Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 5.

SUR LE GENRE
DE CERTAINES
ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

AVANT-PROPOS

La détermination générale du genre d'une équation de Lagrange

$$(1) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} \omega$$

est évidemment un problème très difficile.

En effet, ce genre, savoir le nombre des suites formées des solutions de l'équation (1), ne dépend pas seulement du nombre des facteurs premiers du paramètre ω, mais aussi, et d'une manière apparemment très cachée, de la nature de la base a.

Soit r le nombre des facteurs premiers de ω, nous savons que le genre de l'équation (1) est au plus égal à 2^r, ce qui a par exemple toujours lieu pour les bases 2, 3, 5, pourvu que ω ne soit pas, pour $a = 3$, de la forme $4k + 2$; dans ce cas, le genre se réduit à 2^{r-1}.

Remarquons que l'équation (1) ne peut jamais être résoluble, à moins que tous les facteurs premiers de ω ne soient diviseurs de la forme quadratique

$$(2) \qquad x^2 - a y^2,$$

puis supposons que l'équation (1) ne soit pas résoluble pour des valeurs impaires de ω, inférieures à une certaine limite ω_1, de sorte que la résolubilité de (1) exige

$$(3) \qquad \omega \geqq \omega_1,$$

il est évident que cette condition exclut, comme paramètres, les diviseurs premiers de la forme quadratique (2) qui sont inférieurs à ω, ce qui a pour conséquence que d'autres de ces diviseurs premiers deviennent aussi inapplicables, comme paramètres de l'équation proposée. Et cette exclusion des diviseurs premiers de la forme quadratique (2) conduira à un autre problème difficile, savoir la détermination de la hauteur des diviseurs premiers susdits.

En effet, soit p un de ces diviseurs premiers exclus, il existe un nombre ϱ, tel que l'équation

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} p^k \tag{4}$$

est résoluble, pourvu que k soit multiple de ϱ, et seulement dans ce cas.

Or, la détermination générale de la valeur limite inférieure ω_1 étant évidemment si difficile qu'il peut être désigné comme irrésoluble, j'ai étudié, et dans le Mémoire présent et dans une publication récente[1], certaines bases de formes spéciales, contenant un paramètre quelconque, notamment les bases

$$\alpha^2 \pm 1, \quad \alpha^2 \pm 2, \quad \alpha(\alpha + 1),$$

pour lesquelles il est rélativement facile de déterminer la limite inférieure ω_1. Et j'ai appliqué les résultats ainsi obtenus à l'établissement des tables jointes au présent Mémoire, tables qui donnent un élément primitif de chacun des couples de suites coordonnées de toutes les équations résolubles de la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} \omega, \quad a = 34, 79, 82, 101$$

qui correspondent à $\omega \leqq 1000$.

[1] Recherches sur certaines équations de Lagrange de formes spéciales.

Quant au genre de l'équation (1), ce nombre est généralement diminué par l'adjonction à la base a du facteur carré p^2, de sorte qu'il s'agit de cette autre équation de LAGRANGE

$$u^2 - (ap^2)v^2 = (-1)^{\delta_1}\omega, \tag{5}$$

ou, ce qui est la même chose, des solutions de l'équation (1), dans lesquelles le nombre v est multiple de p. Et cette diminution dépend en quelque mesure du rang de p, par rapport à la base a, savoir du plus petit indice r pour lequel le nombre B_μ, tiré de l'équation de FERMAT

$$A_\mu^2 - aB_\mu^2 = (-1)^{\mu\varepsilon},$$

soit multiple de p.

La troisième Partie du Mémoire, que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie Royale des Sciences, donne la résolution du problème concernant les équations de LAGRANGE qui admettent des solutions de la forme (s, v) et (u, v) ou (s, t) et (s, v), problème qui s'est présenté dans les recherches précédentes.

Copenhague, le 20 avril 1923.

NIELS NIELSEN.

PREMIÈRE PARTIE

Applications des bases $\alpha^2 \pm 1$.

I. Théorème sur l'équation de Fermat.

Les équations spéciales

$$x^2 - (\alpha^2 + 1)\,y^2 = \pm 1, \quad x^2 - (\alpha^2 - 1)\,y^2 = 1 \tag{1}$$

jouent un rôle assez important, dans la théorie générale de l'équation de Fermat

$$x^2 - a\,y^2 = (-1)^{\delta}, \tag{2}$$

parce que cette dernière équation est en quelque mesure identique aux équations spéciales correspondantes.

En effet, désignons par (A_μ, B_μ) une solution quelconque de l'équation (2), savoir

$$A_\mu^2 - a\,B_\mu^2 = (-1)^{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \mu\delta, \tag{3}$$

nous savons que la solution générale de cette autre équation

$$x^2 - (a\,B_\mu^2)\,y^2 = (-1)^{\varkappa} \tag{4}$$

se présente sous la forme

$$\alpha_n = A_{n\mu}, \quad \beta_n = \frac{B_{n\mu}}{B_\mu}, \tag{5}$$

de sorte que nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$\alpha_n^2 - (a\,B_\mu^2)\,\beta_\mu^2 = (-1)^{n\varkappa}. \tag{6}$$

Appliquons ensuite l'équation (3), il résulte, en vertu de (4) et (5),

$$(7)\quad \begin{cases} x^2 - (A_\mu^2 - (-1)^\varepsilon)\, y^2 = (-1)^\varkappa \\ \alpha_n^2 - (A_\mu^2 - (-1)^\varepsilon)\, \beta_n^2 = (-1)^{n\varkappa}, \end{cases}$$

où les exposants ε et $\varkappa$ sont de même parité, et il est évident que ces deux dernières équations sont précisément de la forme spéciale (1).

Cela posé, les identités algébriques

$$(4\alpha^3 + 3\alpha)^2 - (\alpha^2 + 1)(4\alpha^2 + 1)^2 = -1$$
$$(4\alpha^3 - 3\alpha)^2 - (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)^2 = 1,$$

tirées directement des équations (1), parce que les premières solutions de ces équations deviennent respectivement

$$(\alpha,\, 1),\quad (2\alpha^2 + 1,\ 2\alpha),\quad (4\alpha^3 + 3\alpha,\ 4\alpha^2 + 1), \ldots$$
$$(\alpha,\, 1),\quad (2\alpha^2 - 1,\ 2\alpha),\quad (4\alpha^3 - 3\alpha,\ 4\alpha^2 - 1), \ldots,$$

donnent immédiatement, en vertu de (7),

$$(8)\qquad B_{3\mu} = B_\mu (4 A_\mu^2 - (-1)^\varepsilon),$$

formule qu'il est facile de généraliser beaucoup.

En effet, la conclusion de n à $n+1$ donnera immédiatement, en vertu de (8), la proposition curieuse:

I. Soit n un positif entier quelconque, on aura toujours

$$(9)\quad \begin{cases} B_{\mu 3^{n+1}} = B_\mu (4 A_\mu^2 - (-1)^\varepsilon)(4 A_{3\mu} - (-1)^\varepsilon) \ldots \\ \qquad\qquad (4 A_{\mu 3^n}^2 - (-1)^\varepsilon). \end{cases}$$

On voit que cette formule générale se présente sous forme élegante pour les équations spéciales (1), car on aura respectivement, en posant $\mu = 1$,

$$(10)\qquad B_{3^{n+1}} = (4\alpha^2 + 1)(4 A_3^2 + 1) \ldots (4 A_{3^n}^2 + 1),$$

$$(11)\qquad B_{3^{n+1}} = (4\alpha^2 - 1)(4 A_3^2 - 1) \ldots (4 A_{3^n}^2 - 1).$$

Soit par exemple, dans la formule (10), $\alpha = 1$, de sorte qu'il s'agit de l'équation classique

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1,$$

on aura

$$A_1 = 1, \quad A_3 = 7,$$

ce qui donnera

$$B_9 = 5 \cdot 197 = 985.$$

II. Applications aux bases de première espèce.

Les deux équations spéciales (1) de l'article précédent jouent aussi un rôle important, dans la théorie des équations de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} \omega. \tag{1}$$

