Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII,** 7.

VARIÉTÉS DÉVELOPPANTES ET VARIÉTÉS DÉVELOPPÉES

PAR

FR. FABRICIUS-BJERRE

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Nous allons étudier deux espèces de variétés, V^n et W^n, situées dans un espace S^{n+p}, $p \geqq n$, à courbure constante K_0. Les variétés seront caractérisées par la propriété suivante:

»Les espaces tangents à W^n doivent être espaces normaux à V^n«.

Dans le cas $n = 1$ ce problème est complètement résolu. Les courbes V^1 sont les développantes de la courbe W^1; les courbes W^1 les développées de la courbe V^1. — Nous ne considérons que les cas $n \geqq 2$.

Soit

$$x = x(u^1, u^2 \ldots u^n)$$

l'équation vectorielle de la variété V^n. Posons $x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$, $x_{ik} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k}$ et $g_{ik} = x_i x_k$, et attachons en chaque point de V^n un p-èdre rectangulaire $\xi^1, \xi^2 \ldots \xi^p$, les vecteurs ξ^ν étant vecteurs unitaires, normaux à la variété. Les vecteurs x_{ik} et $\xi^\nu_i = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial u^i}$ sont donnés par les équations[1]

$$x_{ik} = \Gamma^l_{ik} x_l + \beta^\nu_{ik} \xi^\nu - K_0 g_{ik} x \tag{1}$$

$$\xi^\nu_i = -\beta^\nu_{ik} g^{kl} x_l + b^{\sigma\nu}_i \xi^\sigma. \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} i, k, l = 1, 2 \ldots n \\ \sigma, \nu = 1, 2 \ldots p \end{pmatrix}$$

On peut choisir le vecteur ξ^1 de sorte que l'équation de la variété W^n puisse s'écrire

$$y = \lambda^0 x + \lambda \xi^1. \tag{3}$$

[1] Voir L. P. Eisenhart: Riemannian Geometry, Princeton 1926, p. 211.

λ et λ^0 dépendent des variables $u^1, u^2 \ldots u^u$ et satisfont à l'équation

$$\frac{(\lambda^0)^2}{K_0} + \lambda^2 = \frac{1}{K_0}.$$

En différentiant l'équation (3) et en faisant usage de (2) on obtient

$$y_i = \lambda_i^0 x + \lambda^0 x_i - \lambda \beta_{ik}^1 g^{kl} x_l + \lambda b_i^{\sigma 1} \xi^\sigma + \lambda_i \xi^1. \tag{4}$$

Comme l'espace tangent à W^n doit être espace normal à V^n, il est nécessaire que

$$\lambda^0 x_i - \lambda \beta_{ik}^1 g^{kl} x_l = 0$$

$$\lambda^0 g_{ik} - \lambda \beta_{ik}^1 = 0; \tag{5}$$

c. a. d. les directions principales du tenseur β_{ik}^1 sont indéterminées. L'équation (4) se réduit à

$$y_i = \lambda_i^0 x + \lambda_i \xi^1 + \lambda b_i^{\sigma 1} \xi^\sigma. \tag{6}$$

En outre l'espace tangent à W^n doit contenir la droite (3). Par conséquent, on pourra trouver des différentielles du^1, $du^2 \ldots du^n$ telles que

$$b_i^{\sigma 1} du^i = 0$$

$$dy = d\lambda^0 x + d\lambda \xi^1. \tag{7}$$

L'équation (7) montre que, dans l'espace tangent à V^n, il y a au moins une direction, où les normales consécutives se coupent. Donc la variété V^n contient au moins une congruence de lignes de courbure. — Inversement, si les équations (5) et (7) sont satisfaites, l'espace tangent à W^n sera espace normal à V^n. Par suite nous pouvons énoncer le théorème:

Pour qu'une variété V^n soit variété développante, il faut et il suffit qu'il y ait dans V^n une congruence de lignes de courbure, et que les directions principales du tenseur β^1_{ik}, appartenant aux normales correspondantes, soient indéterminées.

