleich Null gesetzt wird, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} z^8 + 2z^6 + \left[ 1 + \frac{27}{4} (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_2^2) \right] z^4 & \\ + \frac{27}{4} (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_2^2) z^2 & = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

eine Gleichung, die zur Bestimmung von  $z$  dienen kann.

Der Kürze wegen schreiben wir:

$$s = \frac{27}{4} (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_2^2) = \frac{27}{4} (\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3), \quad (12)$$

wonach Gleichung (11) folgender Weise geschrieben werden kann:

$$z^2 (z^2 + 1) (z^4 + z^2 + s) = 0, \quad (13)$$



eine Gleichung, die in die folgenden drei Gleichungen gespalten werden kann:

$$z^2 = 0, \quad (14)$$

$$z^2 + 1 = 0, \quad (15)$$

$$z^4 + z^2 + s = 0. \quad (16)$$

Die erste dieser Gleichungen gibt die Doppelwurzel  $z = 0$ , was einer periodischen Lösung mit unendlich langer Periode entspricht. Diese Lösung bedeutet, dass das Massendreieck sich um den Schwerpunkt mit unendlich kleiner Winkelgeschwindigkeit dreht.

Die zweite Gleichung gibt das rein imaginäre Wurzel-paar  $z = \pm i$ , d. h.  $\lambda = \pm in$ , also eine periodische Lösung mit derselben Umlaufszeit wie der Umlaufszeit des Librationsdreiecks in der absoluten Bewegung. Diese Lösung stellt die in der Einleitung besprochenen LAGRANGESchen Librationen dar.

Aus der dritten Gleichung erhalten wir:

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - s}. \quad (17)$$

Die Bedingung dafür, dass diese Gleichung rein imaginäre Wurzeln geben soll, ist deshalb

$$s \leq \frac{1}{4} \quad (18)$$

oder

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 \leq \frac{1}{27}. \quad (19)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, werden die zwei Werte von  $z^2$  beide negativ. Jeder dieser zwei Werte von  $z^2$  entspricht einer periodischen Lösung, für das Plus-Zeichen in der Quadratwurzel in (17) eine Klasse langperiodischer, für das Minus-Zeichen eine Klasse kurzperiodischer Lösungen. Diese zwei Klassen periodischer Lösungen stellen

die in der Einleitung besprochenen nicht-LAGRANGESchen Librationen dar.

Wir bezeichnen mit  $\sigma$  eine positive Zahl, so dass

$$z = \pm i\sigma \quad (20)$$

ein Wurzelpaar der Gleichung (13) bedeutet. Wir bezeichnen ferner mit  $A_1, A_2, B_1, B_2$  die zu  $z = i\sigma$  gehörenden Integrationskonstanten, und mit  $A_{-1}, A_{-2}, B_{-1}, B_{-2}$  die zu  $z = -i\sigma$  gehörenden. Periodische Lösungen der Gleichungen (8) können dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A_1 e^{i\sigma nt} + A_{-1} e^{-i\sigma nt}, \\ \eta_1 &= B_1 e^{i\sigma nt} + B_{-1} e^{-i\sigma nt}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= A_2 e^{i\sigma nt} + A_{-2} e^{-i\sigma nt}, \\ \eta_2 &= B_2 e^{i\sigma nt} + B_{-2} e^{-i\sigma nt}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Gleichungen (21) und (22) können umgeformt werden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a_1 \cos \sigma nt + a_{-1} \sin \sigma nt, \\ \eta_1 &= b_1 \cos \sigma nt + b_{-1} \sin \sigma nt, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= a_2 \cos \sigma nt + a_{-2} \sin \sigma nt, \\ \eta_2 &= b_2 \cos \sigma nt + b_{-2} \sin \sigma nt, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A_1 + A_{-1}, & a_{-1} &= iA_1 - iA_{-1}, \\ b_1 &= B_1 + B_{-1}, & b_{-1} &= iB_1 - iB_{-1}, \\ a_2 &= A_2 + A_{-2}, & a_{-2} &= iA_2 - iA_{-2}, \\ b_2 &= B_2 + B_{-2}, & b_{-2} &= iB_2 - iB_{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Wir kehren jetzt zu den Gleichungen (10) zurück. Aus den drei ersten Gleichungen eliminieren wir  $A_2$  und  $B_2$ .