A cet effet, étudions tout d'abord l'équation (1) qui correspond à une base de première espèce, de sorte que nous aurons, en vertu de la formule (3) de l'article précédent,

$$A_{2n+1}^2 - a B_{2n+1}^2 = -1. \tag{2}$$

Cela posé, l'identité évidente

$$(\alpha \pm 1)^2 - (\alpha^2 + 1) \cdot 1^2 = \pm 2\alpha \tag{3}$$

donnera immédiatement la proposition intéressante:

I. Soit a une base impaire de première espèce, quelconque du reste, l'équation de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = \pm 2 A_{2n+1} \tag{4}$$

est toujours résoluble, ayant, quel que soit l'indice n, les deux solutions

$$(A_{2n+1} - 1,\ B_{2n+1}), \quad (A_{2n+1} + 1,\ B_{2n+1}). \tag{5}$$

Quant aux bases paires de première espèce, les identités algébriques

$$(\alpha \pm 2)^2 - (\alpha^2 + 1) \cdot 1^2 = \pm 4\alpha + 3 \tag{6}$$

$$(2\alpha \mp 1)^2 - (\alpha^2 + 1) \cdot 2^2 = \mp 4\alpha - 3 \tag{7}$$

donnent la proposition, analogue à la précédente:

II. Soit a une base quelconque de première espèce, au moins une des équations de LAGRANGE

$$u^2 - a v^2 = \pm (4 A_{2n+1} \pm 3) \tag{8}$$

est toujours résoluble.

En effet, remarquons que les deux nombres

$$\alpha - 2, \quad 4\alpha - 3$$

sont premiers entre eux, pour

$$\alpha = 3k, \quad \alpha = 3k+1,$$

l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm (4 A_{2n+1} - 3) \tag{9}$$

est toujours résoluble, pourvu que A_{2n+1} ne soit pas de la forme $3k+2$, et qu'elle admet les solutions

$$(A_{2n+1} - 2, \ B_{2n+1}), \quad (2 A_{2n+1} + 1, \ 2 B_{2n+1}). \tag{10}$$

Et l'on voit, par le même procédé, que l'équation correspondante

$$u^2 - a v^2 = \pm (4 A_{2n+1} + 3) \tag{11}$$

est toujours résoluble, pourvu que A_{2n+1} ne soit pas de la forme $3k+1$, et qu'elle admet les solutions

$$(A_{2n+1} + 2, \ B_{2n+1}), \quad (2 A_{2n+1} - 1, \ 2 B_{2n+1}). \tag{12}$$

Cela posé, la forme même des solutions (5), (10), (11) montre clairement que les équations résolubles (4) et (8), admettent toujours le diviseur B_{2n+1}; posons donc

$$v = v_1 B_{2n+1},$$

puis appliquons l'équation (2), il résulte, en vertu de (4) et (8),

$$u^2 - (A_{2n+1}^2 + 1) v_1^2 = \pm 2 A_{2n+1}$$
$$u^2 - (A_{2n+1}^2 + 1) v_1^2 = \pm (4 A_{2n+1} \pm 3),$$

ce qui n'est autre chose que les équations spéciales (3), (6), (7), et j'ai récemment démontré[1] que ces équations sont toujours du genre 2, ce qui donnera la proposition curieuse:

III. Le diviseur B_{2n+1} ne peut appartenir, quels que soient la base a et l'indice n, qu'à un seul couple de suites coordonnées formées des solutions de l'équation correspondante (4), (8), (11).

Ce résultat est bien intéressant, parce que l'équation en question (4), (8), (11) est souvent d'un genre supérieur à 2, ce qui montre que le genre d'une équation de Lagrange peut être diminué, quand on augmente le nombre des facteurs premiers de la base a.

Remarquons encore que l'équation (4) ou (8) qui admet le diviseur B_{2n+1} est toujours du genre 2, quel que soit le nombre des facteurs premiers du paramètre $2A_{2n+1}$ respectivement $4A_{2n+1} \pm 3$.

Soit par exemple $a = 61$, on aura

$$\begin{aligned} A_1 &= 29718 = 2 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 127 \\ B_1 &= 3805 \quad = 5 \cdot 761; \end{aligned}$$

dans ce cas, l'équation

$$u^2 - 61 v^2 = \pm 59436$$

est parfaitement décomposable et par conséquent du genre 16, mais seulement 2 de ces 16 suites admettent le diviseur 3805.

Quant au genre de l'équation (4), qui est, à ce point de vue, la plus simple des équations susdites, nous avons encore à démontrer les deux lemmes suivants:

IV. Supposons résoluble l'équation

[1] Voir l'article VIII de mon Mémoire: Recherches sur certaines équations de Lagrange de formes spéciales.

$$(13) \qquad u^2 - a v^2 = \pm 4,$$

l'équation (4) est toujours au moins du genre 4.

Dans ce cas, on aura

$$a = 8k + 5, \quad 2A_{2n+1} = 16l + 4,$$

de sorte que l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm (4l + 1)$$

est résoluble; c'est-à-dire que l'équation (4) est décomposable et par conséquent au moins du genre 4.

V. Supposons que la base a se présente sous la forme

$$(14) \qquad a = (2\alpha + 1)^2 + 4, \quad \alpha = 3k, \ 3k + 2,$$

où k est un positif entier, l'équation (4) est toujours, pour $n = 0$, au moins du genre 8.

En effet, on aura ici

$$2A_1 = (2\alpha + 1)((2\alpha + 1)^2 + 3) = 4(2\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$
$$a - 1 = 4(\alpha^2 + \alpha + 1),$$

et les équations de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = \pm (2\alpha + 1)$$
$$u^2 - a v^2 = \pm (\alpha^2 + \alpha + 1)$$

sont toutes deux résolubles, de sorte qu'il ne s'agit que de démontrer que les deux nombres

$$p = 2\alpha + 1, \quad q = \alpha^2 + \alpha + 1,$$

toujours impairs, sont premiers entre eux.

Or, nous aurons évidemment

$$4q - p^2 = 3,$$

et p n'est pas multiple de 3, parce que $\alpha = 3k$ ou $\alpha = 3k + 2$.

Dans l'article IV, nous avons à donner la forme générale des équations du genre 2 que nous venons de considérer, et, dans l'article IX, nous avons à étudier plus amplement la forme singulière des solutions (5).

III. Applications aux bases de seconde espèce.

Quant aux nombres A_{2n} et aux bases de seconde espèce, nous avons tout d'abord à étudier l'équation spéciale

$$u^2 - (\alpha^2 - 1) v^2 = (-1)^{\delta} \omega \tag{1}$$

et à démontrer le lemme fondamental:

I. Soit $\alpha = 3k$ ou $\alpha = 3k+1$, la valeur minimum du paramètre ω, dans l'équation résoluble (1), est

$$\omega = 4\alpha - 5, \tag{2}$$

tandis que l'hypothèse $\alpha = 3k+2$ donnera, pour $k \geqq 2$,

$$\omega = 4\alpha + 5, \tag{3}$$

et les deux valeurs exclues $k = 0$, $k = 1$ exigent

$$\omega = \alpha^2 - 2. \tag{4}$$

A cet effet, il nous semble utile d'étudier plus amplement certaines valeurs spéciales du paramètre ω.

