Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VIII,** 8.

OBSERVATIONS SUR DES RECHERCHES ALGÉBRIQUES PLUS ANCIENNES QUE LE THÉORÈME D'ABEL

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1928

Le dix-huitième siècle est remarquable dans l'histoire des mathématiques à cause de ses progrès étonnants.

Il suffit d'en citer deux exemples seulement: le développement des méthodes du calcul infinitésimal et ses applications à la géométrie analytique et à la mécanique; l'établissement de la géométrie descriptive.

Le grand siècle n'a pas donné des progrès semblables, en ce qui concerne l'algèbre, parce qu'il fut reservé au génie d'Abel d'éclaircir le grand énigme de tant de siècles: l'équation du cinquième degré.

Néanmoins on doit au dix-huitième siècle de très belles découvertes algébriques, par exemple les théorèmes de d'Alembert, de Bezout et de Fourier; les recherches de Lagrange, de Vandermonde, travaux qui sont très peu connus aujourd'hui, tant ils sont ombragés par les admirables recherches d'Abel et leurs conséquences.

Le but principal du présent mémoire, en grande partie extrait de mon cours universitaire, intitulé *Géomètres français sous la Révolution* et professé dans le second sémestre de 1927, c'est de tirer de l'oubli les recherches susdites, de faire justice aux auteurs, en leur procurant la reconnaissance qu'ils méritent.

[1] Un extrait de ce cours, 114 pages in-8°, vient de paraître en danois, dans la dissertation-programme de l'Université de Copenhague, novembre 1927. Le cours complet paraîtra en français le plus tôt possible.

I. Le cas irréductible du troisième degré.

On sait que des géomètres italiens, dans le deuxième quart du seizième siècle, ont brisé les bornes antiques de l'algèbre, en résolvant l'équation du troisième degré.

La méthode appliquée par ces géomètres n'a pas été transmise à la postérité, et la plus ancienne résolution connue est, je crois, celle de Hudde, publiée par exemple en 1694, dans un appendice à une edition de la Géométrie de Descartes. La méthode de Hudde étant indispensable, dans ce qui suit, il est nécessaire de la mentionner ici en peu de mots.

Soit posé, dans l'équation

$$x^3 - px + q = 0, \tag{1}$$

$x = u + i\nu$, cette équation est évidemment satisfaite, pourvu que

$$u^3 + \nu^3 = -q, \quad u\nu = \frac{p}{3}, \tag{2}$$

conditions qui déterminent immédiatement u et ν, et l'on aura

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{3}$$

où les deux racines cubiques, u et ν, sont à choisir, conformément à la dernière des équations (2), de sorte que $3u\nu = p$.

Désignons donc par u et ν un tel couple de valeurs, par α une quelconque des deux racines imaginaires de l'équation binome $x^3 = 1$, les trois racines de l'équation proposée deviennent

$$u + \nu, \quad \alpha u + \alpha^2 \nu, \quad \alpha^2 u + \alpha \nu, \tag{4}$$

formule qui est souvent, mais injustement, attribuée à Cardan.

Supposons maintenant p et q réels, de sorte que

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2, \tag{5}$$

les racines cubiques qui figurent au second membre de (3) sont toutes deux imaginaires, mais leur produit étant positif, elles sont des nombres conjugués, de sorte que les trois racines de l'équation proposée sont toutes réelles.

C'est le célèbre cas irréductible du troisième degré.

La formule (3) qui représente, sous forme imaginaire, un nombre réel, a beaucoup surpris les géomètres qui se sont certainement efforcés d'en chasser les imaginaires, mais vainement.

François Nicole, connu par ses belles méthodes pour sommer certaines séries, a étudié le premier, je crois, plus amplement le cas irréductible[1], et il écrit, dans un autre mémoire, qu'il avait toujours été un »sujet de scandale« qu'un nombre réel se présente sous une forme apparemment imaginaire.[2]

Or, remarquant que les racines (3) sont de la forme

$$\sqrt[3]{a+ib} + \sqrt[3]{a-ib}, \tag{6}$$

a et b étant réels, Nicole développe, d'après la formule binomiale, les deux expressions

$$\left(\frac{a}{b}+i\right)^n, \quad \left(\frac{a}{b}-i\right)^n,$$

où l'exposant n est réel, ce qui met en évidence que la somme (6) est réelle, parce que les termes imaginaires s'évanouissent.

Mais les expressions ainsi obtenues pour les racines se

[1] Mémoires de l'Académie des sciences 1738, 97—102.

[2] Ibid. 1741, 25.

présentent sous forme d'une série infinie, et Nicole avoue qu'il ne possède aucun moyen pour sommer cette série.

Le but de Nicole a évidemment été de représenter les racines réelles par des expressions algébriques proprement dites, savoir à l'aide des radicaux réels, ce qui est impossible, nous le savons grâce au beau théorème de M. Hölder.[1]

Dionis du Séjour[2], connu par sa résolution du triangle sphéroïdique, introduit dans (1)

$$x = a + ib, \quad b \neq 0,$$

ce qui donnera

$$3a^2 = p + b^2, \quad a^3 - 2ab^2 - pa + q = 0,$$

d'où, en éliminant a,

$$4(b^2 + p)(4b^2 + p)^2 = 27q^2,$$

ce qui est impossible, parce que p et b^2 sont des nombres positifs.

Or, d'Alembert[3] ayant démontré que toutes les racines non-réelles d'une équation algébrique sont toujours de la forme $a + ib$, b n'étant pas zéro, Dionis du Séjour dit, avec raison, qu'il a démontré par l'analyse, que, dans le cas irréductible, les racines de (1) sont toutes réelles.