Wir erhalten dann eine Gleichung zwischen  $A_1$  und  $B_1$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{4} \sqrt{3} [(1 - \mu_1 - 2\mu_2) z^2 - 2\sqrt{3} (1 - \mu_1) z] A_1 \\ & - \left[ z^4 + \left( \frac{13}{4} - \frac{9}{4} \mu_1 \right) z^2 + \frac{3}{2} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) z \right] B_1 = 0. \end{aligned} \right\} (26)$$

In die Gleichung (26) wird zuerst  $z = i\sigma$ , dann  $z = -i\sigma$  eingesetzt, indem im zweiten Fall  $A_1$  und  $B_1$  durch  $A_{-1}$  und  $B_{-1}$  ersetzt werden. Wir erhalten dann:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{4} \sqrt{3} [-(1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma^2 - i2\sqrt{3} (1 - \mu_1) \sigma] A_1 \\ & - \left[ \sigma^4 - \left( \frac{13}{4} - \frac{9}{4} \mu_1 \right) \sigma^2 + i\frac{3}{2} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma \right] B_1 = 0, \end{aligned} \right\} (27)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{4} \sqrt{3} [-(1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma^2 + i2\sqrt{3} (1 - \mu_1) \sigma] A_{-1} \\ & - \left[ \sigma^4 - \left( \frac{13}{4} - \frac{9}{4} \mu_1 \right) \sigma^2 - i\frac{3}{2} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma \right] B_{-1} = 0. \end{aligned} \right\} (28)$$

Aus den Gleichungen (27) und (28) und den vier ersten der Gleichungen (25) ergeben sich zwei reelle Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma^2 a_1 + \frac{9}{2} (1 - \mu_1) \sigma a_{-1} \\ & + \left( \sigma^4 - \left( \frac{13}{4} - \frac{9}{4} \mu_1 \right) \sigma^2 \right) b_1 + \frac{3}{2} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma b_{-1} = 0, \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma^2 a_{-1} - \frac{9}{2} (1 - \mu_1) \sigma a_1 \\ & + \left( \sigma^4 - \left( \frac{13}{4} - \frac{9}{4} \mu_1 \right) \sigma^2 \right) b_{-1} - \frac{3}{2} \sqrt{3} (1 - \mu_1 - 2\mu_2) \sigma b_1 = 0. \end{aligned} \right\} (30)$$

Die Gleichungen (29) und (30) dienen zur Bestimmung von  $b_1$  und  $b_{-1}$  als Funktionen von  $a_1$  und  $a_{-1}$ , die als arbiträre Konstanten betrachtet werden können.

Aus der ersten und der dritten Gleichung (10) erhalten wir ferner:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 A_2 &= \left[ 2z - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] A_1 + \left[ z^2 - \frac{3}{4} \right] B_1, \\ \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 B_2 &= \left[ z^2 - \frac{9}{4} \right] A_1 - \left[ 2z + \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] B_1. \end{aligned} \right\} (31)$$

In diese Gleichungen setzen wir zuerst  $z = i\sigma$  und dann  $z = -i\sigma$  ein. Im zweiten Falle werden  $A_1, B_1, A_2, B_2$  durch  $A_{-1}, B_{-1}, A_{-2}, B_{-2}$  ersetzt. Es ergeben sich dann die vier Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 A_2 &= \left[ i2\sigma - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] A_1 - \left[ \sigma^2 + \frac{3}{4} \right] B_1, \\ \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 A_{-2} &= \left[ -i2\sigma - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] A_{-1} - \left[ \sigma^2 + \frac{3}{4} \right] B_{-1}, \\ \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 B_2 &= - \left[ \sigma^2 + \frac{9}{4} \right] A_1 - \left[ i2\sigma + \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] B_1, \\ \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 B_{-2} &= - \left[ \sigma^2 + \frac{9}{4} \right] A_{-1} - \left[ -i2\sigma + \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) \right] B_{-1}. \end{aligned} \right\} (32)$$