En premier lieu, posons, dans l'équation (1),

$$u = r\alpha + s, \quad v = r, \tag{5}$$

où r et s sont des positifs entiers plus petits que α, nous aurons

$$\omega = 2rs\alpha + r^2 + s^2, \tag{6}$$

et, la solution réciproque (u_1, v_1) étant, pour $\delta = 0$, déterminée par les expressions

$$u_1 = uA_1 - \alpha v B_1, \quad v_1 = uB_1 - vA_1,$$

nous aurons ici

$$u_1 = s\alpha + r, \quad v_1 = s. \tag{7}$$

Or, l'hypothèse $r = s = 1$ étant inadmissible, parce que la valeur correspondante $u = \alpha + 1$ divise la base a, la plus petite valeur de ω, définie par la formule (6) deviendra

$$\omega = 4\alpha + 5,$$

valeur qui est applicable pour

$$\alpha = 3k, \quad \alpha = 3k + 2,$$

car les deux nombres

$$u = \alpha + 2, \quad \omega = 4\alpha + 5$$

sont premiers entre eux, à moins qu'ils ne soient tous deux multiples de 3, ce qui exige

$$\alpha = 3k + 1.$$

En second lieu, posons

$$u = r\alpha - s, \quad v = r, \tag{8}$$

où r et s sont des positifs entiers, plus petits que α, nous aurons

$$\omega = 2rs\alpha - r^2 - s^2, \tag{9}$$

et, la solution réciproque (u_1, v_1) étant, pour $\delta = 1$, déterminée par les formules

$$u_1 = avB_1 - uA_1, \quad v_1 = vA_1 - uB_1,$$

nous aurons ici

$$u_1 = s\alpha - r, \quad v_1 = s. \tag{10}$$

On voit que l'hypothèse $r = s = 1$ est exclue, aussi dans ce cas, parce que le nombre correspondant $u = \alpha - 1$ divise la base a, de sorte que la plus petite valeur de ω, définie par la formule (9), deviendra

$$\omega = 4\alpha - 5.$$

En effet, remplaçons, dans ω, le nombre r par $r_1 < r$, ce qui donnera

$$\omega_1 = 2r_1s\alpha - r_1^2 - s^2,$$

nous aurons

$$\omega - \omega_1 = (r - r_1)(2s\alpha - (r + r_1)) > 0,$$

parce que $s \geqq 1$, $r > r_1$, $r < \alpha$, $r_1 < \alpha$. Posons ensuite

$$\omega_2 = 2rs_1\alpha - r^2 - s_1^2, \quad s_1 > s,$$

nous aurons de même $\omega_2 > \omega$.

Quant à la valeur minimum de ω, ainsi définie, elle n'est applicable, à moins que les deux nombres

$$\omega = 4\alpha - 5, \quad u = \alpha - 2$$

ne soient premiers entre eux. Or, ω et u ayant le plus grand commun diviseur 3, il faut exclure les valeurs

$$\alpha = 3k + 2.$$

Il nous reste encore à comparer les deux valeurs minimum de ω, que nous venons de déterminer, et le paramètre

$$\alpha^2 - 2 = a - 1,$$

toujours applicable.

Nous aurons

$$\alpha^2 - 2 < 4a - 5, \quad \alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0,$$

pour la seule valeur $\alpha = 2$, tandis que l'hypothèse $\alpha = 3$ donnera

$$\alpha^2 - 2 = 4\alpha - 5 = 7.$$

Étudions ensuite l'inégalité

$$\alpha^2 - 2 < 4\alpha + 5. \quad \alpha^2 - 4\alpha - 7 < 0,$$

elle est satisfaite pour

$$\alpha = 2, 3, 4, 5,$$

et seulement dans ces cas.

Cela posé, étudions ensuite l'équation (1) qui correspond à

$$\delta = 0,$$

puis posons

$$u = r\alpha + s, \quad v = t; \quad 0 \leqq s \leqq \alpha - 1,$$

il résulte, pour la solution réciproque (u_1, v_1),

$$u_1 = (r-t)\alpha^2 + s\alpha + t$$
$$v_1 = (r-t)\alpha + s,$$

ce qui exige nécessairement $r \geqq t$; donc nous aurons

$$\omega = (r^2 - t^2)\alpha + 2rs\alpha + s^2 + t^2 > 4\alpha + 5,$$

inégalité qui est évidente pour $r > t$, et le cas spécial $r = t$ est étudié dans les développements précédents.

Quant à l'équation (1) qui correspond à l'hypothèse

$$\delta = 1,$$

posons tout d'abord

$$u = \alpha - s, \quad v = t; \quad 0 \leqq s \leqq \alpha - 1, \quad t > 1,$$

nous aurons

$$\omega = t^2(\alpha^2 - 1) - (\alpha - s)^2 \geqq t^2(\alpha^2 - 1) - \alpha^2 \geqq 3\alpha^2 - 4;$$

c'est-à-dire que l'inégalité

$$\omega > 4\alpha + 5$$

est évidente, pourvu que

$$\alpha > \frac{2 + \sqrt{31}}{3},$$

ce qui a certainement lieu pourvu que $\alpha \geqq 3$, et la valeur $\alpha = 2$, savoir $a = 3$, ne joue aucun rôle à ce point de vue.

Posons ensuite généralement

$$u = r\alpha + s, \quad v = t; \quad 0 \leqq s \leqq \alpha - 1,$$

il résulte, pour la solution réciproque (u_1, v_1),

$$u_1 = (t-r)\alpha^2 - t^2 - s\alpha \tag{11}$$
$$v_1 = (t-r)\alpha - s, \tag{12}$$

de sorte que nous aurons nécessairement

$$t > r,$$

et le paramètre ω deviendra, dans ce cas,

$$\omega = t^2(\alpha^2 - 1) - (r\alpha + s)^2 = (t^2 - r^2)\alpha^2 - 2rs\alpha - s^2 - t^2. \tag{13}$$

Or, t étant au moins égal à un, nous aurons, en vertu de (11),

$$(t-r)\alpha^2 \geqq t + s\alpha + u_1,$$

d'où il résulte

$$(t^2-r^2)\alpha^2 \geqq t(t+r) + (t+r)s\alpha + (t+r)u_1,$$

ce qui donnera en vertu de (13),

$$\omega \geqq (t-r)s\alpha + tr - s^2 + (t+r)u_1. \tag{14}$$

Remarquons maintenant que le cas particulier précédent permet de supposer à la fois

$$u > \alpha, \quad u_1 > \alpha,$$

puis supposons à l'instant $t \geqq r+2$, nous aurons, en vertu de (14),

$$\omega \geqq 2s\alpha + tr - s\alpha + (t+r)(\alpha+1) > 4\alpha + 5.$$

Quant au cas exclu $t = r+1$, posons

$$s_1 = \alpha - s,$$

nous aurons

$$u = t\alpha - s_1, \quad v = t; \quad 1 \leqq s_1 \leqq \alpha - 1,$$

cas particulier que nous avons déjà étudié.

Cela posé, remarquons que, dans les deux cas exclus

$$\alpha = 2, \quad \alpha = 5,$$

savoir

$$\alpha^2 - 1 = 3, \quad \alpha^2 - 1 = 24,$$

la plus petite valeur possible de ω deviendra respectivement

$$\omega = 2, \quad \omega = 23$$

et que ces deux nombres sont premiers, nous avons démontré cette autre proposition:

II. L'équation (1) qui correspond à la valeur minimum du paramètre ω est toujours du genre 2, abstraction faite du seul cas $\alpha = 2$, où l'équation en question n'est que du genre 1.

On voit que cette dernière proposition donnera immédiatement le corollaire, très utile dans ce qui suit:

III. Les équations résolubles de la forme

(15) $$u^2 - (\alpha^2 - 1)v^2 = 5 \pm 4\alpha$$

sont toujours du genre 2.

Partons maintenant de l'équation de FERMAT

(16) $$A_n^2 - aB_n^2 = 1,$$

de sorte que a est une base de seconde espèce, où l'indice n est un nombre pair, nous avons à démontrer le théorème suivant, analogue aux propositions I et II de l'article précédent:

IV. Au moins une des deux équations de LAGRANGE

(17) $$u^2 - av^2 = 5 \pm 4A_n$$

est toujours résoluble, quel que soit l'indice n.

En effet, remarquons que l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - (aB_n^2)v^2 = (-1)^\delta \omega$$

n'est, en vertu de (16), autre chose que celle-ci

$$u^2 - (A_n^2 - 1)v^2 = (-1)^\delta \omega,$$

il est évident que les équations (17) admettent les solutions

(18) $$(A_n + 2,\ B_n),\quad (2A_n + 1,\ 2B_n)$$

respectivement

(18 bis) $$(A_n - 2,\ B_n),\quad (2A_n - 1,\ 2B_n).$$

Cela posé, nous verrons que les équations résolubles (17) admettent toutes deux le diviseur B_n, et la proposition III donnera immédiatement cette autre, analogue au théorème III de l'article précédent:

V. Le diviseur B_n ne peut appartenir, quels que soient la base a et l'indice n, qu'à un seul couple de suites coordonnées formées des solutions de l'équation correspondante (17).

