

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV**, 6.

ÜBER DIE ELEKTRODYNAMIK DES
VAKUUMS AUF GRUND DER QUANTEN-
THEORIE DES ELEKTRONS

VON

V. WEISSKOPF



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1936

This paper deals with the modifications introduced into the electrodynamics of the vacuum by Dirac's theory of the positron. The behaviour of the vacuum can be described unambiguously by assuming the existence of an infinite number of electrons occupying the negative energy states, provided that certain well defined effects of these electrons are omitted, but only those to which it is obvious that no physical meaning can be ascribed.

The results are identical with these of Heisenberg's and Dirac's mathematical method of obtaining finite expressions in positron theory. A simple method is given of calculating the polarisability of the vacuum for slowly varying fields.

Eines der wichtigsten Ergebnisse in der neueren Entwicklung der Elektronentheorie ist die Möglichkeit, elektromagnetische Feldenergie in Materie zu verwandeln. Ein Lichtquant z. B. kann bei Vorhandensein von andern elektromagnetischen Feldern im leeren Raum absorbiert und in Materie verwandelt werden, wobei ein Paar von Elektronen mit entgegengesetzter Ladung entsteht.

Die Erhaltung der Energie erfordert, falls das Feld, in welchem die Absorption vor sich geht, statisch ist, dass das absorbierte Lichtquant die ganze zur Erzeugung des Elektronenpaares notwendige Energie aufbringt. Die Frequenz derselben muss somit der Beziehung $h\nu = 2mc^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ genügen, wobei mc^2 die Ruhenergie eines Elektrons und ε_1 und ε_2 die übrige Energie der beiden Elektronen ist. Diesen Fall haben wir z. B. bei der Erzeugung eines Elektronenpaares durch ein γ -Quant im Coulombfeld eines Atomkerns vor uns.

Die Absorption kann auch in Feldern stattfinden, die von andern Lichtquanten stammen, wobei die letzteren zur Energie des Elektronenpaares beitragen können, sodass in diesem Falle die Energie $2mc^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ der beiden Elektronen gleich der Summe aller bei diesem Prozess absorbierten Lichtquanten sein muss.

Das Phänomen der Absorption von Licht im Vakuum

stellt eine wesentliche Abweichung von der MAXWELL'schen Elektrodynamik dar. Das Vakuum sollte nämlich unabhängig von den dort herrschenden Feldern für eine Lichtwelle frei durchdringlich sein, da sich verschiedene Felder nach den MAXWELL'schen Gleichungen infolge der Linearität derselben unabhängig überlagern können.

Es ist bereits ohne näheres Eingehen auf die spezielle Theorie verständlich, dass auch in solchen Feldern, die nicht die nötige Energie besitzen, um ein Elektronenpaar zu erzeugen, Abweichungen von der MAXWELL'schen Elektrodynamik auftreten müssen: wenn hochfrequentes Licht in elektromagnetischen Feldern absorbiert werden kann, so wird man für Lichtstrahlen, deren Frequenz zur Paarerzeugung nicht ausreicht, eine Streuung oder Ablenkung erwarten, analog zur Streuung des Lichts an einem Atom, dessen kleinste Absorptionsfrequenz grösser als die des Lichts ist. Das Licht wird sich also beim Durchgang durch elektromagnetische Felder so verhalten, als ob das Vakuum unter der Einwirkung der Felder eine von der Einheit verschiedene Dielektrizitätskonstante erhalten würde.

Um diese Erscheinungen darstellen zu können, muss die Theorie dem leeren Raum gewisse Eigenschaften zuschreiben, die die erwähnten Abweichungen von der MAXWELL'schen Elektrodynamik hervorrufen. Tatsächlich führt die relativistische Wellengleichung des Elektrons auch zu derartigen Folgerungen, wenn man die aus der DIRAC'schen Wellengleichung folgenden Zustände mit negativer kinetischer Energie zur Beschreibung des Vakuums heranzieht.

Die Grundannahme der DIRAC'schen Theorie des Positrons besteht darin, dass das physikalische Verhalten des Vakuums im gewissen Sinne beschrieben werden kann durch das Verhalten einer unendlichen Menge von Elektronen, — die

Vakuumelektronen — die sich in den Zuständen negativer kinetischer Energie befinden und sämtliche dieser Zustände besetzt halten. Die Übereinstimmung kann selbstverständlich nicht vollkommen sein, da die Vakuumelektronen eine unendliche Ladungs- und Stromdichte besitzen, die sicher keine physikalische Bedeutung haben darf. Es zeigt sich aber, dass z. B. die Paarerzeugung (und ihr Umkehrprozess) gut wiedergegeben wird als ein Sprung eines Vakuumelektrons in einen Zustand positiver Energie unter dem Einfluss elektromagnetischer Felder, wodurch es als ein reales Elektron in Erscheinung tritt, während das Vakuum um ein negatives Elektron ärmer geworden ist, was sich durch das Auftreten eines positiven Elektrons äussern muss. Die von diesem Bilde ausgehende Berechnung der Paarerzeugung und -Vernichtung zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Die Berechnung der meisten andern Effekte, die aus der Positronentheorie folgen, stossen immer auf das Problem, in welchem Ausmass das Verhalten der Vakuumelektronen tatsächlich als das des Vakuums anzusehen ist. Dieses Problem wird noch durch den Umstand erschwert, dass Ladungs-, Strom- und Energiedichte der Vakuumelektronen unendlich sind, sodass es sich meistens darum handelt, von einer unendlichen Summe in eindeutiger Weise einen endlichen Teil abzutrennen und diesem Realität zuzuschreiben. Die Lösung dieses Problems wurde von DIRAC und HEISENBERG dadurch durchgeführt, dass sie eine widerspruchsfreie Methode angaben, den physikalisch bedeutungsvollen Teil der Wirkungen der Vakuumelektronen zu bestimmen. Es wird im folgenden gezeigt, dass diese Bestimmung weitgehend frei von jeder Willkür ist, da sie in konsequenter Weise nur folgende Eigenschaften der Vakuumelektronen als physikalisch bedeutungslos annimmt:

- (I) $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Die Energie der Vakuumelektronen im feldfreien Raum.} \\ 2) \text{ Die Ladungs- und Stromdichte der Vakuumelektronen im feldfreien Raum.} \\ 3) \text{ Eine räumlich und zeitlich konstante feldunabhängige elektrische und magnetische Polarisierbarkeit des Vakuums.} \end{array} \right.$

Diese Grössen¹ beziehen sich nur auf das feldfreie Vakuum, und es darf als selbstverständlich angesehen werden, dass diese keine physikalische Bedeutung haben können. Alle drei Grössen erweisen sich nach Summierung der Beiträge aller Vakuumselektronen als divergierende Summen. Es sei noch hinzugefügt, dass eine konstante Polarisierbarkeit in keiner Weise feststellbar wäre, sondern nur sämtliche Ladungs- und Feldstärkenwerte mit einem konstanten Faktor multiplizieren würde.

Wir werden im nächsten Abschnitt auf Grund dieser Annahmen die physikalischen Eigenschaften des Vakuums bei Anwesenheit von Feldern berechnen, die zeitlich und räumlich langsam veränderlich sind. Wir verstehen darunter solche Felder F , die sich auf Strecken der Länge $\frac{h}{mc}$ und in Zeiten der Länge $\frac{h}{mc^2}$ nur wenig verändern² und somit den Bedingungen

$$(1) \quad \frac{h}{mc} |\text{grad } F| \ll |F|, \quad \frac{h}{mc^2} \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \ll |F|$$

genügen. Bei Anwesenheit solcher Felder werden im allgemeinen keine Paare erzeugt, da die auftretenden Lichtquanten zu geringe Energie haben. Die Extremfälle, in denen die Strahlungsdichte so hoch ist, um das Zusammenwirken

¹ Die Annahmen, 1.) oder 2.) oder 3.) als bedeutungslos anzusehen, werden im folgenden mit I_1 , I_2 bzw. I_3 zitiert.

² h ist die durch 2π geteilte PLANCK'sche Konstante.

von sehr vielen Quanten zu gestatten, oder in denen elektrostatische Felder mit Potentialdifferenzen von über $2mc^2$ vorhanden sind (in diesem Falle würden auf Grund des KLEIN'schen Paradoxons Paare entstehen) wollen wir von der Betrachtung ausschliessen. Unter diesen Umständen lassen sich die elektromagnetischen Eigenschaften des Vakuums durch eine feldabhängige elektrische und magnetische Polarisierbarkeit des leeren Raums darstellen, die z. B. zu einer Lichtbrechung in elektrischen Feldern oder zu einer Streuung von Licht an Licht führt. Der Dielektrizitäts- und Permeabilitätstensor des Vakuums hat dann für schwächere Feldstärken näherungsweise folgende Form: (\vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} sind die vier elektromagnetischen Feldgrössen¹.)

$$D_i = \sum_k \epsilon_{ik} E_k, \quad H_i = \sum_k \mu_{ik} B_k$$

$$(2) \quad \epsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{e^4 h}{45 \pi m^4 c^7} [2(E^2 - B^2) \delta_{ik} + 7 B_i B_k]$$

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \frac{e^4 h}{45 \pi m^4 c^7} [2(E^2 - B^2) \delta_{ik} - 7 E_i E_k]$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Die Berechnung dieser Erscheinungen wurde von EULER u. KOCKEL² und von HEISENBERG u. EULER³ bereits durchgeführt. Im nächsten Abschnitt sollen jedoch bedeutend einfachere Methoden angewendet werden. Ausserdem sollen die Eigenschaften des Vakuums auf Grund der skalaren relativistischen Wellengleichung des Elektrons von KLEIN u. GORDON berechnet werden. Diese Wellengleichung liefert nach PAULI u. WEISSKOPF⁴ die Existenz positiver und negativer Partikel, und ihre Erzeugung und Vernichtung durch elektro-

¹ Es werden im folgenden nur dort Pfeile über Vektorgrössen gesetzt, wo Verwechslungen möglich sind.