Janot de Stainville[4] part de l'équation trinome

$$x^{2n+1} - px + q = 0 \tag{7}$$

et démontre que cette équation, p et q étant réels, a toujours trois, et seulement trois racines réelles, pourvu que

$$\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1} > \left(\frac{q}{2n}\right)^{2n}; \tag{8}$$

[1] Mathematische Annalen XXXVIII, 307—312; 1891.

[2] Mémoires de l'Académie des sciences 1768, 207—208.

[3] Mémoires de l'Académie de Berlin 1746.

[4] Correspondance sur l'École polytechnique III, 58—60; janvier 1814.

soit $n = 1$, on aura précisément le cas irréductible du troisième degré.

Ayant, dans ce qui suit, à regarder d'autres méthodes pour la résolution de l'équation du troisième degré, nous remarquons ici que Stainville, dans une autre note[1], a résolu l'équation (1), en posant

$$x = y + z + t,$$

résolution qui est analogue à la seconde des méthodes appliquées par Euler pour la résolution de l'équation du quatrième degré, nous le verrons dans ce qui suit.

II. L'équation du quatrième degré.

Louis Ferrari, peu d'années après la résolution de l'équation du troisième degré, a résolu aussi celle du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

en écrivant cette équation sous la forme

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{a^2}{4} - b\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \frac{y^2}{4} - d,$$

puis déterminant le paramètre y, de sorte que le second membre devient un carré exact, ce qui donnera la réduite

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)\,y + d\,(4b - a^2) - c^2 = 0. \tag{2}$$

Descartes a résolu l'équation du quatrième degré, ne contenant pas le second terme, savoir

$$x^4 + px^2 + qy + r = 0, \tag{3}$$

en écrivant son premier membre sous la forme

$$(x^2 - \alpha x + \beta)\,(x^2 + \alpha x + \gamma),$$

ce qui conduira, pour $\alpha^2 = y$, à la réduite

[1] Annales de mathématiques pures et appliquées IX, 197—203; 1818.

$$(4) \qquad y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)\,y - q^2 = 0.$$

Appliquons cette méthode à l'équation complète (1), nous aurons une réduite du sixième degré contenant tous les termes, équation qui est par conséquent résoluble à l'aide des radicaux.

Ayant à regarder, dans ce qui suit, d'autres résolutions de l'équation du quatrième degré, nous remarquons ici que Pierre Pilatte[1], ancien élève de l'École polytechnique et ancien capitaine d'artillerie, puis professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers, a résolu l'équation (3) en y posant $x = y + z$, ce qui conduira immédiatement à la réduite de Descartes. On voit que cette résolution est analogue à celle appliquée par Hudde pour la résolution de l'équation du troisième degré.

III. Méthodes „propres à résoudre toutes les équations".

Walther de Tschirnhausen[2] a donné le premier, je crois, une méthode qui permet de résoudre les équations et du troisième et du quatrième degré, méthode qu'il croyait propre à donner la résolution, à l'aide des radicaux, d'une équation algébrique quelconque.

Le fondement de la méthode de Tschirnhausen est l'élimination de x entre l'équation proposée

$$(1) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n = 0$$

et celle-ci

$$(2) \qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\,x^{n-1},$$

où les α_μ sont des paramètres quelconques.

[1] Annales de mathématiques pures et appliquées II, 152—154; 1811.
[2] Acta eruditorum 1683, 204—207.

A cet effet, désignons par $x_1 x_2 \ldots x_n$ les racines de (1), puis posons

$$y_r = \alpha_0 + \alpha_1 x_r + \alpha_2 x_r^2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_r^{n-1},$$

la réduite susdite se présente sous la forme

$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_n) = 0$$

ou bien, ordonnée d'après des puissances déscendantes de y,

$$(3) \qquad y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_{n-1} y + A_n = 0,$$

et il est évident que les coefficients A_p sont des fonctions entières et rationnelles des coefficients donnés a_μ. De plus, les A_p sont des fonctions entières, rationnelles et homogènes des inconnues α_μ, de sorte que A_p est précisement du degré p.

Tschirnhausen détermine ensuite les inconnues α_μ de sorte que

$$(4) \qquad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_{n-1} = 0,$$

ce qui réduira l'équation (3) à une équation binome.

Dans le cas le plus simple $n = 3$, la réduite ainsi obtenue est donc du deuxième degré, ce qui s'accorde bien avec la méthode de Hudde.

Soit ensuite $n = 4$, la réduite est du sixième degré, comme dans la résolution de Descartes; mais nous savons que cette équation est résoluble par des radicaux.

Pour $n = 5$, la réduite est du degré 24; mais la réduite du sixième degré qui correspond à $n = 4$ étant résoluble à l'aide des radicaux, il n'était pas, en 1683 et beaucoup plus tard encore, une conclusion trop hardie que la réduite du degré 24 ait la même propriété.

Nous savons que la méthode de Tschirnhausen ne peut pas donner la résolution algébrique des équations du'n degré quelconque; cette méthode est néanmoins d'une haute valeur. Elle montrera par exemple facilement que l'équation générale du cinquième degré peut toujours être réduite à la forme

$$x^5 + x + a = 0,$$

dont les racines sont par conséquent des fonctions algébriques d'une seule variable, propriété qui a plus tard conduis à des résultats remarquables.

Cette réduction de l'équation générale du cinquième degré est due à Bring, plus tard professeur d'histoire à l'Université de Lund, qui l'a donnée dans une dissertation[1], évidemment sans connaître la publication de Tschirnhausen.

