Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser **VII,** 7.

SUR L'APPROXIMATION D'UN NOMBRE IRRATIONNEL PAR DES CARRÉS RATIONNELS

PAR

JOHS. MOLLERUP

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1926

Introduction.

Si l'on peut, pour chaque valeur de q, approximer $\sqrt{i}$ avec le défaut $\frac{1}{q}$:

$$(1) \qquad k-1<\frac{p}{q}<\sqrt{i}<\frac{p+1}{p} \leqq k \ (k \text{ entier positif}),$$

on trouve par la relation

$$(2) \qquad \frac{p^2}{q^2}<i<\frac{(p+1)^2}{q^2}$$

le nombre i avec le défaut

$$(3) \qquad \frac{2p+1}{q^2}<\frac{2k}{q} \rightarrow 0,$$

q croissant infiniment. On n'obtient donc aucune comparaison immédiate du nombre i avec les fractions entre $\frac{p^2}{q^2}$ et $\frac{(p+1)^2}{q^2}$: $\frac{p^2+1}{q^2}$, $\frac{p^2+2}{q^2}$ ... $\frac{p^2+2p}{q^2}$. Voilà pourquoi nous appellons ces fractions les *fractions critiques du nombre* i, *correspondant à l'approximation* $\frac{1}{q}$ *de* $\sqrt{i}$; aussi l'intervalle $\frac{p^2}{q^2}<x<\frac{(p+1)^2}{q^2}$ sera-t-il nommé *l'intervalle critique correspondant*. De cette manière s'établit le problème suivant: *Trouver l'exactitude augmentée pour* $\sqrt{i}$, *par laquelle toutes les fractions critiques* $\frac{p^2+1}{q^2}$, $\frac{p^2+2}{q^2}$ ... $\frac{p^2+2p}{q^2}$, *peut-être à l'exception d'une seule, se trouveront en dehors de l'intervalle critique nouveau.* Cette question sera résolue par les théorèmes suivants. Nous remarquons d'avance qu'il sera bien naturel d'aller de l'approximation $\frac{1}{q}$ à l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$ pour

$\sqrt{i}$ afin d'obtenir l'approximation $\frac{1}{q^2}$ pour i; car l'approximation $\frac{1}{s}$ pour $\sqrt{i}$ donnera pour i une approximation $< \frac{2k}{s}$. Si l'on pose maintenant

$$\frac{1}{q^2} < \frac{2k}{s},$$

on aura

$$s < 2kq^2.$$

1. Théorème 1. Soit trouvé le nombre irrationnel $\sqrt{i}$ avec l'approximation $\frac{1}{q}$:

$$k-1 < \frac{p}{q} < \sqrt{i} < \frac{p+1}{q} \leqq k, \tag{4}$$

d'où suit pour le nombre irrationnel i:

$$\frac{p^2}{q^2} < i < \frac{(p+1)^2}{q^2}. \tag{5}$$

Soit encore $\sqrt{i}$ trouvé avec l'approximation augmentée $\frac{1}{2kq^2}$:

$$\frac{r}{2kq^2} < \sqrt{i} < \frac{r+1}{2kq^2}, \tag{6}$$

$$\frac{r^2}{4k^2q^4} < i < \frac{(r+1)^2}{4k^2q^4}. \tag{7}$$

De la première suite de fractions critiques: $\frac{p^2+1}{q^2}, \ldots \frac{p^2+2p}{q^2}$, il se trouve dans le nouvel intervalle

$$\frac{r^2}{4k^2q^4} < x < \frac{(r+1)^2}{4k^2q^4} \tag{8}$$

ou une seule ou aucune.