Une ligne de courbure de V^n correspond à une courbe géodésique de W^n. La géodésique est la développée de la ligne de courbure, et la variété V^n sera parcourue par les développantes de la congruence de géodésiques de W^n.

Choisissons maintenant ces géodésiques comme courbes génératrices u^1. La forme différentielle première de W^n peut s'écrire

$$ds^2 = (du^1)^2 + \bar{g}_{ik} du^i du^k \qquad (i, k \neq 1) \tag{8}$$

et l'équation de V^n devient

$$x = \mu^0 y + \mu y_1 \tag{9}$$

ou

$$\frac{(\mu^0)^2}{K_0} + \mu^2 = \frac{1}{K_0}.$$

L'espace tangent à V^n est déterminé par

$$x_k = \mu^0_k y + \mu^0 y_k + \mu_k y_1 + \mu y_{1k}. \tag{10}$$

Nous avons exigé que la variété V^n soit orthogonale aux espaces tangents de W^n. D'où il suit que les vecteurs y, $y_1, y_2 \ldots y_n$ doivent être orthogonaux aux vecteurs $x_1, x_2 \ldots x_n$. Donc on aura les relations

$$y x_k = 0 \tag{11}$$

$$y_i x_k = 0. \tag{12}$$

L'équation (11) donne

$$\frac{\mu_k^0}{K_0} - \mu \bar{g}_{1k} = 0$$

et pour $k = 1$, $k \neq 1$:

$$\mu_1^0 - \mu K_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_k^0 = 0.$$

On voit alors que μ^0 ne dépend que de la variable u^1.

En posant $i = 1$, l'équation (12) donnera

$$\mu^0 \bar{g}_{1k} + \mu_k = 0$$

et pour $k = 1$, $k \neq 1$

$$\mu^0 + \mu_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_k = 0.$$

Par conséquent: μ ne dépend que de la variable u^1.

Les fonctions μ^0 et μ sont déterminées par les équations

$$\frac{d^2\mu}{(du^1)^2} + K_0 \mu = 0; \quad \mu^0 = -\frac{d\mu}{du^1}. \tag{13}$$

Considérons le cas où et i et k sont différents de l'unité. On a

$$\mu^0 \bar{g}_{ik} + \mu \bar{\Gamma}_{i,1k} = 0$$

$$-\frac{d\mu}{du^1} \bar{g}_{ik} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial u^1} = 0$$

et par intégration

$$\underline{\bar{g}_{ik} = \mu^2 \gamma_{ik}}$$

dont les fonctions γ_{ik} dépendent seulement des variables $u^2, u^3 \ldots u^n$. La forme (8) est réduite à

$$ds^2 = (du^1)^2 + \mu^2 \gamma_{ik} du^i du^k. \qquad (i, k \neq 1) \tag{14}$$

Le ds^2 d'une variété développée W^n peut s'écrire sous la forme (14). On voit facilement que cette condition est aussi suffisante.

Nous continuerons l'examen des variétés W^n en considérant un à un les deux cas: $n = 2$, $n > 2$.

$\underline{n = 2.}$

La variété W^n est une surface W^2. La forme (14) s'écrit

$$ds^2 = (du^1)^2 + \mu^2 \gamma_{ik}(u^2)\,(du^2)^2$$

ou

$$ds^2 = (du^1)^2 + \mu^2\,dv^2.$$

Comme μ satisfait à l'équation (13) la surface est à courbure constante K_0.

La courbure gaussienne d'une surface développée W^2 est constante et égale à la courbure de l'espace ambiant.

Toutes les géodésiques de la congruence de W^2, ainsi que les lignes de courbure de V^2 passent par le point $\mu^0 = 1$, $\mu = 0$, c. a. d. le point d'intersection des surfaces W^2 et V^2. Néanmoins, ce point n'a aucune position singulière sur la variété W^2. On en déduit

A une surface à courbure constante K_0 correspondent ∞^2 surfaces développantes V^2.