² H. EULER u. B. KOCKEL, Naturwiss. **23**, 246, 1935; H. EULER, Ann. d. Phys. V. **26**, 398.

³ W. HEISENBERG u. H. EULER, ZS. f. Phys. **38**, 714, 1936.

⁴ W. PAULI u. V. WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta. **7**, 710, 1934.

magnetische Felder ohne jede besondere Zusatzannahme. Jedoch besitzen diese Partikel keinen Spin und befolgen die Bosestatistik, weshalb diese Theorie nicht auf die realen Elektronen anwendbar ist. Es ist jedoch bemerkenswert, dass auch diese Theorie auf Eigenschaften des Vakuums führt, denen keine physikalische Bedeutung zukommen kann. So erhält man z. B. ebenfalls eine unendliche räumlich und zeitlich konstante feldunabhängige Polarisierbarkeit des Vakuums. Nach Weglassung der entsprechenden Glieder gelangt man zu ähnlichen Resultaten, wie die der Positronentheorie DIRAC's. Die physikalischen Eigenschaften des Vakuums rühren in dieser Theorie von der »Nullpunktsenergie« der Materie her, die auch bei nichtvorhandenen Teilchen von den äusseren Feldstärken abhängt und somit ein Zusatzglied zu der reinen MAXWELL'schen Feldenergie liefert.

Im 3. Abschnitt behandeln wir die Folgerungen aus der DIRAC'schen Positronentheorie für den Fall allgemeiner äusserer Felder und wir zeigen, dass man auf Grund der genannten drei Annahmen über die Wirkungen der Vakuumelektronen stets zu endlichen und eindeutigen Resultaten kommt. Die HEISENBERG'schen Subtraktionsvorschriften erweisen sich als identisch mit diesen drei Annahmen und erscheinen somit bedeutend weniger willkürlich als es in der Literatur bisher angenommen wurde.

Alle folgende Rechnungen berücksichtigen nicht explizit die gegenseitigen Wechselwirkungen der Vakuumelektronen sondern betrachten ausschliesslich jedes einzelne Vakuumelektron allein unter der Einwirkung eines vorhandenen Feldes. Bei diesem Verfahren sind aber die gegenseitigen Einwirkungen nicht vollkommen vernachlässigt, da man das äussere Feld gar nicht von dem Feld trennen kann, das von den Vakuumselektronen selbst erzeugt ist, sodass das in die Rech-

nung eingehende Feld die Wirkungen der andern Vakuumelektronen zum Teil implizit enthält. Dieses Vorgehen ist analog zur HARTREE'schen Berechnung der Elektronenbahnen eines Atoms in dem Feld, das von den Elektronen selbst verändert wird. Zur expliziten Berechnung der Wechselwirkungen müsste man die Quantenelektrodynamik anwenden, d. h. die Quantelung der Wellenfelder vornehmen. Dies führt bekanntlich auch bereits ohne die Annahme unendlich vieler Vakuumselektronen zu Divergenzen und soll im folgenden nicht näher berührt werden.

II.

In diesem Abschnitt soll die Elektrodynamik des Vakuums für Felder behandelt werden, die den Bedingungen (1) genügen. Die Feldgleichungen sind durch die Angabe der Energiedichte U als Funktion der Feldstärken festgelegt. Wir bestimmen diese aus der Energiedichte \tilde{U} der Vakuumelektronen, die für das Verhalten des Vakuums massgebend sein sollen.

Es ist vorteilhaft, auf die Lagrangefunktion L des elektromagnetischen Feldes zurückzugreifen, da diese durch die Forderung der relativistischen Invarianz schon weitgehend festgelegt ist. Zwischen der Lagrangefunktion L und der Energiedichte U bestehen folgende Beziehungen:

$$(3) \quad U = \sum_i E_i \frac{\partial L}{\partial E_i} - L.$$

In der MAXWELL'schen Elektrodynamik gilt:

$$L = \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2), \quad U = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2).$$

Die Zusätze zu dieser Lagrangefunktion müssen ebenso wie diese selbst relativistische Invarianten sein. Solange wir uns

nur auf langsam veränderliche Felder beschränken, (Bedingung (1)), werden diese Zusätze nur von den Werten der Feldstärken abhängen und nicht von deren Ableitungen. Sie können daher nur Funktionen der Invarianten $(E^2 - B^2)$ und $(EB)^2$ sein. Entwickeln wir die Zusätze nach Potenzen der Feldstärken bis zur 6. Ordnung, so erhalten wir:

$$L = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + L'$$

$$L' = \alpha (E^2 - B^2)^2 + \beta (EB)^2 +$$

$$+ \xi (E^2 - B^2)^3 + \zeta (E^2 - B^2) (EB)^2 + \dots$$

und daher nach (3)

$$(4) \quad \begin{cases} U = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + U' \\ U' = \alpha (E^2 - B^2) (3E^2 + B^2) + \beta (EB)^2 + \\ + \xi (E^2 - B^2)^2 (5E^2 + B^2) + \zeta (EB)^2 (3E^2 - B^2) + \dots \end{cases}$$

Der Zusatz zur Energiedichte ist somit durch die Invarianzeigenschaften weitgehend festgelegt; es wird also im folgenden nur notwendig sein die vorkommenden Konstanten $\alpha, \beta, \xi, \zeta, \dots$ zu bestimmen. Diesen Ansätzen liegt schon die spezielle Annahme zugrunde, dass U' keine Glieder 2. Ordnung in den Feldstärken enthält, sondern nur höhere. Dies ist gleichbedeutend damit, dass das Vakuum keine von den Feldern unabhängige Polarisierbarkeit besitzt.

Die Rechnungen von EULER u. KOCKEL und von HEISENBERG u. EULER liefern für die vier Konstanten die Werte:

$$\alpha = \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4 h}{m^4 c^7}, \quad \beta = 7\alpha, \quad \xi = \frac{1}{630\pi^2} \frac{e^6 h^3}{m^8 c^{13}}, \quad \zeta = \frac{13}{2}\xi.$$

Die in (2) angegebenen Dielektrizitäts- und Permeabilitätstensoren ergeben sich aus den Beziehungen:

$$D_i = 4\pi \frac{\partial L}{\partial E_i}, \quad H_i = -4\pi \frac{\partial L}{\partial B_i}.$$

Wir werden im folgenden diese Resultate auf eine wesentlich einfachere Weise herleiten.

Der Zusatz U' zur MAXWELL'schen Energiedichte des Vakuums soll durch den Zusatz \tilde{U}' bestimmt sein, den die Vakuumelektronen beitragen. Die Energiedichte bei Anwesenheit von Elektronen in den Zuständen $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_i \dots$ ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \tilde{U}'$$

$$\tilde{U}' = \sum_i \left\{ \psi_i^*, \left[\left(\vec{\alpha}, \frac{hc}{i} \text{grad} + e \vec{A} \right) + \beta mc^2 \right] \psi_i \right\}$$

wobei $\vec{\alpha}, \beta$ die DIRAC'schen Matrizen und \vec{A} das vektorielle Potential ist. Der Zusatz \tilde{U}' zur MAXWELL'schen Dichte ist somit nicht gleich der ganzen materiellen Energiedichte U_{mat}

$$(5) \quad U_{\text{mat}} = ih \sum_i \left\{ \psi_i^*, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i \right\}$$

sondern

$$(6) \quad \tilde{U}' = U_{\text{mat}} - \sum_i \left\{ \psi_i^*, eV\psi_i \right\}$$

wobei V das skalare Potential ist. Man kann \tilde{U}' als die kinetische Energiedichte bezeichnen. Die gesamte materielle Energiedichte U_{mat} lässt sich, wie wir sehen werden, leicht berechnen; der zweite Term von (6) — die potentielle Energiedichte — ergibt sich aus U_{mat} in folgender Weise: Wenn

* Zwei Eigenfunktionen ψ und φ in geschwungenen Klammern: $\langle \psi, \varphi \rangle$ bedeutet hier und im folgenden das innere Produkt der beiden Spinoren ψ u. φ : $\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_k \psi^k \varphi^k$, wobei k der Spinindex ist.

man sich das skalare Potential proportional zu dem konstanten Faktor λ denkt, so gilt:¹

$$(7) \quad \lambda \int \sum_i \{\psi_i^*, eV\psi_i\} d\tau = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int U_{\text{mat}} d\tau$$

wobei die Integrationen sich über den ganzen Raum erstrecken. Im Grenzfall konstanter Felder, den wir hier wegen der Bedingungen (1) betrachten wollen, können wir die Feldstärke E selbst als den konstanten Faktor λ ansehen, und können ausserdem die Beziehung (7) auch auf die Energiedichten übertragen. Wir erhalten dann für die kinetische Energiedichte

$$(7a) \quad \tilde{U}' = U_{\text{mat}} - E \frac{\partial U_{\text{mat}}}{\partial E}$$

