Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI,** 8.

NEUER BEWEIS EINES ALLGEMEINEN KRONECKER'SCHEN APPROXIMATIONSSATZES

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Einleitung.

Dafür, dass die N diophantischen Ungleichungen[1]

$$(1)\quad \begin{cases} |\alpha_{11}t_1+\alpha_{12}t_2+\ldots+\alpha_{1M}t_M-\beta_1|<\varepsilon \quad (\mathrm{mod.}\ 1) \\ |\alpha_{21}t_1+\alpha_{22}t_2+\ldots+\alpha_{2M}t_M-\beta_2|<\varepsilon \quad (\mathrm{mod.}\ 1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |\alpha_{N1}t_1+\alpha_{N2}t_2+\ldots+\alpha_{NM}t_M-\beta_N|<\varepsilon \quad (\mathrm{mod.}\ 1), \end{cases}$$

wo die α_{nm} und β_n reelle Grössen bedeuten, bei jedem beliebig kleinen $\varepsilon>0$ eine Lösung in den M reellen Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_M$ besitzen, ist die folgende Bedingung offenbar notwendig:

Bei jedem System von N ganzen Zahlen $g_1, \ldots, g_N$, für welches der Ausdruck

$$g_1(\alpha_{11}t_1+\ldots+\alpha_{1M}t_M)+\ldots+g_N(\alpha_{N1}t_1+\ldots+\alpha_{NM}t_M)$$

identisch in den M Variablen $t_1, \ldots, t_M$ verschwindet, d. h. welches die M Gleichungen

$$(2)\quad g_1\alpha_{1m}+g_2\alpha_{2m}+\ldots+g_N\alpha_{Nm}=0 \qquad (m=1,\ldots,M)$$

befriedigt, muss die Zahl

$$(3)\qquad g_1\beta_1+g_2\beta_2+\ldots+g_N\beta_N$$

eine ganze Zahl sein.

In der Tat folgt ja für beliebige (nicht sämtlich verschwindende) ganze Zahlen $g_1, \ldots, g_N$ aus dem Bestehen

[1] Unter der Schreibweise $|a|<b$ (mod. 1), wo a und $b>0$ reelle Zahlen sind, verstehen wir, dass eine ganze Zahl g derart existiert, dass $|a-g|<b$ ist.

der Ungleichungen (1) die neue diophantische Ungleichung

$$|g_1(\alpha_{11}t_1+\ldots+\alpha_{1M}t_M-\beta_1)+\ldots+g_N(\alpha_{N1}t_1+\ldots+\alpha_{NM}t_M-\beta_N)| < \varepsilon(|g_1|+\ldots+|g_N|) \qquad (\text{mod. } 1),$$

also, falls die g_n den Gleichungen (2) genügen, die Ungleichung

$$|g_1\beta_1+\ldots+g_N\beta_N| < \varepsilon(|g_1|+\ldots+|g_N|) \qquad (\text{mod. } 1),$$

und hieraus ergibt sich sofort, da ja ε beliebig klein gewählt werden kann, dass die (von ε unabhängige) Zahl $g_1\beta_1+\ldots+g_N\beta_N$ eine ganze Zahl sein muss.

Ein bekannter allgemeiner Satz von KRONECKER besagt, *dass die obige notwendige Bedingung auch eine hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass die N diophantischen Ungleichungen* (1) *bei beliebig kleinem ε eine Lösung in $t_1, \ldots, t_M$ besitzen,* oder anders ausgedrückt, dass es für die Lösbarkeit der N diophantischen Ungleichungen (1) hinreichend ist, dass sie keinen »offenkundigen« Widerspruch aufweisen.

In dem speziellen Falle, wo alle α_{nm} mit $m > 1$ gleich 0 sind, und ausserdem noch die Grössen $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{N1}$ linear unabhängig sind d. h. keine Relation der Form

$$g_1\alpha_{11}+\ldots+g_N\alpha_{N1} = 0$$

in ganzen (nicht sämtlich verschwindenden) Zahlen $g_1, \ldots, g_N$ befriedigen, geht dieser Satz in den sogenannten »kleinen« Kronecker'schen Satz über, welcher besagt, dass N diophantische Ungleichungen der Form

$$|\alpha_n t-\beta_n| < \varepsilon \qquad (\text{mod. } 1) \qquad (n = 1, \ldots, N),$$

wo die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ linear unabhängig sind, bei beliebiger Wahl der Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_N$ und beliebig kleinem ε stets eine Lösung in t besitzen. Für diesen letzten Satz, welcher in verschiedenen neueren Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielt, habe ich vor einigen Jahren einen neuen einfachen Beweis gegeben.[1] Das Ziel dieser Note ist zu zeigen, dass meine damalige Methode auch im Stande ist, den oben genannten allgemeinen Kronecker'schen Satz mit einem Schlage zu beweisen.