Euler[2], partant des expressions des racines de l'équation du troisième degré, essaya de résoudre l'équation algébrique générale, sans le second terme,

$$(5) \qquad x^n + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

en supposant

$$(6) \qquad x = \sqrt[n]{y_1} + \sqrt[n]{y_2} + \cdots + \sqrt[n]{y_{n-1}},$$

ce qui réduit la résolution de (5) à la détermination des $n-1$ nombres y_μ, savoir à la résolution d'une équation du degré $n-1$, ce qui est évident; mais comment déterminer les coefficients de cette nouvelle équation du degré $n-1$?

Soit $n = 3$, la méthode d'Euler n'est autre chose que celle de Hudde.

Pour $n = 4$, Euler suppose, au lieu de (6),

$$(7) \qquad x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3},$$

ce qui conduira à une nouvelle résolution de l'équation du

[1] publiée à Lund en 1786.

[2] Commentarii Academiæ Petropolitanæ VI, 216—231; 1738.

quatrième degré; la réduite qui détermine les trois inconnues $y_1\, y_2\, y_3$ est celle de Descartes, retrouvée par Pilatte.

Or, la méthode d'Euler étant applicable pour $n = 3$ et $n = 4$, la conclusion qu'elle soit généralement applicable n'était point hardie dans ce temps-là, où l'idée de l'élimination était très peu claire, nous le verrons dans ce qui suit.

Ce mémoire d'Euler semble très peu connu.

Lagrange, dans ses Réflexions sur la résolution des équations, ne le mentionne pas; dans ses leçons données aux Écoles normales en 1795, il résout l'équation du quatrième degré en posant

$$x = y + z + t,$$

ce qui n'est autre chose que la méthode d'Euler, mais cette méthode est tirée de l'Algèbre d'Euler, que Lagrange a traduite en français vers cette époque, en l'enrichissant par des suppléments très importants.

Jean-Jacques Bret, ancien élève de l'École polytechnique, puis professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Grenoble, observe[1] que les valeurs des trois racines carrées, qui figurent au second membre de (7), indiquées par Euler, ne sont pas toujours exactes, ce que Lagrange avoue, dans l'édition de ses leçons susdites.[2]

Wronski, ci-devant officier supérieur de l'artillerie russe, dans une brochure publiée à Paris en 1812, donne comme nouvelle la méthode d'Euler propre à résoudre les équations algébriques de tous les degrés, et il se vante beaucoup d'avoir donné ainsi une résolution nouvelle de l'équation du quatrième degré. Chose curieuse, Gergonne[3], l'éminent

[1] Correspondance sur l'École polytechnique II, 217—219; 1811.

[2] Journal de l'École polytechnique cah. VII—VIII, 173—278; juin 1812 (voyez p. 239).

[3] Annales de mathématiques pures et appliquées III, 51—59, 137—139; IX, 213—214.

rédacteur des Annales, remarquant avec raison que cette solution de l'équation du quatrième degré n'est point nouvelle, l'attribue à Bezout.

Euler[1] a donné encore une méthode générale »propre à résoudre les équations de tous les degrés«, méthode qui est analogue à celle indiquée presque en même temps par Bezout.[2]

En effet, le fondement de ces deux méthodes est l'élimination de x entre les deux équations

$$y^n + D = 0, \quad \alpha_0 y^{n-1} + \alpha_1 y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} y + x = 0,$$

puis la détermination des inconnues D et α_μ, de sorte que la réduite de ces deux équations soit identique à l'équation proposée (5), sans le second terme.

Euler suppose $\alpha_{n-2} = 1$, tandis que Bezout fait $D = -1$; néanmoins ces deux méthodes très analogues conduisent à des résultats assez différents, nous le verrons dans les recherches de Lagrange sur l'équation du quatrième degré. Quant à la méthode de Bezout, elle conduira à des résultats curieux, nous le verrons dans l'article suivant.

IV. Problèmes d'élimination de Bezout.

Nous possédons, de la main de Bezout, trois mémoires algébriques, dont le premier[3] donne une résolution de l'équation du troisième degré

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0, \tag{1}$$

en éliminant y entre les deux équations

$$y^3 + h = 0, \quad y = \frac{x + a}{x + b}, \tag{2}$$

[1] Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ IX, 70—98; 1764.
[2] Mémoire de l'Académie des sciences 1765, 533—552.
[3] Ibid. 1762, 17—52.

puis déterminant les constantes inconnues a, b, h, de sorte que la réduite et l'équation proposée (1) deviennent identiques.

Puis Bezout détermine les équations d'un degré quelconque, qui deviennent binomes en y, determinée par la dernière des équations (2), ce qui conduira à beaucoup d'équations des degrés supérieurs résolubles à l'aide des radicaux.

Dans le même mémoire, Bezout étudie les équations du degré n, qui admettent une racine de la forme

$$(3) \qquad x = \sqrt[n]{a^{n-1} b} + \sqrt[n]{a\, b^{n-1}},$$

et il détermine les équations de ce genre qui correspondent à $n = 3, 4, 5, 6, 7$, ce qui donnera aussi beaucoup d'équations des degrés supérieurs résolubles à l'aide des radicaux.

Chose curieuse, Bezout énonce le problème qui correspond à la première méthode d'Euler, mais il n'étudie que l'expression spéciale (3).