IV. Résolution générale des équations précédentes du genre 2.

Il est bien intéressant, ce me semble, que l'on détermine facilement les solutions générales des équations qui admettent le diviseur B_n et que nous venons d'étudier, dans les deux articles précédents.

A cet effet, nous étudions tout d'abord l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm 2 A_{2r+1}, \tag{1}$$

et nous désignons par

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n), \ldots$$
$$(u'_1, v'_1), (u'_2, v'_2), \ldots, (u'_n, v'_n), \ldots$$

les deux suites coordonnées auxquelles appartiennent les solutions

$$(A_{2r+1} \pm 1, \quad B_{2r+1}), \tag{2}$$

il est évident que ces solutions sont des éléments de chacune des suites susdites.

Posons donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_{2r+1} - 1 = u_{\lambda+1}, & B_{2r+1} = v_{\lambda+1} \\ A_{2r+1} + 1 = u'_{\mu+1}, & B_{2r+1} = v'_{\mu+1} \end{array} \right. \tag{3}$$

nous aurons

$$u_{\lambda+1} u'_{\mu+1} + a v_{\lambda+1} v'_{\mu+1} = 2 A^2_{2r+1}$$
$$u_{\lambda+1} v'_{\mu+1} + v_{\lambda+1} u'_{\mu+1} = 2 A_{2r+1} B_{2r+1},$$

ce qui donnera, en vertu des formules fondamentales concernant les suites coordonnées,

$$\lambda + \mu = 2r. \tag{4}$$

De plus, il résulte, en vertu de (3),

$$A_{2r+1}-1 = A_\lambda u_1 + aB_\lambda v_1 , \quad B_{2r+1} = A_\lambda v_1 + B_\lambda u_1$$
$$A_{2r+1}+1 = A_\mu u_1' - aB_\mu v_1' , \quad B_{2r+1} = A_\mu v_1' + B_\mu u_1' ,$$

de sorte que nous aurons

$$(5) \begin{cases} u_1 = A_{2r-\lambda+1} - (-1)^\lambda A_\lambda , & v_1 = B_{2r-\lambda+1} + (-1)^\lambda B_\lambda \\ u_1' = A_{2r-\mu+1} + (-1)^\mu A_\mu , & v_1' = B_{2r-\mu+1} - (-1)^\mu B_\mu . \end{cases}$$

Remarquons ensuite que les nombres qui figurent aux seconds membres de ces formules satisfont, quels que soient les indices λ et μ, à l'équation (1), il est évident que les éléments primitifs correspondent aux hypothèses

$$\lambda = \mu = r ,$$

ce qui donnera

$$(6) \qquad u_1 = A_{r+1} - (-1)^r A_r , \quad v_1 = B_{r+1} + (-1)^r B_r$$
$$(7) \qquad u_1' = A_{r+1} + (-1)^r A_r , \quad v_1' = B_{r+1} - (-1)^r B_r .$$

Cela posé, il est facile de déterminer les éléments généraux des deux suites coordonnées en question.

En effet, soit tout d'abord $s \leqq r$, on aura, en vertu des formules récursives de Lagrange,

$$(8) \begin{cases} u_{s+1} = A_{r+s+1} - (-1)^s A_{r-s} , & v_{s+1} = B_{r+s+1} + (-1)^s B_{r-s} \\ u_{s+1}' = A_{r+s-1} + (-1)^s A_{r-s} , & v_{s+1}' = B_{r+s+1} - (-1)^s B_{r-s} , \end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $s \geqq r$ donnera

$$(9) \begin{cases} u_{s+1} = A_{r+s+1} - (-1)^r A_{s-r} , & v_{s+1} = B_{r+s+1} + (-1)^r B_{s-r} \\ v_{s+1}' = A_{r+s+1} + (-1)^r A_{s-r} , & v_{s+1}' = B_{r+s+1} - (-1)^r B_{s-r} , \end{cases}$$

Quant à l'équation

$$(10) \qquad u^2 - av^2 = \pm (4 A_{2n+1} \pm 3) ,$$

le même procédé donnera les éléments primitifs

$$(11)\begin{cases} u_1 = A_{n+1} \pm (-1)^n 2A_n, & v_1 = B_{n+1} \mp (-1)^n 2B_n, \\ u_1' = 2A_{n+1} \mp (-1)^n A_n, & v_1' = 2B_{n+1} \pm (-1)^n B_n, \end{cases}$$

de sorte que l'on aura, pour $s \leqq n$,

$$(12)\begin{cases} u_{s+1} = A_{n+s+1} \pm (-1)^{n-s} 2A_{n-s}, \\ v_{s+1} = B_{n+s+1} \mp (-1)^{n-s} 2B_{n-s}, \\ u'_{s+1} = 2A_{n+s+1} \mp (-1)^{n-s} A_{n-s}, \\ v'_{s+1} = 2B_{n+s+1} \pm (-1)^{n-s} B_{n-s}, \end{cases}$$

et, pour $s \geqq n$,

$$(13)\begin{cases} u_{s+1} = A_{n+s+1} \pm 2A_{s-n}, & v_{s+1} = B_{n+s+1} \pm 2B_{s-n} \\ u'_{s+1} = 2A_{n+s+1} \mp A_{s-n}, & v'_{s+1} = 2B_{n+s+1} \pm B_{s-n}. \end{cases}$$

Dans ces formules, les signes doubles correspondent au signe du nombre 3 qui figure au second membre de l'équation (10).

Nous avons encore à étudier l'équation

$$(14) \qquad u^2 - av^2 = \pm 4A_n + 5,$$

de sorte que a est une base de seconde espèce ou n est pair.

Le procédé ordinaire donnera ici les éléments primitifs

$$(15) \quad u_1 = A_{n-\mu} \pm (-1)^{\mu\varepsilon} 2A_\mu, \quad v_1 = B_{n-\mu} \mp (-1)^{\mu\varepsilon} 2B_\mu$$

$$(16) \quad v_1' = 2A_{n-\nu} \pm (-1)^{\nu\varepsilon} A_\nu, \quad v_1' = 2B_{n-\nu} \mp (-1)^{\nu\varepsilon} B_\nu,$$

où nous avons posé, comme ordinairement

$$A_1^2 - aB_1^2 = (-1)^\varepsilon.$$

Supposons maintenant tout d'abord que l'indice n soit un nombre impair, puis remplaçons n par $2n+1$, a est nécessairement une base de seconde espèce, ce qui donnera $\varepsilon = 0$.

Dans ce cas, il est évident que les éléments primitifs correspondent à

$$\mu = \nu = n,$$

ce qui donnera

$$u_1 = A_{n+1} \pm 2A_n, \quad v_1 = B_{n+1} \mp 2B_n \tag{17}$$

$$u'_1 = 2A_{n+1} \pm A_n, \quad v'_1 = 2B_{n+1} \mp B_n, \tag{18}$$

et nous aurons pour $\mu \leqq n$

$$u_{\mu+1} = A_{n+\mu+1} \pm 2A_{n-\mu}, \quad v_{\mu+1} = B_{n+\mu+1} \mp 2B_{n-\mu} \tag{19}$$

$$u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu+1} \pm A_{n-\mu}, \quad v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu+1} \mp B_{n-\mu}, \tag{20}$$

et, pour $\mu \geqq n$,

$$v_{\mu+1} = A_{n+\mu+1} \pm 2A_{\mu-n}, \quad v_{\mu+1} = B_{n+\mu-1} \pm B_{\mu-n} \tag{21}$$

$$u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu+1} \pm 2A_{\mu-n}, \quad v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu+1} \pm B_{\mu-n}. \tag{22}$$

Quant au cas, où n est un nombre pair, nous remplaçons n par $2n$, et il est évident que les éléments primitifs correspondent à la valeur

$$\mu = \nu = n-1,$$

de sorte que nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= A_{n+1} \pm (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} 2A_{n-1}, \\ v_1 &= B_{n+1} \mp (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} 2B_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} u'_1 &= 2A_{n+1} \pm (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} A_{n-1}, \\ v'_1 &= 2B_{n+1} \mp (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} B_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

et, pour $\mu \leqq n-1$,

$$\left\{\begin{aligned} u_{\mu+1} &= A_{n+\mu+1} \pm (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} 2A_{n-\mu-1}, \\ v_{\mu+1} &= B_{n+\mu+1} \mp (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} 2B_{n-\mu-1}, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$
(26) \quad \begin{cases} u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu+1} \pm (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} A_{n-\mu-1}, \\ v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu+1} \mp (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} B_{n-\mu-1}, \end{cases}
$$

tandis qu'il résulte, pour $\mu \geqq n-1$,

$$
(27) \quad u_{\mu-1} = A_{n+\mu} \pm 2A_{\mu-n}, \quad v_{\mu+1} = B_{n+\mu} \pm 2B_{\mu-n}
$$

$$
(28) \quad u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu} \pm A_{\mu-n}, \quad v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu} \pm B_{\mu-n}.
$$

Dans ces dernières formules, les signes doubles correspondent au signe de $4A_n$ dans la formule (14).