Vergleicht man dies mit (3) so sieht man, dass zwischen der materiellen und der kinetischen Energiedichte dieselbe Beziehung besteht, wie zwischen $-L$ und U . U_{mat} kann also hier dem durch die Vakuumelektronen hervorgerufenen Zusatz zur Lagrangefunktion gleichgesetzt werden:

$$(8) \quad U_{\text{mat}} = -\tilde{L}'$$

Da die Form von U' weitgehend durch die relativistischen Invarianzforderungen festgelegt ist, so genügt es, U' für ein

¹ Der Beweis läuft folgendermassen: Wenn der Energieoperator H von einem Parameter λ abhängig ist, so ändert sich das Diagonalelement H_{ii} des Energieoperators bei einer infinitesimalen adiabatischen Änderung $d\lambda$ von λ um:

$$dH_{ii} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{ii} d\lambda$$

Wenn wir nun setzen:

$$H = H_0 + \lambda eV$$

so gilt dann:

$$\lambda (eV)_{ii} = \lambda \frac{\partial H_{ii}}{\partial \lambda}$$

spezielles Feld zu bestimmen. Wir wählen ein homogenes magnetisches Feld $B = (B_x, 0, 0)$ und ein dazu paralleles räumlich periodisches elektrostatisches Feld, dessen Potential durch

$$(9) \quad V = V_0 e^{\frac{igx}{h}} + V_0^* e^{-\frac{igx}{h}}$$

gegeben ist. Wir vergleichen dann dieses Resultat mit dem allgemeinen Form (4) und werden daraus die Koeffizienten dieser Form bestimmen.

HEISENBERG u. EULER wählen im Gegensatz hierzu ein konstantes elektrisches Feld, wodurch Schwierigkeiten infolge des KLEIN'schen Paradoxons entstehen: Jedes noch so schwache homogene elektrische Feld erzeugt Elektronenpaare, wenn es sich über den ganzen Raum erstreckt. Die Elektronenbesetzung der Energiezustände ist dann nicht exakt stationär. In der vorliegenden Rechnung kann durch die Periodizität vermieden werden, dass Potentialdifferenzen über $2mc^2$ vorkommen, sodass keine Paarerzeugungen stattfinden.

Die materielle Energiedichte ist bei voller Besetzung aller negativen Energiezustände gegeben durch

$$(10) \quad U_{\text{mat}} = \sum_i W_i \{\psi_i^*, \psi_i\}$$

W_i ist die zur Eigenfunktion ψ_i gehörige Energie, summiert wird über alle negative Zustände. Die Summe ist selbstverständlich unendlich. Welcher endliche Teil dieser Summe von physikalischer Bedeutung ist, wird sich eindeutig aus dem expliziten Ausdruck für U_{mat} ergeben.

Die ψ_i befolgen die Wellengleichung:

$$(11) \quad \left\{ \frac{ih}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{eV}{c} + \alpha_x ih \frac{\partial}{\partial x} + K \right\} \psi = 0$$

$$(12) \quad K = \alpha_y ih \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \left[ih \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} |B| y \right] - \beta mc.$$

Wir folgen vorläufig der Rechnung HEISENBERGS u. EULERS l. c., wobei wir nur unwesentliche Änderungen in der Bedeutung der Variablen anbringen.

Als Lösung setzen wir an:

$$(13) \quad \psi_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{\frac{i}{h}(p_z z - W_i t)} \cdot u(y) X(x).$$

Der Operator K ergibt, zweimal auf ψ angewendet:

$$K^2 \psi = \left[-h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i \alpha_y \alpha_z \frac{eh}{c} |B| + \left(p_z + \frac{e}{c} |B| y \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi.$$

Wir setzen nun

$$\eta = \left(y + \frac{2p_z h}{b} \right) \sqrt{\frac{b}{2h^2}}, \quad b = \frac{2eh}{c} |B|.$$

b ist das Mass des Magnetfeldes. Durch Einführung von η erreichen wir, dass K^2 die Form einer Oszillator-Hamiltonfunktion erhält. Wir setzen daher

$$u(y) = \tilde{H}_n(\eta) \left(\frac{b}{2h^2} \right)^{1/4}$$

wobei $\tilde{H}_n(\eta)$ die n -te auf 1 normierte Oszillator-Eigenfunktion ist. Dann gilt $\int |u(y)|^2 dy = 1$ und

$$(14) \quad K^2 \psi = \left\{ m^2 c^2 + b \left(n + \frac{1 - \sigma_x}{2} \right) \right\} \psi, \quad \sigma_x = i \alpha_y \alpha_z.$$

Es lässt sich nun eine Darstellung der 4-komponentigen ψ wählen, in der σ_x diagonal ist:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den ersten beiden Komponenten von ψ entspricht dann ein positiver, den beiden andern ein negativer Spin in der x -Richtung. Bei dieser Wahl zerfällt die Wellengleichung (11) in zwei getrennte Gleichungssysteme für die beiden Komponentenpaare mit gleichem Spin, sodass wir zwei Wellengleichungen mit zweireihigen Matrizen gewinnen. Der Operator K lässt sich dann in der Form $K = \gamma |K|$ schreiben, wobei γ eine zweireihige Matrix ist, die die Bedingung $\gamma^2 = 1$ erfüllt und $|K|$ die gewöhnliche Zahl

$$|K| = \sqrt{m^2 c^2 + b \left(n + \frac{1 - \sigma_x}{2} \right)}$$

bedeutet, die vom Wert σ_x des Spins abhängt. Ebenso ist die in der Wellengleichung auftretende Matrix α_x zweireihig und ist mit γ antikommunikativ: $\alpha_x \gamma + \gamma \alpha_x = 0$, da α_x nach (12) auch mit K antikommunikativ ist. Die beiden Wellengleichungen lassen sich dann in der Form

$$(16) \quad \left\{ \frac{ih}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x ih \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} V + \gamma |K| \right\} \psi = 0$$

schreiben, wobei α_x und γ zweireihige Matrizen sind, die sich nur auf ein Komponentenpaar gleichen Spins beziehen. Der Unterschied in der Wellengleichung für die beiden Spinrichtungen liegt nur in dem verschiedenen Wert von $|K|$. Nachdem die Abhängigkeit von ψ von den Variablen y and z durch (13) bereits festgelegt wurde, stellt (16) eine Wellengleichung für die Funktion $X(x)$ allein dar. Bisher ist der

Rechnungsgang im wesentlichen identisch mit dem HEISENBERGS und EULERS.

Nun behandeln wir vorerst den Fall $V = 0$. Die Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen für (16) lauten

$$(17) \quad X_n^{(\pm)}(p_x) = a^{(\pm)}(p_x) \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{\frac{ip_x x}{h}} \cdot e^{\frac{iW_n^{(\pm)}(p_x)t}{h}}$$

$$(18) \quad W_n^{\pm}(p_x) = \pm c \sqrt{p_x^2 + |K|^2} = \pm c \sqrt{p_x^2 + m^2 c^2 + b \left(n + \frac{1 - \sigma_x}{2} \right)}.$$

Der obere Index (+) oder (-) unterscheidet die Zustände positiver und negativer Energie. $a^{\pm}(p)$ ist ein normierter 2-komponentiger »Spinor«. Die Gleichung (16) und ihre Lösungen (17), (18) stellen ein eindimensionales Analogon zu DIRAC'gleichung dar, in dem $\gamma |K| \psi$ statt des Massengliedes $\beta mc \cdot \psi$ steht. Zu einem Impuls p_x gehören ein positiver und ein negativer Energiewert. (Die beiden andern Energiewerte liefert die Wellengleichung mit entgegengesetztem Spin).

Setzen wir nun diese Grössen in die Energiedichte (10) ein, so erhalten wir

$$U_{\text{mat}} = \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \iint \frac{dp_x dp_z}{2\pi h} W_n^-(p_x) |\tilde{H}(\eta)|^2 \left(\frac{b}{2h^2} \right)^{\frac{1}{2}} |X_n^{(-)}(p_x)|^2.$$

Die Integration über p_z liefert infolge $dp_z = \sqrt{\frac{b}{2}} d\eta$ und $|X_n^{(-)}(p)|^2 = \frac{1}{2\pi h}$

$$(19) \quad U_{\text{mat}} = \frac{b}{8\pi^2 h^3} \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{+\infty}^{-\infty} dp W_n^-(p).$$

Von hier ab schreiben wir p statt p_x .

