Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VII,** 8.

SUR CERTAINS DÉVELOPPEMENTS D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1926

Dans diverses publications, j'ai étudié certaines séries de Lagrange

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\varphi(x)\right)^n,$$

où $\varphi(x)$ est une transcendante entière qui a plusieurs zéros simples

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots . \; \alpha_n \; \ldots .$$

Dans ce cas, il existe toujours des domaines de convergence de la série (1), qui environnent chacun de ces zéros et qui ont comme frontières des courbes

$$C_1(r) \; C_2(r) \; \ldots . \; C_n(r) \; \ldots .,$$

dont les équations se présentent sous la forme commune

$$(2) \qquad |\varphi(x)| = r.$$

Nous désignons comme constante de convergence de la série (1) ce nombre positif r qui n'est autre chose que le rayon de convergence de la série de puissances $\sum A_n y^n$.

Quant à cette constante de convergence, elle se détermine généralement d'une telle manière que deux quelconques des domaines de convergence de la série (1) n'ont pas des parties communes.

Soit par exemple

$$\varphi(x) = x^2 + x,$$

les deux domaines de convergence de la série (1) sont limités par l'ellipse de Cassini

$$|x^2+x| = r,$$

qui correspond généralement à $r \leqq \frac{1}{2}$, et qui deviendra, pour $r = \frac{1}{2}$, une lemniscate.

C'est seulement dans le cas où $f(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(-x-1) = f(x),$$

que la constante de convergence peut être plus grande que $\frac{1}{2}$.

Posons ensuite

$$\varphi(x) = e^x - 1,$$

les domaines de convergence, limités par la courbe

$$\left| e^x - 1 \right| = r,$$

correspondent généralement à $r \leqq 1$, et c'est seulement dans le cas où $f(x)$ a la période $2\pi i$, savoir

$$f(x+2\pi i) = f(x),$$

que la constante de convergence peut être plus grande que 1.

Afin d'étudier aussi une série de Lagrange, dans laquelle la transcendante entière $\varphi(x)$ n'a qu'un seul zéro simple, j'ai choisi la fonction

$$\varphi(x) = x e^{-x},$$

ce qui conduira à d'autres développements curieux d'une fonction holomorphe aux environs de l'origine.

Dans ce cas, la frontière du domaine de convergence de notre série de Lagrange est représentée par la courte transcendante $C(r)$

$$\left| x e^{-x} \right| = r,$$

ou bien, en posant $x = u + iv$, u et v étant des variables réelles,

$$(u^2 + v^2)\, e^{-2u} = r^2. \tag{3}$$

Quant à cette courbe, elle est évidemment symétrique par rapport à l'axe réelle, et ses points d'intersection avec cette axe sont déterminés par l'équation transcendante

$$u\, e^{-u} = \pm r. \tag{4}$$

Étudions tout d'abord le signe négatif, u est nécessairement négatif; posons donc

$$u = -\xi,$$

nous aurons

$$\xi\, e^{\xi} = r,$$

équation qui n'admet qu'une seule racine positive

$$\xi = \omega(r),$$

car le premier membre de l'équation en question est, pour des valeurs positives de ξ, continu et toujours croissant.

Le seul point d'intersection de l'axe négative et de la courbe $C(r)$ a donc l'abscisse

$$u = -\omega(r).$$

Quant au signe positif du second membre de l'équation (4), je dis que cette équation n'est jamais résoluble, pourvu que $r > \frac{1}{e}$.

En effet, posons

$$g(u) = u\, e^{-u},$$

nous aurons

$$g'(u) = (1-u)\, e^{-u}, \quad g''(u) = e^{-u}(u-2),$$

de sorte que la valeur maximum de $g(u)$ correspond à $u = 1$, ce qui donnera, quelle que soit la variable positive u,

$$g(u) \leqq \frac{1}{e};$$

c'est-à-dire que l'équation

$$u e^{-u} = r$$

n'est jamais résoluble pour $r > \frac{1}{e}$, tandis que cette équation a une et seulement une racine positive, pourvu que $r \leqq \frac{1}{e}$.

Cela posé, il est évident que la courbe $C(r)$ est fermée, pourvu que $r \leqq \frac{1}{e}$, et seulement dans ce cas.