DEUXIÈME PARTIE

Applications d'autres bases spéciales.

V. Sur la base $a = \alpha(\alpha + 1)$.

Revenons maintenant à l'équation de LAGRANGE

(1) $$u^2 - (\alpha^2 - 1)v^2 = (-1)^\delta \omega,$$

étudiée dans l'article III, puis remplaçons α par $2\alpha + 1$, nous aurons, pour la base

(2) $$(2\alpha + 1)^2 - 1 = 4\alpha(\alpha + 1),$$

les valeurs minimum du paramètre

(3) $$\omega = 8\alpha - 1, \quad \omega = 8\alpha + 9,$$

valeurs qui sont applicables, selon que

$$\alpha = 3k, \quad \alpha = 3k + 1$$

respectivement

$$\alpha = 3k + 1, \quad \alpha = 3k + 2.$$

Or, la forme même de la base (2) conduira à étudier cette autre équation de LAGRANGE

(4) $$u^2 - \alpha(\alpha + 1)v^2 = (-1)^\delta \omega.$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que l'équation de FERMAT

(5) $$x^2 - \alpha(\alpha + 1)y^2 = 1$$

admet la solution primitive

(5 bis) $$x = 2\alpha + 1, \quad y = 2,$$

nous avons à démontrer la proposition:

I. La valeur minimum de ω qui admette de résoudre l'équation (4) est, pour α pair,

$$\omega = 3\alpha - 1; \tag{6}$$

pour α impair et plus grand que 3, on aura

$$\omega = 3\alpha + 4 \tag{7}$$

tandis qu'il résulte, pour $\alpha = 3$, $\alpha = 12$,

$$\omega = 11. \tag{8}$$

Quant à la démonstration de cette proposition, nous avons à étudier séparément les cas suivants:

1° $\quad u_1 = \alpha - r, \quad v_1 = 1; \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1,$

ce qui donnera

$$\omega = (2r+1)\alpha - r^2, \tag{9}$$

tandis que la solution réciproque deviendra

$$u_1' = (2r+1)\alpha + r, \quad v_1' = 2r+1,$$

et il est évident que la plus petite valeur de ω, déterminée par la formule (9), correspond à $r = 1$, ce qui donnera

$$\omega = 3\alpha + 1.$$

2° $\quad u_1 = \alpha + r, \quad v_1 = 1; \quad 2 \leqq r \leqq \alpha + 1;$

nous aurons ici

$$\omega = (2r-1)\alpha + r^2, \tag{10}$$

et la solution réciproque deviendra

$$u_1' = (2r-1)\alpha + r^2. \quad v_1' = 2r-1,$$

tandis que la plus petite valeur de ω, déterminée par la formule (10), correspond à $r = 2$, ce qui donnera

$$\omega = 3\alpha + 4.$$

3° $\quad u_1 = \alpha + r, \quad v_1 = s \geqq 2; \quad 2 \leqq r \leqq \alpha - 1,$

ce qui donnera

$$\omega = (s^2 - 1)\,\alpha^2 + (s^2 - 2r)\,\alpha - s^2\,,$$

de sorte que nous aurons

$$\omega \geqq 3\alpha^2 + (6 - 2\alpha)\,\alpha - (\alpha - 1)^2 = 8\alpha - 1 > 3\alpha + 4\,.$$

4° $\quad u_1 = \alpha - r\,, \quad v_1 = s \geqq 2\,; \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1\,;$

on aura, dans ce cas,

$$\omega = (s^2 - 1)\,\alpha^2 + (s^2 + 2r)\,\alpha - r^2 > 3\alpha^2 + 6\alpha - (\alpha - 1)^2,$$

ce qui donnera évidemment

$$\omega \geqq 2\alpha^2 + 8\alpha - 1 > 3\alpha + 4\,.$$

5° $\quad u_1 \geqq 2\alpha + 1\,, \quad v_1 \geqq 2\,; \quad u_1' \geqq 2\alpha + 1\,. \quad v_1' \geqq 2\,,$

de sorte que l'on aura

$$2\omega = u_1 v_1' + v_1 u_1' > 8\alpha + 4\,,$$

savoir

$$\omega > 4\alpha + 2 \geqq 3\alpha + 4\,,$$

pourvu que $\alpha \geqq 2$.

Remarquons ensuite que les deux nombres

$$\alpha - 1\,, \quad \alpha\,(\alpha + 1)$$

sont premiers entre eux, pourvu que α soit pair, et que

$$\alpha - 1 < \alpha^2 + \alpha - 1 = a - 1\,,$$

la valeur minimum de ω est, dans ce cas, certainement $3\alpha - 1$.

Soit maintenant α un nombre impair, les deux nombres

$$\alpha + 2\,, \quad \alpha\,(\alpha + 1)$$

sont toujours premiers entre eux, de sorte qu'il s'agit seulement de l'inégalité

$$\alpha^2 + \alpha - 1 \geqq 3\alpha + 4\,,$$

savoir

$$\alpha^2 - 2\alpha - 5 \geqq 0\,,$$

ce qui exige

$$\alpha \geqq 1 + \sqrt{6}\,,$$

de sorte qu'il faut considérer séparément les deux valeurs

$$\alpha = 1, \quad \alpha = 3.$$

Quant à l'hypothèse

$$\alpha = 1, \quad a = 2,$$

on aura bien

$$\omega = 7 = 2\alpha + 3,$$

tandis que

$$\alpha = 3, \quad a = 12$$

donnera la valeur minimum

$$\omega = 11.$$

Cela posé, il est évident que la démonstration précédente donnera immédiatement cette autre proposition:

II. Les équations résolubles de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} u^2 - \alpha(\alpha+1)v^2 = -3\alpha + 1, \\ u^2 - \alpha(\alpha+1)v^2 = 3\alpha + 4 \end{cases}$$

sont toujours du genre 2.

VI. Sur la base $a = \alpha(4\alpha + 1)$.

Nous avons encore à remplacer, dans la base étudiée, dans l'article précédent, α par 4α, ce qui conduira à la base nouvelle

$$(1) \qquad a = \alpha(4\alpha + 1);$$

l'équation de FERMAT correspondante

$$(2) \qquad x^2 - \alpha(4\alpha+1)y^2 = 1$$

a la solution primitive

$$(2 \text{ bis}) \qquad A_1 = 8\alpha + 1, \quad B_1 = 4.$$

Quant à l'équation de LAGRANGE

$$(3) \qquad u^2 - \alpha(4\alpha+1)v^2 = (-1)^\delta \omega,$$

nous avons à démontrer la proposition:

I. La plus petite valeur de ω qui permette de résoudre l'équation (3) est

$$(4) \qquad \omega = 3\alpha + 1,$$

ce qui correspond à

$$(5) \qquad u = 2\alpha + 1, \quad v = 1, \quad \delta = 0,$$

et l'équation ainsi obtenue est toujours du genre 2.