La démonstration du théorème suit immédiatement du fait que la longueur du nouvel interval pour i sera moindre que $\frac{1}{q^2}$; en effet nous aurons:

$$(9)\qquad \frac{(r+1)^2-r^2}{4k^2q^4}=\frac{2r+1}{4k^2q^4}<\frac{1}{q^2};$$

car

$$(10)\qquad \frac{r}{2kq^2}+\frac{r+1}{2kq^2}=\frac{2r+1}{2kq^2}<2k.$$

Si, par exemple, l'une des fractions critiques: $\frac{p^2+s}{q^2}$, $1\leqq s\leqq 2p$, se trouve dans le nouvel intervalle critique, nous pouvons poser:

$$(11)\qquad \frac{p^2+s}{q^2}=\frac{4k^2q^2(p^2+s)}{4k^2q^4};$$

ainsi cette fraction sera aussi une des fractions critiques nouvelles: $\frac{r^2+1}{4k^2q^4}, \frac{r^2+2}{4k^2q^4} \dots \frac{r^2+2r}{4k^2q^4}$; il est donc démontré, que par le passage de l'approximation $\frac{1}{q}$ pour $\sqrt{i}$ à l'approximation augmentée $\frac{1}{2kq^2}$, une seule des fractions critiques peut conserver cette qualité.

2. Comme l'approximation $\frac{1}{q}$ du nombre $\sqrt{i}$ est suivie de l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$, cette dernière approximation peut être suivie de l'approximation $\frac{1}{2k\cdot 4k^2q^4}=\frac{1}{2^3k^3q^4}$, celle-ci par l'approximation $\frac{1}{2k\cdot 2^6k^6q^8}=\frac{1}{2^7k^7q^8}$ etc. Nous regardons la suite des approximations successives pour $\sqrt{i}$:

$$(12)\quad \frac{1}{q};\ \frac{1}{2kq^2};\ \frac{1}{2^3k^3q^4};\ \frac{1}{2^7\cdot k^7\cdot q^8}\ \dots\ \frac{1}{2^{2^n-1}\cdot k^{2^n-1}\cdot q^{2^n}}$$

et les intervalles critiques correspondants pour i:

$$(13)\qquad I_1;\ I_2;\ I_3;\ I_4\ \dots\ I_{n+1}$$

ayant les longueurs:

$$(14)\quad \begin{cases} I_1=\frac{2p+1}{q^2};\ I_2<\frac{1}{q^2};\ I_3<\frac{1}{2^2k^2q^4};\ I_4<\frac{1}{2^6k^6q^8};\ \dots \\ \qquad I_{n+1}<\frac{1}{2^{2^n-2}\cdot k^{2^n-2}\cdot q^{2^n}}. \end{cases}$$

Pour le cas où i soit un nombre algébrique nous chercherons une condition nécessaire pour qu'une fraction $\frac{p^2+s}{q^2}$, restée critique par le premier passage de l'approximation $\frac{1}{q}$ à l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$, reste aussi dans les intervalles critiques suivants. Nous aurons donc besoin du théorème classique de LIOUVILLE: Soit i un nombre algébrique du degré n, satisfaisant à l'équation $f(x) = 0$ du degré n, et soit $q >$ maximum $|f'(x)|$ dans un intervalle autour de i, ne contenant pas plusieurs racines de $f(x)$, on aura toujours $\left|i-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{n+1}}$. La question posée sera résolue par le théorème 2.

3. Théorème 2. Si le nombre i satisfait à une équation algébrique à coefficients entiers du degré m, $f(x) = 0$, où $q^2 > |f'(x)|$ dans un intervalle autour de i, ne contenant pas plusieurs racines de $f(x)$, chaque fraction critique $\frac{p^2+1}{q^2}, \frac{p^2+2}{q^2} \dots \frac{p^2+2p}{q^2}$ sera chassée en dehors de l'intervalle critique I_{n+1}, si l'on a

$$(15) \qquad (2kq)^{2^{n-1}-1} \geqq q^m;$$

cette relation est en tout cas remplie si $m < 2^{n-1}$.