Um die Summation durchzuführen, bilden wir

$$\sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} W_n^- = W_0^- + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n^-.$$

Wir verwenden nun die EULER'sche Summenformel für eine Funktion $F(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} F(a) + \sum_{r=1}^N F(a+rb) - \frac{1}{2} F(a+Nb) = \\ & = \frac{1}{b} \left[\int_a^{a+Nb} F(x) dx - \sum_{m=1}^{\infty} (-)^m \frac{B_m}{(2m)!} b^{2m} \{ F^{(2m-1)}(a+Nb) - F^{(2m-1)}(a) \} \right] \end{aligned}$$

B_m ist die m -te BERNOULLI'sche Zahl. $F^{(m)}(x)$ ist die m -te Ableitung von $F(x)$. Wenn wir dies auf (19) anwenden, erhalten wir:

$$(20) \quad U_{\text{mat}} = \frac{1}{4\pi^2 h^3} \int dp \left[\int_0^{\infty} F(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} b^{2m} \frac{B_m}{(2m)!} (-)^m F^{(2m-1)}(0) \right]$$

$$F(x) = -c \sqrt{p^2 + m^2 c^2 + x}.$$

In dem Spezialfall eines reinen Magnetfeldes, kann man nach (7 a) U_{mat} und \tilde{U}' gleich setzen. Dieser Ausdruck stellt bereits die Energiedichte dar, in einer Entwicklung nach Potenzen der magnetischen Feldstärke b . Nun ist es sehr leicht, jenen Teil des Beitrages \tilde{U}' der Vakuumelektronen zu bestimmen, der für das wirkliche Vakuum massgebend sein soll: Das von b unabhängige Glied stellt die Energiedichte des feldfreien Vakuums dar und ist ein divergentes Integral; da die Energiedichte für das feldfreie Vakuum verschwinden muss, kann dieser Ausdruck keine reale Bedeutung haben. Weiter müssen die (übrigens auch divergierenden) Glieder mit b^2 weggelassen werden, da die Energiedichte keine

Glieder zweiter Ordnung in den Feldstärken besitzen soll. Das Weglassen dieser Glieder ist durch die Annahme begründet, dass die Polarisierbarkeit des Vakuums mit verschwindenden Feldern gegen Null strebt. Es sei hervorgehoben, dass die hier vorgenommenen Subtraktionen ausschliesslich auf triviale Annahmen über das feldlose Vakuum beruhen.

So erhalten wir für den Zusatz zur MAXWELL'schen Energiedichte:

$$(21) \quad U' = -\frac{c}{4\pi^2 h^3} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{B_m (-)^m}{(2m)!} b^{2m} \frac{1 \cdot 3 \dots (4m-5)}{2^{2m-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(p^2 + m^2 c^2)^{\frac{4m-3}{2}}}$$

Diese Potenzreihe lässt sich leicht durch die Potenzreihenentwicklung des hyperbolischen Ctg darstellen. Man erhält:

$$U' = \frac{1}{8\pi^2} m^2 c^2 \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ \eta \mathfrak{B} \operatorname{Ctg} \eta \mathfrak{B} - 1 - \frac{\eta^2}{3} \mathfrak{B}^2 \right\}$$

wobei \mathfrak{B} die magnetische Feldstärke gemessen in Einheiten der kritischen Feldstärke $\frac{m^2 c^3}{eh}$ ist:

$$\mathfrak{B} = \frac{eh}{m^2 c^3} B.$$

Das erste und zweite Glied der Entwicklung liefert:

$$U' = -\frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4 h}{m^4 c^7} B^4 + \frac{1}{630\pi^2} \frac{e^6 h^3}{m^8 c^{13}} B^6 + \dots$$

Wenn wir dies mit jenen Gliedern von (4) vergleichen, die das Magnetfeld in 4. und 6. Potenz enthalten, bekommen wir:

$$\alpha = \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4 h}{m^4 c^7}, \quad \beta = \frac{1}{630\pi^2} \frac{e^6 h^3}{m^8 c^{13}}.$$

Es werde nun das elektrische Feld mitberücksichtigt. Zu diesem Zweck lösen wir die Wellengleichung (16) für $X(x)$ mit der BORN'schen Näherungsmethode. Wir erwarten, dass die vom Potential V abhängigen Teile von U_{mat} in der zweiten, zu V^2 proportionalen Näherung erscheinen. Wenn wir U_{mat} nach Potenzen von V entwickeln: $U_{\text{mat}} = U_{\text{mat}}^{(0)} + U_{\text{mat}}^{(1)} + \dots$ so erhalten wir nach (10):

$$(22) \quad U_{\text{mat}}^{(2)} = \sum_i W_i^{- (2)} (|\psi_i|^2)^{(0)} + \sum_i W_i^{- (0)} (|\psi_i|^2)^{(2)}.$$

$W_i^{- (k)}$, $(|\psi_i|^2)^{(k)}$ sind die k -ten Näherungen in der entsprechenden Entwicklung von W_i^- und $|\psi_i|^2$. Man beachte, dass $W_i^{- (1)}$ in dem angegebenen elektrischen Feld verschwindet. Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$\int (|\psi|^2)^{(2)} dx dy dz = 0$$

sodass der räumliche Mittelwert von U_{mat} nur durch das erste Glied in (22) gegeben ist:

$$\overline{U_{\text{mat}}^{(2)}} = \sum_i W_i^{- (2)} (|\psi_i|^2)^{(0)}.$$

$(|\psi_i|^2)^{(0)}$ wurde bereits im Falle des reinen Magnetfeldes berechnet und wir erhalten somit ganz analog zu (19)

$$\overline{U_{\text{mat}}^{(2)}} = \frac{b}{8\pi^2 h^3} \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp W_n^{- (2)}(p).$$

Der Wert von $W_n^{- (2)}$ lässt sich mit der BORN'schen Näherungsmethode berechnen. Mit den Eigenfunktionen (17) ergibt sich:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} W_n^{-(2)}(p) &= e^2 |V_0|^2 \left[\frac{|\{a^{(+)*}(p+g), a^{(-)}(p)\}|^2}{W_n^-(p) - W_n^+(p+g)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\{a^{(-)*}(p+g), a^{(-)}(p)\}|^2}{W_n^-(p) - W_n^-(p+g)} \right] + \\ &\quad + (\text{dasselbe mit } -g). \end{aligned} \right.$$

Der zwischen den $\{ \}$ -Klammern stehende Ausdruck stellt ein skalares Produkt zweier zweikomponentiger Spinoren dar. Bei der Integration von (23) über p fallen die zweiten Glieder in den $[]$ -Klammern weg, wenn man die Integration der Glieder mit $-g$ mit der Variablen $p' = p - g$ ausführt:

$$(24) \left\{ \int dp W_n^{-(2)} = e^2 |V_0|^2 \int dp \frac{|\{a^{(+)*}(p+g), a^{(-)}(p)\}|^2}{W_n^{(-)}(p) - W_n^{(+)}(p+g)} + \right. \\ \left. + (\text{dasselbe mit } -g). \right.$$

Dieses Vorgehen ist im allgemeinen keineswegs eindeutig, da die Integration des zweiten Gliedes in den $[]$ -Klammern von (23) zu einem divergenten Resultat führt, das aber nach Addition des entsprechenden Gliedes mit $-g$ endlich gemacht werden oder, wie in (24), zum Verschwinden gebracht werden kann, je nachdem in welcher Weise man die Integrationsvariablen wählt. Diese Willkür berührt aber unsere Rechnung nicht, da wir nach Ausführung der Summation über n nur die zu $b^2, b^4, \text{etc.}$ proportionalen Glieder verwenden, in denen auf Grund der EULER'schen Summenformel nur Ableitungen von $W_n^{-(2)}(p)$ nach n auftreten. Wie man sich leicht überzeugen kann, divergieren diese Ableitungen des zweiten Gliedes in den $[]$ -Klammern nicht mehr bei der Integration über p , sodass das Resultat dieser Integration unabhängig von der Wahl der Integrationsvariablen ist.

Es ergibt sich weiter aus (24):

$$\int dp W_n^{-(2)} = -e^2 |V_0|^2 \frac{g^2}{4} \int dp \frac{|K|^2}{c(p^2 + |K|^2)^{\frac{5}{2}}}$$

wobei bereits eine Reihenentwicklung nach Potenzen von g durchgeführt wurde und die Glieder höherer als zweiter Ordnung weggelassen wurden. Dies bedeutet die Vernachlässigung der Ableitungen der Feldstärke auf Grund der Bedingungen (1). Ebenso, wie in der vorigen Rechnung, ist nun $\overline{U}_{\text{mat}}^{(2)}$ durch (20) gegeben, wenn man setzt:

$$F(x) = -e^2 |V_0|^2 \frac{g^2}{4} \frac{m^2 c^2 + x}{c(p^2 + m^2 c^2 + x)^{\frac{5}{2}}}.$$

Man erhält dann, wenn man zuerst über p integriert:

$$\overline{U}_{\text{mat}}^{(2)} = -\frac{1}{4\pi h^3 c} \frac{g^2}{3} e^2 |V_0|^2 \left[\int_0^\infty \frac{dx}{m^2 c^2 + x} + \sum_{m=1}^\infty b^{2m} \frac{B_m(-)^m}{(2m)!} \left(\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \frac{1}{m^2 c^2 + x} \right)_{x=0} \right].$$

Da dieser Ausdruck quadratisch in den elektrischen Feldstärken ist, erhalten wir für die kinetische Energiedichte nach (7a)

$$\overline{\tilde{U}}^{(2)} = -\overline{U}_{\text{mat}}^{(2)}.$$

Aus den früher diskutierten Gründen können erst die Glieder 4. und höherer Ordnung in den Feldstärken für das Vakuum von physikalischer Bedeutung sein, sodass das divergierende Integral wegzulassen ist. Wir ersetzen nun V_0 durch die elektrische Feldstärke E :

$$\overline{E}^2 = 2 \frac{g^2}{h^2} |V_0|^2$$

wobei die Querstriche Raummittelungen bedeuten und erhalten für die ersten beiden Glieder:

$$(25) \quad U^{(2)} = \frac{5}{360\pi^2} \frac{e^4 h}{m^4 c^7} E^2 B^2 - \frac{7}{2} \frac{1}{630\pi^2} \frac{e^6 h^3}{m^8 c^{13}} E^2 B^4 + \dots$$

für den Grenzfall schwach veränderlichen Felder bei welchem die Raummittelungen weggelassen werden können.