Aus den zwei ersten Gleichungen (32) und den sechs ersten Gleichungen (25) erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 a_2 &= 2\sigma a_{-1} - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) a_1 - \left( \sigma^2 + \frac{3}{4} \right) b_1, \\ \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 a_{-2} &= -2\sigma a_1 - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) a_{-1} - \left( \sigma^2 + \frac{3}{4} \right) b_{-1}, \end{aligned} \right\} (33)$$

die zur Bestimmung von  $a_2$  und  $a_{-2}$  dienen können. In entsprechender Weise ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 b_2 &= - \left( \sigma^2 + \frac{9}{4} \right) a_1 - 2\sigma b_{-1} - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) b_1, \\ \frac{3}{2} \sqrt{3} \mu_2 b_{-2} &= - \left( \sigma^2 + \frac{9}{4} \right) a_{-1} + 2\sigma b_1 - \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu_2) b_{-1}, \end{aligned} \right\} (34)$$

woraus  $b_2$  und  $b_{-2}$  bestimmt werden können.

Nachdem die Koordinaten von  $m_1$  und  $m_2$  bestimmt sind, können die Koordinaten von  $m_3$  mit Hilfe der Schwerpunktsintegrale (7) bestimmt werden.

Wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \xi_3 &= a_3 \cos \sigma nt + a_{-3} \sin \sigma nt, \\ \eta_3 &= b_3 \cos \sigma nt + b_{-3} \sin \sigma nt, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und erhalten für die Bestimmung der Koeffizienten  $a_3, a_{-3}, b_3, b_{-3}$  die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 &= 0, \\ \mu_1 a_{-1} + \mu_2 a_{-2} + \mu_3 a_{-3} &= 0, \\ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 &= 0, \\ \mu_1 b_{-1} + \mu_2 b_{-2} + \mu_3 b_{-3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

In der weiteren Untersuchung wird es notwendig sein, die LAGRANGESchen und die nicht-LAGRANGESchen Lösungen getrennt zu behandeln.

#### 4. Die Lagrangeschen Librationsellipsen.

Das Wurzelpaar  $z = \pm i$  befriedigt die Bedingungsgleichung (13) für alle Werte der Massen. Es werden deshalb entsprechende Librationsellipsen für alle Massenwerte existieren. Um diese Librationsellipsen zu bestimmen, müssen wir in die oben abgeleiteten Formeln  $\sigma = 1$  einführen.

Die Gleichungen (29) und (30) werden dadurch in die folgenden zwei übergeführt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4}\sqrt{3}(1-\mu_1-2\mu_2)a_1 + \frac{9}{2}(1-\mu_1)a_{-1} - \frac{9}{4}(1-\mu_1)b_1 \\ + \frac{3}{2}\sqrt{3}(1-\mu_1-2\mu_2)b_{-1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4}\sqrt{3}(1-\mu_1-2\mu_2)a_{-1} - \frac{9}{2}(1-\mu_1)a_1 - \frac{9}{4}(1-\mu_1)b_{-1} \\ - \frac{3}{2}\sqrt{3}(1-\mu_1-2\mu_2)b_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wir wollen diese zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $b_1$  und  $b_{-1}$  benutzen, indem wir für  $a_1$  und  $a_{-1}$  bestimmte Werte annehmen. Man könnte hier  $a_1 = \varepsilon$ ,  $a_{-1} = 0$  setzen, wo  $\varepsilon$  eine unendlich kleine Grösse 1. Ordnung bedeutet. Die Berechnung der Ausdrücke für  $b_1$  und  $b_{-1}$  zeigt indessen, dass diese am einfachsten werden, wenn man

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (7\mu_2^2 + 7\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3)\varepsilon, \\ a_{-1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

setzt.