Ici nous avons à considérer séparément les cas suivants:

1° $\quad u = \alpha - r, \quad v = 1; \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1,$

ce qui donnera

$$\omega = 4\alpha^2 + \alpha - (\alpha - r)^2 \geqq 4\alpha^2 + \alpha - 1 \geqq 3\alpha + 1.$$

2° $\quad u = \alpha + r, \quad v = 1; \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1;$

on aura ici

$$\omega = 4\alpha^2 + \alpha - (\alpha + r)^2 \geqq 4\alpha^2 + \alpha - (2\alpha - 1)^2 = 5\alpha - 1 \geqq 3\alpha + 1.$$

3° $\quad u = 2\alpha + r, \quad v = 1; \quad r \geqq 1,$

ce qui donnera immédiatement

$$\omega = (2\alpha + r)^2 - 4\alpha^2 - \alpha \geqq 3\alpha + 1.$$

4° $\quad u = \alpha - r, \quad v = s \geqq 2; \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1;$

on trouve, dans ce cas,

$$\omega = (4s^2 - 1)\alpha^2 + (2r + s^2)\alpha - r^2 > 3\alpha + 1.$$

5° $\quad u = \alpha + r, \quad v = s \geqq 2: \quad 1 \leqq r \leqq 2\alpha - 1;$

ici on aura

$$\omega = 4s^2\alpha^2 + s^2\alpha - (\alpha + r)^2 \geqq (4s^2 - 9)\alpha^2 + s^2 > 7\alpha^2 + 4.$$

6° $\quad u \geqq 3\alpha + 1, \quad v \geqq 2; \quad u' \geqq 3\alpha + 1, \quad v' \geqq 2,$

où (u', v') est la solution réciproque de (u, v), et où les signes d'égalité ne sont pas simultanés.

Dans ce cas, on aura

$$4\omega = uv' + u'v > 12\alpha + 4; \quad \omega > 3\alpha + 1.$$

Enfin, remarquons que l'inégalité

$$a - 1 = 4\alpha^2 + \alpha - 1 \geqq 3\alpha + 1$$

est toujours satisfaite, notre proposition est établie.

Remarquons encore, en passant, que les deux équations de Lagrange

$$(6)\qquad u^2 - \alpha (p^2\alpha + 1) v^2 = (2p - 1)\alpha + 1$$

$$(7)\qquad u^2 - \alpha (p^2\alpha + 1) v^2 = 1 - (2p + 1)\alpha,$$

satisfaites par

$$u = p\alpha + 1, \quad v = 1$$

respectivement

$$u = p\alpha - 1, \quad v = 1,$$

sont résolubles, pourvu que les deux nombres

$$p - 1, \quad \alpha - 1$$

respectivement

$$p + 1, \quad \alpha + 1$$

soient premiers entre eux.

VII. Sur les bases $a = \alpha^2 \pm 2$.

Quant aux autres bases de formes spéciales, remarquons que l'équation

$$(1)\qquad u^2 - (4\alpha^2 + 4\alpha + 5) v^2 = \pm \omega$$

n'admet que deux valeurs de ω plus petites que

$$\sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha + 5},$$

savoir

$$(2)\qquad \omega = 4, \quad \omega = 2\alpha + 1,$$

il est évident que $2\alpha + 1$ est la plus petite valeur impaire de ω, pour laquelle l'équation (1) soit résoluble, et l'on aura, pour cette valeur spéciale,

$$(2\text{ bis})\qquad u = 2\alpha^2 + \alpha + \alpha + 1, \quad v = \alpha.$$

Supposons ensuite que α ne soit pas de la forme $3k + 1$, l'équation de Lagrange

$$(3)\qquad u^2 - (4\alpha^2 + 4\alpha - 3) v^2 = -4\alpha + 3$$

est résoluble et satisfaite par

$$(3\text{ bis})\qquad u = 2\alpha, \quad v = 1.$$

Ces remarques faites, nous avons à démontrer cette autre proposition, plus importante pour les appliquations:

I. La plus petite valeur impaire de ω, possible dans l'équation résoluble

$$u^2-(\alpha^2+2)\,v^2=(-1)^\delta\omega\,, \tag{4}$$

est

$$\omega=2\alpha-1\,, \tag{5}$$

pourvu que α ne soit pas de la forme $3k+2$; dans ce cas, on aura au contraire la valeur minimum

$$\omega=2\alpha+1. \tag{5 bis}$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que les hypothèses

$$u\geqq\alpha^2+1\,,\quad v\geqq\alpha\,;\quad u_1\geqq\alpha^2+1\,,\quad v_1\geqq\alpha\,,$$

où $(u,\,v)$ et $(u_1,\,v_1)$ sont des solutions réciproques, donnent

$$\alpha\,\omega>\alpha\,(2\alpha^2+2)\,,\quad \omega>2\alpha^2+2>2\alpha+1.$$

De plus, posons

$$u=\alpha^2+1\,,\quad v=t\,;\quad 1\leqq t<\alpha\,,$$

nous aurons

$$\omega=\alpha^4+2\alpha^2+1-\alpha^2t^2-2t^2>2\alpha^2-2(\alpha-1)^2+1=$$
$$=4\alpha+3<2\alpha+1.$$

Étudions ensuite l'hypothèse

$$u=\alpha^2,\quad v=s\,;\quad 1\leqq s\leqq\alpha-1\,,$$

nous aurons

$$\omega\geqq2\alpha^3-3\alpha+4\alpha-2>2\alpha+1\,,$$

pourvu que $\alpha\geqq2$, et l'hypothèse $\alpha=1$, qui correspond à $a=5$, ne présente aucun intérêt spécial.

Cela posé, il est évident que la plus petite valeur impaire de ω correspond ou à l'hypothese

$$u=r\alpha+s,\quad v=t;\quad 1\leqq r\leqq\alpha-1,\quad 1\leqq s\leqq\alpha-1,\quad t\geqq1 \tag{6}$$

ou à l'hypothese

$$(7) \qquad u = \alpha - s, \quad v = t; \quad 1 \leqq s \leqq \alpha - 1, \quad t \geqq 1.$$

Étudions tout d'abord les expressions (7), puis supposons $r > t$, il résulte immédiatement

$$(8) \qquad \omega = (r^2 - t^2)\,\alpha^2 + 2\,r\,s\,\alpha + s^2 - 2\,t^2,$$

ce qui donnera

$$\omega > (2\,t + 1)\,\alpha^2 + 2\,r\,s\,\alpha + s^2 - 2\,\alpha^2,$$

d'où à fortiori

$$\omega > (2\,t - 1)\,\alpha^2 + 2\,r\,s\,\alpha + 1 > 2\,\alpha + 1.$$

Soit ensuite $r < t$, nous appliquons le nombre s_1, défini par l'équation

$$s + s_1 = \alpha,$$

ce qui donnera

$$u = (r+1)\,\alpha - s_1 = r_1\,\alpha - s_1,$$

où nous avons posé

$$r_1 = r + 1 \leqq t,$$

de sorte que nous aurons, dans ce cas,

$$\omega \geqq 2\,r_1 s_1\,\alpha + 2\,t^2 - s_1^2 > (2\,r_1 - 1)\,s_1\,\alpha + 2\,t^2 > 2\,\alpha + 1,$$

la seule combinaison

$$(9) \qquad r_1 = s_1 = t = 1$$

exclue, mais les valeurs spéciales (9) appartiennent à l'hypothèse (7).

Reste encore le cas spécial $t = r$, ce qui donnera, en vertu de (8),

$$\omega = 2\,r\,s\,\alpha + s^2 - 2\,r^2 > 2\,\alpha + 1,$$

la seule combinaison

$$(10) \qquad r = s = 1$$

exclue.

Quant aux valeurs (7), il résulte

$$\omega = (t^2 - 1)\,\alpha^2 + 2\,t^2 + 2\,s\,\alpha - 1 > 2\,\alpha + 1,$$

les valeurs spéciales

(11) $$s = t = 1$$
exclues.

Étudions maintenant les hypothèses (9), (10), (11), nous trouvons précisément les valeurs $\omega = 2\alpha \pm 1$, et nous aurons évidemment toujours

$$a - 1 = \alpha^2 + 1 \geqq 2\alpha + 1.$$

Cela posé, la démonstration précédente donnera immédiatement cette autre proposition:

II. Les équations résolubles de la forme

$$u^2 - (\alpha^2 + 2)v^2 = 2\alpha + 1, \quad u^2 - (\alpha^2 + 2)v^2 = -2\alpha + 1$$

sont toujours du genre 2.