Vergleicht man (25) mit den zu $E^2 B^2$ und $E^2 B^4$ proportionalen Gliedern in (4) so erhält man die Beziehungen

$$\beta - 2\alpha = \frac{5}{360} \frac{e^4 h}{m^4 c^7}, \quad 3\xi - \zeta = \frac{7}{2} \frac{1}{630\pi^2} \frac{e^6 h^3}{m^8 c^{13}},$$

und mit den bereits berechneten Werten von α und β

$$\beta = 7\alpha, \quad \zeta = \frac{13}{2}\xi.$$

Der in der magnetischen Feldstärke exakte Ausdruck für $U^{(2)}$ ergibt sich zu

$$U^{(2)} = \frac{1}{8\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \frac{1}{3} \mathfrak{E}^2 \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \{ \eta \mathfrak{B} \operatorname{Ctg} \mathfrak{B} - 1 \},$$

wobei $\mathfrak{E} = \frac{m^2 c^3}{eh} E$ ist.

Die höheren Näherungen in E lassen sich leicht bis auf einen konstanten Faktor bestimmen. Denken wir die k -te Näherung $W_n^{-(k)}(p)$ der Energie des durch p und n gegebenen Zustandes bestimmt; sie wird auf Grund der Wellengleichung (16) die folgende Gestalt haben:

$$W_n^{-(k)}(p) = g^k e^k |V_0|^k \cdot G(c, h, |K|, p)$$

wobei G eine Funktion ist, in welcher nur die angegebenen Grössen vorkommen. $W^{(k)}$ muss infolge der Eichinvarianz min-

destens k -ter Ordnung in g sein. Die höheren Potenzen von g sind vernachlässigt. Die Energiedichte in k -ter Ordnung wird dann:

$$(26) \quad U_{\text{mat}}^{(k)} = \frac{1}{8\pi h^3 c} g^k e^k |V_0|^k \left[\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{+\infty} G dp + \sum_{m=1}^{\infty} b^{2m} \frac{B_m}{(2m)!} (-)^m \left(\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} G dp \right)_{x=0} \right].$$

Das Integral über G muss die Dimension (Energie) $^{-(k-1)}$ (Impuls) $^{-(k-1)}$ haben, und darf nur mehr von den Grössen $c, h, |K|$ abhängen, was nur in der Form möglich ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G dp = f_k \frac{1}{c^{k-1} |K|^{2k-2}} = f_k \frac{1}{c^{k-1} (m^2 c^2 + x)^{k-1}}$$

wobei f_k ein Zahlenfaktor ist.

Wenn man dieses in (26) einsetzt, so lässt sich $U_{\text{mat}}^{(k)}$ bis auf den Faktor f_k vollständig angeben.

Die Zahlenfaktoren f_k bestimmen sich aber leicht durch die Überlegung, dass U_{mat} nach (8) eine relativistische Invariante sein muss. Da deswegen U_{mat} nur von $E^2 - B^2$ und $(EB)^2$ abhängen darf, muss z. B. der Koeffizient von E^k sich von dem Koeffizient von B^k nur durch den Faktor $(-)^{\frac{k}{2}}$ unterscheiden. Der letztere Koeffizient wurde bereits berechnet und ist durch (21) gegeben. Man erhält dann

$$f_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{2^{m-1} B^m}{m(2m-1)}$$

und kann damit die Darstellung berechnen, die HEISENBERG u. EULER für L' angegeben haben¹:

¹ In der Frage der Konvergenz dieses Integrals verweisen wir auf die diesbezüglichen Bemerkungen in der Arbeit von HEISENBERG u. EULER S. 729.

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ \eta \mathfrak{B} \operatorname{Ctg} \mathfrak{B} \cdot \eta \mathfrak{E} \operatorname{ctg} \mathfrak{E} - 1 + \frac{\eta^2}{3} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \right\}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{m^2 c^3}{eh} E, \quad \mathfrak{B} = \frac{m^2 c^3}{eh} B.$$

Dieser Ausdruck ist für parallele Felder berechnet. Um ihn auf beliebige Felder zu verallgemeinern, muss man ihn als Funktion der beiden Invarianten $E^2 - B^2$ und $(EB)^2$ schreiben. Dies ist nach HEISENBERG und EULER in einfacher Weise mit der Beziehung

$$\operatorname{Ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = -i \frac{\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta} + \operatorname{conj}}{\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta} - \operatorname{conj}}$$

möglich und man erhält

$$L' = \frac{1}{8\pi^2 hc} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left\{ i\eta (EB) \frac{\cos \eta \sqrt{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2 + 2i(\mathfrak{E}\mathfrak{B})} + \operatorname{conj}}{\cos \eta \sqrt{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2 + 2i(\mathfrak{E}\mathfrak{B})} - \operatorname{conj}} + \frac{m^4 c^6}{e^2 h^2} + \frac{\eta^2}{3} (B^2 - E^2) \right\}.$$

Wegen der Realität des Gesamtausdrucks ist dieser tatsächlich nur von $E^2 - B^2$ und $(EB)^2$ abhängig.

Die Berechnung der Energiedichte und Lagrangefunktion des Vakuums ist in der skalaren Theorie des Positrons mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln durchzuführen. Eine Energiedichte des Vakuums entsteht in dieser Theorie durch die Nullpunktsenergie der Materiewellen. Die Gesamtenergie ist nach PAULI und WEISSKOPF l. c. (Formel (29)) durch

$$E_{\text{mat}} = \sum_k W_k (N_k^+ + N_k^- + 1)$$

gegeben, wobei W_k die Energie des k -ten Zustandes ist und N_k^+ die Anzahl der Positronen, N_k^- die Anzahl der Elektronen ist, die diesem Zustand angehören. Im leeren Vakuum bleibt die Summe über alle Energien W_k übrig, wobei die Energie W_k des durch den Impuls p und der Quantenzahl n charakterisierten Zustandes in einem Magnetfeld B den Wert hat:

$$W_n^{\text{skal}}(p, B) = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2 + b \left(n + \frac{1}{2}\right)}.$$

Die Summation über alle Zustände und Division durch das Gesamtvolumen führt zur Energiedichte, die sich leicht analog zu (19) ergibt:

$$U_{\text{mat}} = \frac{b}{8\pi^2 h^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp W_n^{\text{skal}}(p, B).$$

Der einzige Unterschied gegen die frühere Rechnung besteht in dem Wegfallen der Summierung über die beiden Spinrichtungen. Nun verifiziert man leicht die folgende Beziehung zwischen der Energie $W_n^{\text{skal}}(p, B)$ in der skalaren und der Energie $W_n^-(p, B)$ in der DIRAC'schen Elektronentheorie:

$$2 \sum_{n=0}^N W_n^{\text{skal}}(p, B) = \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^N W_n^-(p, B) - \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{2N} W_n^-(p, B/2).$$

Wir können daher die Energiedichte in der skalaren Theorie \tilde{U}_{skal} durch die Energiedichte \tilde{U}' der DIRAC'schen Positronentheorie in folgender Weise ausdrücken:

$$2\tilde{U}_{\text{skal}}(B) = \tilde{U}'(B) - \tilde{U}'(B/2).$$

Man sieht daran, dass auch hier der von den Feldstärken unabhängige und der in ihnen quadratische Anteil unendlich ist. Der letztere liefert also eine unendliche von den Feld-

stärken unabhängige Polarisierbarkeit. Um für das feldlose Vakuum ein brauchbares Resultat zu erhalten, muss man wieder diese beiden Anteile streichen und erhält infolge der Beziehung

$$\text{Ctg } \beta - \text{Ctg } \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{\text{Sin } \beta}.$$

$$U'_{\text{skal}} = -\frac{1}{16\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int_{(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ \eta \mathfrak{B} \frac{1}{\text{Sin } \eta \mathfrak{B}} - 1 + \frac{\eta^2}{6} \mathfrak{B}^2 \right\}.$$

Die Durchführung einer analogen Störungsrechnung im elektrischen Feld führt in gleicher Weise zu einem Zusatz zur Lagrangefunktion des Feldes, der mit dem aus der DIRAC'schen Positronentheorie gewonnenen sehr verwandt ist:

$$L'_{\text{skal}} = -\frac{1}{16\pi^2} \frac{e^2}{hc} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ \frac{2i\eta(EB)}{\cos \eta \sqrt{(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) + 2i(\mathfrak{E}\mathfrak{B})} - \text{conj}} + \frac{m^4 c^6}{e^2 h^2} - \frac{\eta^2}{6} (B^2 - E^2) \right\}.$$

Für die in (4) definierten Koeffizienten α, β erhält man daher:

$$\alpha = \frac{7}{16} \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4 h}{m^4 c^7}, \quad \beta = \frac{24}{7} \alpha.$$