Mit diesen Werten für  $a_1$  und  $a_{-1}$  geben die Gleichungen (37) und (38):

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 3\sqrt{3}(\mu_2^2 - \mu_3^2)\varepsilon, \\ b_{-1} &= -8(\mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_2\mu_3)\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Wenn wir dann in die Gleichungen (33)  $\sigma = 1$  und die Ausdrücke in (39) und (40) einsetzen, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= (7\mu_2^2 + 7\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3 - 7\mu_2 + \mu_3)\varepsilon, \\ a_{-2} &= 4\sqrt{3}\mu_3\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Entsprechend geben die Gleichungen (34):

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \sqrt{3}(3\mu_2^2 - 3\mu_3^2 - 3\mu_2 + 5\mu_3)\varepsilon, \\ b_{-2} &= -4(2\mu_2^2 + 2\mu_3^2 + 2\mu_2\mu_3 - 2\mu_2 - \mu_3)\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Endlich erhalten wir mit Hilfe der Gleichungen (36):

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (7\mu_2^2 + 7\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3 + \mu_2 - 7\mu_3)\varepsilon, \\ a_{-3} &= -4\sqrt{3}\mu_2\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} b_3 &= \sqrt{3}(3\mu_2^2 - 3\mu_3^2 - 5\mu_2 + 3\mu_3)\varepsilon, \\ b_{-3} &= -4(2\mu_2^2 + 2\mu_3^2 + 2\mu_2\mu_3 - \mu_2 - 2\mu_3)\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Hiermit sind die LAGRANGESchen Librationsellipsen vollständig bestimmt.

### 5. Die Nicht-Lagrangeschen Librationsellipsen.

Wir betrachten jetzt  $z = \pm i\sigma$  als ein Wurzelpaar in den für die nicht-LAGRANGESchen Lösungen gültigen Bedingungsgleichung  $z^4 + z^2 + s = 0$ . Die positive Zahl  $\sigma$  soll also die Bedingungsgleichung

$$\sigma^4 - \sigma^2 + s = 0 \quad (45)$$

befriedigen.

Wir gehen wieder von den zwei Gleichungen (29) und (30) aus und wollen mit ihrer Hilfe  $b_1$  und  $b_{-1}$  als Funktionen von  $a_1$  und  $a_{-1}$  bestimmen. Nach Umstellung der Glieder können diese Gleichungen so geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \left( \sigma^4 - \sigma^2 - \frac{9}{4}(1 - \mu_1)\sigma^2 \right) b_1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}(\mu_2 - \mu_3)\sigma b_{-1} \\ = \frac{3}{4}\sqrt{3}(\mu_2 - \mu_3)\sigma^2 a_1 - \frac{9}{2}(1 - \mu_1)\sigma a_{-1}, \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}(\mu_2 - \mu_3)\sigma b_1 + \left( \sigma^4 - \sigma^2 - \frac{9}{4}(1 - \mu_1)\sigma^2 \right) b_{-1} \\ = \frac{9}{2}(1 - \mu_1)\sigma a_1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}(\mu_2 - \mu_3)\sigma^2 a_{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Die Gleichungen können noch weiter vereinfacht werden, wenn wir

$$\alpha = 1 - \mu_1 = \mu_2 + \mu_3, \quad (47)$$

$$\beta = \mu_2 - \mu_3 \quad (48)$$

eingeführen und ausserdem die Gleichung (45) benutzen. Wir erhalten dann:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{9}{4}\alpha\sigma^2 + s \right) b_1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\beta\sigma b_{-1} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}\beta\sigma^2 a_1 + \frac{9}{2}\alpha\sigma a_{-1}, \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\beta\sigma b_1 - \left( \frac{9}{4}\alpha\sigma^2 + s \right) b_{-1} = \frac{9}{2}\alpha\sigma a_1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}\beta\sigma^2 a_{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Die Determinante des Systems (49) kann durch  $\sigma$  und  $\alpha$  allein ausgedrückt werden. Die Rechnung ergibt:

$$D = \sigma^8 + \left(2 - \frac{9}{2}\alpha\right)\sigma^6 + \left(\frac{81}{16}\alpha^2 + \frac{9}{2}\alpha - 3\right)\sigma^4 + \left(27\alpha - \frac{81}{4}\alpha^2\right)\sigma^2. \quad (50)$$

Der Ausdruck für  $D$  kann aber in der folgenden Weise in Faktoren aufgelöst werden:

$$D = \left[\sigma^4 - \left(1 + \frac{9}{4}\alpha\right)\sigma^2 + 9\alpha\right] \cdot \left[\sigma^2 + 3 - \frac{9}{4}\alpha\right]\sigma^2. \quad (51)$$

