MATHEMATISK-FYSISKE

MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

6. BIND

MED 10 TAVLER

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924—25

INDHOLD

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI,** 10.

DIE UNGLEICHUNGEN FÜR ZWEIMAL DIFFERENTIIERBARE FUNKTIONEN

VON

EDMUND LANDAU

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1925

Einleitung.

Alle vorkommenden Zahlen seien reell. Falls von einer Funktion in einem Intervall ein- oder zweimalige Differentiierbarkeit vorausgesetzt oder behauptet wird, ist nur von endlichen Ableitungen die Rede und an den Intervallenden die ein- oder zweimalige Differentiierbarkeit nach innen gemeint.

In meiner Arbeit Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, Bd. XIII (1914), S. 43—49] habe ich u. a. folgende Tatsachen festgestellt.

1) In einem Intervall der Länge $\geqq 2$ sei

$$|f(x)| \leqq 1 \tag{1}$$

und

$$|f''(x)| \leqq 1. \tag{2}$$

Dann ist dort

$$|f'(x)| \leqq 2,$$

aber für kein $\delta > 0$ stets

$$|f'(x)| \leqq 2 - \delta.$$

2) In einem Intervall der Länge $\geqq 2\sqrt{2}$ gelte (1) und (2). Dann ist in seinem Mittelpunkt ξ

$$|f'(\xi)| \leqq \sqrt{2},$$

aber für kein $\delta > 0$ stets

$$|f'(\xi)| \leqq \sqrt{2} - \delta.$$

3) In einem Intervall der Länge $\geqq 2$ gelte (1) und

$$f''(x) \leqq 1.$$

Dann ist in seinem rechten Endpunkt ξ

$$f'(\xi) \leqq 2,$$

aber für kein $\delta > 0$ stets

$$f'(\xi) \leqq 2 - \delta.$$

So entstehen die folgenden $3 \cdot 7 = 21$ Fragen, welche ich sämtlich in dieser Abhandlung beantworten werde:

Gegeben seien 7 Zahlen

$$u, v, \xi, A, B, \alpha, \beta$$

oder auch nur 6 Zahlen, nämlich die eben genannten ohne α oder ohne β. Es sei

$$u < v, \quad u \leqq \xi \leqq v, \quad A < B$$

und, falls α und β gegeben sind,

$$-\alpha \leqq \beta.$$

Es sei $f(x)$ für $u \leqq x \leqq v$ zweimal differentiierbar. Für $u \leqq x \leqq v$ sei erstens

$$A \leqq f(x) \leqq B$$

und zweitens entweder

$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta,$$

oder (wenn kein α gegeben ist)

$$f''(x) \leqq 2\beta,$$

oder (wenn kein β gegeben ist)

$$-2\alpha \leqq f''(x).$$

1) Für welche Systeme der 7 bezw. 6 Zahlen liegt in den Voraussetzungen ein Widerspruch?

2) Wenn das System so beschaffen ist, dass kein Widerspruch vorliegt, wann gibt es eine nur von den gegebenen Zahlen (nicht von der Funktion) abhängige Zahl ψ, so dass stets

$$f'(\xi) \leqq \psi$$

ist?

3) Wenn es ein ψ gibt, welches ist die kleinste Schranke χ, die nur von den gegebenen Zahlen abhängt? (Es muss dann ein χ geben; denn wenn χ die untere Grenze aller zulässigen ψ ist, so ist für jedes $\delta > 0$

$$f'(\xi) \leqq \chi + \delta,$$

also

$$f'(\xi) \leqq \chi.$$

χ ist also dadurch charakterisiert, dass stets

$$f'(\xi) \leqq \chi,$$

aber für jedes $\delta > 0$ bei passender Funktion

$$f'(\xi) > \chi - \delta$$

ist.)

4) Für welche Systeme gilt stets

$$f'(\xi) < \chi,$$

und für welche gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) = \chi?$$

5), 6), 7) Dieselben Fragen wie 2), 3), 4) für die untere Schranke von $f'(\xi)$.

Von der Annahme
$$A = B,$$
d. h.
$$f(x) = A \text{ für } u \leqq x \leqq v$$
habe ich nicht gesprochen, weil hier alles trivial ist. Denn dann ist für $u \leqq x \leqq v$
$$f'(x) = 0,$$
$$f''(x) = 0.$$
Für $\beta < 0$ und für $0 < -\alpha$ liegt also ein Widerspruch vor; sonst ist 0 die wahre, stets erreichte obere und untere Schranke von $f'(\xi)$.

Andererseits kann keine der beiden Voraussetzungen
$$A \leqq f(x), \quad f(x) \leqq B$$
gestrichen werden, ohne dass $f'(\xi)$ für jedes ξ des Intervalles aufhört, nach oben beschränkt zu sein und nach unten beschränkt zu sein (während ein Widerspruch in den Voraussetzungen niemals vorliegt). Denn bereits aus
$$A \leqq f(x), \quad f''(x) = 2\lambda$$
folgt das soeben Gesagte, bezw. aus
$$f(x) \leqq B, \quad f''(x) = 2\lambda$$
desgleichen. In der Tat erfüllen bei jedem $K \geqq 0$ die beiden Funktionen
$$f(x) = A + |\lambda| \text{ Max.}(u^2, v^2) + K(x-u) + \lambda x^2,$$
$$f(x) = A + |\lambda| \text{ Max.}(u^2, v^2) - K(x-v) + \lambda x^2$$
bezw.
$$f(x) = B - |\lambda| \text{ Max.}(u^2, v^2) + K(x-v) + \lambda x^2,$$
$$f(x) = B - |\lambda| \text{ Max.}(u^2, v^2) - K(x-u) + \lambda x^2$$
die Voraussetzungen, und es ist jedesmal bei der ersten Funktion

$$f'(\xi) = K + 2\lambda\xi$$

nicht nach oben beschränkt, bei der zweiten Funktion

$$f'(\xi) = -K + 2\lambda\xi$$

nicht nach unten beschränkt, da die Wahl des $K \geqq 0$ freisteht.

Ich habe demgemäss nur obige 21 Fragen zu beantworten, um alles zum Thema Gehörige klarzulegen.

Ich schicke voraus, dass durch triviale Transformationen (Streckung, Verschiebung und Umklappung der unabhängigen, sowie der abhängigen Variablen) sich alles darauf zurückführen lässt, dass

erstens nur nach der oberen Schranke (Existenz, Wert, Erreichbarkeit) gefragt wird;

zweitens $u = 0$, $v = 1$ (d. h. das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$) ist;

drittens $A = -1$, $B = 1$ ist (d. h. (1) gilt);

viertens, wenn α und β gegeben sind,

$$\beta\xi \leqq \alpha(1-\xi) \tag{3}$$

ist; wenn nur eine dieser beiden Zahlen gegeben ist, diese β ist.

Dies erkennt man sofort durch vier Einzelschritte.

Erstens: Wird nach der unteren Schranke gefragt, so betrachte man

$$F(x) = -f(x)$$

mit den zugehörigen Zahlen

$$u,\ v,\ \xi,\ -B,\ -A,\ -\beta,\ -\alpha,$$

von denen eventuell die siebente oder sechste fortfällt. Für $u \leqq x \leqq v$ ist wegen

$$F''(x) = -f''(x)$$

in der Tat

$$-B \leqq F(x) \leqq -A,$$

$-2\beta \leqq F''(x) \leqq 2\alpha$ bezw. $-2\beta \leqq F''(x)$ bezw. $F''(x) \leqq 2\alpha$.

Wegen

$$F'(\xi) = -f'(\xi)$$

folgt also bezw. aus

$F'(\xi)$ nach oben unbeschränkt, $\leqq X$, $> X-\delta$, $< X$, $= X$,

dass

$f'(\xi)$ nach unten unbeschränkt, $\geqq -X$, $< -X+\delta$, $> -X$, $= -X$

ist.

Zweitens: Um das x-Intervall $(u \ldots v)$ auf $(0 \ldots 1)$ zu reduzieren, betrachte man

$$F(x) = f\big(u+(v-u)x\big)$$

mit den zugehörigen Zahlen

$$0,\ 1,\ \frac{\xi-u}{v-u},\ A,\ B,\ (v-u)^2\alpha,\ (v-u)^2\beta,$$

eventuell ohne sechste oder siebente. Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist wegen

$$F''(x) = (v-u)^2 f''\big(u+(v-u)x\big)$$

in der Tat

$$A \leqq F(x) \leqq B,$$

$$-2(v-u)^2\alpha \leqq F''(x) \leqq 2(v-u)^2\beta$$

$$\text{bezw. } F''(x) \leqq 2(v-u)^2\beta$$

$$\text{bezw. } -2(v-u)^2\alpha \leqq F''(x).$$

Wegen

$$F'\left(\frac{\xi-u}{v-u}\right) = (v-u)f'(\xi)$$

folgt also bezw. aus

$F'\left(\frac{\xi-u}{v-u}\right)$ nach oben unbeschränkt, $\leqq X$, $> X-\delta$, $< X$, $= X$, dass

$f'(\xi)$ nach oben unbeschränkt, $\leqq \dfrac{X}{v-u}$, $> \dfrac{X-\delta}{v-u}$, $< \dfrac{X}{v-u}$, $= \dfrac{X}{v-u}$

ist.

Drittens: Um das Intervall der abhängigen Variabeln von $(A \ldots B)$ auf $(-1 \ldots 1)$ zu reduzieren, betrachte man

$$F(x) = \frac{2f(x) - B - A}{B - A}$$

mit den zugehörigen Zahlen

$$0, 1, \xi, \quad -1, 1, \quad \frac{2\alpha}{B-A}, \quad \frac{2\beta}{B-A},$$

eventuell ohne sechste oder siebente. Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist wegen

$$F''(x) = \frac{2}{B-A} f''(x)$$

in der Tat

$$-1 \leqq F(x) \leqq 1,$$

$$-2\frac{2\alpha}{B-A} \leqq F''(x) \leqq 2\frac{2\beta}{B-A} \text{ bezw. } F''(x) \leqq 2\frac{2\beta}{B-A}$$

$$\text{bezw.} -2\frac{2\alpha}{B-A} \leqq F''(x).$$

Wegen

$$F'(\xi) = \frac{2}{B-A} f'(\xi)$$

folgt also bezw. aus

$F'(\xi)$ nach oben unbeschränkt, $\leqq X$, $> X - \delta$, $< X$, $= X$,

dass

$f'(\xi)$ nach oben unbeschränkt, $\leqq \dfrac{B-A}{2} X$, $> \dfrac{B-A}{2}(X-\delta)$, $< \dfrac{B-A}{2} X$, $= \dfrac{B-A}{2} X$

ist.