Es sei hier noch auf folgende Eigenschaft der Lagrangefunktion des Vakuums hingewiesen. Für sehr grosse Feldstärken E oder B haben die höchsten Glieder des Zusatzes L' zur MAXWELL'schen Lagrangefunktion in der DIRAC'schen Theorie des Positrons die Form

$$L' \propto -\frac{e^2}{24\pi^2 hc} E^2 \lg \mathfrak{E} \quad \text{bzw.} \quad L' \propto \frac{e^2}{24\pi^2 hc} B^2 \lg \mathfrak{B}.$$

Das Verhältnis zwischen diesem Zusatz L' und der MAXWELL'schen Lagrangefunktion $L_0 = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2)$ ist somit

logarithmisch in den Feldstärken für hohe Werte derselben und ist ausserdem mit dem Faktor $\frac{e^2}{hc}$ multipliziert:

$$\frac{L'}{L_0} \propto \frac{e^2}{3\pi hc} \lg \mathfrak{E} \quad \text{bzw.} \quad \frac{L'}{L_0} \propto \frac{e^2}{3\pi hc} \lg \mathfrak{B}.$$

Die Nichtlinearitäten der Feldgleichungen stellen somit auch bei Feldstärken, die wesentlich höher als die kritische Feldstärke $\frac{m^2 c^3}{eh}$ sind, nur kleine Korrekturen dar. Die in der Note von EULER und KOCKEL l. c. und in der Arbeit von EULER l. c. zitierte Verwandtschaft der aus der Positronentheorie folgenden Nichtlinearität der Feldgleichungen mit der nichtlinearen Feldtheorie von BORN und INFELD¹ ist daher nur äusserlich. In der letzteren Theorie sind die MAXWELL'schen Gleichungen bei der kritischen Feldstärke $F_0 = \frac{m^2 c^4}{e^3}$ »am Rande des Elektrons« bereits vollkommen abgeändert, wodurch dann die endliche Selbstenergie einer Punktladung erreicht wird. Hier hingegen sind die Abweichungen von den MAXWELL'schen Feldgleichungen für Felder der Grösse F_0 noch sehr klein und wachsen viel zu langsam an, um eine ähnliche Rolle in den Selbstenergieproblem zu spielen. Die Extrapolation der vorliegenden Rechnungen auf die Felder am »Rande des Elektrons« ist allerdings nicht einwandfrei, da dort die Bedingungen (1) nicht erfüllt sind. Es ist jedoch nicht wahrscheinlich, dass eine exaktere Betrachtung in dieser Hinsicht ein wesentlich verschiedenes Resultat liefert.

III.

In diesem Abschnitt soll der Einfluss beliebiger Felder auf das Vakuum behandelt werden. Wir beschränken uns vorerst auf statische Felder. Die stationären Zustände des

¹ M. BORN u. L. INFELD, Proc. Roy. Soc. 143, 410, 1933.

Elektrons auf Grund der DIRAC'schen Wellengleichung und ihre Energieeigenwerte werden sich im allgemeinen in zwei Gruppen einteilen lassen, die bei einer adiabatischen Einschaltung des statischen Feldes aus den positiven bzw. aus den negativen Energieniveaus des freien Elektrons entstanden sind. Dies trifft z. B. im Coulombfeld eines Atomkernes zu und bei allen in der Natur vorkommenden statischen Feldern.

Es sind jedoch auch solche statische Felder angebar, in denen eine derartige Einteilung versagt, da infolge der Felder Übergänge von negativen zu positiven Zuständen vorkommen. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist eine Potentialstufe der Höhe $> 2mc^2$. Diese Ausnahmefälle sind stationär nicht behandelbar und müssen als ein zeitabhängiges Feld betrachtet werden, das zu einer gegebenen Zeit eingeschaltet wird. Dies ist umso mehr schon deswegen notwendig, da derartige Felder infolge der fortwährende Paarentstehung gar nicht stationär aufrechterhalten werden könnten.

Im Falle dass aber das Eigenwertspektrum sich eindeutig in die beiden Gruppen einteilen lässt, kann man die Energiedichte U und die Strom-Ladungsdichte \vec{i}, ρ der Vakuumelektronen nach den Formeln

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} U = ih \sum_i \left\{ \psi_i^*, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i \right\} \\ \rho = e \sum_i \{ \psi_i^*, \psi_i \} \\ \vec{i} = e \sum_i \{ \psi_i^*, \vec{\alpha} \psi_i \} \end{array} \right.$$

berechnen, wobei über die Zustände zu summieren ist, die den negativen Energiezuständen des freien Elektrons entsprechen. Die angeschriebenen Summen werden divergieren.

Wenn aber die physikalisch bedeutungslosen Teile abgetrennt werden, erhalten wir konvergente Ausdrücke.

Um diese Teile auf Grund der Annahmen (I) festzulegen, entwickeln wir die Summanden der Ausdrücke (29) nach Potenzen der äusseren Feldstärken in der Weise, dass wir uns die letzteren mit einem Faktor λ multipliziert denken und nach Potenzen dieses Faktors entwickeln. Dieses Verfahren ist identisch mit einer successiven Störungsrechnung, die von den freien Elektronen als nullte Näherung ausgeht.

Die Annahmen I_1, I_2 verlangen vor allem das Verschwinden der von λ unabhängigen Glieder, die aus den Beiträgen der vom Felde unabhängigen freien Vakuumelektronen bestehen. Wenn wir vorläufig nur jene freien Vakuumelektronen berücksichtigen, deren Impuls $|p| < P$ ist, so erhalten wir hierfür folgende Beiträge:¹

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} U_0 = -\frac{1}{4\pi^3 h^3} \int_{|p| < P} d\vec{p} \sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \\ \rho_0 = \frac{e}{4\pi^3 h^3} \int_{|p| < P} d\vec{p}, \\ \vec{i}_0 = \frac{e}{4\pi^3 h^3} \int_{|p| < P} d\vec{p} \frac{c\vec{p}}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}. \end{array} \right.$$

Die Beiträge sämtlicher Elektronen $- P \rightarrow \infty$ — divergieren natürlich.

Durch das Abtrennen der von λ unabhängigen Glieder ist aber die Annahme I_2 noch nicht vollständig erfüllt. Die Ladungs- und Stromdichte ρ_0, \vec{i}_0 der feldfreien Vakuum-

¹ Es ist nämlich der zum Impuls \vec{p} gehörige Strom: $\frac{ec\vec{p}}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$ und die Anzahl der Zustände in Intervall $d\vec{p}$: $\frac{d\vec{p}}{4\pi^3 h^3}$.

elektronen äussert sich nämlich auch dadurch, dass sie bei Anwesenheit von Potentialen V, \vec{A} einen Zusatz $e_0 V$ und (\vec{i}_0, \vec{A}) zur Energiedichte liefert, der ebenfalls abgetrennt werden muss. Diese Zusätze treten auf, da auch die Energie und der Impuls der von den Feldern noch unbeeinflussten Vakuumelektronen bei Anwesenheit von Potentialen um den Betrag eV bzw. $\frac{e}{c} \vec{A}$ geändert wird.

Die Annahmen I_1 und I_2 sind daher erst vollkommen erfüllt, wenn man die wegzulassende Beiträge (30) folgendermassen modifiziert:

$$(31) \left\{ \begin{aligned} U_0 &= -\frac{1}{4\pi^3 h^3} \int_{|p| < P} d\vec{p} \left[\sqrt{\left(p + \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 + m^2 c^2} + eV \right] \\ \vec{e}'_0 &= \frac{e}{4\pi^3 h^3} \int_{|p| < P} d\vec{p} \\ \vec{i}'_0 &= \frac{e}{4\pi^3 h^2} \int_{|p| < P} d\vec{p} \frac{c \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}\right)}{\sqrt{\left(p + \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 + m^2 c^2}} \end{aligned} \right.$$

wobei auch wieder nur der von freien Vakuumelektronen mit Impulsen $|p| < P$ herrührenden Teil angeschrieben ist. Nun ist noch die Bedingung I_3 zu erfüllen. Hierzu beachten wir, dass eine konstante feldunabhängige Polarisierbarkeit zu Gliedern in Energiedichte $U(x)$ führt, die proportional zu den Quadrat $E^2(x)$ und $B^2(x)$ der Feldstärken an der Stelle x sind. Ebenso führt sie zu einer Strom- und Ladungsdichte, die zu den ersten Ableitungen der Felder proportional ist, auf Grund der Beziehungen

$$\begin{aligned} i &= \text{rot } M + \frac{dP}{dt} \\ q &= \text{div } P \end{aligned}$$

worin M und P die magnetischen und elektrischen Polarisierungen sind, die im Falle einer konstanten Polarisierbarkeit zu den Feldern proportional sind. Um die Annahme I_3 zu erfüllen, müssen daher in der Energiedichte U der Vakuumelektronen die zu E^2 und zu B^2 proportionalen Glieder verschwinden und in der Strom-Ladungsdichte die zu den ersten Ableitungen proportionalen Glieder weggelassen werden. Es ist praktischer, die Form dieser Glieder nicht explizit anzugeben, sondern dieselben im Laufe der Rechnung an ihren Eigenschaften zu erkennen.