Pour le démontrer nous remarquons d'abord que toutes les fractions critiques, peut-être à l'exception d'une seule, seront déjà chassées en dehors de l'intervalle critique I_2; soit en effet la fraction $\frac{p^2+s}{q^2}$ restant dans I_2. Si cette fraction $\frac{p^2+s}{q^2}$ reste encore dans I_{n+1}, nous aurons d'après le théorème de LIOUVILLE:

$$(16) \qquad \frac{1}{2^{2^n-2}\cdot k^{2^n-2}\cdot q^{2^n}} > \left|i-\frac{p^2+s}{q^2}\right| > \frac{1}{q^{2m+2}},$$

c'est-à-dire que

$$(17) \qquad (2kq)^{2^n-2} < q^{2m} \quad \text{ou} \quad (2kq)^{2^{n-1}-1} < q^m.$$

Si donc, au contraire, $(2kq)^{2^{n-1}-1} \geqq q^m$, la fraction $\frac{p^2+s}{q^2}$ sera chassée en dehors de l'intervalle I_{n+1}; pour satisfaire à cette inégalité on peut poser $2^{n-1} > m$. Mais elle sera encore satisfaite pour $2^{n-1} = m$, si $(2kq)^{m-1} \geqq q^m$ ou $(2k)^{m-1} \geqq q$. Si, par exemple, $m = 2$, la susdite inégalité sera satisfaite pour $n > 2$ et encore pour $n = 2$, si $2k \geqq q$; dans ce cas chaque fraction critique aura disparu de l'intervalle I_4, et si $2k \geqq q$ déjà de I_3. Si $m = 3$, les fractions critiques auront aussi disparu de l'intervalle I_4.

4. Maintenant nous allons rechercher si le passage de l'approximation $\frac{1}{q}$ à l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$ peut être remplacée par le passage à une approximation $\frac{1}{2kq^2-y}$, y étant un assez petit entier positif, sans perdre les résultats obtenus. Pour répondre à cette question nous la séparons en deux: 1) Peut on toujours conserver un intervalle critique $I_2 < \frac{1}{q^2}$, quand on remplace l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$ de $\sqrt{i}$ par l'approximation $\frac{1}{2kq^2-y}$? et 2) Si l'on remplaçait l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$ par l'approximation $\frac{1}{2kq^2-y}$, pourrait-il arriver que le nouvel intervalle critique pour i contienne 2 fractions critiques? Pour répondre à ces questions nous remarquons d'abord, que

$$(18) \qquad \frac{a}{b} \gtreqless \frac{a-xy}{b-y}, \quad o < y < b$$

correspond à

$$(19) \qquad -ya \gtreqless -bxy \quad \text{ou à} \quad \frac{a}{b} \lesseqgtr x.$$

Nous démontrons maintenant par un exemple qu'à la première question il faut donner une réponse négative. En effet, nous supposons:

$$(20) \qquad k-1 < \frac{p}{q} < \sqrt{i} < \frac{p+1}{q} \leqq k$$

et encore, passant à l'approximation $\frac{1}{2kq^2}$:

$$k-1 \leqq k-\frac{1}{y} < \frac{2k^2q^2-2}{2kq^2} < \sqrt{i} < \frac{2k^2q^2-1}{2kq^2} < k. \tag{21}$$

Alors nous aurons:

$$\frac{2k^2q^2-2-ky}{2kq^2-y} < \frac{2k^2q^2-2}{2kq^2} < \frac{2k^2q^2-1-ky}{2kq^2-y} < \frac{2k^2q^2-1}{2kq^2}. \tag{22}$$

Supposons par exemple que le nombre $\sqrt{i}$ soit situé entre les deux fractions au milieu; alors nous aurons:

$$\frac{2k^2q^2-2-ky}{2kq^2-y} < \sqrt{i} < \frac{2k^2q^2-1-ky}{2kq^2-y} \tag{23}$$

$$\frac{(2k^2q^2-2-ky)^2}{(2kq^2-y)^2} < i < \frac{(2k^2q^2-1-ky)^2}{(2kq^2-y)^2}. \tag{24}$$