En général ces surfaces ne sont pas parallèles, mais elles ont un plan normal commun. La distance de deux points correspondants de deux surfaces développantes V^2 et V'^2 est invariable.

Il est maintenant possible de résoudre complètement le problème suivant: Quelles surfaces pourront être engendrées par développement d'une surface à courbure constante K_0, située dans un S^{2+p}, pourvu qu'on développe des géodésiques passant par le même point?

Si $p \geqq 3$ on obtient en général ∞^2 surfaces développantes, caractérisées par le théorème p. 5. Seulement si l'espace normal principal se réduit à un plan, les surfaces seront à torsion nulle.[1]

Si $p = 2$ on obtient en général des surfaces à torsion nulle.

Enfin, si $p = 1$, le développement ne donne qu'une courbe gauche.

$\underline{n > 2.}$

On peut sans difficulté donner une signification géométrique de la forme (14). Toutes les géodésiques considérées de W^n, ainsi que les lignes de courbure de V^n, passent par le point d'intersection A des deux variétés. Les variétés $u^1 =$ const. sont des hypersphères géodésiques de centre A; elles sont homothétiques, le pôle étant A.

La surface de coordonnées $u^1 u^2$ est développable et sa courbure gaussienne est égale à K_0 en tout point de la surface. Cette propriété se réalise non seulement pour la surface $u^1 u^2$, mais pour toute surface géodésique, issue du point A. Donc la variété sera isotrope en A, et W^n est une variété de Schur[2], dont le centre est le point A. Nous pouvons alors énoncer le théorème:

Pour qu'une variété W^n soit variété développée, il faut et il suffit qu'elle soit variété de Schur.

Généralement les variétés de Schur ne possèdent qu'un centre:

A une variété de Schur ne correspond qu'une seule variété développante.

Un théorème de Schur dit que tous les points d'une

[1] Voir ma Thèse: Differentialgeometriske undersøgelser af torsionsfri flader beliggende i rum med konstant krumning, Copenhague 1934, p. 62.

[2] Voir Math. Ann. T. 27, 1886, p. 560—62.

variété, qui possède deux centres, sont isotropes, et que la courbure de la variété est constante K_0. Par suite

S'il existe deux variétés développantes à la même variété développée W^n, il y en a ∞^n; la courbure riemannienne de W^n est constante et égale à celle de l'espace ambiant.

Deux variétés développantes appartenant à la même variété W^n ne sont pas parallèles. Leur distance est invariable et elles ont en commun un espace normal à n dimensions (l'espace tangent a W^n). Si l'espace normal principal de W^n possède juste n dimensions, les variétés développantes seront à torsion nulle[1]. Elles seront parallèles et l'espace normal commun sera à p dimensions.

Si les variétés V^n et W^n sont situées dans un espace euclidien, et W^n est une variété euclidienne, on peut exposer les équations des ∞^n variétés V^n sous une forme très simple. Au lieu de l'équation (9) nous posons

$$x = y + \mu^i y_i.$$

Les vecteurs tangents sont déterminés par:

$$x_k = y_k + \mu^i_k y_i + \mu^i y_{ik}.$$

On aura les n^2 équations de condition

$$x_k y_j = 0. \tag{15}$$

Pour la variété euclidienne W^n on peut choisir un système de coordonnées cartésiennes de sorte qu'on obtienne

$$\bar{g}_{ik} = \delta^i_k \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}_{j,ik} = 0.$$

[1] Voir le note p. 8.

Par suite les équations (15) donnent

$$\delta^j_k + \mu^j_k = 0,$$

et par intégration

$$\mu^j = c^j - u^j,$$

c^j sont des constantes arbitraires. — Donc les équations des V^n peuvent s'écrire sous la forme

$$x = y + (c^i - u^i)\, y_i\,.$$

Færdig fra Trykkeriet den 21. Maj 1935.