Als Erläuterung berechnen wir die Ladungs- und Stromdichte des Vakuums unter dem Einfluss eines elektrischen Potentials

$$(32) \quad V = V_0 e^{\frac{i(\vec{g} \vec{r})}{h}} + V_0^* e^{-\frac{i(\vec{g} \vec{r})}{h}}$$

und eines magnetischen Potentials

$$(33) \quad \vec{A} = \vec{A}_0 e^{\frac{i(\vec{g} \vec{r})}{h}} + \vec{A}_0^* e^{-\frac{i(\vec{g} \vec{r})}{h}}, \quad (\vec{A}_0, \vec{g}) = 0$$

mit Hilfe der Störungstheorie. Diese Berechnungen sind bereits von HEISENBERG¹ und noch viel allgemeiner von SERBER² und PAULI u. ROSE³ durchgeführt worden und sollen hier nur als Illustration zu unserer physikalischen Interpretation der Substraktionsterme dienen. Die Ladungsdichte q ist bis zur ersten Ordnung gegeben durch $q = q^{(0)} + q^{(1)}$,

$$q^{(1)} = e \sum_i \sum_k \frac{H_{ik} \langle \psi_i^*, \psi_k \rangle}{W_i - W_k} + \text{conj}$$

¹ HEISENBERG, Z. f. Phys. **90**, 209, 1934.

² R. SERBER, Phys. Rev. **48**, 49, 1935.

³ W. PAULI u. M. ROSE, Phys. Rev. **49**, 462, 1936.

wobei die i über die besetzten, die k über die unbesetzten Zustände zu summieren sind, und H_{ik} das Matricelement der Störungsenergie ist. Setzen wir das Potential (32) als Störung ein, so erhalten wir $(W(p) = c\sqrt{p^2 + m^2 c^3})$

$$e^{(1)} = \frac{e^2 V_0}{8\pi^3 h^3} \int d\vec{p} \left\{ \frac{W(p) W(p+g) - c^2(p, p+g) - m^2 c^4}{W(p) W(p+g) [W(p) + W(p+g)]} + \left(\text{dasselbe} \right) \right\} e^{\frac{i(\vec{g}\vec{r})}{h}} + \text{conj.}$$

Entwickelt man dies nach Potenzen von \vec{g} so erhält man

$$e^{(1)} = \frac{e^2 V_0}{8\pi^3 h^3} \int d\vec{p} \frac{c^2}{W^3(p)} e^{\frac{i(\vec{g}\vec{r})}{h}} \left\{ \frac{g^2}{2} - \frac{c^2 (pg)^2}{W^2(p)} - \frac{c^2 g^4}{4 W^2(p)} + \frac{11 c^4 (pg)^2 g^2}{8 W^4(p)} - \frac{21 c^6 (pg)^4}{16 W^6(p)} + \dots \right\} + \text{conj.}$$

Welcher Teil dieser Ladungsdichte hat nun physikalische Bedeutung? Wegen der Annahme I_3 muss ϱ_0 wegfallen; in $\varrho^{(1)}$ sind die Glieder mit g^2 proportional zur zweiten Ableitung von V und somit zur ersten Ableitung der Feldstärken und müssen wegen I_3 weggelassen werden. Man bemerke, dass auch nur diese Glieder zu Divergenzen führen. Der Rest liefert endliche Integrale und ist nach HEISENBERG in der Form

$$(34) \quad \varrho^{(1)} = \frac{1}{240\pi^2} \frac{e^2}{hc} \left(\frac{h}{mc} \right) \Delta \Delta V + \text{höhere Ableitungen von } V$$

zu schreiben. Die exakte Ausrechnung der ersten Näherung wurde von SERBER und PAULI u. ROSE l. c. geliefert.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Stromdichte \vec{i} in der ersten Näherung des Feldes (33)

$$\vec{i}^{(1)} = e \sum_{ik} \frac{H_{ik} \{ \psi_i^*, \alpha \psi_k \}}{W_i - W_k} + \text{conj}$$

Es ergibt sich

$$\vec{i}^{(1)} = -e^2 \frac{\vec{A}_0}{8\pi^3 h^3} \int d\vec{p} e^{\frac{i(\vec{g}\vec{r})}{h}} \left\{ \frac{W(p) W(p+g) + E^2(p) + c^2 (pg) - 2c^2 (n, p+g) (n, p)}{W(p+g) W(p) [W(p+g) + W(p)]} + \left(\text{dasselbe} \right) \right\} + \text{conj}$$

wobei n der Einheitsvektor in der Richtung \vec{A} ist. Dieses ergibt nach g entwickelt:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{i}^{(1)} &= -\frac{e^2 \vec{A}}{4\pi^3 h^3} \int d\vec{p} \frac{1}{W^3(p)} e^{\frac{i(\vec{g}\vec{r})}{h}} \\ &\left\{ W^2(p) - c^2 (np)^2 - \frac{c^2 g^2}{2} + \frac{3 c^4 (pg)^2}{4 W^2(p)} - \frac{5 c^6 (np)^2 (pg)^2}{2 W^4(p)} + \right. \\ &\left. + \frac{3 c^4 (np)^2 g^2}{4 W^2(p)} + \text{Glieder 4. u. höherer Ordnung in } g \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hier treten auch von g unabhängige, also nicht eichinvariante Glieder auf. Diese sind aber mit den wegzulassenden Beiträgen \vec{i}_0 aus (31) identisch: Entwickelt man nämlich \vec{i}_0 nach \vec{A} , so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{i}_0 &= \frac{e}{4\pi^3 h^3} \int d\vec{p} \left\{ \frac{cp}{W(p)} + \frac{e\vec{A}}{W(p)} - \frac{c^2 p (e\vec{A}, p)}{W^3(p)} + \dots \right\} \\ &= \vec{i}_0 + e^2 \frac{\vec{A}}{4\pi^3 h^3} \int d\vec{p} \frac{1}{W^3(p)} \{ W^2(p) - c^2 (np)^2 + \dots \}. \end{aligned}$$

Die Glieder erster Ordnung in \vec{A} stimmen mit den von g unabhängigen Gliedern in (35) überein. Die zu g^2 proportionalen Glieder von (35) werden ebenfalls weggelassen, der Rest ergibt das zu (34) entsprechende konvergierende Resultat:

$$\vec{t}^{(1)} = \frac{1}{240\pi^2} \frac{e^2}{hc} \left(\frac{h}{mc} \right) \Delta \Delta \vec{A} + \text{höhere Ableitungen.}$$

Die beiden Beispiele sollen zeigen, dass bei einer Störungsrechnung die wegzulassenden Beiträge unmittelbar erkenntlich sind und dass die übrigen durch die Annahmen (I) nicht berührten Beiträge der Vakuumelektronen bei der Summierung zu keinen Divergenzen mehr führen. Die angeführten Beispiele beweisen dies zwar nur in erster Näherung. Die Überlegungen lassen sich aber ohne weiteres auf höhere Näherungen ausdehnen.

Die Behandlung zeitabhängiger Felder ist im wesentlichen nicht von dem obigen Verfahren verschieden. Es ist notwendig, die zeitabhängigen Felder von einem Zeitpunkt t_0 an wirken zu lassen, an welchem die Vakuumelektronen in feldfreien Zuständen waren, oder in solchen stationären Zuständen, die sich einwandfrei in besetzte und unbesetzte einteilen lassen. Die zeitliche Veränderung dieser Zustände von diesem Zeitpunkt t_0 an lässt sich dann mit Hilfe einer Störungsrechnung in Potenzen der äusseren Felder darstellen. Die Ausdrücke (31) und die aus der Bedingung (I_3) folgenden Glieder können dann abgetrennt werden, wobei der übrigbleibende Rest nicht mehr zu Divergenzen führt. Die Berechnung der Ladungs- und Stromdichte des Vakuums bei beliebigen zeitabhängigen Feldern in erster Näherung findet sich bei SERBER l. c. und bei PAULI u. ROSE l. c. Die abzuziehenden Teile werden dort aus der HEISENBERG'schen Arbeit formal entnommen. Sie sind aber mit jenen, die aus den Annahmen I folgen, vollkommen identisch.

Wie äussert sich nun die Entstehung von Paaren durch zeitabhängige Felder? Die Paare kommen bei der Berechnung der Energie-, Strom- und Ladungsdichte nicht unmittelbar zum Ausdruck. Die Paarerzeugung zeigt sich nur in einer

proportional zur Zeit wachsenden Gesamtenergie, die der Energie der entstehenden Elektronen entspricht. Die Ladungs- und Stromdichte ist nicht unmittelbar von der Paarentstehung beeinflusst, da stets positive und negative Elektronen zugleich erzeugt werden, die die Strom-Ladungsdichte erst dadurch beeinflussen, dass die äusseren Felder auf die entstandenen Elektronen je nach der Ladung verschieden einwirken.¹

Es ist daher praktischer, die Paarentstehung durch äussere Felder direkt zu berechnen als Übergang eines Vakuumelektrons in einen Zustand positiver Energie. Die Entstehungswahrscheinlichkeit des Elektronenpaares ist dann identisch mit der Zunahme der Intensität der betreffenden Eigenfunktion positiver Energie bzw. mit der Abnahme der Intensität der entsprechenden Eigenfunktion negativer Energie infolge des Einwirkens der zeitabhängigen Felder auf die Zustände, die bis zur Zeit t_0 geherrscht haben. Die Berechnung wurde von BETHE u. HEITLER², HULME u. JAEGER³ u. s. w. ausgeführt.

Die Paarvernichtung unter Lichtausstrahlung lässt sich wie jeder anderer spontane Ausstrahlungsprozess nur durch Quantelung der Wellenfelder behandeln, oder durch korrespondenzmässige Umkehrung des Lichtabsorptionsprozesses.