La longueur critique sera

$$\frac{4k^2q^2-2ky-3}{(2kq^2-y)^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{y^2-2kq^2y+3q^2}{q^2(2kq^2-y)^2} \tag{25}$$

où le numérateur sera négatif, parce que les zéros du polynome $y^2-2kq^2y+3q^2$, c'est-à-dire les grandeurs:

$$\left\{\begin{aligned} & kq^2 \pm kq^2\sqrt{1-\frac{3}{k^2q^2}} = kq^2\left(1\pm\left(1-\frac{3}{k^2q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad = kq^2\left(1\pm\left(1-\frac{3}{2k^2q^2}-\frac{9}{8k^4q^4}\cdots\right)\right) \\ & \quad = \left\{\begin{array}{l} 2kq^2-\frac{3}{2k}-\frac{9}{8k^3q^2}\cdots \\ \frac{3}{2k}+\frac{9}{8k^3q^2}\cdots \end{array}\right. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

sont positifs, et parce que le variable y, étant un assez petit entier positif, est situé entre ces deux zéros.

Nous passons maintenant à la seconde question. Remplaçant l'approximation $\frac{1}{q}$ par l'approximation $\frac{1}{(k-1)q^2}$, nous aurons:

$$\frac{(k-1)pq}{(k-1)q^2} = \frac{p}{q} \leqq \frac{(k-1)pq+r}{(k-1)q^2} < \sqrt{i} < \frac{(k-1)pq+r+1}{(k-1)q^2} \leqq \frac{p+1}{q}$$

$$= \frac{(p+1)(k-1)q}{(k-1)q^2}, \quad o \leqq r \leqq (k-1)q-1$$

$$\frac{((k-1)pq+r)^2}{(k-1)^2 q^4} < i < \frac{((k-1)pq+r+1)^2}{(k-1)^2 q^4},$$

avec le nouvel intervalle critique

$$\frac{2(k-1)pq+2r+1}{(k-1)^2 q^4} > \frac{2}{q^2}$$

parce que

$$\frac{1}{2} > (k-1)^2 q^2 - (k-1)pq - r = q^2(k-1)\left(k-1-\frac{p}{q}\right) - r,$$

cette dernière grandeur étant négative. Mais, le nouvel intervalle critique étant $> \frac{2}{q^2}$, on est sûr d'y trouver 2 des fractions critiques: $\frac{p^2+1}{q^2} \ldots \frac{p^2+2p}{q^2}$.

Remplaçant au contraire $k-1$ par k, le nouvel intervalle critique aura la longueur $(0 \leqq r \leqq kq-1)$

$$\frac{2kpq+2r+1}{k^2 q^4},$$

qui ne sera pas nécessairement $> \frac{2}{q^2}$; nous aurons en effet

$$\frac{2kpq+2r+1}{k^2 q^4} < \frac{2}{q^2}, \quad \frac{1}{2} < q^2 k\left(k-\frac{p}{q}\right) - r,$$

quand $r = 0$, $\frac{1}{2kq^2} < k - \frac{p}{q}$.

Regardons maintenant les approximations situées entre $\frac{1}{kq^2}$ et $\frac{1}{2kq^2}$ et dans un certain voisinage de cette dernière approximation. Commençons par l'approximation $\frac{1}{2kq^2-3q}$. Nous aurons

$$\frac{p(2kq-3)}{2kq^2-3q} = \frac{p}{q} < \sqrt{i} < \frac{p+1}{q} = \frac{(p+1)(2kq-3)}{2kq^2-3q} \leqq k.$$

Dans cette approximation il existe

(27) $$(p+1)(2kq-3) - p(2kq-3) = 2kq-3$$

intervalles, contenant les fractions critiques

$$\frac{p^2+1}{q^2} \; \ldots\ldots \; \frac{p^2+2p}{q^2},$$

savoir les intervalles

$$\frac{(p(2kq-3)+1)^2}{(2kq^2-3q)^2} - \frac{(p(2kq-3))^2}{(2kq^2-3q)^2}, \ldots .$$

$$\frac{((p+1)(2kq-3))^2}{(2kq^2-3q)^2} - \frac{((p+1)(2kq-3)-1)^2}{(2kq^2-3q)^2}.$$