Viertens: 1) Um im Falle, dass α und β gegeben sind, alles auf

$$\beta \xi \leqq \alpha (1-\xi) \tag{3}$$

zu reduzieren, betrachte man

$$F(x) = -f(1-x) \tag{4}$$

mit den zugehörigen Zahlen

$$0,\ 1,\ 1-\xi,\ -1,\ 1,\ \beta,\ \alpha.$$

Wegen

$$F''(x) = -f''(1-x) \tag{5}$$

ist für $0 \leqq x \leqq 1$ in der Tat

$$\begin{gathered} |F(x)| \leqq 1, \\ -2\beta \leqq F''(x) \leqq 2\alpha. \end{gathered} \tag{6}$$

Wegen

$$F'(1-\xi) = f'(\xi) \tag{7}$$

folgt also bezw. aus

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(1-\xi) \text{ nach oben unbeschränkt, } \leqq X,\ > X-\delta, \\ \qquad\qquad < X,\ = X, \end{array} \right. \tag{8}$$

dass

(9) $f'(\xi)$ nach oben unbeschränkt, $\leqq X$, $> X-\delta$, $< X$, $= X$

ist. Falls nun

$$\beta \xi > \alpha (1-\xi)$$

ist, gilt für die neuen Zahlen

$$\begin{gathered} \Xi = 1-\xi,\quad A = \beta,\quad B = \alpha \\ B\Xi < A(1-\Xi), \end{gathered}$$

also

$$B\Xi \leqq A(1-\Xi),$$

womit die gewünschte Reduktion geleistet ist.

Die Bedingungen

$$0 \leqq \xi \leqq 1,\quad -\alpha \leqq \beta,\quad \beta\xi \leqq \alpha(1-\xi)$$

sind übrigens im Falle

$$0 < -\alpha$$

unverträglich. Im Falle

$$\beta < 0$$

folgt aus

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \ -\alpha \leqq \beta$$

von selbst (3); im Falle

$$-\alpha \leqq 0 \leqq \beta$$

ist (3) mindestens für $\xi = 0$ erfüllt.

2) Um den Fall, dass nur α, nicht β gegeben ist, auf den zu reduzieren, dass nur β gegeben ist, betrachte man auch die Funktion (4) mit den zugehörigen Zahlen

$$0, \ 1, \ 1-\xi, \ -1, \ 1 \text{ und an siebenter Stelle } \alpha.$$

Wegen (5) gilt für $0 \leqq x \leqq 1$ in der Tat (6) und

$$F''(x) \leqq 2\alpha.$$

Wegen (7) folgt also bezw. (9) aus (8).

Somit habe ich in dieser Abhandlung die folgenden Fragen zu beantworten, in denen nur 3 bezw. 2 Parameter verbleiben:

Gegeben seien 3 Zahlen

$$\xi, \ \alpha, \ \beta$$

mit

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \ -\alpha \leqq 0 \leqq \beta, \ \beta\xi \leqq \alpha(1-\xi)$$

oder

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \ -\alpha \leqq \beta < 0;$$

bezw. 2 Zahlen

$$\xi, \ \beta$$

mit

$$0 \leqq \xi \leqq 1.$$

Für $0 \leqq x \leqq 1$ sei

$$|f(x)| \leqq 1$$

und

$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta$$

bezw.

$$f''(x) \leqq 2\beta.$$

1) Für welche Systeme ξ, α, β bezw. ξ, β liegt in den Voraussetzungen ein Widerspruch?

2) Wenn keiner vorliegt: Für welche Systeme gibt es eine nur von ihnen abhängige obere Schranke für $f'(\xi)$?

3) Wenn es eine solche gibt, welches ist ihr kleinstmöglicher Wert?

4) Und wann wird dieser bei passender Funktion erreicht?

Der Wortlaut der im folgenden zu gebenden Antworten ist, wie sich zeigen wird, lang; daher muss man damit zufrieden sein, dass die Beweise der Behauptungen nicht viel länger sind als der Wortlaut der Behauptungen selbst. Da die Lösung des ganzen Problems **nicht** zwangsläufig aus Extremalbetrachtungen folgt, habe ich mich entschlossen, diese Arbeit zu veröffentlichen, obgleich sie nur mit dem TAYLORschen Satz sowie Strecken und Bogen von Parabeln zweiter und dritter Ordnung operiert, also sehr elementar ist. Aber nachdem ich einmal überall durchgekommen bin, wird diese sehr anspruchlose Arbeit mindestens als Material für Übungsaufgaben manchem Leser willkommen sein. Sie hat mir mehr Mühe gemacht als manche wichtigere Abhandlung und soll daher nicht in meinem Schrank vergraben bleiben.

§ 1.

$$-\alpha \leqq 0 \leqq \beta.$$

Hilfssatz 1: Es sei

$$\begin{gathered}
\xi \geqq 0,\ \eta \geqq 0,\ \xi + \eta = 1,\\
\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\\
\beta \xi \leqq \alpha \eta,\\
\varphi(s, t) = \frac{2 + \beta s^2 + \alpha t^2}{s + t} \quad \text{für } s + t \neq 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Es werde gesetzt:

$$L = L(\xi, \alpha, \beta) = \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}}, & \text{falls } \beta(\alpha+\beta)\xi^2 > 2\alpha, \\ -2\alpha\xi + 2\sqrt{\alpha(2 + (\alpha+\beta)\xi^2)}, & \\ \quad \text{falls } \beta(\alpha+\beta)\xi^2 \leqq 2\alpha,\ \alpha > 2 + (\alpha+\beta)\xi^2, & \\ 2 + \beta\xi^2 + \alpha\eta^2, & \\ \quad \text{falls } \beta(\alpha+\beta)\xi^2 \leqq 2\alpha,\ \alpha \leqq 2 + (\alpha+\beta)\xi^2; & \end{cases}$$

diese drei Fälle seien kurz Fall 1), 2), 3) genannt.

Behauptet wird die Existenz zweier Zahlen a, b mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi(a, b) = L;$$

überdies

$L = 2\alpha b = 2\beta a,\quad 0 < a < \xi,\quad 0 < b < \eta$ im Fall 1),

$L = 2\alpha b \geqq 2\beta a,\quad a = \xi,\quad 0 < b < \eta$ im Fall 2),

$L \geqq 2\alpha b \geqq 2\beta a,\quad a = \xi,\quad b = \eta$ im Fall 3).

Vorbemerkung: Der Leser mag sich selbst überlegen — es ist für meinen Zweck ohne Belang — dass L das Minimum von $\varphi(s, t)$ im Gebiet $0 \leqq s \leqq \xi$, $0 \leqq t \leqq \eta$ ohne $s = t = 0$ ist und nur im Punkte (a, b) erreicht wird.

Beweis: 1) Es sei

$$\beta(\alpha + \beta)\xi^2 > 2\alpha; \tag{11}$$

dann ist

$$\beta > 0,$$

$$\beta^2 (\alpha + \beta) \xi^2 > 2 \alpha \beta,$$

also nach (10)

$$\alpha^2 (\alpha + \beta) \eta^2 > 2 \alpha \beta,$$

$$\alpha > 0,$$

$$\alpha (\alpha + \beta) \eta^2 > 2 \beta.$$

Ich setze

$$a = \sqrt{\frac{2 \alpha}{\beta (\alpha + \beta)}}, \quad b = \sqrt{\frac{2 \beta}{\alpha (\alpha + \beta)}}.$$

Nach (11) und obigen Folgerungen daraus ist

$$0 < a < \xi, \quad 0 < b < \eta;$$

ferner ergibt sich

$$2 + \beta a^2 + \alpha b^2 = 2 + \frac{2 \alpha}{\alpha + \beta} + \frac{2 \beta}{\alpha + \beta} = 4,$$

$$a + b = \frac{\sqrt{2} (\alpha + \beta)}{\sqrt{\alpha \beta (\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{2 (\alpha + \beta)}{\alpha \beta}},$$

$$\varphi (a, b) = 4 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{2 (\alpha + \beta)}} = 2 \sqrt{\frac{2 \alpha \beta}{\alpha + \beta}} = L = 2 \alpha b = 2 \beta a.$$

2) Es sei

(12) $$\beta (\alpha + \beta) \xi^2 \leqq 2 \alpha$$

und

(13) $$\alpha > 2 + (\alpha + \beta) \xi^2,$$

also

$$\alpha > 0.$$

Ich setze

$$a = \xi, \; b = - \xi + \sqrt{\frac{2 + (\alpha + \beta) \xi^2}{\alpha}}.$$

Nach (13) ist

$$0=-\xi+\sqrt{\frac{\alpha\xi^2}{\alpha}}<-\xi+\sqrt{\frac{2+(\alpha+\beta)\xi^2}{\alpha}}=b<-\xi+1=\eta,$$

$$\begin{aligned}&2+\beta a^2+\alpha b^2\\ &=2+\beta\xi^2+\alpha\xi^2-2\xi\sqrt{\alpha}\sqrt{2+(\alpha+\beta)\xi^2}+2+(\alpha+\beta)\xi^2\\ &=2\left(2+(\alpha+\beta)\xi^2\right)-2\xi\sqrt{\alpha}\sqrt{2+(\alpha+\beta)\xi^2},\end{aligned}$$

$$a+b=\xi+b=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{2+(\alpha+\beta)\xi^2},$$

$$\varphi(a,b)=2\sqrt{\alpha}\sqrt{2+(\alpha+\beta)\xi^2}-2\alpha\xi=L=2\alpha b$$

und nach (12)

$$\begin{aligned}L&=-2\alpha\xi+2\sqrt{2\alpha+\alpha(\alpha+\beta)\xi^2}\\ &\geqq-2\alpha\xi+2\sqrt{\beta(\alpha+\beta)\xi^2+\alpha(\alpha+\beta)\xi^2}\\ &=-2\alpha\xi+2(\alpha+\beta)\xi=2\beta\xi=2\beta a.\end{aligned}$$

3) Es gelte (12) und

$$\alpha\leqq 2+(\alpha+\beta)\xi^2. \tag{14}$$

Ich setze

$$a=\xi,\quad b=\eta.$$

Nach (14) und (10) ist

$$\begin{aligned}\varphi(a,b)&=\frac{2+\beta\xi^2+\alpha\eta^2}{\xi+\eta}=2+\beta\xi^2+\alpha\eta^2\\ &=L\geqq\alpha-\alpha\xi^2+\alpha\eta^2=\alpha-\alpha(1-\eta)^2+\alpha\eta^2\\ &=2\alpha\eta=2\alpha b\geqq 2\beta\xi=2\beta a.\end{aligned}$$