Dans le second mémoire[1], Bezout mentionne que l'on croyait que la réduite de trois équations, chacune du troisième degré, était du degré 81, puis il montre que ce degré ne peut pas être supérieur à 49. Il a évidemment coûté à Bezout un longue et pénible travail de pénétrer jusqu'à son théorème général sur le degré général de la réduite d'un nombre quelconque d'équations étant de degrés quelconques.[2]

Bezout étudie l'élimination de n inconnues entre n équations linéaires et homogènes; il introduit par conséquent les déterminants, assez imparfaitement définis, ce me semble, et il donne la réduite qui correspond à $n = 5$; c'est-à-dire qu'il a calculé le déterminant général du cinquième ordre.

[1] Mémoires de l'Académie des sciences 1764, 288—338.

[2] Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779.

Quant au troisième mémoire[1] de Bezout, nous avons à mentionner son élimination de y entre les deux équations

$$y^n = 1 \tag{4}$$

$$g(x, y) = \alpha_0 y^{n-1} + \alpha_1 y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} y + x = 0. \tag{5}$$

En effet, multiplions par y cette dernière équation, cette multiplication effectue une permutation cyclique des termes, savoir

$$\alpha \varphi(x, y) = \alpha_1 y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} y^2 + xy + \alpha_0 .$$

Répétant la même opération, on aura finalement n équations de cette forme, et Bezout trouve la réduite

$$F_n(x) = 0, \tag{6}$$

en déterminant les puissances de y à l'aide de $n-1$ de ces équations, puis introduisant les résultats, dans la n-ième des équations susdites; c'est-à-dire que nous aurons

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-2} & x \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & x & \alpha_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-2} & x & \ldots & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-3} \\ x & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \end{vmatrix} . \tag{7}$$

Bezout détermine les expressions explicites de ces déterminants cycliques qui correspondent à $n = 3, 4, 5, 6$; c'est-à-dire que l'éminent algébriste a évidemment étudié, le premier, de tels déterminants.

En se rappelant la formation de la réduite (6), il est évident que $F_n(x)$ est divisible par $\varphi(x, y)$, y étant une racine quelconque de l'équation binome (4); soit donc $y_1 y_2 \ldots y_n$ toutes les racines de cette équation, on aura

[1] Mémoire de l'Académie des sciences 1765, 533—552.

$$(8) \qquad F_n(x) = (-1)^n \varphi(x, y_1) \varphi(x, y_2) \ldots \varphi(x, y_n),$$

ce qui est précisément le produit qui représente le déterminant cyclique[1], trouvé presque un siècle après la publication du mémoire de Bezout, qui, poursuivant son but beaucoup plus élevé, ne s'est pas arrêté à de telles choses.

Ce mémoire de Bezout semble très peu connu aujourd'hui; Baltzer, qui cite plusieurs fois les deux mémoires de 1762 et de 1764, ne mentionne point celui de 1765, et M. Kovalewski[2] ne cite qu'en passant les recherches de Bezout.

V. Recherches de Lagrange.

Cauchy écrit à la tête de son célèbre mémoire qui donne les fondements de la théorie des substitutions[3]:

»MM. Lagrange et Vandermonde sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressants relatifs à ce sujet, dans deux mémoires imprimés en 1771[4], l'un à Berlin l'autre à Paris.«

Remarquons que les variables susdites, permutées par Lagrange et Vandermonde, sont l'ensemble des racines d'une équation algébrique, il résulte de la remarque de Cauchy, qu'une nouvelle ère dans l'histoire de l'algèbre commence avec ces mémoires de Lagrange et de Vandermonde.

Or, on a de Lagrange un mémoire antérieur[5] à celui

[1] Voyez par exemple Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten, 109; 5e éd. Leipsic 1881.

[2] Einführung in die Determinantentheorie. Leipsic 1909.

[3] Journal de l'École polytechnique, cah. XVII, 1—28; janvier 1815.

[4] C'est-à-dire publiés dans les Mémoires des deux Académies pour l'année 1771.

[5] Lu au courant de l'année 1771 et publié dans le volume des Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1770, paru en 1772.

cité par Cauchy et étudiant le même sujet, mémoire qui présente un intérêt spécial, à notre point de vue, parce qu'il donne une analyse profonde des résolutions connues des équations du troisième et du quatrième degré.

L'analyse de la méthode de Hudde conduira à déterminer une fonction linéaire des trois variables $x_1\ x_2\ x_3$ dont le cube n'a que deux valeurs. Soit α une quelconque des deux racines imaginaires de l'équation binome $x^3 = 1$, la fonction cherchée deviendra

$$y_1 = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3; \tag{1}$$

car les valeurs de cette fonction, obtenues en la soumettant à une permutation cyclique, sont

$$y_1, \ \alpha y_1, \ \alpha^2 y_1,$$

et c'est la même chose pour la fonction

$$y_2 = x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3. \tag{2}$$

Appliquons ensuite l'identité

$$(y - y_1)(y - \alpha y_1)(y - \alpha^2 y_1) = y^3 - y_1^3$$

et l'identité analogue pour y_2, nous aurons immédiatement la réduite de Hudde.

Lagrange remarque en passant que la fonction rationnelle

$$\frac{x_1^r + \alpha x_2^r + \alpha^2 x_3^r}{x_1^s + \alpha x_2^s + \alpha^2 x_3^s}, \tag{3}$$

r et s étant des positifs entiers quelconques, n'a que deux valeurs inégales.

La méthode de Bezout de 1762 est identique à celle de Tschirnhausen.