Nous déterminerons les paramètres selon l'inégalité

$$2p > 2kq-3,$$

laquelle s'accorde avec l'autre inégalité

$$\frac{p+1}{q} \leqq k, \quad 2p \leqq 2kq-2,$$

si l'on pose $\frac{p+1}{q} = k$. Dans ce cas il existe plusieurs fractions critiques qu'il n'existe d'intervalles appartenant à la nouvelle approximation, c'est-à-dire qu'il existe au moins un intervalle contenant deux fractions critiques (et, naturellement, nous pouvons supposer l'irrationnalité i placée dans cet intervalle). Si, au contraire, nous regardons l'approximation plus forte: $\frac{1}{2kq^2-2q}$, nous aurons $2kq-2$ intervalles pour les $2p \leqq 2kq-2$ fractions critiques. Pour étudier la distribution des fractions critiques dans ces intervalles nous comptons les intervalles $\geqq \frac{1}{q^2}$.

Posons

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{p}{q} = \dfrac{p(2kq-2)}{2kq^2-2q} \leqq \dfrac{p(2kq-2)+r}{2kq^2-2q} \\ < \dfrac{p(2kq-2)+r+1}{2kq^2-2q} \leqq \dfrac{(p+1)(2kq-2)}{2kq^2-2q} \leqq k; \end{cases}$$

l'intervalle pour i:

$$\frac{\big(p(2kq-2)+r+1\big)^2}{(2kq^2-2q)^2} > x > \frac{\big(p(2kq-2)+r\big)^2}{(2kq^2-2q)^2}$$

aura la longueur

$$(29)\qquad \frac{2p(2kq-2)+2r+1}{(2kq^2-2q)^2} \geqq \frac{1}{q^2},$$

si

$$(30)\qquad r \geqq 2(kq-1)(kq-1-p) - \frac{1}{2}.$$

L'intervalle susdit sera donc $> \frac{1}{q^2}$ si

$$(31)\qquad r \geqq 2(kq-1)(kq-1-p);$$

lisant le signe $=$ on trouve

$$\frac{p(2kq-2)+r}{2kq^2-2q} = \frac{2(kq-1)^2}{2q(kq-1)}.$$

Le nombre cherché des intervalles $\geqq \frac{1}{q^2}$ sera donc

$$(32)\quad 2(p+1)(kq-1) - 2(kq-1)^2 = 2(kq-1)(p+2-kq).$$

De la relation

$$\frac{p+1}{q} \leqq k$$

on trouve

$$p+2-kq \leqq 1$$

c'est-à-dire:

ou sera $p+2-kq=0$, et alors le nombre cherché des intervalles $\geqq \frac{1}{q^2}$ sera 0, tous les $2kq-2$ intervalles seront $< \frac{1}{q^2}$ et il y aura dans chaque intervalle ou une seule fraction critique ou aucune, ou sera $p+2-kq=1$, le nombre des intervalles $\geqq \frac{1}{q^2}$ sera $2(kq-1)=2p$; dans ce cas le nombre des intervalles et le nombre des fractions critiques s'accordent, et chaque intervalle doit contenir exactement une fraction critique.

Maintenant il faut passer aux approximations entre $\frac{1}{2kq^2-2q}$ et $\frac{1}{2kq^2-3q}$, c'est-à-dire l'approximation $\frac{1}{2kq^2-(2+\theta)q}$, $\theta=\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots \frac{q-1}{q}$; quant à ces approximations il nous faut seulement un exemple: $p=kq-1$, parce qu'il s'agit de démontrer que l'approximation regardée ne suffit pas pour nous assurer que chaque intervalle, qu'elle peut indiquer au nombre i, contienne seulement une fraction critique. Nous aurons:

$$\frac{p}{q}=\frac{2(kq-1)^2-kq\theta+\theta}{2q(kq-1)-\theta q},$$

c'est-à-dire que la première fraction de cette dénominateur après $\frac{p}{q}$ sera la fraction