Diese Auflösung in Faktoren bewirkt, dass die Ausdrücke für die gesuchten Koeffizienten ausserordentlich einfach werden. Um die Ausdrücke für die übrigen Koeffizienten so einfach wie möglich zu gestalten, wollen wir für  $a_1$  und  $a_{-1}$  die folgenden Werte wählen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \left(\sigma^2 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\mu_1\right)\mu_2\mu_3\varepsilon, \\ a_{-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Aus den Gleichungen (49) finden wir dann:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{3}{4}\sqrt{3}(\mu_2 - \mu_3)\mu_2\mu_3\varepsilon, \\ b_{-1} &= -2\sigma\mu_2\mu_3\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ferner aus (33) und (34):

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}\left(\sigma^2 + 3 - \frac{9}{2}\mu_2\right)\mu_1\mu_3\varepsilon, \\ a_{-2} &= -\sqrt{3}\sigma\mu_1\mu_3\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sigma^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(\mu_1 - \mu_3)\right)\mu_1\mu_3\varepsilon, \\ b_{-2} &= \sigma\mu_1\mu_3\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

und endlich mit Hilfe der Gleichungen (36):

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2}\left(\sigma^2 + 3 - \frac{9}{2}\mu_3\right)\mu_1\mu_2\varepsilon, \\ a_{-3} &= \sqrt{3}\sigma\mu_1\mu_2\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$



$$\left. \begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sigma^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(\mu_1 - \mu_2)\right)\mu_1\mu_2\varepsilon, \\ b_{-3} &= \sigma\mu_1\mu_2\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Damit sind auch die nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen vollständig bestimmt.

## 6. Die Umlaufsrichtung in den Librationsellipsen.

Wenn eine elliptische Bewegung des Punktes  $(\xi, \eta)$  durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1 \cos \omega t + a_{-1} \sin \omega t, \\ \eta &= b_1 \cos \omega t + b_{-1} \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

dargestellt wird, wo  $\omega$  als positiv vorausgesetzt wird, wird die Umlaufsrichtung vom Vorzeichen der Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_{-1} \\ b_1 & b_{-1} \end{vmatrix} = a_1 b_{-1} - a_{-1} b_1 \quad (59)$$

abhängen.

Wenn  $D_1$  positiv ist, wird die Bewegung in positiver Richtung vorsichgehen, während ein negativer Wert von  $D_1$  bedeutet, dass die Bewegung retrograd ist.

Wir wollen jetzt die Determinanten berechnen, die den drei LAGRANGESchen Librationsellipsen entsprechen. Aus (39), (40), (41), (42), (43) und (44) erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= -8(7\mu_2^2 + 7\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3)(\mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_2\mu_3)\varepsilon^2, \\ D_2 &= -8(7\mu_2^2 + 7\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3)(\mu_1^2 + \mu_3^2 + \mu_1\mu_3)\varepsilon^2, \\ D_3 &= -8(7\mu_2^2 + 7\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3)(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1\mu_2)\varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Da die drei Determinanten negative Werte haben, wird die Bewegung in den LAGRANGESchen Librationsellipsen retrograd sein.

In ähnlicher Weise berechnen wir die Determinanten, die den drei nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen entsprechen. Aus (52), (53), (54), (55), (56) und (57) erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} D_4 &= -2\sigma \left( \sigma^2 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\mu_1 \right) \mu_2^2 \mu_3^2 \varepsilon^2, \\ D_5 &= -2\sigma \left( \sigma^2 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\mu_1 \right) \mu_1^2 \mu_3^2 \varepsilon^2, \\ D_6 &= -2\sigma \left( \sigma^2 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\mu_1 \right) \mu_1^2 \mu_2^2 \varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Auch hier haben die drei Determinanten negative Werte, und die Bewegung in den nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen muss retrograd sein.