Suit une étude intéressante de l'équation binome

$$x^{2n+1} - 1 = 0. \tag{4}$$

Supprimons le facteur $x-1$, puis posons

$$y = x + \frac{1}{x},$$

l'équation (4) se réduit à une équation du degré n par rapport à y; Lagrange étend cette méthode à une équation réciproque quelconque d'un degré pair, et il remarque que cette réduction est due à Moivre.[1]

Soit, dans (4), $n = 3$, l'équation en y devient

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

de sorte que l'équation binome $x^n - 1 = 0$ est résoluble à l'aide des radicaux, pourvu que $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, mais l'équation $x^{11} - 1$ conduira à l'équation du cinquième degré

$$(5) \qquad y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0,$$ [2]

qui arrête ici Lagrange dans ses réflexions sur la résolution, à l'aide des radicaux, de l'équation binome.

Chose curieuse, Vandermonde avait déjà résolu, à l'aide des radicaux, l'équation (5), avant la publication du mémoire de Lagrange, nous le verrons dans ce qui suit.

La réduite de l'équation du quatrième degré étant du troisième degré, il s'agit de trouver une fonction rationnelle des quatre variables $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, qui n'ait que trois valeurs.

Lagrange étudie d'abord la fonction

$$(6) \qquad u = x_1\, x_2 + x_3\, x_3$$

et forme, par un calcul direct, l'équation du troisième degré qui a comme racines les trois valeurs possibles de u, ce qui conduira précisément à la réduite de Ferrari.

La fonction rationnelle

[1] Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londres 1730.

[2] L'équation indiquée par Lagrange est défigurée par une faute d'impression, car l'avant-dernier terme est indiqué comme $-3y$.

(7) $$t = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$$

a aussi trois valeurs, et, soit l'équation proposée

(8) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

un calcul direct donnera

$$t = a^2 - 4b + 4u.$$

Posons donc, dans la réduite de Ferrari,

$$u = \frac{t - a^2}{4} + b,$$

nous aurons la réduite cherchée qui, pour $a = 0$, est précisément celle de Descartes.

Soit ensuite $t_1\, t_2\, t_3$ les racines de la réduite ainsi obtenue, Lagrange remarque qu'il faut choisir convenablement les racines carrées de ces trois quantités, restriction nécessaire qui est bien curieuse, parce que Lagrange admit plus tard, dans ses leçons aux Écoles normales, les expressions d'Euler, qui ne sont pas toujours exactes, nous l'avons déjà remarqué dans l'article III.

Suit une étude des méthodes d'Euler et de Bezout, qui sont en réalité les mêmes que celle de Tschirnhausen, parce que l'élimination de y entre les deux équations

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3, \quad y^4 + D = 0$$

donnera l'équation proposée en x.

Euler suppose $\gamma = 1$ et trouve une réduite du troisième degré par rapport à D, réduite qui est celle de Ferrari.

Bezout, au contraire, suppose $D = -1$ et trouve une équation du troisième degré par rapport à γ^2, ce qui est la réduite de Descartes, tandis que la détermination de α ou de β conduira à une réduite du sixième degré par rapport à α^4 ou à β^4.

Ce mémoire contient aussi un théorème essentiel sur la méthode de Tschirnhausen.

En effet, soit

$$(9) \qquad y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_{n-1} y + A_n = 0$$

la réduite de Tchirnhausen, obtenue par l'élimination de y entre les deux équations

$$(10) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$(11) \qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots + \alpha_{n-1} y^{n-1},$$

Lagrange a démontré le premier[1], je crois, que la réduite des équations

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, \quad A_{n-1} = 0$$

est du degré $(n-1)!$.

Du reste, Lagrange remarque que, dans le cas spécial $n = 4$, on aura une réduite du troisième degré, en supposant $A_1 = 0$ et $A_3 = 0$.

Le mémoire de Lagrange, cité par Cauchy et publié en 1773[2], donne une véritable théorie de la méthode de Tschirnhausen.

Lagrange remarque tout d'abord que les inventeurs des méthodes »propres à résoudre algébriquement toutes les équations«, se sont généralement bornés à l'étude des équations du troisième et du quatrième degré.

Cependant il remarque que Bezout a aussi regardé l'équation du cinquième degré et trouvé une réduite du degré 120, dans laquelle tous les exposants de l'inconnue sont multiples de 5, de sorte que cette équation est en vérité

[1] Il faut se rappeler que le théorème général de Bezout n'était pas connu en 1771.

[2] Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1771, 138—253.

du degré 24 par rapport à la cinquième puissance de l'inconnue susdite.

Nous pouvons ajouter que l'existence de cette cinquième racine a évidemment affirmé Bezout dans son opinion que cette réduite du degré 24 soit algébriquement résoluble, comme la réduite du sixième degré obtenue pour l'équation du quatrième degré.

Quant au mémoire de Lagrange, nous savons que la méthode de Tschirnhausen conduira à une réduite du degré $(n-1)!$.

Mais soit n un nombre composé, savoir $n = p \cdot q$, nous pouvons faire disparaître, dans (9), toutes les puissances de y, dont les exposants ne sont pas divisibles par q, ce qui conduira à une réduite du degré

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!\, q^{p-1}}.$$

Soit par exemple $n = 6$, $p = 3$, $q = 2$, la réduite deviendra du quinzième degré.

Partant des équations (9), (10), (11), Lagrange démontre l'existence d'une inversion de la formule (11), savoir

$$x = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_{n-1} y^{n-1}.$$

On trouve aussi une étude de l'équation du degré $\lambda = \varphi(n)$, qui détermine les racines primitives de l'équation binome $x^n = 1$, et il est démontré que, α étant une racine primitive de cette équation binome, la fonction rationnelle des n variables $x_1\, x_2 \ldots x_n$

$$(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n)^n$$

n'a que $(n-1)!$ valeurs différentes.