In der bisherigen Darstellung wurden die abzutrennenden Teile der Vakuumelektronen nicht explizit angegeben, sondern nur ihre Form und ihre Abhängigkeit von

¹ Die von SERBER berechnete Strom- und Ladungsdichte bei paarerzeugenden Feldern ist daher dem Mitschwingen der Vakuumelektronen zuzuschreiben und ist nicht etwa die »erzeugte Strom-Ladungsdichte«. Die auftretenden Resonanznenner rühren daher, dass dieses Mitschwingen besonders stark ist, wenn die äussere Frequenz sich einer Absorptionsfrequenz des Vakuums nähert.

² H. BETHE u. W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. 146, 84, 1934.

³ H. R. HULME u. J. C. JAEGER, Proc. Roy. Soc.

den äusseren Feldern bestimmt. Um sie explizit darzustellen muss man ein etwas anderes Verfahren wählen, da diese Teile ja divergente Ausdrücke enthalten. Hierzu eignet sich die von DIRAC eingeführte Dichtematrix, die dann von DIRAC und spezieller von HEISENBERG l. c. auf dieses Problem angewendet wurde. Die Dichtematrix R ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(x', k' | R | x'' k'') = \sum_I \psi_i^*(x', k') \psi_i(x'' k'')$$

wobei x' und x'' zwei Raum-Zeitpunkte, k' und k'' zwei Spinindizes bedeuten. Die Summe soll über alle besetzten Zustände erstreckt werden. Aus dieser Matrix kann man dann leicht die Strom- und Ladungsdichte \vec{i} , q und der Energie-Impuls-Tensor¹ U_ν^μ bilden auf Grund den Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \lim_{x' = x''} e \sum_{k' k''} (\vec{\alpha})_{k' k''} (x' k' | R | x'' k'') \\ q &= \lim_{x' = x''} e \sum_{k'} (x' k' | R | x'' k'') \\ U_\nu^\mu &= \lim_{x' = x''} \frac{1}{2} \left\{ i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \right] - e \left[A^\mu(x') + A^\mu(x'') \right] \right\} \\ &\quad \sum_{k' k''} (\alpha^\nu)_{k' k''} (x' k' | R | x'' k''). \quad \alpha^4 = \text{Einheitsmatrix} \end{aligned}$$

Die Dichte-Matrix hat den Vorteil, dass für $x' \neq x''$ die Summation über die Vakuumelektronen nicht divergieren, sondern einen Ausdruck ergeben der für $x' = x''$ singular wird.

Man kann nun aus den Annahmen (I) eindeutig angeben, welche Teile der Dichtematrix der Vakuumelektronen für

¹ Der vollständige Energie-Impuls-Tensor besteht aus der Summe von U_ν^μ und dem MAXWELL'schen Energie-Impuls-Tensor des Feldes. Die U_4^4 -komponente ist daher nicht die gesamte materielle Energiedichte, sondern nur die kinetische.

$x' = x''$ in die wegzulassenden Teile übergehen und gewinnt auf diese Weise eine explizite Darstellung dieser Glieder.

Der physikalisch bedeutungslose Teil der Dichtematrix muss dann aus jenen Gliedern bestehen, die von den Feldstärken unabhängig sind, aus denen, die zu Gliedern in der Stromdichte führen, die zu den Ableitungen der Felder proportional sind und aus denen die zu Gliedern in der Energiedichte führen, die proportional zum Quadrat der Feldstärke sind. Ausserdem muss der abzuziehende Teil der Dichtematrix noch mit dem Faktor

$$u' = \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{x'}^{x''} \left(\sum_{i=1}^3 A_i dx_i - V dt \right) \right]$$

multipliziert werden, wobei das Integral im Exponenten in gerader Linie vom Punkte x' zu dem Punkt x'' zu erstrecken ist. Dieser Faktor fügt zum abzuziehenden Energie-Impuls-Tensor gerade die Beiträge hinzu, die davon herühren, dass die noch ungestörten Vakuumelektronen im Feld eine Zusatzenergie eV und einen Zusatzimpuls $\frac{e}{c} \vec{A}$ erhalten, und die infolge der Annahme I_2 mit abgezogen werden sollen.

Da der abzuziehende Teil der Dichtematrix bis auf den Faktor u' höchstens zweiter Ordnung in den Feldstärken ist, lässt er sich durch eine Störungsrechnung aus der Dichtematrix der freien Elektronen gewinnen. Diese im Prinzip einfache, in der Ausführung jedoch sehr komplizierte Rechnung liegt der Bestimmung dieser Matrix von HEISENBERG l. c. zu Grunde. Das Ergebnis lässt sich mathematisch einfacher formulieren, wenn man bei jeder Grösse stets das Mittel bildet aus der Berechnung mit Hilfe der vorliegenden Theorie und aus der Berechnung mit Hilfe einer Theorie in der die Elektronenladung positiv ist, und das negative

Elektron als »Loch« dargestellt wird. Das Resultat ist ja in beiden Fällen dasselbe. Die Dichtematrix R wird dann durch R' ersetzt:

$$(x'k' | R' | x''k'') = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \psi_i^*(x'k') \psi_i(x''k'') - \sum_k \psi_k^*(x'k') \psi_k(x''k'') \right\},$$

wobei die erste Summe über die besetzten, die zweite Summe über die unbesetzten Zustände zu erstrecken ist.

Der abzuziehende Teil $(x'k' | S | x''k'')$ hat dann die Form

$$(x'k' | S | x''k'') = u' S_0 + \frac{\bar{a}}{|x' - x''|^2} + \bar{b} \lg \frac{|x' - x''|^2}{C}.$$

Hierbei ist S_0 die Matrix R' für verschwindende Potentiale, \bar{a} und \bar{b} sind Funktionen der Feldstärken und ihrer Ableitungen, C ist eine Konstante. Diese Grössen sind bei HEISENBERG l. c. und bei HEISENBERG u. EULER l. c. explizit angegeben.

Für die Ausführungen spezieller Rechnungen ist es praktischer, nicht auf den expliziten Ausdruck HEISENBERG's zurückzugreifen, sondern die wegzulassenden Glieder an ihrer Struktur zu erkennen. Dies ist vor allem deshalb einfacher, da die übrig bleibenden Ausdrücke nicht mehr bei $x' = x''$ singulär werden, sodass man für die Berechnung derselben gar nicht das formale Hilfsmittel der Dichtematrix benötigt. Die Summierungen über alle Vakuumelektronen führen hierbei nicht mehr zu divergenten Ausdrücken. Allerdings eignet sich die explizite Darstellung HEISENBERG's gut dazu, die relativistische Invarianz und die Gültigkeit der Erhaltungssätze in dem Verfahren zu zeigen.

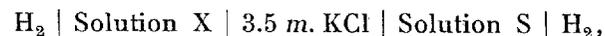
Es ist hieraus ersichtlich, dass die hier beschriebene Bestimmung der physikalischen Eigenschaften der Vakuum-

elektronen im wesentlichen keine Willkür enthält, da ausschliesslich nur jene Wirkungen derselben weggelassen werden, die infolge der Grundannahme der Positronentheorie wegfallen müssen: die Energie und die Ladung der von den Feldern ungestörten Vakuumelektronen, und die physikalisch sinnlose feldunabhängige konstante Polarisierbarkeit des Vakuums. Alle physikalisch sinnvollen Wirkungen der Vakuumelektronen werden mitberücksichtigt und führen zu konvergenten Ausdrücken. Man darf daraus wohl den Schluss ziehen, dass die Löchertheorie des Positrons keine wesentlichen Schwierigkeiten für die Elektronentheorie mit sich geführt hat, solange man sich auf die Behandlung der ungequantelten Wellenfelder beschränkt.

Ich möchte an dieser Stelle den Herren Prof. BOHR, HEISENBERG und ROSENFELD meinen herzlichsten Dank für viele Diskussionen aussprechen. Auch bin ich dem Rask-Ørsted-Fond Dank schuldig, der es mir ermöglicht hat, diese Arbeit am Institut for teoretisk Fysik in Kopenhagen auszuführen.

to $s = 0$ we find K^0 , the dissociation constant of the anilinium ion at infinite dilution. From the variation with temperature (Fig. 3 and formulae 13 and 14) we find the heat of dissociation of the anilinium ion 7100 cal./mole.

In order to make the above extrapolation (2) we have measured cells of the following composition with the hydrogen electrode:



where X is a mixture of hydrochloric acid and sodium chloride solution, while S is 0.01011 *n.* HCl (Table 6). From the measurements we find $-\log \frac{f_{(X)}}{f_{(S)}}$, which we extrapolate to X = pure sodium chloride solution (Fig. 4 and 5).

In the last part of the paper we have discussed the definition of the single values of f . It has been shown from the measurements in this paper that the usual procedure of extrapolating to infinite dilution by means of DEBYE-HÜCKEL's law for the real activity coefficients may give meaningless results.

*Chemical Laboratory of the Royal Veterinary
and Agricultural College, Copenhagen.*

October 1936.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV**, 10.

ON THE
TRANSMUTATION OF ATOMIC NUCLEI
BY IMPACT OF MATERIAL PARTICLES
I. GENERAL THEORETICAL REMARKS

BY

N. BOHR AND F. KALCKAR



KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD

1937