### 7. Das Verhältnis zwischen der grossen und der kleinen Achse in den Librationsellipsen.

Wenn eine elliptische Bewegung durch die Gleichung (58) dargestellt wird, wird das Verhältnis zwischen der grossen und der kleinen Achse denselben Wert haben wie die grösste Wurzel der Gleichung

$$f^2 - gf + 1 = 0, \quad (62)$$

wo

$$g = \frac{a_1^2 + a_{-1}^2 + b_1^2 + b_{-1}^2}{|D_1|}. \quad (63)$$

Wenn wir jetzt die für die LAGRANGESchen Librationsellipsen gültigen (39), (40), (41), (42), (43) und (44) in (63) einsetzen, findet man in allen drei Fällen:

$$g = \frac{5}{2}, \quad (64)$$

wonach (62) das Resultat gibt, dass das Verhältnis zwischen der grossen und der kleinen Achse

in den LAGRANGESchen Librationsellipsen gleich 2:1 ist.

Wenn wir in ähnlicher Weise die für die nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen geltenden Werte (52), (53), (54), (55), (56) und (57) einsetzen, erhalten wir in allen drei Fällen:

$$g = \frac{2\sigma^2 + 3}{2\sigma} \quad (65)$$

und daraus wieder das Verhältnis zwischen der grossen und der kleinen Achse in den *nicht-LAGRANGESchen* Librationsellipsen:

$$f = \frac{1}{4\sigma} \left[ 2\sigma^2 + 3 + \sqrt{4\sigma^4 - 4\sigma^2 + 9} \right]. \quad (66)$$

Da das Verhältnis für alle drei Ellipsen dasselbe ist, müssen die *nicht-LAGRANGESchen* Librationsellipsen gleichförmig sein.

In der oben zitierten Abhandlung wurde bewiesen, dass  $s$  nur von der Entfernung zwischen dem Zentrum des Librationsdreiecks und dem gemeinsamen Schwerpunkt der Massen abhängt. Da  $\sigma$  nur von  $s$  abhängt und  $f$  nur von  $\sigma$ , erhalten wir den folgenden Satz:

Das Achsenverhältnis der *nicht-LAGRANGESchen* Librationsellipsen hängt nur von der Entfernung vom Zentrum des Librationsdreiecks zum gemeinsamen Schwerpunkt der Massen ab.

### 8. Das Grössenverhältnis der Librationsellipsen.

Das Produkt der Halbachsen in der elliptischen Bahn, die durch die Gleichungen (58) definiert ist, wird gleich dem numerischen Wert der Determinante  $D_1$  sein. Daraus folgt, dass die linearen Grössen von zwei gleichförmigen

Ellipsen sich wie die Quadratwurzeln aus den numerischen Werten der betreffenden Determinanten verhalten.

Für die LAGRANGESchen Librationsellipsen werden ihre lineare Grössen sich deshalb wie

$$\sqrt{-D_1} : \sqrt{-D_2} : \sqrt{-D_3} \quad (67)$$

verhalten.

Wenn wir in (67) die Werte (60) der drei Determinanten einsetzen, erhalten wir das Resultat, dass die linearen Grössen der LAGRANGESchen Librationsellipsen sich wie

$$\sqrt{\mu_2^2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_3^2} : \sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_3^2} : \sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2} \quad (68)$$

verhalten.

In ähnlicher Weise findet man, dass die linearen Grössen der nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen sich wie

$$\sqrt{-D_4} : \sqrt{-D_5} : \sqrt{-D_6} \quad (69)$$

verhalten.

Wenn wir in (69) die Werte (61) der Determinanten einsetzen, erhalten wir das Resultat, dass die linearen Grössen der nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen sich wie

$$\mu_2 \mu_3 : \mu_1 \mu_3 : \mu_1 \mu_2 \quad (70)$$

d. h. wie

$$\frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_2} : \frac{1}{\mu_3} \quad (71)$$

verhalten, d. h., dass die linearen Grössen der nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen sich umgekehrt wie die entsprechenden Massen verhalten.

---

Im problème restreint gibt es bekanntlich keine LAGRANGESche Librationsellipse für die unendlich kleine Masse, während nicht-LAGRANGESche Librationsellipsen um die Libra-

tionspunkte  $L_4$  und  $L_5$  existieren. Dies eigentümliche Verhältnis findet nun in den oben gegebenen Resultaten seine vollständige Erklärung.

Wenn wir nämlich  $\mu_3 = 0$  in (68) einsetzen, finden wir für die LAGRANGESchen Librationsellipsen die Grössenverhältnisse:

$$\mu_2 : \mu_1 : \sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2}. \quad (72)$$

Da es nun in der Natur der Sache liegt, dass im problème restreint die Librationsellipsen der zwei endlichen Massen die Grösse Null haben, muss die LAGRANGESche Librationsellipse der unendlich kleinen Masse auch die Grösse Null haben.