Quant à cette courbe, posons tout d'abord, dans (3), $u = 0$, il résulte

$$v = \pm r,$$

tandis que l'hypothèse $v = \alpha u$ conduira aux deux équations

$$u e^{-u} = \pm \frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

ce qui donnera, pour le signe négatif qui figure au second membre,

$$u = -\omega\left(\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right),$$

tandis que le signe positif est inapplicable, à moins que

$$r \leqq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{e}.$$

Supposons donc $r > \frac{1}{e}$, il résulte, en vertu de cette dernière condition,

$$|\alpha| \geqq \sqrt{e^2 r^2 - 1},$$

ce qui donnera la proposition:

Un rayon vecteur quelconque et une courbe $C(r)$ ont au plus un seul point d'intersection.

Soit maintenant

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

une fonction holomorphe aux environs de l'origine, il existe toujours un développement de la forme

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(x e^{-x}\right)^n,$$

et les coefficients de cette série de Lagrange se déterminent par les formules

$$(7) \qquad A_0 = a_0, \quad A_n = \frac{1}{n!} D_x^{n-1} \left(e^{nx} f'(x)\right)_{x=0},$$

ce qui donnera, pour $n \geqq 1$,

$$(8) \qquad A_n = \frac{n^{n-1}}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} \frac{(s+1)!\, a_{s+1}}{n^s}.$$

Posons par exemple

$$f(x) = e^{\alpha x},$$

α étant une constante différente de zéro, mais quelconque du reste, nous aurons

$$(9) \qquad e^{\alpha x} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha\,(\alpha + n)^{n-1}}{n!} \left(x e^{-x}\right)^n.$$

Quant à la constante de convergence de cette série de Lagrange, appliquons la formule de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{12n} - n}, \quad 0 < \theta < 1,$$

nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{\frac{\alpha\,(\alpha+n)^{n-1}}{n!}} \right| = e;$$

c'est-à-dire que la constante de convergence de la série (9) est égale à $\frac{1}{e}$, de sorte que la courbe correspondante $C(r)$ est fermée.

Or, $e^{\alpha x}$ étant une transcendante entière, on aura:

La constante de convergence r de la série (6), représentant une fonction holomorphe aux environs de l'origine, est généralement au plus égale à $\frac{1}{e}$, de sorte que la courbe $C(r)$ est fermée.

Je n'ai pu trouver aucune condition qui doit être remplie par la fonction $f(x)$, pour que la constante de convergence correspondante soit plus grande que $\frac{1}{e}$. Mais le résultat obtenu, en ce qui concerne la valeur de r, conduira à des résultats assez curieux.

A cet effet, appliquons la formule intégrale de Cauchy

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\nu-1}\cos(\varrho\varphi)\,d\varphi = \frac{\Gamma(\nu)}{2^{\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)},$$

où il faut supposer positive la partie réelle de ν, ce qui nous exprimons en écrivant

$$R(\nu) > 0;$$

posons ensuite

$$(10)\quad F_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)\,(x\cos\varphi)^{\nu-1}\cos(\varrho\varphi)\,d\varphi,\ \ R(\nu) > 0,$$

où $f(x)$ désigne la série de puissances (5), il résulte

$$(11)\quad F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)\,a_s}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s+1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+s-1},$$

et la série de puissances obtenue en supprimant la facteur $x^{\nu-1}$ a évidemment le même rayon de convergence que (5).

Partons maintenant de l'intégrale eulérienne de première espèce, écrite sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\psi)^{\nu} (\cot \psi)^{\varrho}\, d\psi = \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)},$$

nous aurons, en vertu de (10),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(x \sin 2\psi)\,(x \sin 2\psi)\,(\cot \psi)^{\varrho}\, d\psi = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s x^{\nu+\varrho}}{\nu+s},$$

ce qui donnera finalement

$$(12)\quad D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(x \sin 2\psi)\,(x \sin 2\psi)\,(\cot \psi)^{\varrho}\, d\varphi = x^{\nu-1} f(x).$$

En second lieu, partons de l'intégrale eulérienne, puis posons

$$(13)\quad F_2(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin 2\psi)\,(x \sin 2\psi)^{\nu}\,(\cot \psi)^{\varrho}\, d\psi,$$

nous aurons de même

$$(14)\ F_2(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+s+1)}\, a_s (2x)^{\nu+s},$$

de sorte que l'intégrale de Cauchy donnera ici

$$(15)\qquad \frac{1}{\pi} D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(x \cos\varphi)\,\frac{\cos(\varrho\varphi)}{\cos\varphi}\, d\varphi = x^{\nu-1} f(x).$$

Il est évident que la série de puissances qui représente la fonction $x^{-\nu} F_2(x)$ a le même rayon de convergence que (5).