Quant à la base
$$a = \alpha^2 - 2,$$

le même procédé donnera la proposition, analogue aux précédentes:

III. La plus petite valeur impaire de ω, pour laquelle l'équation de Lagrange

(12) $$u^2 - (\alpha^2 - 2)v^2 = (-1)^\delta \omega$$

soit résoluble, est

(13) $$\omega = 2\alpha - 3,$$

et l'équation correspondante (12) est toujours du genre 2.

On voit que le paramètre (13) correspond à la solution primitive

(14) $$u = \alpha + 1, \quad v = 1,$$

tandis que la solution

(15) $$u = \alpha - 1, \quad v = 1$$
donnera

(15 bis) $$\omega = 2\alpha + 3,$$

paramètre qui est toujours applicable.

VIII. Remarques sur les résultats précédents.

Il nous semble utile de comparer les résultats que nous venons d'obtenir concernant la limite inférieure du paramètre ω dans certaines équations de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} \omega. \tag{1}$$

A cet effet, considérons tout d'abord la base

$$a_1 = \alpha (4\alpha + 1), \tag{2}$$

nous savons que l'équation (1), qui correspond à cette base, n'est jamais résoluble, à moins que

$$\omega \geqq 3\alpha + 1. \tag{3}$$

Multiplions maintenant par 4 le nombre a_1, de sorte qu'il s'agit de la base

$$a_2 = 4\alpha (4\alpha + 1), \tag{4}$$

la limite inférieure du paramètre ω s'augmente à

$$\omega \geqq 8\alpha - 1. \tag{5}$$

Ajoutons ensuite à la base a_2 le facteur 4, ce qui conduira à la base

$$a_3 = (8\alpha + 1)^2 - 1, \tag{6}$$

l'équation correspondante de Lagrange n'est jamais résoluble à moins que

$$\omega \geqq 32\alpha - 1. \tag{7}$$

Cela posé, il est évident que les trois transformations susdites ont élevé la valeur minimum du paramètre ω de $3\alpha + 1$ jusqu'à $32\alpha - 1$.

Considérons maintenant la base

$$a_1 = \alpha^2 + 1, \tag{8}$$

l'équation correspondante (1) n'est jamais résoluble, à moins que

(9) $$\omega \geqq 2\alpha.$$

Ajoutons ensuite au nombre a_1 le facteur α^2, ce qui conduira à la base

(10) $$a_2 = \alpha^2(\alpha^2+1),$$

et l'équation (1) est irrésoluble, à moins que

(11) $$\omega \geqq 3\alpha^2-1,$$

tandis que la base

(12) $$a_3 = 4\alpha^2(\alpha^2+1) = (2\alpha^2+1)^2-1$$

exige

(13) $$\omega \geqq 8\alpha^2-4,$$

de sorte que l'adjonction du facteur $4\alpha^2$ à la base a élevé la valeur minimum du paramètre ω de 2α jusqu'à $8\alpha^2-4$.

Quant à la base

(14) $$a_1 = \alpha^2+2,$$

nous aurons

(15) $$\omega \geqq 2\alpha-1,$$

tandis que la base

(16) $$a_2 = \alpha^2(\alpha^2+2) = (\alpha^2+1)^2-1$$

exige

(17) $$\omega \geqq 4\alpha^2-1.$$

De même, l'équation (1) qui correspond à la base

(18) $$a_1 = \alpha^2-2$$

n'est jamais résoluble, à moins que

(19) $$\omega \geqq 2\alpha-3,$$

tandis que l'on aura, pour la base

(21) $$a_2 = \alpha^2(\alpha^2-2) = (\alpha^2-1)^2-1,$$

la valeur minimum

(22) $$\omega \geqq 4\alpha^2-9.$$

Ces observations faites, il est évident que chacune des transformations susdites de la base diminuent le nombre des équations résolubles, parce qu'elles excluent nécessairement certains paramètres applicables pour la base a, prise pour point de départ.

Mais, chose plus grave, une telle exclusion de certains nombres premiers comme paramètres applicables, dans l'équation de LAGRANGE en question, entraîne nécessairement que d'autres nombres premiers deviennent aussi inapplicables, comme le montrent clairement les tables numériques jointes au présent Mémoire.

Dans l'article XII, nous aurons du reste à revenir à ce problème difficile.

TROISIÈME PARTIE

Solutions avec un nombre commun.

IX. Les solutions (s, v) et (u, v).

Les solutions singulières, étudiées dans les articles II et IV, conduiront naturellement à étudier plus amplement deux solutions (s, t) et (u, v) de l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} \omega, \tag{1}$$

savoir

$$s^2 - a t^2 = (-1)^{\lambda} \omega, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\mu} \omega, \tag{2}$$

pour lesquelles on aura une des égalités $s = u$ ou $t = v$.

A cet effet, étudions tout d'abord l'égalité

$$t = v,$$

de sorte qu'il s'agit des équations

$$s^2 - a v^2 = (-1)^{\lambda} \omega, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\mu} \omega, \tag{3}$$

il est facile de démontrer le théorème:

I. La condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité simultanée des deux équations (3) est, que la base a soit une somme de deux carrés, premiers entre eux, savoir

$$a = p^2 + q^2. \tag{4}$$

On aura, en soustrayant les deux équations (3),

$$s^2 - u^2 = \left((-1)^{\lambda} - (-1)^{\mu}\right) \omega,$$

de sorte que les exposants λ et μ sont nécessairement de différente parité, donc les équations (3) se présentent sous la forme

$$s^2 - a v^2 = \omega, \quad u^2 - a v^2 = -\omega, \tag{5}$$

ce qui n'est possible, à moins que la base a ne soit une somme de deux carrés premiers entre eux.

Posons ensuite

$$s = \alpha + \beta, \quad u = \alpha - \beta, \tag{6}$$

il résulte, en vertu de (3) et (5),

$$\alpha^2 + \beta^2 = a v^2, \quad \omega = 2\alpha\beta, \tag{7}$$

ce qui montre que la condition nécessaire susdite est suffisante aussi.

En effet, posons

$$v = r^2 + s^2, \tag{8}$$

où r et s sont premiers entre eux, les formules (7) déterminent α, β et ω, ce qui donnera, en vertu de (6), les deux inconnues s et u.

Quant aux solutions ainsi trouvées, nous avons encore à démontrer le théorème curieux:

II. Supposons que les solutions (s, v) et (u, v) appartiennent à deux suites coordonnées, il faut et il suffit que a soit une base impaire de première espèce et que

$$\omega = 2A_{2r+1}, \quad s = A_{2r+1} + 1, \quad u = A_{2r+1} - 1, \quad v = B_{2r+1}, \tag{9}$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - a B_m^2 = (-1)^m. \tag{10}$$

Partons des formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées, nous aurons

$$su + a v^2 = \omega A_n, \quad (s + u) v = \omega B_n,$$

où n désigne un indice convenablement choisi, ce qui donnera, en vertu de (6) et la dernière des formules (7),

$$v = \beta B_n,$$

de sorte que la première des formules (7) se présente sous la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha \beta^2 B_n^2.$$

Or, α et β étant nécessairement premiers entre eux, parce qu'un facteur commun de α et β divise à la fois s, u et ω, on aura

$$\beta = 1,$$

d'où il résulte

$$v = B_n, \quad \alpha^2 - \alpha B_n^2 = -1,$$

de sorte que n est un nombre impair, savoir

$$n = 2r + 1,$$

et l'on aura finalement les expressions indiquées dans les formules (9), ce qui conduira précisément à l'équation étudiée dans les articles II et IV.

X. Les solutions (s, t) et (s, v).

Étudions maintenant l'égalité

$$s = u,$$

ce qui conduira aux équations simultanées

(1) $$s^2 - a t^2 = (-1)^\lambda \omega, \quad s^2 - a v^2 = (-1)^\mu \omega,$$

et nous avons à démontrer la proposition:

I. La condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité simultanée des deux équations (1) est que $a = 2$, et que

(2) $$s^2 = t^2 + v^2.$$

En effet, soustrayons les deux équations (1), nous aurons

$$a(t^2 - v^2) = \big((-1)^\mu - (-1)^\lambda\big)\omega,$$

ce qui donnera nécessairement

$$\lambda = \mu + 1,$$

de sorte qu'il résulte

$$a(t^2 - v^2) = (-1)^{\mu} 2\omega, \tag{3}$$

et cette équation n'est possible, à moins que

$$a = 2, \tag{4}$$

car a et ω sont premiers entre eux.