Setzen wir dagegen in (70)  $\mu_3 = 0$ , erhalten wir die Verhältnisse:

$$0 : 0 : \mu_1 \mu_2. \quad (73)$$

Das heisst: die nicht-LAGRANGESche Librationsellipse der unendlich kleinen Masse kann sehr wohl eine endliche Grösse haben, obschon die nicht-LAGRANGESchen Librationsellipsen für die zwei endlichen Massen die Grösse Null haben.

### 9. Die Orientierung der Librationsellipsen.

Wenn wir den Winkel zwischen der Abszissenachse und einer der Achsen in der elliptischen Bahn (58) mit  $\theta$  bezeichnen, haben wir:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(a_1 b_1 + a_{-1} b_{-1})}{a_1^2 + a_{-1}^2 - b_1^2 - b_{-1}^2}. \quad (74)$$

Für die LAGRANGESche Librationsellipse, die von der Masse  $m_1$  beschrieben wird, erhalten wir mit Hilfe von (39) und (40):

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\mu_2^2 - \mu_3^2)}{\mu_2^2 + 4\mu_2\mu_3 + \mu_3^2}. \quad (75)$$

Wenn die Winkel der Achsen mit der Abszissenachse mit  $\theta_1$  und  $\theta_2$  bezeichnet werden, ergibt sich aus (75):

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sqrt{3}(\mu_3 - \mu_2)}{3(\mu_2 + \mu_3)}, \quad (76)$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sqrt{3}(\mu_2 + \mu_3)}{\mu_2 - \mu_3}, \quad (77)$$

wo  $\theta_1$  sich auf die kleine Achse der Ellipse und  $\theta_2$  sich auf die grosse Achse bezieht. Die Richtung vom Librationspunkt zum gemeinsamen Schwerpunkt der Massen macht aber mit der Abszissenachse einen Winkel, der durch eine Gleichung bestimmt wird, die der Gleichung (76) entspricht. Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Die LAGRANGESCHEN Librationsellipsen haben ihre kleinen Achsen gegen den Massenschwerpunkt gerichtet.

Wenn wir jetzt in (74) die für die nicht-LAGRANGESCHEN Librationsellipsen geltenden Werte (52), (53) einsetzen, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\mu_3 - \mu_2)}{3(\mu_2 + \mu_3) - 2}. \quad (78)$$

Um die geometrische Bedeutung von (78) abzuleiten, wollen wir die Gleichung aufstellen, wodurch der in Abb. 3 angegebene Winkel  $\varphi$  bestimmt werden kann.  $M$  ist das Zentrum des dem Librationsdreieck umschriebenen Kreises, und  $MN$  ist die Linie von  $M$  durch den Massenschwerpunkt.

$\varphi$  wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}(\mu_3 - \mu_2)}{3(\mu_2 + \mu_3) - 2}. \quad (79)$$

Aus (78) und (79) erhalten wir nun:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} \varphi, \quad (80)$$

$$\theta = \frac{\varphi}{2} + k \cdot 90^\circ. \quad (81)$$

Wenn  $\mu_2 > \mu_3$ , liegt die grosse Achse der Ellipse im 1. und 3. Quadranten, für  $\mu_2 < \mu_3$  liegt sie im 2. und 4. Quadranten.

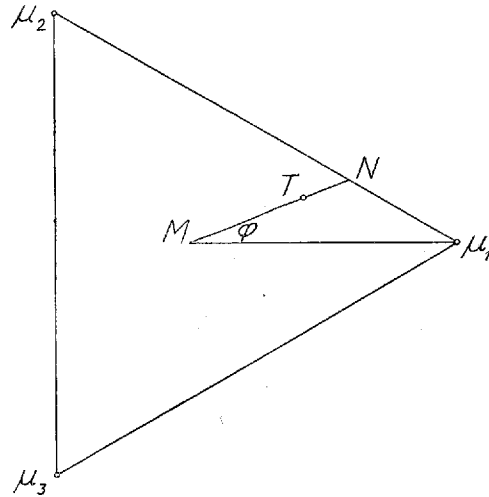


Abb. 3.