Hilfssatz 2: Es sei $F(x)$ für $0\leqq x\leqq 1$ differentiierbar. Die Strecke $0\leqq x\leqq 1$ zerfalle in 4 Teilstrecken, auf deren jeder $F''(x)$ vorhanden und konstant ist. (In drei Punkten der Strecke $0\leqq x\leqq 1$ darf also $F''_-(x)$ von $F''_+(x)$ verschieden sein.) Es sei

$$|F(x)| \leqq 1 \qquad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1,$$
$$-\alpha \leqq 0 \leqq \beta,$$
$$-2\alpha \leqq F''(x) \leqq 2\beta \qquad \text{auf jeder der 4 Teilstrecken,}$$
$$0 < \xi < 1,$$
$$F'(\xi) = \varDelta.$$

Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Funktion $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften: Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist $f''(x)$ vorhanden,

$$|f(x)| \leqq 1,$$
$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta;$$

ferner ist

$$f'(\xi) > \varDelta - \delta.$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt jedenfalls

$$F'(x) = F'(0) + \int_0^x F''(z)\,dz \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1$$

(uneigentliches Integral, indem der Integrand in drei Punkten nicht definiert zu sein braucht); denn für jedes Intervall $(u \ldots v)$, das ganz einer der vier Teilstrecken angehört, ist

$$F'(v) = F'(u) + \int_u^v F''(z)\,dz.$$

Daher ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \int_0^x dy \int_0^y F''(z)\,dz.$$

Man bösche nun die etwaigen Sprünge von $F''(x)$ steil ab, indem ein positives ε unterhalb der kleinsten Teilstreckenlänge gewählt wird, vom zweiten, dritten und vierten Teilintervall auf je einem Anfangsstück der Länge ε die Funktion $h(x)$ von dem Werte des $F''(x)$ im vorigen Intervall linear zum neuen Wert geht; aber im übrigen

(d. h. auf der vollen ersten und dem Rest der übrigen Teilstrecken) $h(x)$ gleich dem alten $F''(x)$ gesetzt wird. Dann ist $h(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig, und dort gilt

$$-2\alpha \leqq h(x) \leqq 2\beta.$$

Da jeder Sprung $\leqq 2(\alpha+\beta)$ war, ist ferner

$$\int_0^1 |h(x) - F''(x)|\, dx \leqq 3\cdot 2(\alpha+\beta)\,\varepsilon = c\,\varepsilon.$$

Nun setze ich

$$g(x) = F(0) + xF'(0) + \int_0^x dy \int_0^y h(z)\, dz.$$

Dann ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$-2\alpha \leqq g''(x) = h(x) \leqq 2\beta,$$

$$|g(x) - F(x)| = \left|\int_0^x dy \int_0^y \bigl(h(z) - F''(z)\bigr)\, dz\right|$$

$$\leqq \int_0^1 dy \int_0^1 |h(z) - F''(z)|\, dz \leqq c\varepsilon,$$

$$|g(x)| \leqq |F(x)| + c\varepsilon \leqq 1 + c\varepsilon,$$

$$|g'(\xi) - F'(\xi)| = \left|\int_0^\xi \bigl(h(z) - F''(z)\bigr)\, dz\right|$$

$$\leqq \int_0^1 |h(z) - F''(z)|\, dz \leqq c\varepsilon,$$

$$g'(\xi) \geqq F'(\xi) - c\varepsilon = \Delta - c\varepsilon.$$

Schliesslich werde

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 + c\varepsilon}$$

gesetzt; dann ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|f(x)| = \frac{|g(x)|}{1+c\varepsilon} \leqq 1,$$

$$-2\alpha \leqq -\frac{2\alpha}{1+c\varepsilon} \leqq f''(x) = \frac{g''(x)}{1+c\varepsilon} \leqq \frac{2\beta}{1+c\varepsilon} \leqq 2\beta,$$

$$f'(\xi) = \frac{g'(\xi)}{1+c\varepsilon} \geqq \frac{\varDelta - c\varepsilon}{1+c\varepsilon}.$$

Ist $\delta > 0$ gegeben, so ist bei passendem $\varepsilon(\delta) > 0$

$$\frac{\varDelta - c\varepsilon}{1+c\varepsilon} > \varDelta - \delta,$$

also

$$f'(\xi) > \varDelta - \delta.$$

Hauptsatz 1: Es sei:

$$-\alpha \leqq 0 \leqq \beta.$$

Für $0 \leqq x \leqq 1$ sei

(15) $$|f(x)| \leqq 1$$

und

(16) $$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta.$$

Es sei

$$0 \leqq \xi \leqq 1,$$

$$\eta = 1 - \xi,$$

(10) $$\beta\xi \leqq \alpha\eta.$$

Behauptet wird:

I) Nie liegt ein Widerspruch vor.

II) Stets ist

$$f'(\xi) \leqq L,$$

wo $L = L(\xi, \alpha, \beta)$ die Zahl aus Hilfssatz 1 ist.

III) In jedem der drei Fälle

$$\alpha = \beta = 0;$$

$$\alpha > 0, \quad \beta = 0, \quad \xi = 1;$$

$$\alpha + \beta > 0, \quad \xi = 0$$

gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) = L.$$

IV) Sonst ist stets

$$f'(\xi) < L.$$

V) Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) > L - \delta.$$

Vorbemerkung: Insbesondere ist also L die in der Einleitung mit $\chi(0,\ 1,\ \xi,\ -1,\ 1,\ \alpha,\ \beta)$ bezeichnete Zahl.

Beweis: I) Die Funktion

$$f(x) = 0 \qquad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1$$

genügt sicher den Voraussetzungen (15), (16).

II) Für einen späteren Zweck bitte ich zu beachten, dass ich bis (21) einschliesslich keinen Gebrauch von den Annahmen

$$-\alpha \leqq 0 \leqq \beta, \quad \beta\xi \leqq \alpha\eta$$

mache.

a, b seien zunächst nur den Bedingungen

$$0 \leqq a \leqq \xi, \quad 0 \leqq b \leqq \eta, \quad a + b > 0$$

unterworfen. Dann ist

$$0 \leqq \xi - a \leqq \xi \leqq \xi + b \leqq \xi + \eta = 1,$$

also, da $f'(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig ist,

$$\begin{aligned} -f(\xi-a) + f(\xi+b) &+ \int_{\xi-a}^{\xi} \bigl(f'(\xi) - f'(x)\bigr)\,dx \\ &- \int_{\xi}^{\xi+b} \bigl(f'(x) - f'(\xi)\bigr)\,dx \\ = -f(\xi-a) + f(\xi+b) &+ af'(\xi) - f(\xi) + f(\xi-a) \\ &- f(\xi+b) + f(\xi) + bf'(\xi) \end{aligned}$$

$$= (a+b)\,f'(\xi). \tag{17}$$

Nach dem Mittelwertsatz ist, wegen $f''(x) \leqq 2\beta$,

(18) $f'(\xi)-f'(x) \leqq 2\beta(\xi-x)$ für $\xi-a \leqq x \leqq \xi$;

wegen $f''(x) \geqq -2\alpha$ andererseits

(19) $f'(x)-f'(\xi) \geqq -2\alpha(x-\xi)$ für $\xi \leqq x \leqq \xi+b$.

(17), (18), (19) ergeben

$$(a+b)f'(\xi) \leqq -f(\xi-a)+f(\xi+b)$$
$$+2\beta\int_{\xi-a}^{\xi}(\xi-x)\,dx+2\alpha\int_{\xi}^{\xi+b}(x-\xi)\,dx,$$

$$(20) \qquad f'(\xi) \leqq \frac{-f(\xi-a)+f(\xi+b)+\beta a^2+\alpha b^2}{a+b}.$$

Aus (20) folgt, wegen (15),

$$(21) \qquad f'(\xi) \leqq \frac{2+\beta a^2+\alpha b^2}{a+b}.$$

Nun verstehe ich unter a, b die speziellen, nur von ξ, α, β abhängigen Zahlen aus Hilfssatz 1. Dann ist

$$f'(\xi) \leqq \varphi(a, b) = L.$$

III) **Erstens und zweitens:** Es sei

$$\alpha = \beta = 0,$$

oder es sei

$$\alpha > 0, \quad \beta = 0, \quad \xi = 1.$$

Dann liegt sicher Fall 3) des Hilfssatzes 1 vor, da

$$\beta(\alpha+\beta)\xi^2 = 0 \leqq 2\alpha, \quad \alpha \leqq 2+\alpha\xi^2 = 2+(\alpha+\beta)\xi^2$$

ist. Daher ist

$$L = 2+\beta\xi^2+\alpha\eta^2 = 2.$$

Es leistet

$$f(x) = -1+2x$$

das Gewünschte. Denn für $0 \leqq x \leqq 1$ ist

$$-1 \leqq f(x) \leqq 1,$$
$$-2\alpha \leqq f''(x) = 0 \leqq 2\beta;$$

ferner ist

$$f'(\xi) = 2 = L.$$

Drittens: Es sei:

$$\alpha + \beta > 0, \quad \xi = 0.$$

Dann ist

$$\beta(\alpha+\beta)\xi^2 = 0 \leqq 2\alpha, \quad 2 + (\alpha+\beta)\xi^2 = 2,$$

und es liegt Fall 2) oder Fall 3) des Hilfssatzes 1 vor, je nachdem $\alpha > 2$ oder $\alpha \leqq 2$ ist.

Ist $\alpha > 2$, so ist

$$L = 2\sqrt{2\alpha}, \quad b = \frac{L}{2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}};$$

ist $\alpha \leqq 2$, so ist

$$L = 2 + \alpha, \quad b = 1.$$

Es leistet jedenfalls die Funktion

$$f(x) = -1 + Lx - \alpha x^2$$

zunächst im Intervall $0 \leqq x \leqq b$ das Gewünschte, so dass $\alpha \leqq 2$ wegen $b = 1$ erledigt ist. In der Tat ist für $0 \leqq x \leqq b$

$$-2\alpha \leqq f''(x) = -2\alpha \leqq 2\beta,$$
$$f'(\xi) = f'(0) = L,$$
$$f'(x) = L - 2\alpha x \geqq L - 2\alpha b \geqq 0,$$
$$f(0) = -1,$$
$$f(b) = -1 + Lb - \alpha b^2 = \begin{cases} -1+4-2 = 1, & \text{falls } \alpha > 2, \\ -1+2+\alpha-\alpha = 1, & \text{falls } \alpha \leqq 2, \end{cases}$$
$$-1 \leqq f(x) \leqq 1.$$

Es lässt sich nun im Falle $\alpha > 2$ unter Aufrechterhaltung der Bedingungen (15), (16) diese Funktion $f(x)$ von b bis 1 fortsetzen; hierbei muss

$$f(b) = 1, \quad f'_+(b) = f'_-(b) = L - 2\alpha b = 0,$$
$$f''_+(b) = f''_-(b) = -2\alpha$$

erfüllt sein.