La seconde partie de ce mémoire de Lagrange est consacrée à la recherche des fonctions rationnelles des n variables $x_1\, x_2 \cdots x_n$, étant déterminables à l'aide d'une équation d'un degré inférieur à $n!$.

VI. Recherches de Vandermonde.

Le mémoire de Vandermonde, cité par Cauchy, a été présenté à l'Académie des sciences au mois de novembre 1770 et paraphé par le secrétaire perpétuel le 28 du même mois, mais l'auteur n'étant pas alors membre de l'Académie, l'impression de son ouvrage fut retardée jusqu'à 1774.[1]

Vandermonde écrit que son but principal est l'étude des trois problèmes suivants:

1° Trouver une fonction des racines [de l'équation proposée], de laquelle on puisse dire, dans un certain sens, qu'elle égale telle de ces racines que l'on voudra;

2° Mettre cette fonction sous une forme telle qu'il soit de plus indifférent d'y changer les variables entre elles;

3° Y substituer les valeurs en somme de ces racines, somme de leurs produits deux à deux, etc.

Quant au premier de ces problèmes, soient $x_1\, x_2 \ldots x_m$ les variables en question, et soient $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ les racines de l'équation binome $x^m = 1$, Vandermonde remarque que l'expression des racines de l'équation du troisième degré l'a conduit à la fonction

$$(1) \qquad \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{s=m-1} \sqrt[m]{(\varepsilon_1^s x_1 + \varepsilon_2^s x_2 + \cdots + \varepsilon_m^s x_m)^m}.$$

En effet, si l'on attribue au terme sommatoire la valeur

[1] Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année 1771, 365—416. Dans le temps intermédiaire, les deux mémoires de Lagrange ont parus.

$$\varepsilon_\mu^{-s}(\varepsilon_1^s x_1 + \varepsilon_2^s x_2 + \cdots + \varepsilon_m^s x_m),$$

l'expression (1) aura la valeur x_μ, où $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

Soit m un nombre composé, l'expression (1) est susceptible de simplifications différentes, assez profondément étudiées par Vandermonde, notamment en ce qui concerne de petites valeurs de m.

On voit que les racines des équations binomes jouent un rôle fondamental aussi dans les recherches de Vandermonde; soit m un nombre impair, savoir $m = 2n+1$, il suppose

$$r^m - 1 = (r-1)(r^2+x_1 r+1)(r^2+x_2 r+1)\cdots(r^2+x_n r+1),$$

et il indique l'équation du degré n, dont les racines sont les x_μ, équation que Lagrange n'avait pas donnée explicitement, savoir

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & x^n - x^{n-1} + (n-2)\,x^{n-3} - \binom{n-3}{2}x^{n-5} + \cdots \\ & -(n-1)\,x^{n-2} + \binom{n-2}{2}x^{n-4} - \binom{n-3}{3}x^{n-6} + \cdots = 0, \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera, pour $m = 11$

$$(3)\qquad x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,[1]$$

savoir la fameuse équation qui a arrêté Lagrange dans sa résolution, par des radicaux, des équations binomes.

Les développements de Vandermonde lui permettent de résoudre les équations du troisième et du quatrième degré contenant tous les termes.

Vandermonde mentionne la réduite du vingt-quatrième degré de l'équation du cinquième degré; il dit qu'il n'avait

[1] Posons, dans cette équation, $x = -y$, nous aurons précisément celle de Lagrange.

pu trouver aucune fonction linéaire de cinq variables, qui se détermine à l'aide d'une équation du troisième ou du quatrième degré, et qu'il ne croit pas à l'existence d'une telle fonction.

Comme application de ses formules, Vandermonde résout, à l'aide des radicaux, l'équation (3), savoir une équation irréductible du cinquième degré. A cet effet, Vandermonde applique, outre son expression générale (1), des relations entre les racines de (3)

$$x_r = -2\cos\frac{2r\pi}{11}, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5,$$

par exemple

$$x_1^2 = -x_2 + 2, \quad x_1 x_2 = -x_1 - x_3.$$

Vandermonde indique la valeur

$$x = \frac{1}{5}(1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4),$$

où est posé pour abréger

$$A_1 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)},$$

$$A_2 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)},$$

$$A_3 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)},$$

$$A_4 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)};$$

mais il ne dit pas comment on doit déterminer ces quatre radicaux pour obtenir chacune des cinq racines.

On voit que les racines, qui sont toutes réelles, se présentent sous forme apparemment imaginaire, comme dans le cas irréductible du troisième degré, ce qui est une conséquence du théorème de M. Hölder cité dans l'article I.

De plus, Vandermonde écrit que la résolution, à l'aide des radicaux, de l'équation générale (2) est très facile.

Kronecker apprécia à sa juste valeur ce remarquable mémoire; il disait dans une de ses leçons: »L'essor moderne de l'algèbre commence avec le mémoire présenté par Vandermonde à l'Académie de Paris dans l'année 1770[1] et intitulé: Sur la résolution des équations; la profondeur des conceptions, si clairement exprimées dans cet ouvrage, nous semble vraiment surprenante.«

M. Carl Itzigsohn a donné (Berlin 1888) une édition allemande des trois mémoires de Vandermonde, en ce qui concerne les mathématiques pures[2], et la célébrité de cet éminent algébriste est maintenant reconnue en Allemagne, mais il faut que son nom figure, à côté de celui de Lagrange, comme des dignes prédécesseurs d'Abel.