Für die *nicht-LAGRANGESCHEN* Librationsellipsen liegen die grossen Achsen parallel der Halbierungslinie des Winkels, der von den Linien vom Zentrum des Librationsdreiecks zum Massenschwerpunkt, bzw. zum betreffenden Librationspunkt, eingeschlossen ist.

In Abb. 4 sind der dem Librationsdreieck umschriebene Kreis und der Durchmesser durch den Schwerpunkt gezeichnet.  $P$  und  $Q$  sind die Endpunkte dieses Diameters. Man ersieht aus der Abbildung, dass die grossen Achsen der Librationsellipsen gegen  $P$  gerichtet sind, die kleinen Achsen gegen  $Q$ .

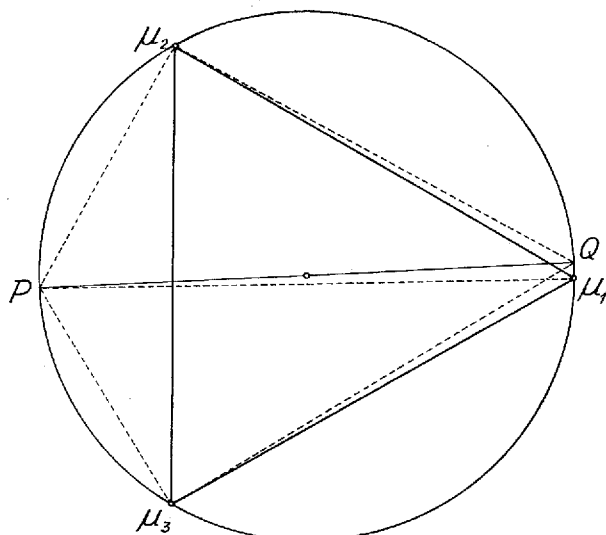


Abb. 4.

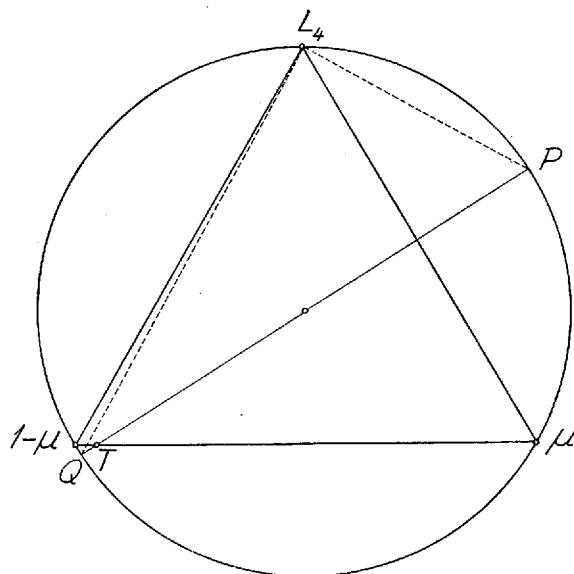


Abb. 5.



Die *nicht-LAGRANGESCHEN* Librationsellipsen haben ihre grossen Achsen gegen denselben Punkt gerichtet, die kleinen Achsen ebenso. Diese zwei Punkte sind die Endpunkte des Diameters in dem dem Librationsdreieck umschriebenen Kreis, der durch den Schwerpunkt geht. Die grossen Achsen sind gegen den Punkt gerichtet, der dem Schwerpunkt am entferntesten liegt, die kleinen Achsen gegen den Punkt, der dem Schwerpunkt am nächsten liegt.

---

Die oben angegebene Regel muss auch für die Librationsellipsen im problème restreint Gültigkeit haben. In Abb. 5 werden das Librationsdreieck und der ihm umschriebene Kreis gezeigt. Der Diameter  $PQ$  geht durch den gemeinsamen Schwerpunkt der zwei endlichen Massen  $1 - \mu$  und  $\mu$ , und die Librationsellipsen um den Librationspunkt  $L_4$  müssen deshalb die grosse Achse gegen  $P$  und die kleine Achse gegen  $Q$  gerichtet haben.

---