Ich wähle ε so, dass

$$\varepsilon > 0, \quad b + \varepsilon < 1, \quad \alpha\varepsilon \leqq 1$$

ist, und setze

$$h(x) = \begin{cases} \text{linear von } -2\alpha \text{ zu } 0 \text{ steigend für } b \leqq x \leqq b + \varepsilon, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } b + \varepsilon \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + \int_b^x dy \int_b^y h(z)\, dz \quad \text{für } b \leqq x \leqq 1.$$

Dann ist wirklich

$$f(b) = 1, \quad f'_+(b) = 0, \quad f''_+(b) = h(b) = -2\alpha.$$

Ferner ist für $b \leqq x \leqq 1$

$$-2\alpha \leqq f''(x) = h(x) \leqq 0 \leqq 2\beta,$$

$$1 \geqq f(x) \geqq 1 - \int_b^1 dy \int_b^1 |h(z)|\, dz \geqq 1 - \int_0^1 dy\, 2\alpha\varepsilon$$
$$= 1 - 2\alpha\varepsilon \geqq -1.$$

IV) Es liege keine der drei in III) behandelten Möglichkeiten vor; dann ist

$$\alpha + \beta > 0, \quad 0 < \xi < 1;$$

denn

$$\alpha + \beta > 0, \quad \xi = 1$$

gäbe wegen (10)

$$\beta = 0.$$

Aus $0 < \xi < 1$ folgt $a > 0$, $b > 0$ aus Hilfssatz 1. Wäre

$$f'(\xi) = L,$$

so gälte wegen der Entstehung von (20) in (18), (19) durchweg das Gleichheitszeichen; also wäre

$$f''_-(\xi) = 2\beta, \quad f''_+(\xi) = -2\alpha,$$
$$f''_-(\xi) \neq f''_+(\xi).$$

V) Zum gewünschten Ziel der Konstruktion eines Beispiels mit

$$f'(\xi) > L - \delta$$

können die in III) behandelten Möglichkeiten, bei denen ja sogar

$$f'(\xi) = L$$

vorkommt, ausgeschlossen werden. D. h. ich darf

$$\alpha + \beta > 0, \quad 0 < \xi < 1$$

annehmen. Nach Hilfssatz 2 genügt es, auf $0 \leqq x \leqq 1$ ein differentiierbares $F(x)$ zu konstruieren, so dass

$$|F(x)| \leqq 1,$$
$$F'(\xi) = L$$

ist und auf jeder der 4 oder 3 oder 2 Teilstrecken, in die $(0 \ldots 1)$ durch die Punkte $\xi - a$, ξ, $\xi + b$ zerfällt, $F''(x)$ vorhanden und konstant -2α, 0 oder 2β ist.

Zunächst konstruiere ich auf $\xi - a \leqq x \leqq \xi + b$ die folgende Funktion:

$$F(x) = \begin{cases} -1 + La - \beta a^2 + L(x-\xi) + \beta(x-\xi)^2 & \text{für } \xi - a \leqq x \leqq \xi, \\ 1 - Lb + \alpha b^2 + L(x-\xi) - \alpha(x-\xi)^2 & \text{für } \xi \leqq x \leqq \xi + b. \end{cases}$$

Wegen

$$L = \frac{2 + \beta a^2 + \alpha b^2}{a + b}$$

ist einheitlich

$$F(\xi) = -1 + La - \beta a^2 = 1 - Lb + \alpha b^2,$$
$$F'(\xi) = L$$

definiert; auf den beiden Teilstrecken $(\xi - a \ldots \xi)$, $(\xi \ldots \xi + b)$ ist

$$F''(x) = 2\beta \text{ bezw. } -2\alpha.$$

Ferner ist nach Hilfssatz 1

$$F'(x) = \begin{cases} L + 2\beta(x-\xi) \geqq L - 2\beta a \geqq 0 & \text{für } \xi - a \leqq x \leqq \xi, \\ L - 2\alpha(x-\xi) \geqq L - 2\alpha b \geqq 0 & \text{für } \xi \leqq x \leqq \xi + b; \end{cases}$$

für $\xi - a \leqq x \leqq \xi + b$ ist also

$$-1 = F(\xi - a) \leqq F(x) \leqq F(\xi + b) = 1.$$

$F(x)$ hat also für $\xi - a \leqq x \leqq \xi + b$ die verlangten Eigenschaften.

Der Fall 3) ist damit wegen $a = \xi$, $b = \eta$ erledigt.

Im Fall 2), wo $a = \xi$, $b < \eta$, beachte ich

$$F'_-(\xi + b) = L - 2\alpha b = 0$$

und setze einfach

$$F(x) = 1 \quad \text{für } \xi + b \leqq x \leqq 1,$$

so dass dort

$$F''(x) = 0;$$

$F(\xi + b)$ ist einheitlich als 1 definiert; $F'(\xi + b)$ ist vorhanden, nämlich 0.

Im Fall 1), wo $a < \xi$, $b < \eta$, beachte ich

$$F'_-(\xi + b) = L - 2\alpha b = 0,$$
$$F'_+(\xi - a) = L - 2\beta a = 0$$

und setze einfach

$$F(x) = -1 \text{ bezw. } 1 \text{ für } 0 \leqq x \leqq \xi - a \text{ bezw. } \xi + b \leqq x \leqq 1,$$

so dass auf jeder der beiden Teilstrecken

$$F''(x) = 0;$$

$F(\xi-a)$ ist einheitlich als -1 definiert, $F(\xi+b)$ als 1; $F'(\xi-a)$ und $F'(\xi+b)$ sind vorhanden, nämlich 0.

Jedenfalls ist ein $F(x)$ gewünschter Art konstruiert und der Beweis des Hauptsatzes 1 zu Ende.

§ 2.

$-\alpha \leqq \beta < 0$.

Bezeichnungen: Ist

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \quad -\alpha \leqq \beta < 0,$$

so werde gesetzt:

$$\eta = 1-\xi,$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{-\beta}} = \sqrt{\frac{2}{|\beta|}},$$

$$\varDelta = \sqrt{\frac{2+(\alpha+\beta)\xi^2}{\alpha}},$$

und, falls $\gamma \geqq \frac{1}{2}$,

$$L = L(\xi, \alpha, \beta) = \begin{cases} 2+\beta\xi^2+\alpha\eta^2, & \text{falls } \varDelta > 1, \\ 2\beta(\xi-\gamma), & \text{falls } \varDelta \leqq 1, \quad \xi \geqq \gamma, \\ 2\alpha(\varDelta-\xi), & \text{falls } \varDelta \leqq 1 < \varDelta+\gamma, \ \xi < \gamma, \\ \quad -2\alpha\xi - 2\beta(1-\gamma) & \\ +2\sqrt{(\alpha+\beta)\left((\alpha+\beta)\xi^2-\beta(2\gamma-1)\right)}, & \\ & \text{falls } \varDelta+\gamma \leqq 1, \quad \xi < \gamma. \end{cases}$$

Wenn $\gamma \geqq \frac{1}{2}$ ist, liegt sicher genau einer der vier Fälle bei der Definition von L vor, die Fall 1), 2), 3), 4) heissen mögen.

Man beachte sogleich, dass bei festen ξ, α, β, wenn $\gamma > \frac{1}{2}$ (d. h. $\beta > -8$) ist, für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ die Zahlen

$$\xi, \quad \alpha_1 = \alpha(1+\varepsilon), \quad \beta_1 = \beta(1+\varepsilon)$$

(eo ipso ist $-\alpha_1 \leqq \beta_1 < 0$) demselben der vier Fälle angehören wie ξ, α, β. In der Tat ist

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2}{|\beta_1|}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}} < \gamma,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \gamma_1 = \gamma,$$

also

$$\gamma_1 > \tfrac{1}{2}$$

für kleine $\varepsilon > 0$ und, falls $\xi \geqq \gamma$ bezw. $\xi < \gamma$, für kleine $\varepsilon > 0$ entsprechend $\xi \geqq \gamma_1$ bezw. $\xi < \gamma_1$; ferner

$$\varDelta_1 = \sqrt{\frac{2+(\alpha_1+\beta_1)\xi^2}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{1+\varepsilon}+(\alpha+\beta)\xi^2}{\alpha}} < \varDelta,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \varDelta_1 = \varDelta,$$

also, falls $\varDelta > 1$ bezw. $\varDelta \leqq 1$ bezw. $\varDelta \leqq 1 < \varDelta + \gamma$ bezw. $\varDelta + \gamma \leqq 1$, für kleine $\varepsilon > 0$ entsprechend $\varDelta_1 > 1$ bezw. $\varDelta_1 \leqq 1$ bezw. $\varDelta_1 \leqq 1 < \varDelta_1 + \gamma_1$ bezw. $\varDelta_1 + \gamma_1 \leqq 1$.

Man beachte ferner, dass, falls $\gamma > \frac{1}{2}$, L in jedem der vier Fälle bei festem ξ stetig von α und β abhängt. Damit ist für $\gamma > \frac{1}{2}$ und jedes ξ

$$\lim_{\varepsilon=0} L(\xi, \alpha(1+\varepsilon), \beta(1+\varepsilon)) = L(\xi, \alpha, \beta) \tag{22}$$

festgestellt.

Hauptsatz 2: Es sei

$$-\alpha \leqq \beta < 0.$$

Für $0 \leqq x \leqq 1$ sei

$$|f(x)| \leqq 1 \tag{15}$$

und

$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta. \tag{16}$$

Behauptet wird:

I) Ein Widerspruch liegt dann und nur dann vor, wenn

$$\gamma < \tfrac{1}{2}$$

ist.