VII. Nombre des racines réelles.

L'abbé de Gua[3] a démontré le premier, je crois, la célèbre règle de Descartes, vivement contestée par Fermat qui était, d'après Condorcet[4], adversaire acharné de Descartes:

L'équation algébrique aux coefficients réels

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

n'ayant pas de racines imaginaires, le nombre de ses racines positives est égal au nombre des variations des signes de ses coefficients a_μ, et le nom-

[1] Il faut se rappeler que le mémoire de Vandermonde est, en vérité, plus ancien que celui de Lagrange.

[2] Chose curieuse, la publication mathématique de Vandermonde ne contient, outre ces trois mémoires, qu'une petite note intitulée Remarques sur des problèmes de situation, publiée dans les Mémoires 1771, 556—574.

[3] Mémoires de l'Académie des sciences 1741, 72—96.

[4] Éloge de l'abbé de Gua, Histoire de l'Académie 1786, 25.

bre de ses racines négatives est égal au nombre des permanences de ces mêmes signes.

De Gua donne deux démonstrations de cette règle, dont la première est une conclusion de n à $n+1$.

En effet, soit p un nombre positif, de Gua montre que les signes des coefficients de l'équation $(x-p)f(x) = 0$ forment précisément une variation de plus que ceux de $f(x) = 0$.

On trouve, dans ce mémoire, des extensions de la règle de Descartes; nous nous bornerons à indiquer une seule de ces extensions.

Soit α une racine réelle de $f^{(r)}(x) = 0$, r étant un quelconque des indices $1, 2, 3, \ldots, n-1$, l'équation (1) a toutes ses racines réelles, pourvu que $f^{(r-1)}(\alpha)\, f^{(r+1)}(\alpha) < 0$, quelle que soit la racine réelle α de l'équation susdite.

Soit, au contraire, $f^{(r-1)}(\alpha)\, f^{(r+1)}(\alpha) > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux racines imaginaires, ce qui a lieu pour toutes les valeurs de r et α satisfaisant à cette dernière condition.

Les théorèmes indiqués par Fontaine[1], en ce qui concerne le nombre des racines positives ou négatives d'une équation algébrique, nous semblent si insignifiants que nous les passerons sous silence.

Fourier connaissait déjà en 1787 son célèbre théorème:

Étant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$ du degré n et aux coefficients réels, si dans les $n+1$ fonctions

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots, f^{(n)}(x),$$

on substitue deux quantités réelles a et b, $b > a$, et si, après chaque substitution, on compte les

[1] Mémoires de l'Académie des sciences 1747, 665—677.

variations des signes que présente la suite des résultats, le nombre des racines de $f(x) = 0$ comprises entre a et b ne peut jamais surpasser celui des variations perdues de $x = a$ à $x = b$, et, quand il est moindre, la différence est toujours un nombre pair.[1]

L'illustre géomètre a communiqué son théorème dans ses cours à l'École polytechnique en 1796, en 1797 et en 1803. Néanmoins on[2] l'attribue souvent à Budan de Boislaurent, qui l'a communiqué dans un mémoire présenté à l'Institut en 1811, ce qui est aussi absurde qu'attribuer à Poisson ou à Chasles la célèbre sphère de Monge.

Darboux[3] croit que la raison principale de cette confusion, en ce qui concerne la priorité du théorème de Fourier, est à chercher dans la biographie de Fourier par Arago, qui décide, aussi facilement que superficiellement, la question en la faveur de Budan.

Quant à la détermination du nombre des racines réelles d'une equation algébrique aux coefficients réels, nous avons encore à mentionner des règles curieuses dues à Joseph-Balthazar Bérard, principal du collège de Briançon, qui élimine x entre les deux équations

$$f(x) = y, \quad f'(x) = 0.$$

Soit $\varphi(y) = 0$ la réduite de ces équations, étant du degré $n-1$, et soit n un nombre pair, savoir $n = 2m$, une des règles de Bérard est exprimée par le théorème:

Si $f(x) = 0$ n'a pas des racines multiples, elle

[1] On sait que Sturm, dans son beau théorème, a donné un moyen pour déterminer précisément le nombre des racines d'une équation proposée, comprises dans un intervalle quelconque.

[2] Voyez par exemple Serret Cours d'algèbre supérieure I, 267; Paris 1885 (5e éd.). Weber Lehrbuch der Algebra I, 201; Brunswick 1885.

[3] Œuvres de Fourier II, 310—313.

aura 0, 2, 4, ..., $2m$ racines imaginaires, suivant que $\varphi(y) = 0$ aura m, $m \pm 1$, $m \pm 2, \ldots$, $m \pm m$ permanences de signes.[1]

L'idée d'attacher le nombre des racines réelles de $f(x) = 0$ à celui des permanences des signes de $\varphi(y) = 0$ est hardie, trop hardie.

En effet, partons de l'équation trinome

$$x^n + ax - b = 0,$$

a et b étant positifs, la réduite $\varphi(y) = 0$ deviendra

$$\left(\frac{y+b}{n-1}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{n}\right)^n = 0,$$

équation qui n'a que des permanences de signes.

Soit ensuite n un nombre pair, l'équation trinome aurait, d'après la règle de Bérard, toutes ses racines imaginaires; mais cette équation a, dans ce cas, précisément deux racines réelles.

Du reste, des géomètres contemporains, entre autres F.-J. Servois, ancien officier d'artillerie, puis professeur de mathématiques à l'ecole régimentaire de l'artillerie à Lafère, ont démontré la fausseté du théorème susdit, immédiatement après sa publication.