$$\frac{2(kq-1)^2-kq\theta+1}{2q(kq-1)-\theta q},$$

et encore nous trouvons

$$\frac{p+1}{q}=k=\frac{2kq(kq-1)-\theta qk}{2q(kq-1)-\theta q}.$$

Le nombre des intervalles sera donc:

$$(33)\begin{cases}1+\left\{2kq(kq-1)-\theta qk-\left(2(kq-1)^2-kq\theta+1\right)\right\} \\ \qquad\qquad = 2(kq-1)=2p,\end{cases}$$

et le nombre des intervalles indiqués au nombre i sera le même. Le premier de ces intervalles sera l'intervalle

$$\frac{p^2}{q^2}<x<\frac{\left(2(kq-1)^2-kq\theta+1\right)^2}{\left(2q(kq-1)-\theta q\right)^2},$$

et nous posons pour essayer

$$(34)\qquad \frac{\left(2\,(kq-1)^2-kq\,\theta+1\right)^2}{\left(2\,q\,(kq-1)-\theta\,q\right)^2}<\frac{p^2+1}{q^2},$$

en délivrant ce premier intervalle de la présence d'une fraction critique. Pour satisfaire à la relation (34) nous posons:

$$k=1,\quad q=5,\quad kq-1=4.$$

La relation (34) se réduit donc à

$$(35)\qquad \frac{(33-5\,\theta)^2}{(40-5\,\theta)^2}<\frac{17}{25},$$

et (35) sera satisfaite pour $\theta=\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$. Le premier intervalle étant délivré de la présence d'une fraction critique, les $2p$ fractions critiques sont distribuées dans les autres $2p-1$ intervalles, indiqués au nombre i, c'est-à-dire: il existe un intervalle contenant 2 fractions critiques.

Nous avons donc obtenu un résultat exact, qui est contenu dans le théorème suivant:

Théorème 3. Soient $\sqrt{i}$ et i des nombres irrationnels, $\sqrt{i}$ étant déterminé avec l'approximation $\frac{1}{q}$:

$$k-1<\frac{p}{q}<\sqrt{i}<\frac{p+1}{q}\leqq k,\ \ \frac{p^2}{q^2}<\ \ <\frac{(p+1)^2}{q^2}.$$

Il existe alors $2p$ fractions critiques: $\frac{p^2+1}{q^2}\ldots\frac{p^2+2p}{q^2}$. Passant à l'approximation $\frac{1}{2kq^2-2q}$ pour $\sqrt{i}$ on sera assuré que le nouvel intervalle critique pour i ne contient q'une seule des fractions critiques nommées (ou peut-être il n'en contient pas du tout). Au contraire, une approximation plus faible ne suffit pas pour obtenir ce résultat; il existe en effet des nombres irrationnels $(\sqrt{j}, j)$, $\frac{p}{q} < \sqrt{j} < \frac{p+1}{q}$, $\frac{p^2}{q^2} < j < \frac{(p+1)^2}{q^2}$, tels que, passant à l'approximation plus faible pour $\sqrt{j}$, on trouve dans le nouvel intervalle critique indiqué au nombre j deux fractions critiques. Passant encore à l'approximation plus forte $\frac{1}{2\,kq^2}$ on obtiendra que le nouvel intervalle critique pour i aura une longueur $< \frac{1}{q^2}$; au contraire dans le cas d'une approximation plus faible, il se peut que le nouvel intervalle pour i ait une longueur $> \frac{1}{q^2}$.

5. Cette recherche est un exemple d'approximation à un nombre irrationnel par un sous-ensemble partout dense de l'ensemble des nombres rationnels. Une application directe a lieu dans la géometrie élémentaire: Trouver le rapport i des aires de deux figures semblables, le rapport linéaire $\sqrt{i}$ pouvant être trouvé avec l'approximation arbitraire $\frac{1}{q}$.

Færdig fra Trykkeriet den 20. Marts 1926.