Im weiteren Wortlaut des Satzes sei

$$\gamma \geqq \tfrac{1}{2},$$
$$0 \leqq \xi \leqq 1,$$
$$\eta = 1 - \xi.$$

II) Stets ist

$$f'(\xi) \leqq L.$$

III) In jedem der Fälle

1) mit $\xi = 0$ oder $\xi = 1$ oder $\alpha + \beta = 0$, $0 < \xi < 1$,
2),
3) mit $\alpha + \beta > 0$, $\xi = 0$ oder $\alpha + \beta = 0$,
4) mit $\gamma = \frac{1}{2}$

gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) = L.$$

IV) Sonst ist stets

$$f'(\xi) < L.$$

V) Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) > L - \delta.$$

Beweis: I) Man beachte für später zweierlei:
Erstens, dass lediglich aus

$$|f(x)| \leqq 1,$$
$$f''(x) \leqq 2\beta < 0$$

(ohne Benutzung von $-2\alpha \leqq f''(x)$) geschlossen wird

$$\gamma \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Zweitens, dass im Falle $\gamma = \frac{1}{2}$ nur eine einzige Funktion diese Bedingungen erfüllt, nämlich

$$f(x) = 1 - 8\,(x - \tfrac{1}{2})^2.$$

Der Beweis der Behauptung I) und dieser Zusätze verläuft nun folgendermassen. Es sei für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|f(x)| \leqq 1 \tag{15}$$

und

$$f''(x) \leqq 2\beta.$$

Dann ist

$$-4 \leqq f(1) - 2f(\tfrac{1}{2}) + f(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \bigl(f'(x+\tfrac{1}{2}) - f'(x)\bigr)\,dx,$$

also nach dem Mittelwertsatz

$$-4 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}\,2\beta\,dx = \frac{\beta}{2}, \tag{23}$$

$$\beta \geqq -8,$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{|\beta|}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Ist umgekehrt

$$\gamma \geqq \frac{1}{2},$$

so erfüllt die Funktion

$$f(x) = 1 + \beta\,(x - \gamma)^2$$

für $0 \leqq x \leqq 1$ die Bedingungen (15) und

$$f''(x) = 2\beta,$$

also auch (16) mit jedem α, für das $-\alpha \leqq \beta$. In der Tat ist

$$-\gamma \leqq x - \gamma \leqq 1 - \gamma \leqq \gamma,$$

$$|x - \gamma| \leqq \gamma,$$

$$1 \geqq f(x) \geqq 1 + \beta\gamma^2 = -1.$$

Ist speziell $\gamma = \frac{1}{2}$, so ist nach der Entstehung von (23)

$$f(0) = -1, \quad f(\tfrac{1}{2}) = 1, \quad f(1) = -1,$$

also wegen (15)

$$f'(\tfrac{1}{2}) = 0;$$

wegen der Entstehung von (23) ist ferner

$$f'(x+\tfrac{1}{2})-f'(x) = -8 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2},$$

speziell

$$f'(\tfrac{1}{2})-f'(0) = -8,$$
$$f'(0) = 8.$$

Ferner ist nach dem Mittelwertsatz für $0 \leqq x \leqq 1$

$$f'(x)-f'(0) \leqq -16x;$$

gälte hier nicht stets das Gleichheitszeichen, so wäre

$$-8 = f(1)-f(0)-f'(0)$$
$$= \int_0^1 (f'(x)-f'(0))\,dx < -16\int_0^1 x\,dx = -8;$$

daher ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$f'(x) = f'(0)-16x = 8-16x,$$
$$f(x) = f(0)+\int_0^x f'(y)\,dy = -1+\int_0^x (8-16y)\,dy$$
$$= -1+8x-8x^2 = 1-8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

II bis V) Es sei nunmehr $\gamma \geqq \frac{1}{2}$. Ich werde nacheinander in jedem der vier Fälle 1) bis 4) die Behauptungen II), III), IV) beweisen und als Vorbereitung zu V) (ich will das V′) nennen) ein Beispiel angeben, wo für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|F(x)| \leqq 1,$$
$$F'(x) \text{ vorhanden},$$
$$F'(\xi) = L$$

und $F''(x)$ streckenweise (und zwar werden es höchstens drei Strecken sein) konstant 2β oder -2α ist. Zum Schluss werden sich ohne Fallunterscheidung wegen (22) die Sprünge der zweiten Ableitung leicht unter beliebig geringer Verkleinerung der Konstanten L abschleifen lassen; hierbei darf ich mich dann auf die ξ, α, β beschränken, bei denen nicht schon nach III) die Gleichung

$$f'(\xi) = L$$

möglich war.

Allgemein benutze ich die — wie oben bemerkt — auch für $-\alpha \leqq \beta < 0$ gültige Ungleichung (20) in der Spezialisierung $a = \xi$ und ersetze in ihr alsbald $-f(\xi - a) = -f(0)$ durch die nicht kleinere Zahl 1. Es gilt also für $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq \eta$, $\xi + b > 0$

$$(24) \qquad f'(\xi) \leqq \frac{1 + \beta\xi^2 + \alpha b^2 + f(\xi + b)}{\xi + b}.$$

1) Es sei $\varDelta > 1$.

II) Nach (24) mit $b = \eta$ ist

$$f'(\xi) \leqq 2 + \beta\xi^2 + \alpha\eta^2 = L.$$

III) und V′) Ich setze

$$F(x) = \begin{cases} -1 - \beta\xi^2 + Lx + \beta(x - \xi)^2 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi, \\ -1 - \beta\xi^2 + Lx - \alpha(x - \xi)^2 & \text{für } \xi \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Jedenfalls ist einheitlich

$$F(\xi) = -1 - \beta\xi^2 + L\xi, \quad F'(\xi) = L$$

definiert, $F''(x)$ auf der ganzen Strecke (falls $\xi = 0$ oder $\xi = 1$) oder auf den zwei durch ξ bestimmten Teilstrecken (falls $0 < \xi < 1$) je einer der Konstanten 2β, -2α gleich, also

$$\begin{aligned} F'(x) \geqq F'(1) = L - 2\alpha(1 - \xi) &= 2 + \beta\xi^2 + \alpha\eta^2 - 2\alpha(1 - \xi) \\ &= 2 + \beta\xi^2 + \alpha(1 - 2\xi + \xi^2) - 2\alpha(1 - \xi) \\ &= 2 + (\alpha + \beta)\xi^2 - \alpha = \alpha(\varDelta^2 - 1) > 0, \end{aligned}$$

also

$$-1 = F(0) \leqq F(x) \leqq F(1) = -1 - \beta\xi^2 + L - \alpha\eta^2 = 1.$$

Das bei V′) Verlangte ist damit erfüllt. Falls

$$\xi = 0 \text{ oder } \xi = 1 \text{ oder } \alpha + \beta = 0, \quad 0 < \xi < 1$$

ist, ist auf $0 \leqq x \leqq 1$ einheitlich

$$F''(x) = -2\alpha \text{ bezw. } 2\beta \text{ bezw. } 2\beta,$$

also

$$f(x) = F(x)$$

das gewünschte Beispiel mit

$$f'(\xi) = L.$$

IV) Falls

$$f'(\xi) = L$$

ist, lehrt die Herleitung von (24): Wenn $0 < \xi < 1$, also $a = \xi > 0$ und $b = \eta > 0$ ist, so gilt in (18), (19) durchweg das Gleichheitszeichen; also ist

$$2\beta = f''_-(\xi) = f''_+(\xi) = -2\alpha,$$

$$\alpha + \beta = 0.$$

Bis auf die drei unter III) behandelten Ausnahmen ist also

$$f'(\xi) < L.$$

2) Es sei $\Delta \leqq 1, \quad \xi \geqq \gamma$.

II) Nach (24) ist, ξ durch γ ersetzt (es ist $0 \leqq \frac{1}{2} \leqq \gamma \leqq \xi \leqq 1$) und $b = 0$ genommen,

$$f'(\gamma) \leqq \frac{1 + \beta\gamma^2 + f(\gamma)}{\gamma} \leqq \frac{2 + \beta\gamma^2}{\gamma} = 0.$$

Wegen $\xi \geqq \gamma$ ist also nach dem Taylorschen Satz

$$f(\xi) \leqq f(\gamma) + (\xi - \gamma) f'(\gamma) + \frac{(\xi - \gamma)^2}{2} 2\beta \leqq 1 + \beta(\xi - \gamma)^2.$$

Nach (24) mit $b = 0$ ist also (ξ ist > 0 wegen $\xi \geqq \gamma$)

$$f'(\xi) \leqq \frac{1+\beta\xi^2+f(\xi)}{\xi} \leqq \frac{2+\beta\xi^2+\beta(\xi-\gamma)^2}{\xi}$$
$$= \frac{2+2\beta\xi^2-2\beta\xi\gamma+\beta\gamma^2}{\xi} = 2\beta(\xi-\gamma) = L.$$

III) Die Funktion
$$f(x) = -1-2\beta\gamma x+\beta x^2$$
hat die Eigenschaften
$$-2\alpha \leqq f''(x) = 2\beta \leqq 2\beta \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1,$$
$$f'(x) = -2\beta\gamma+2\beta x = 2\beta(x-\gamma) \begin{cases} \geqq 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq \gamma, \\ \leqq 0 \text{ für } \gamma \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$
$$f'(\xi) = 2\beta(\xi-\gamma) = L,$$
$$f(0) = -1,$$
$$f(\gamma) = -1-2\beta\gamma^2+\beta\gamma^2 = 1,$$
$$f(1) = -1-2\beta\gamma+\beta = \beta(1-2\gamma)-1 \geqq -1,$$
$$|f(x)| \leqq 1 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1.$$

IV) und V') Keine weitere Behauptung.

($\varDelta \leqq 1$ wurde in 2) gar nicht benutzt; aber man wundere sich nicht darüber. Denn aus $\xi \geqq \gamma$ folgt
$$\varDelta = \sqrt{\xi^2+\frac{2+\beta\xi^2}{\alpha}} \leqq \sqrt{\xi^2+\frac{2+\beta\gamma^2}{\alpha}} = \xi \leqq 1.)$$

3) **Es sei** $\varDelta \leqq 1 < \varDelta+\gamma,\ \xi < \gamma.$

II) In (24) setze ich $b = \varDelta-\xi$ ein; das geht wegen
$$0 = \sqrt{\xi^2+\frac{2+\beta\gamma^2}{\alpha}}-\xi < \sqrt{\xi^2+\frac{2+\beta\xi^2}{\alpha}}-\xi = \varDelta-\xi$$
$$= b \leqq 1-\xi = \eta.$$
Ich erhalte
$$f'(\xi) \leqq \frac{1+\beta\xi^2+\alpha(\varDelta-\xi)^2+f(\varDelta)}{\varDelta} \leqq \frac{1+\beta\xi^2+\alpha(\varDelta-\xi)^2+1}{\varDelta}$$
$$= \frac{2+(\alpha+\beta)\xi^2+\alpha\varDelta^2-2\alpha\varDelta\xi}{\varDelta} = \frac{2\alpha\varDelta^2-2\alpha\varDelta\xi}{\varDelta} = 2\alpha(\varDelta-\xi) = L.$$

III) und V') Ich setze

$$F(x) = \begin{cases} -1-\beta\xi^2+Lx+\beta(x-\xi)^2 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi, \\ -1-\beta\xi^2+Lx-\alpha(x-\xi)^2 & \text{für } \xi \leqq x \leqq \Delta, \\ 1+\beta(x-\Delta)^2 & \text{für } \Delta \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Jedenfalls ist einheitlich

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -1-\beta\xi^2+L\xi, \\ F'(\xi) &= L, \\ F(\Delta) &= -1-\beta\xi^2+L\Delta-\alpha(\Delta-\xi)^2 = 1, \\ F'(\Delta) &= L-2\alpha(\Delta-\xi) = 0 \end{aligned}$$

definiert, $F''(x)$ auf jeder Teilstrecke konstant 2β oder -2α, also

$$F'(x) \begin{cases} \geqq 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \Delta, \\ \leqq 0 & \text{für } \Delta \leqq x \leqq 1; \end{cases}$$

aus

$$F(0) = -1, \qquad F(\Delta) = 1,$$
$$F(1) = 1+\beta(1-\Delta)^2 > 1+\beta\gamma^2 = -1$$

folgt also

$$|F(x)| \leqq 1.$$

Das bei V') Verlangte ist damit erfüllt.