Ces géomètres ont appliqué des équations spéciales aux coefficients numériques.[2]

VIII. Le théorème de d'Alembert.

L'illustre d'Alembert a énoncé le premier, je crois, le théorème fondamental[3]:

Si l'équation algébrique aux coefficients réels

[1] Voyez Annales de mathématiques pures et appliquées IX, 36; 1818.
[2] Ibid. IX, 223—227; 1819.
[3] Mémoires de l'Académie de Berlin 1746, 182—224.

$f(x) = 0$ n'a aucune racine réelle, il existe un nombre imaginaire $\alpha + i\beta$, de sorte que $f(\alpha + i\beta) = 0$.

On voit que ce théorème donnera immédiatement cet autre:

L'équation algébrique du degré n et aux coefficients réels a précisément n racines.

Le fondement de la démonstration de d'Alembert est l'étude de la courbe $y = f(x)$, démonstration qui est reproduite dans l'introduction au premier volume du Calcul intégral de Bougainville, Paris 1754.

Euler[1] a essayé de démontrer ce théorème fondamental, en démontrant que le polynome $f(x)$, du degré $n > 2$ et aux coefficients réels, peut toujours être décomposé en deux facteurs ayant aussi des coefficients réels:

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

où

$$\varphi(x) = x^p + b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + \cdots + b_{p-1} x + b_p$$
$$\psi(x) = x^{n-p} + c_1 x^{n-p-1} + c_2 x^{n-p-2} + \cdots + c_{n-p-1} x + c_{n-p}.$$

Il s'agit donc de démontrer que les équations

$$a_r = c_r + c_{r-1} b_1 + c_{r-2} b_2 + \cdots + c_1 b_{r-1} + b_r$$

admettent toujours des valeurs réelles des b_μ et des c_ν, à l'aide des deux propriétés connues d'une équation algébrique aux coefficients réels, savoir que cette équation a toujours une racine réelle, pourvu que son degré soit impair, et qu'elle en a toujours deux, pourvu que son degré soit pair et que son dernier terme soit négatif.

Lagrange[2] remarque avec raison que la démonstration d'Euler est incomplète, et il donne sous cette forme le théorème dont il s'agit:

[1] Mémoires de l'Académie de Berlin 1749.

[2] Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1772, 222—258.

Un polynome aux coefficients réels et d'un degré plus élevé que 2 peut toujours être décomposé en facteurs du premier ou du second degré, ayant aussi leurs coefficients réels.

On sait que Gauss a donné plusieurs démonstrations de ce dernier théorème, la première dans sa thèse de doctorat.[1]

Argand[2] a essayé de démontrer le théorème de d'Alembert, comme il suit:

Introduisons, dans le polynome $f(x)$, un nombre quelconque x_0 à la place de x; si $f(x_0) = 0$, le théorème est démontré; si, au contraire, $f(x_0) \neq 0$, il est possible de déterminer h, étant généralement imaginaire, de sorte que

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)|;$$

et, partant de cette inégalité, Argand conclut à l'existence d'un nombre α, tel que $f(\alpha) = 0$.

Chose curieuse, Servois[3] fait immédiatement contre cette conclusion une objection très grave et étonnante pour son temps, savoir:

»Ce n'est pas assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynome des valeurs sans cesse décroissantes; il faut de plus que la loi des décroissements amène nécessairement le polynome à zéro, ou quelle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'asymptote du polynome«.

Ni Argand ni les géomètres contemporains n'ont compris la profondeur de cette objection qui, traduite en notre

[1] Helmstedt 1799.

[2] Annales de mathématiques pures et appliquées IV, 133—147; 1813

[3] Ibid. 231.

terminologie, dit qu'il n'est pas suffisant de démontrer que la limite inférieure de $|f(x)|$ est égale à zéro.

On sait que cette difficulté peut être immédiatement détournée par le théorème de Weierstrass sur la limite supérieure ou inférieure d'une fonction réelle et continue des variables réelles.

Ce supplément ajouté, on voit que la démonstration d'Argand est applicable quels que soient les coefficients de l'équation proposée, réels ou imaginaires.

On désigne parfois comme théorème d'Argand le théorème de d'Alembert, ce qui me semble injuste bien que la démonstration d'Argand soit infiniment supérieure à des soi-disant démonstrations plus récentes ou contemporaines.

Parmi ces essais nous nous bornerons à mentionner celui de Daniel Encontre, alors professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Montpellier, essai amélioré par Gergonne, l'éminent rédacteur des Annales.[1]

Soit, dans l'équation algébrique du degré pair

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1} x - \alpha^2 = 0, \tag{1}$$

le nombre α et les coefficients a_μ tous des nombres réels, cette équation a toujours deux racines réelles; c'est-à-dire qu'il existe une fonction réelle de ces quantités

$$\varphi(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{2n-1},\ \alpha) \tag{2}$$

qui, introduite dans (1) à la place de x, satisfait à cette équation.

Posons maintenant, dans (1), $\alpha = i\beta$, β étant un nouveau nombre réel, cette équation deviendra

[1] Voyez ce recueil t. IV, 201—222; 1814.

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1}\, x + \beta^2 = 0,$$

équation qui est satisfaite par le nombre

$$\varphi(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{2n-1},\ i\beta),$$

peut-être imaginaire d'une forme très compliquée.

On voit que ces opinions, en ce qui concerne les fondements de l'algèbre, diffèrent essentiellement des nôtres.

TABLE DES MATIÈRES

Forelagt paa Mødet den 30. Marts 1928.
Færdig fra Trykkeriet den 30. Juni 1928.