Beweis des Satzes.

Es seien also NM reelle Grössen α_{nm} beliebig gegeben, und es seien $\beta_1, \ldots, \beta_N$ reelle Grössen derart, dass für jedes System von ganzen Zahlen $g_1, \ldots, g_N$, welches die M Gleichungen (2) befriedigt, die Zahl (3) ganz ausfällt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\alpha_{n1} t_1 + \alpha_{n2} t_2 + \ldots + \alpha_{nM} t_M = y_n = y_n(t_1, t_2, \ldots, t_M)$$

und haben alsdann zu beweisen, dass es möglich ist, solche Werte der M Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_M$ zu bestimmen, dass die N reellen Zahlen $y_n - \beta_n$, modulo 1 betrachtet, alle beliebig klein werden, d. h. dass die N komplexen Zahlen

$$e^{2\pi i(y_n - \beta_n)} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

alle um beliebig wenig von $e^0 = 1$ abweichen. Die Behauptung lautet mit anderen Worten, *dass die obere Grenze L_F des absoluten Wertes der Funktion*

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_M) = 1 + \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(y_n - \beta_n)},$$

wo der Punkt $(t_1, \ldots, t_M)$ den ganzen M-dimensionalen Raum durchläuft, gleich der oberen Grenze $L_G = N + 1$ des absoluten Wertes der Funktion

[1] H. Bohr, Another Proof of Kronecker's Theorem [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, Bd. XXI (1923), S. 315—316].

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 1 + \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i x_n}$$

ist, wo die N Variablen $x_1, \ldots, x_N$ *unabhängig von einander das Intervall* $0 \leqq x < 1$ *durchlaufen.* Hierbei genügt es offenbar

$$L_F \geqq L_G$$

zu beweisen.

Wir betrachten, bei einem beliebigen positiven ganzen R, die Potenzen

$$(4) \qquad \left\{F(t_1, \ldots, t_M)\right\}^R = \left\{1 + \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i (y_n - \beta_n)}\right\}^R$$

und

$$(5) \qquad \left\{G(x_1, \ldots, x_N)\right\}^R = \left\{1 + \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i x_n}\right\}^R$$

und vergleichen die beiden Polynomialentwickelungen von (4) und (5). Da die x_n von einander unabhängige Variable bedeuten, können natürlich in der Polynomialentwickelung von (5) keine zwei Glieder zusammengezogen werden; dies kann aber sehr wohl in der Polynomialentwickelung von (4) passieren — weil ja mehrere Glieder denselben Exponentialfaktor $e^{i(\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_M t_M)}$ enthalten können — und zwar werden offenbar zwei Glieder mit den Faktoren

$$e^{2\pi i (p_1 y_1 + \ldots + p_N y_N)} \quad \text{bezw.} \quad e^{2\pi i (q_1 y_1 + \ldots + q_N y_N)}$$

dann und nur dann zu einem Gliede zusammengefasst werden können, wenn die ganzen Zahlen

$$g_1 = p_1 - q_1, \ \ldots, \ g_N = p_N - q_N$$

den M Gleichungen (2) genügen. In diesem Falle unterscheiden sich aber, weil (3) nach Voraussetzung eine ganze Zahl wird, die beiden Grössen

$$p_1\beta_1 + \ldots + p_N\beta_N \quad \text{und} \quad q_1\beta_1 + \ldots + q_N\beta_N$$

durch erhalten wir sofort (aus Stetigkeitsgründen) die Limesgleichung

$$\lim_{R \to \infty} \sqrt[2R]{G_R} = L_G \quad (= N+1),$$

weil die Funktion $|G(x_1, \ldots, x_N)|$ tatsächlich ihre obere Grenze in einem Punkte des N-dimensionalen Einheitskubus, nämlich dem Punkte $(0, \ldots, 0)$, annimmt. Also gilt, wegen (6), die Limesungleichung

$$\limsup_{R \to \infty} \sqrt[2R]{F_R} \geqq L_G.\text{[1]} \tag{7}$$

Nun ist aber offenbar bei jedem R der Mittelwert $\sqrt[2R]{F_R} \leqq$ der oberen Grenze L_F, und wir können daher aus (7) sofort die gewünschte Ungleichung

$$L_F \geqq L_G$$

folgern, womit der Satz bewiesen ist.

[1] Übrigens auch $\liminf_{R \to \infty} \sqrt[2R]{F_R} \geqq L_G$.

Forelagt paa Mødet den 12. December 1924.
Færdig fra Trykkeriet den 15. December 1924.