Von den zwei Beispielen zu III) mit

$$\alpha+\beta > 0, \quad \xi = 0$$

oder

$$\alpha+\beta = 0$$

ist das zweite schon durch

$$f(x) = F(x)$$

geliefert. Das erste lässt sich aus $F(x)$ folgendermassen herstellen. Wegen $\xi = 0$ sind höchstens die beiden Strecken $(0 \ldots \Delta)$, $(\Delta \ldots 1)$ vorhanden, davon die erste sicher. Ist $\Delta = 1$, so genügt schon

$$f(x) = F(x).$$

Ist $\varDelta < 1$, so wähle ich $\varepsilon > 0$ und so klein, dass

$$\varDelta + \varepsilon < 1$$

und

$$F(1) - 2\varepsilon(\alpha + \beta) \geqq -1$$

(was wegen $F(1) > -1$ geht), setze

$$h(x) = \begin{cases} \text{linear von } -2(\alpha+\beta) \text{ zu } 0 \text{ steigend} & \\ & \text{für } \varDelta \leqq x \leqq \varDelta + \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \varDelta + \varepsilon \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq \varDelta, \\ F(x) + \int_{\varDelta}^{x} dy \int_{\varDelta}^{y} h(z)\, dz & \text{für } \varDelta \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Dann ist einheitlich definiert

$$f(\varDelta) = F(\varDelta),$$
$$f'(\varDelta) = F'(\varDelta),$$
$$f''(\varDelta) = F''_-(\varDelta) = -2\alpha = F''_+(\varDelta) + h(\varDelta) = 2\beta + (-2\alpha - 2\beta).$$

Auf $\varDelta \leqq x \leqq 1$ ist

$$-2\alpha = f''(x) = F''(x) + h(x) \leqq 2\beta,$$

$$1 \geqq F(x) \geqq f(x) \geqq F(x) - \int_0^1 dy \int_{\varDelta}^{1} |h(z)|\, dz$$
$$\geqq F(1) - 2\varepsilon(\alpha + \beta) \geqq -1.$$

IV) Falls

$$f'(\xi) = L,$$

lehrt die Herleitung von (24): Wenn $\xi > 0$, also $a = \xi > 0$, $b = \varDelta - \xi > 0$, so ist

$$2\beta = f''_-(\xi) = f''_+(\xi) = -2\alpha,$$
$$\alpha + \beta = 0.$$

Bis auf die beiden unter III) behandelten Ausnahmen ist also

$$f'(\xi) < L.$$

4) **Es sei** $\varDelta + \gamma \leqq 1$, $\xi < \gamma$.

Erstens: Es sei $\gamma = \frac{1}{2}$. Dann war schon oben

$$f(x) = 1 - 8\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1$$

bewiesen, und es ist

$$f'(\xi) = -16\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right) = 8 - 16\xi$$
$$= -2\alpha\xi - 2\beta(1-\gamma) + 2\sqrt{(\alpha+\beta)\left((\alpha+\beta)\xi^2 - \beta(2\gamma-1)\right)} = L.$$

Zweitens: Es sei $\gamma > \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\alpha + \beta > 0;$$

denn sonst wäre

$$\varDelta = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{-\beta}} = \gamma,$$
$$1 \geqq \varDelta + \gamma = 2\gamma,$$
$$\gamma \leqq \frac{1}{2}.$$

Ferner ist

$$1 - \gamma \geqq \varDelta = \sqrt{\xi^2 + \frac{2 + \beta\xi^2}{\alpha}} > \sqrt{\xi^2 + \frac{2 + \beta\gamma^2}{\alpha}} = \xi,$$
$$0 \leqq \xi < 1 - \gamma.$$

II) Es ist (für später beachte man, dass die Herleitung von (25) von $f''(x) \geqq -2\alpha$ keinen Gebrauch macht, auch nicht von den Voraussetzungen des Falles 4), wenn nur $\gamma < 1$ ist)

$$-1 \leqq f(1) \leqq f(1-\gamma) + \gamma f'(1-\gamma) + \frac{\gamma^2}{2} \cdot 2\beta$$
$$\leqq 1 + \gamma f'(1-\gamma) + \beta\gamma^2 = -1 + \gamma f'(1-\gamma),$$
$$f'(1-\gamma) \geqq 0.$$

Für $0 \leqq x \leqq 1 - \gamma$ ist also

$$f(x) \leqq f(1-\gamma) + (x-1+\gamma) f'(1-\gamma) + \frac{(x-1+\gamma)^2}{2} 2\beta$$

(25) $$\leqq 1 + \beta(x-1+\gamma)^2.$$

Ich setze nun

$$E = \sqrt{\xi^2 - \beta \frac{2\gamma - 1}{\alpha + \beta}};$$

dann ist

$$E > \xi,$$

$$(\alpha + \beta) E^2 = (\alpha + \beta) \xi^2 - \beta (2\gamma - 1)$$

$$(26) \qquad = (\alpha + \beta) \xi^2 + 2 + \beta (1 - \gamma)^2$$

$$= \alpha \Delta^2 + \beta (1 - \gamma)^2 \leqq \alpha (1 - \gamma)^2 + \beta (1 - \gamma)^2 = (\alpha + \beta)(1 - \gamma)^2,$$

$$E \leqq 1 - \gamma.$$

Ich wende nun (24) mit $b = -\xi + E$ an; das geht wegen

$$0 < b \leqq -\xi + 1 - \gamma = \eta - \gamma < \eta$$

und ergibt

$$f'(\xi) \leqq \frac{1 + \beta \xi^2 + \alpha (-\xi + E)^2 + f(E)}{E},$$

also nach (25) mit $x = E$

$$(27) \qquad E f'(\xi) \leqq 2 + \beta \xi^2 + \alpha (-\xi + E)^2 + \beta (E - 1 + \gamma)^2$$

$$= 2 + \beta \xi^2 + \alpha \xi^2 - 2 \alpha E \xi + \alpha E^2 + \beta E^2 - 2 \beta E (1 - \gamma) + \beta (1 - \gamma)^2$$

$$= 2 + (\alpha + \beta) \xi^2 + \beta (1 - \gamma)^2 - 2 E \big(\alpha \xi + \beta (1 - \gamma)\big) + (\alpha + \beta) E^2;$$

nach (26) ist die rechte Seite

$$= 2 (\alpha + \beta) E^2 - 2 E \big(\alpha \xi + \beta (1 - \gamma)\big)$$

$$= E \Big(2 (\alpha + \beta) E - 2 \big(\alpha \xi + \beta (1 - \gamma)\big)\Big)$$

$$(28) \qquad = E \Big(2 \sqrt{(\alpha + \beta) \big((\alpha + \beta) \xi^2 - \beta (2\gamma - 1)\big)} - 2 \alpha \xi - 2 \beta (1 - \gamma)\Big) = L E.$$

III) Keine Behauptung mehr.

V') Ich setze

$$F(x) = \begin{cases} -1 - \beta \xi^2 + L x + \beta (x - \xi)^2 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi, \\ -1 - \beta \xi^2 + L x - \alpha (x - \xi)^2 & \text{für } \xi \leqq x \leqq E, \\ 1 + \beta (x - 1 + \gamma)^2 & \text{für } E \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Jedenfalls ist einheitlich

$$F(\xi) = -1-\beta\xi^2+L\xi,$$
$$F'(\xi) = L,$$
$$F(E) = -1-\beta\xi^2+LE-\alpha(E-\xi)^2 = 1+\beta(E-1+\gamma)^2$$

nach (28),

$$F'(E) = L-2\alpha(E-\xi) = 2\beta(E-1+\gamma),$$

gleichfalls nach (28). Da $F''(x)$ streckenweise 2β oder -2α ist, steigt $F'(x)$ nirgends. Wegen $E \leqq 1-\gamma < 1$ ist

$$F(1-\gamma) = 1, \quad F'(1-\gamma) = 0;$$

aus

$$F(0) = -1, \quad F(1-\gamma) = 1, \quad F(1) = 1+\beta\gamma^2 = -1$$

folgt also

$$|F(x)| \leqq 1.$$

IV) Falls

$$f'(\xi) = L$$

ist und $\xi > 0$ ist, lehrt die Herleitung von (24) wegen $a = \xi > 0$, $b = -\xi+E > 0$, dass

$$2\beta = f''_-(\xi) = f''_+(\xi) = -2\alpha$$

wäre, gegen

$$\alpha+\beta > 0.$$

Der Fall

$$f'(0) = L$$

kann aber auch nicht vorkommen; denn wegen der Entstehung von (27) wäre

$$f(0) = -1, \quad f(E) = 1+\beta(E-1+\gamma)^2,$$
$$f''(x) = -2\alpha \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq E,$$

also

$$f'(E) = f'(0)-2\alpha E = L-2\alpha E = 2\beta(E-1+\gamma),$$
$$f(1)-f(E)-(1-E)f'(E)$$
$$= \int_E^1 \bigl(f'(x)-f'(E)\bigr)\,dx \leqq \int_E^1 2\beta(x-E)\,dx.$$

Hier gilt nicht das Gleichheitszeichen; denn sonst wäre

$$f'(x)-f'(E) = 2\beta(x-E) \quad \text{für } E \leqq x \leqq 1,$$
$$f''_{+}(E) = 2\beta,$$

gegen

$$f''_{-}(E) = -2\alpha < 2\beta.$$

Daher wäre

$$\begin{aligned} & -1 \leqq f(1) \\ & < f(E)+(1-E)f'(E)+\int_E^1 2\beta(x-E)\,dx \\ & = 1+\beta(E-1+\gamma)^2-2\beta(E-1)(E-1+\gamma)+\beta(E-1)^2 \\ & = 1+\beta(E-1)^2+2\beta(E-1)\gamma+\beta\gamma^2-2\beta(E-1)^2-2\beta(E-1)\gamma \\ & \qquad +\beta(E-1)^2 = -1, \end{aligned}$$

was nicht der Fall ist, wegen

$$-1 \geqq -1.$$

In allen vier Fällen.