Posons ensuite

$$(16)\quad \Phi_{\nu}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\varphi}\,(x\cos\varphi)^{\nu-1}\cos(\varrho\varphi)\, d\varphi,$$

il résulte, en vertu de (10) et (11),

$$(17)\quad \Phi_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s+1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+s-1}.$$

De plus, nous aurons, quel que soit le positif entier n,

$$(18)\quad \frac{1}{n^{\nu+n-1}}\,\Phi_{\nu+n}(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx\cos\varphi}\,(x\cos\varphi)^{\nu+n-1}\cos(\varrho\varphi)\,d\varphi,$$

tandis que la formule (12) donnera

$$(19)\quad \begin{cases} D_x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{\nu+n}(nx\sin 2\psi)\,(x\sin 2\psi)\,(\cot\psi)^\varrho\,d\psi = \\ \qquad = n^{\nu+n-1}\left(xe^{-x}\right)^n x^{\nu-1}. \end{cases}$$

En second lieu, posons

$$(20)\quad \Psi_\nu(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin 2\psi}\,(x\sin 2\psi)^\nu\,(\cot\psi)^\varrho\,d\psi,$$

nous aurons, en vertu de (13) et (14),

$$(21)\quad \Psi_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s+1}{2}\right)}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}(2x)^{\nu+\varrho},$$

ce qui donnera, quel que soit le positif entier n,

$$(22)\quad \frac{1}{n^{\nu+n}}\,\Psi_{\nu+n}(nx) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx\sin 2\psi}\,(x\sin 2\psi)^{\nu+n}\,(\cot\psi)^\varrho\,d\psi,$$

de sorte que nous aurons ici

$$(23)\quad \frac{1}{\pi}\,D_x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{\nu+n}(nx\cos\varphi)\,\frac{\cos(\varrho\varphi)}{\cos\varphi}\,d\varphi = n^{\nu+n}\left(xe^{-x}\right)^n x^{\nu-1}.$$

Choisissons maintenant les paramètres ν et ϱ d'une telle manière que les fonctions gamma qui figurent dans les fonctions précédentes aient un sens, ce qui exige que ν ne soit égal ni à zéro ni à un négatif entier, et que ni $\nu+\varrho$ ni $\nu-\varrho$ ne soit égal à un négatif entier; nous aurons à démontrer le théorème:

Une fonction $f(x)$, holomorphe aux environs de l'origine, est toujours développable en séries de la forme

$$f(x) = b_0 + \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \, \Phi_{\nu+n}(nx) \tag{24}$$

$$f(x) = c_0 + \left(\frac{1}{2x}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \, \Psi_{\nu+n}(nx), \tag{25}$$

et le domaine de convergence de chacune de ces séries a généralement la même frontière $\left|xe^{-x}\right| = r$, où $r \leqq \frac{1}{e}$.

Il suffit évidemment d'étudier une seule de ces deux séries, par exemple la première.

Partons donc des formules (10) et (18), nous aurons, en vertu de (5) et (6),

$$F_1(x) = \frac{\Gamma(\nu)\, A_0}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho-1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s}{s^{\nu+s-1}} \, \Phi_{\nu+s}(sx), \tag{26}$$

où nous supposons $R(\nu) > 0$, et il est évident que les formules (12) et (19) conduiront de (26) à la série (6), pourvu que $R(\nu \pm \varrho) > 1$, de sorte que le domaine de convergence de la série (26) est généralement une courbe $\left|xe^{-x}\right| = r$ qui correspond à $r \leqq \frac{1}{e}$, parce que la série (6) a ce domaine de convergence.