V) Nachdem V') erledigt ist, konstruiere ich folgendermassen das gewünschte $f(x)$ mit

$$|f(x)| \leqq 1,$$
$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta,$$
$$f'(\xi) > L-\delta$$

$(L = L(\xi, \alpha, \beta))$, wo $\delta > 0$ gegeben ist. Ich wähle nach (22) ein positives $\varepsilon(\delta)$ so klein, dass,

$$L(\xi,\ \alpha(1+\varepsilon),\ \beta(1+\varepsilon)) = L^*$$

gesetzt,

$$\frac{L^*-\varepsilon}{1+\varepsilon} > L-\delta$$

ist. Nun wähle ich nach V') ein $F(x)$ so, dass

$$\left.\begin{array}{r}|F(x)| \leqq 1, \\ F'(x) \text{ vorhanden}\end{array}\right\} \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1,$$
$$F'(\xi) = L^*,$$

$$F''(x) = \begin{cases} \mu & \text{für } 0 \leqq x \leqq u, \\ \nu & \text{für } u \leqq x \leqq v, \\ \varrho & \text{für } v \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

ist, wo $0 < u < v < 1$ und jede der Zahlen μ, ν, ϱ gleich $-2\alpha(1+\varepsilon)$ oder $2\beta(1+\varepsilon)$ ist. Ich wähle jetzt $\zeta = \zeta(\delta) > 0$ und so klein, dass

$$u + \zeta < v, \quad v + \zeta < 1, \quad 4\zeta\alpha(1+\varepsilon) \leqq \varepsilon$$

ist, bestimme $h(x)$ durch die Festsetzung

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq u, \\ \text{linear von } \mu-\nu \text{ zu } 0 & \text{für } u \leqq x \leqq u+\zeta, \\ 0 & \text{für } u+\zeta \leqq x \leqq v, \\ \text{linear von } \nu-\varrho \text{ zu } 0 & \text{für } v \leqq x \leqq v+\zeta, \\ 0 & \text{für } v+\zeta \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

und setze

$$g(x) = F(x) + \int_0^x dy \int_0^y h(z)\,dz.$$

Dann ist

$$g''_-(u) = \mu + 0 = \nu + (\mu - \nu) = g''_+(u),$$
$$g''_-(v) = \nu + 0 = \varrho + (\nu - \varrho) = g''_+(v),$$

also $g''(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ vorhanden und

$$-2\alpha(1+\varepsilon) \leqq g''(x) \leqq 2\beta(1+\varepsilon),$$

$$g'(\xi) = F'(\xi) + \int_0^\xi h(z)\,dz \geqq L^* - 4\zeta\alpha(1+\varepsilon) \geqq L^* - \varepsilon$$

$$|g(x)| \leqq |F(x)| + \int_0^x dy \int_0^y |h(z)|\,dz \leqq 1 + \int_0^1 dy\, 4\zeta\alpha(1+\varepsilon)$$
$$= 1 + 4\zeta\alpha(1+\varepsilon) \leqq 1 + \varepsilon.$$

Die Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{1+\varepsilon}$$

genügt also den Bedingungen

$$|f(x)| = \frac{|g(x)|}{1+\varepsilon} \leqq 1,$$

$$-2\alpha \leqq f''(x) = \frac{g''(x)}{1+\varepsilon} \leqq 2\beta,$$

$$f'(\xi) = \frac{g'(\xi)}{1+\varepsilon} \geqq \frac{L^* - \varepsilon}{1+\varepsilon} > L - \delta.$$

§ 3.

β.

Hauptsatz 3: Für $0 \leqq x \leqq 1$ sei

$$|f(x)| \leqq 1,$$
$$f''(x) \leqq 2\beta.$$

Behauptet wird:

I) Ein Widerspruch liegt dann und nur dann vor, wenn

$$\beta < -8$$

ist.

Im weiteren Wortlaut des Satzes sei

$$\beta \geqq -8$$

und im Falle $\beta < 0$

$$\sqrt{\frac{2}{|\beta|}} = \gamma$$

gesetzt; ferner

$$0 \leqq \xi \leqq 1,$$
$$\eta = 1 - \xi.$$

II) Es existiert keine obere Schranke für $f'(\xi)$, falls

$$\beta > -8, \quad \xi = 0.$$

III) Sonst stets, und zwar ist

$$f'(\xi) \leqq L = L(\xi, \beta) = \begin{cases} 2\sqrt{2\beta}, & \text{falls } \xi > 0, \quad \beta > \dfrac{2}{\xi^2}, \\ \dfrac{2+\beta\xi^2}{\xi}, & \text{falls } \xi > 0, \quad 0 \leqq \beta \leqq \dfrac{2}{\xi^2}, \\ 8, & \text{falls } \xi = 0, \\ 2\beta(\xi-\gamma), & \text{falls } \beta < 0, \quad \xi \geqq \gamma, \\ \dfrac{2+\beta\xi^2}{\xi}, & \text{falls } \beta < 0, \; 1-\gamma \leqq \xi < \gamma, \; \xi > 0, \\ -2\beta(\eta-\gamma) - \dfrac{\beta(2\gamma-1)}{\xi}, & \text{falls } \beta < 0, \; 0 < \xi < 1-\gamma, \end{cases}$$

was ich als Fall 1) bis 6) bezeichne.

IV) In jedem der Fälle

1) mit $\xi = 1$,
2) mit $\xi = 1$,
3),
4),
5) mit $\xi = 1$,
6) mit $\gamma = \frac{1}{2}$

gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) = L.$$

V) Sonst ist stets

$$f'(\xi) < L.$$

VI) Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Funktion mit

$$f'(\xi) > L - \delta.$$

Beweis: I) $\qquad \beta < -8$

ist unmöglich, wie wir vom Beweise des Hauptsatzes 2 her wissen. Falls

$$\beta \geqq 0,$$

erfüllt

$$f(x) = 0 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1$$

die Voraussetzungen; falls

$$-8 \leqq \beta < 0,$$

kennen wir aus dem Beweise des Hauptsatzes 2 ein solches Beispiel.

II) bis VI) Es darf also jetzt

$$\beta \geqq -8$$

angenommen werden. Ich beginne damit, für

$$\beta = -8$$

alle Behauptungen zu beweisen. Dann muss, wie wir aus dem Beweise des Hauptsatzes 2 wissen,

$$f(x) = 1 - 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1$$

sein, und hier ist

$$f'(\xi) = 8 - 16\xi;$$

dies stimmt mit dem behaupteten Werte von L in den drei möglichen Fällen 3), 4), 6) überein. In IV) wurde hier auch das Vorkommen des Gleichheitszeichens behauptet.

Ich darf also jetzt

$$\beta > -8$$

annehmen.

II) Die Nichtexistenz der oberen Schranke für $f'(0)$ wird gezeigt sein, wenn dies für jedes negative $\beta\,(>-8)$ gezeigt ist. Denn alle Funktionen mit

$$|f(x)| \leqq 1, \quad f''(x) \leqq -1$$

sind bei jedem $\beta \geqq 0$ enthalten unter den Funktionen mit

$$|f(x)| \leqq 1, \quad f''(x) \leqq 2\beta.$$

Nach dem zweiten Hauptsatz gibt es nun für $-8 < \beta < 0$ zu jedem $\alpha \geqq |\beta|$ ein $f(x)$, so dass

$$|f(x)| \leqq 1,$$
$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta,$$
$$f'(0) > L(0, \alpha, \beta) - 1$$

ist. Daher genügt es,

$$L(0, \alpha, \beta) \rightarrow \infty \text{ bei } \alpha \rightarrow \infty$$

zu zeigen. Dies folgt daraus, dass in den Fällen 1), 3), 4) des Hauptsatzes 2 (Fall 2) kommt wegen $\xi = 0$ nicht vor) bezw.

$$L(0, \alpha, \beta) = \begin{cases} 2 + \alpha, \\ 2\sqrt{2\alpha}, \\ -2\beta(1-\gamma) + 2\sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{|\beta|(2\gamma-1)} \end{cases}$$

ist.

III), IV), V) Es darf also jetzt

$$\beta > -8, \quad \xi > 0$$

angenommen werden.

Für $0 < a \leqq \xi$ ist

$$a f'(\xi) = -f(\xi - a) + f(\xi) + \int_{\xi-a}^{\xi} \bigl(f'(\xi) - f'(x)\bigr)\, dx$$

(29) $$f'(\xi) \leqq \frac{1 + f(\xi) + \beta a^2}{a}.$$

1) **Es sei** $\beta > \frac{2}{\xi^2}$.

Nach (29) ist

(30) $$f'(\xi) \leqq \frac{2 + \beta a^2}{a}$$

Ich setze

$$a = \sqrt{\frac{2}{\beta}},$$

was wegen

$$0 < \sqrt{\frac{2}{\beta}} < \xi$$

geht, und finde

$$f'(\xi) \leqq 2\sqrt{2\beta} = L.$$

Falls $\xi < 1$ ist, ist das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Denn sonst wäre nach der Entstehung von (30)

$$f(\xi) = 1,$$

gegen

$$f'(\xi) = L > 0.$$

Falls $\xi = 1$, also $\beta > 2$ ist, kommt das Gleichheitszeichen vor. Denn $F(x)$ sei die in Hauptsatz 1 zu $\xi_1 = 0$, $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = 0$ konstruierte Funktion mit

$$|F(x)| \leqq 1,$$

$$-2\beta = -2\alpha_1 \leqq F''(x) \leqq 2\beta_1 = 0,$$

$$F'(0) = L(\xi_1, \alpha_1, \beta_1) = 2\sqrt{2\alpha_1} = 2\sqrt{2\beta}$$

(Fall 2) daselbst liegt vor), und es werde

$$f(x) = -F(1-x)$$

gesetzt. Dann ist

$$|f(x)| \leqq 1,$$

$$f''(x) \leqq 2\beta,$$

$$f'(\xi) = f'(1) = 2\sqrt{2\beta} = L.$$

2) Es sei $0 \leqq \beta \leqq \frac{2}{\xi^2}$.

Nach (29) ist, $a = \xi$ eingesetzt,

$$f'(\xi) \leqq \frac{2 + \beta\xi^2}{\xi} = L. \tag{31}$$

Falls $\xi < 1$ ist, ist das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Denn sonst wäre nach der Entstehung von (31)

$$f(\xi) = 1,$$

gegen

$$f'(\xi) = L > 0.$$

Falls $\xi = 1$, also $0 \leqq \beta \leqq 2$ ist, kommt das Gleichheitszeichen vor, bei

$$f(x) = -1 + (2-\beta)x + \beta x^2.$$

Denn hier ist

$$f''(x) = 2\beta,$$

$$f'(x) = 2-\beta+2\beta x \geqq 2-\beta \geqq 0,$$

$$-1 = f(0) \leqq f(x) \leqq f(1) = 1,$$

$$f'(\xi) = f'(1) = 2-\beta+2\beta = 2+\beta = L.$$

(3) ist nicht mehr zu betrachten.)

4) Es sei $\beta < 0$, $\xi \geqq \gamma$.

Nach (29) ist, ξ durch γ ersetzt und $\alpha = \gamma$ eingesetzt,

$$f'(\gamma) \leqq \frac{2+\beta\gamma^2}{\gamma} = 0;$$

daher ist

$$f'(\xi) \leqq f'(\xi) - f'(\gamma) \leqq 2\beta(\xi-\gamma) = L.$$

Das Gleichheitszeichen kommt hier sicher vor, bei

$$f(x) = 1 + \beta(x-\gamma)^2.$$

Denn hier ist

$$f''(x) = 2\beta,$$

$$f'(x) = 2\beta(x-\gamma)\begin{cases} \geqq 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \gamma, \\ \leqq 0 & \text{für } \gamma \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

$$f(0) = 1 + \beta\gamma^2 = -1,$$

$$f(\gamma) = 1,$$

$$f(1) = 1+\beta(1-\gamma)^2 = 1+\beta\gamma^2+\beta(1-2\gamma) \geqq 1+\beta\gamma^2 = -1,$$

$$|f(x)| \leqq 1,$$

$$f'(\xi) = 2\beta(\xi-\gamma) = L.$$

5) **Es sei $\beta < 0$, $1-\gamma \leqq \xi < \gamma$.**

Nach (29) mit $a = \xi$ ist

$$f'(\xi) \leqq \frac{2+\beta\xi^2}{\xi} = L. \tag{32}$$

Falls $\xi < 1$ ist, ist das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Denn sonst wäre nach der Entstehung von (32)

$$f(\xi) = 1,$$

gegen

$$f'(\xi) = L = \frac{2+\beta\xi^2}{\xi} > \frac{2+\beta\gamma^2}{\xi} = 0.$$

Falls $\xi = 1$ ist, kommt das Gleichheitszeichen vor, bei

$$f(x) = -1 + (2-\beta)\,x + \beta x^2.$$

Denn hier ist

$$f''(x) = 2\beta,$$

$$f'(x) \geqq f'(1) = 2-\beta+2\beta = 2+\beta > 2+\beta\gamma^2 = 0,$$

$$-1 = f(0) \leqq f(x) \leqq f(1) = 1,$$

$$f'(\xi) = f'(1) = 2+\beta = L.$$

6) **Es sei $\beta < 0$, $\xi < 1-\gamma$.**

Nach (25) (vergl. die Voraussetzungen, unter denen (25) abgeleitet wurde) ist

$$f(\xi) \leqq 1 + \beta\,(\xi-1+\gamma)^2,$$

also wegen (29), $a = \xi$ eingesetzt,

$$f'(\xi) \leqq \frac{2+\beta\,(\xi-1+\gamma)^2+\beta\xi^2}{\xi}$$

$$= \frac{2+\beta\xi^2-2\beta\,(1-\gamma)\,\xi+\beta\,(1-\gamma)^2+\beta\xi^2}{\xi}$$

$$= \frac{2\beta\xi^2-2\beta\,(1-\gamma)\,\xi+\beta-2\beta\gamma}{\xi} = \beta\left(2\xi-2\,(1-\gamma)+\frac{1-2\gamma}{\xi}\right)$$

$$= -2\beta\,(\eta-\gamma)-\beta\,\frac{2\gamma-1}{\xi} = L. \tag{33}$$

Wegen $\gamma > \frac{1}{2}$ ist das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Denn sonst müsste nach der Entstehung von (33)

$$f(\xi) = 1 + \beta(\xi - 1 + \gamma)^2$$

sein. Wegen der Entstehung von (25) wäre also

$$f(1-\gamma) = 1, \quad f'(1-\gamma) = 0,$$

$$\beta(\xi-1+\gamma)^2 = f(\xi)-1 = f(\xi)-f(1-\gamma)-(\xi-1+\gamma)f'(1-\gamma)$$

$$= \int_\xi^{1-\gamma} \bigl(f'(1-\gamma)-f'(x)\bigr)\,dx.$$

Für $\xi \leqq x \leqq 1-\gamma$ wäre also, wegen

$$f'(1-\gamma)-f'(x) \leqq 2\beta(1-\gamma-x)$$

nebst

$$\int_\xi^{1-\gamma} 2\beta(1-\gamma-x)\,dx = \beta(\xi-1+\gamma)^2,$$

$$-f'(x) = f'(1-\gamma)-f'(x) = 2\beta(1-\gamma-x);$$

daher wäre

$$L = f'(\xi) = -2\beta(1-\gamma-\xi) = -2\beta(\eta-\gamma),$$

während

$$L = -2\beta(\eta-\gamma)-\frac{\beta(2\gamma-1)}{\xi} > -2\beta(\eta-\gamma)$$

ist.

VI) Ich habe noch jedesmal dort, wo

$$f'(\xi) < L$$

bewiesen war, zu zeigen, dass bei passendem $f(x)$

$$|f(x)| \leqq 1,$$

$$f''(x) \leqq 2\beta,$$

$$f'(\xi) > L - \delta$$

ist.

Hierzu mache ich zunächst darauf aufmerksam, dass jedesmal

$$L = L(\xi, \beta) = \lim_{\alpha = \infty} L(\xi, \alpha, \beta) \tag{34}$$

ist, wo $L(\xi, \alpha, \beta)$ die Bedeutung aus Hauptsatz 1 (wenn $\beta \geqq 0$) bezw. Hauptsatz 2 (wenn $\beta < 0$) hat.

Dazu gehe ich die Fälle 1), 2), 5), 6) des Hauptsatzes 3 der Reihe nach durch. (Fall 3) und 4) sind nicht mehr zu betrachten.)

Fall 1). $\xi = 1$ durfte ausgeschlossen werden. Es liegt wegen $\beta \xi^2 > 2$ für grosse α der Fall 1) des Hauptsatzes 1 vor, indem dann

$$\beta \xi \leqq \alpha \eta,$$
$$\beta(\alpha + \beta)\xi^2 > \beta \xi^2 \alpha > 2\alpha$$

ist, und man erhält bei $\alpha \to \infty$

$$L(\xi, \alpha, \beta) = 2\sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \to 2\sqrt{2\beta} = L.$$

Fall 2). $\xi = 1$ durfte ausgeschlossen werden. Für grosse α ist

$$\beta \xi \leqq \alpha \eta$$

erfüllt, und es liegt wegen $\beta \xi^2 \leqq 2$, $\beta \geqq 0$ bei grossen α für $\beta \xi^2 = 2$ Fall 1) des Hauptsatzes 1 vor, für $\beta \xi^2 < 2$ Fall 2) des Hauptsatzes 1 vor. Für $\beta \xi^2 = 2$ ist

$$L(\xi, \alpha, \beta) = 2\sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \to 2\sqrt{2\beta} = \frac{4}{\xi} = \frac{2+\beta\xi^2}{\xi} = L,$$

für $\beta \xi^2 < 2$

$$L(\xi, \alpha, \beta) = -2\alpha\xi + 2\sqrt{\alpha\left(2 + (\alpha+\beta)\xi^2\right)}$$
$$= -2\alpha\xi + 2\alpha\xi\sqrt{1 + \frac{2+\beta\xi^2}{\alpha\xi^2}} \to \frac{2+\beta\xi^2}{\xi} = L.$$

Fall 5). $\xi = 1$ durfte ausgeschlossen werden. Für $-\alpha \leqq \beta$ ist

$$\Delta = \sqrt{\frac{2+(\alpha+\beta)\xi^2}{\alpha}} = \sqrt{\xi^2 + \frac{2+\beta\xi^2}{\alpha}} > \sqrt{\xi^2 + \frac{2+\beta\gamma^2}{\alpha}} = \xi,$$

$$\Delta + \gamma > \xi + \gamma \geqq 1,$$

$$\Delta \Rightarrow \xi;$$

für grosse α ist also

$$\Delta \leqq 1 < \Delta + \gamma;$$

Fall 3) des Hauptsatzes 2 liegt dann vor, und es ergibt sich

$$L(\xi, \alpha, \beta) = 2\alpha(\Delta - \xi) = -2\alpha\xi + 2\sqrt{\alpha\left(2+(\alpha+\beta)\xi^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2+\beta\xi^2}{\xi} = L.$$

Fall 6). Wegen

$$\Delta + \gamma \Rightarrow \xi + \gamma,$$

$$\xi + \gamma < 1$$

liegt für grosse α Fall 4) des Hauptsatzes 2 vor; denn aus $\xi < 1 - \gamma$ folgt $\xi < \gamma$. Man erhält

$$L(\xi, \alpha, \beta) = -2\alpha\xi - 2\beta(1-\gamma) + 2(\alpha+\beta)\xi\sqrt{1 - \frac{\beta(2\gamma-1)}{(\alpha+\beta)\xi^2}}$$

$$\Rightarrow -2\beta(1-\gamma) + 2\beta\xi - \frac{\beta(2\gamma-1)}{\xi} = L.$$

Aus (34) folgt aber alles. Denn bei gegebenem $\delta > 0$ wähle man α so, dass

$$L(\xi, \alpha, \beta) > L - \frac{\delta}{2}$$

ist, alsdann ein $f(x)$, so dass für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|f(x)| \leqq 1,$$

$$-2\alpha \leqq f''(x) \leqq 2\beta,$$

$$f'(\xi) > L(\xi, \alpha, \beta) - \frac{\delta}{2}$$

ist. Dann ist

$$f''(x) \leqq 2\beta,$$

$$f'(\xi) > L - \delta.$$

Göttingen, den 15. Januar 1925.

Færdig fra Trykkeriet den 24. Juni 1925.