Remarquons maintenant que les séries qui figurent aux deux membres de (26) sont uniformément convergentes pour des valeurs de x situées aux environs de l'origine, nous pouvons ordonner comme série de puissances par rapport à x le second membre de (26), ce qui donnera une suite de relations rationnelles entre les paramètres ν et ϱ, relations qui sont vraies, pourvu que tous les coefficients de $F_1(x)$ et des $\Phi_{\nu+n}(nx)$ aient un sens.

Quant aux coefficients b_n et c_n des séries (24) et (25), partons de la série de puissances (5) qui représente $f(x)$, nous aurons, en vertu de (7) et (11), pour les coefficients b_μ,

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} b_0 &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} a_0 \\ b_n &= \frac{n^{-\nu}}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} \frac{(s+1)!\, a_{s+1}}{n^s} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+s+1)} \end{aligned} \right.$$

et, pour les c_μ,

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} c_0 &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+2}{2}\right)} a_0 \\ c_n &= \frac{n^{-\nu-1}}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} \frac{(s+1)!\, a_{s+1}}{n^s} \frac{\Gamma(\nu+s+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s+2}{2}\right)} \end{aligned} \right.$$

On aura par exemple, en vertu de (9),

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Phi_\nu(\alpha x)}{\alpha^{\nu-1}} = \\ & = \frac{\Gamma(\nu)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \alpha (n-\alpha)^{n-1}}{n!\, n^{\nu+n-1}} \Phi_{\nu+n}(nx), \end{aligned} \right.$$

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Psi_\nu(\alpha x)}{\alpha^{\nu-1}} = \\ & = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho-1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} (2x)^\nu + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \alpha (n-\alpha)^{n-1}}{n!\, n^{\nu+n}} \Psi_{\nu+n}(nx \end{aligned} \right.$$

et le domaine commun de convergence de ces deux séries a la frontière $\left|x e^{-x}\right| = \frac{1}{e}$.

Nous avons encore à étudier l'hypothèse

$$f(x) = x^p,$$

p étant un positif entier, quelconque du reste, ce qui donnera, en vertu de (8),

$$\frac{x^p}{p} = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{n^{n-p-1}}{(n-p)!} \left(x e^{-x}\right)^n, \tag{31}$$

série dont la constante de convergence est égale à $\frac{1}{e}$.

Appliquons ensuite les formules (28) et (29), il résulte les deux développements

$$A_p(\nu, \varrho)\, x^{\nu+p-1} = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\Phi_{\nu+n}(n x)}{(n-p)!\, n^{\nu+p}} \tag{32}$$

$$B_p(\nu, \varrho)\,(2x)^{\nu+p} = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\Psi_{\nu+n}(n x)}{(n-p)!\, n^{\nu+p+1}}, \tag{33}$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_p(\nu, \varrho) = \frac{\Gamma(\nu+p)}{p\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+p+1}{2}\right)}$$

$$B_p(\nu, \varrho) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+p+1}{2}\right)}{p\,\Gamma(\nu+p+1)},$$

et les deux séries (32) et (33) ont le même domaine de convergence que (31).

Supposons maintenant plus grande que $\frac{1}{e}$ la constante de convergence r, il résulte de nos remarques sur la courbe $C(r)$, que les deux séries (24) et (25) sont certainement convergentes à l'intérieur de la courbe fermée $C(r)$.

Considérons par exemple la fonction

$$\frac{1}{2 - x e^{-x}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{34}$$

où les coefficients a_n sont à déterminer comme suit

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{s^{n-s}}{2^{s+1}},$$

ces deux séries (24) et (25) sont certainement convergentes à l'intérieur de la courbe $C(2)$.

Nous avons encore à étudier la transcendante entière

$$e^{xe^{-x}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{35}$$

où il faut admettre

$$a_0 = 1, \quad a_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s} s^{n-s}}{(n-s)!};$$

dans ce cas, les séries (24) et (25) sont convergentes pour une valeur quelconque de x, résultat qui est bien curieux en comparaison avec les formules (32) et (33).

En effet, développons, conformément aux formules (32) et (33), les termes de la série (35), le domaine de convergence de tous ces développements sont finis, tandis que la somme de ces développements est convergente dans toute l'étendue du plan des x.

Forelagt paa Mødet den 15. Januar 1926.
Færdig fra Trykkeriet den 28. Juni 1926.