Cela posé, additionnons les deux équations (1), nous aurons la formule (2), ce qui donnera

$$s = p^2 + q^2, \quad t = p^2 - q^2, \quad v = 2pq \tag{5}$$

ou

$$s = p^2 + q^2, \quad t = 2pq, \quad v = p^2 - q^2, \tag{5 bis}$$

où $p > q$, et où p et q sont premiers entre eux et de parité différente.

Quant à la valeur correspondante de ω, on aura

$$\left\{\begin{aligned} (-1)^{\mu}\omega &= p^4 + q^4 - 6p^2q^2 = \\ &= (p^2 - q^2 + 2pq)(p^2 - q^2 - 2pq). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Déterminons maintenant les deux solutions (s, t) et (s, v), ainsi trouvées, de sorte qu'elles appartiennent à deux suites coordonnées.

A cet effet, posons, quel que soit l'indice n,

$$A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n, \tag{7}$$

nous avons à démontrer cette autre proposition:

II. Les solutions (s, t) et (s, v) qui appartiennent à deux suites coordonnées se présentent sous la forme

$$s = B_{2r+1}, \quad t = A_r A_{r+1}, \quad v = 2B_r B_{r+1}, \tag{8}$$

où r et l'indice μ qui figure dans l'équation (3) sont de même parité, tandis que l'on aura

(9) $$\omega = A_{2r+1}.$$

En effet, les formules fondamentales de la théorie des suites réciproques donnent ici

$$s(t+v) = \omega B_n,$$

où n est un indice convenablement choisi, ce qui donnera

$$B_n = s\beta, \quad t+v = \beta\omega,$$

car s et ω sont premiers entre eux.

De plus, il résulte, en vertu de la formule (3),

$$t^2 - v^2 = (-1)^r \omega,$$

de sorte que l'on aura

$$\beta(t-v) = (-1)^r,$$

ce qui n'est possible, à moins que

$$\beta = 1; \quad t-v = (-1)^r,$$

et l'on aura donc finalement, en vertu de (5) et (6),

(10) $$s = B_n, \quad \omega = p^2 - q^2 + 2pq, \quad p^2 - q^2 - 2pq = (-1)^\mu.$$

Cela posé, la dernière de ces équations donnera

$$p = q + \sqrt{2q^2 + (-1)^\mu},$$

et le nombre qui figure sous le signe radical étant nécessairement un carré exact, il résulte, en vertu de (7) et (10),

$$q = B_r, \quad p = A_r + B_r, \quad s = B_r^2 + B_{r+1}^2,$$

où les indices r et μ sont de même parité. Appliquons ensuite les formules bien connues concernant les nombres A_r et B_r, nous aurons

(11) $$q = B_r, \quad p = B_{r+1}, \quad s = B_{2r+1},$$

ce qui donnera ensuite

(12) $$\begin{cases} v = 2B_r B_{r+1} \\ t = A_r A_{r+1}. \end{cases}$$

Quant au paramètre ω, on aura, en vertu de (10),

$$\omega = A_r A_{r+1} + 2 B_r B_{r+1} = t^2 + 2pq,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\omega = A_{2r+1},$$

de sorte que l'équation en question se présente sous la forme

$$u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1}, \tag{13}$$

où r est un positif entier quelconque.

XI. Sur l'équation $u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1}$.

Nous avons encore à étudier un peu plus amplement l'équation (13) de l'article précédent, savoir

$$u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1}. \tag{1}$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que cette équation est parfaitement décomposable, de sorte qu'elle est précisément du rang 2^μ, où μ désigne le nombre des facteurs premiers de A_{2r+1}, remarque qui nous conduira à la proposition curieuse:

I. Soit ν le nombre des facteurs premiers de l'indice $2r+1$, l'équation (1) est au moins du genre $2^{\nu+1}$.

En effet, désignons par

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu$$

les ν facteurs premiers de $2r+1$, puis remarquons que tous ces nombres sont impairs, nous aurons

$$A_{2r+1} = K A_{p_1} A_{p_2} \ldots A_{p_\nu},$$

où $K > 1$ contient au moins un facteur premier différent des nombres p_s; c'est-à-dire que A_{2r+1} contient au moins

$\nu+1$ facteurs premiers inégaux, donc l'équation (1) est au moins du genre $2^{\nu+1}$.

Cela posé, nous avons à déterminer les éléments généraux des deux suites coordonnées

$$(2) \qquad \begin{cases} (u_1,\ v_1),\ (u_2,\ v_2),\ \ldots,\ (u_n,\ v_n),\ \ldots, \\ (u'_1,\ v'_1),\ (u'_2,\ v'_2),\ \ldots,\ (u'_n,\ v'_n),\ \ldots, \end{cases}$$

auxquelles appartiennent les solutions $(s,\ t)$ et $(s,\ v)$.

Partons, à cet effet, des deux formules bien connues

$$A_{2r+1} = A_{r+1}^2 - A_r^2 + (-1)^r = 2B_{r+1}^2 - 2B_r^2 - (-1)^r,$$

nous aurons immédiatement ces deux autres formules

$$(3) \qquad A_{r+1}^2 - 2B_r^2 = A_{2r+1}, \quad A_r^2 - 2B_{r+1}^2 = -A_{2r+1},$$

ce qui donnera les deux solutions $(A_{r+1},\ B_r)$ et $(A_r,\ B_{r+1})$ de l'équation (1).

Appliquons ensuite l'inégalité

$$A_r < B_{r+1},$$

il est évident que $(A_r,\ B_{r+1})$ est la solution primitive des deux suites coordonnées (2), de sorte que nous aurons par exemple

$$(4) \qquad u_1 = A_r, \quad v_1 = B_{r+1} = A_r + B_r.$$

Et, je dis que nous aurons de même

$$(5) \qquad u'_1 = A_{r+1} = A_r + 2B_r, \quad v'_1 = B_r,$$

ce qui est une conséquence immédiate des formules

$$\begin{aligned} A_r A_{r+1} + 2B_r B_{r+1} &= A_{2r+1} \\ A_{r+1} B_{r+1} + A_r B_r &= A_{2r+1}, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$u_1 u'_1 + 2 v_1 v'_1 = A_{2r+1} A_1$$
$$u_1 v'_1 + v_1 u'_1 = A_{2r+1} B_1 ,$$

savoir les formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées.

Cela posé, les formules récursives de Lagrange donnent immédiatement, en vertu de (4) et (5), les expressions générales

$$u_s = A_r A_s + 2 B_r B_{s-1}, \quad v_s = A_r B_s = B_r A_{s-1} \tag{6}$$
$$u'_s = A_r A_{s-1} + 2 B_r B_s, \quad v'_s = A_r B_{s-1} + A_r A_s , \tag{7}$$

et nous aurons, après un calcul simple,

$$u_{r+1} = u'_{r+1} = B_{2r+1}. \tag{8}$$

Quant aux valeurs correspondantes

$$v_{r+1}, \quad v'_{r+1},$$

elles seront, en vertu de la formule (8) de l'article précédent,

$$A_r A_{r+1}, \quad 2 B_r B_{r+1}.$$

Or, nous aurons

$$A_r A_{r+1} - 2 B_r B_{r+1} = (-1)^r$$
$$u^2_{r+1} - 2 v^2_{r+1} = (-1)^r A_{2r+1},$$

ce qui donnera

$$v_{r+1} = 2 B_r B_{r+1}, \quad v'_{r+1} = A_r A_{r+1}. \tag{9}$$

Soit par exemple $r = 4$, on aura

$$A_9 = 1393 = 7 \cdot 199 , \quad B_9 = 685 ,$$

de sorte que les cinq premiers éléments des deux suites coordonnées appartenant à l'équation

$$u^2 - 2 v^2 = \pm 1393 \tag{10}$$

deviennent

(41, 12), (65, 53), (171, 118), (407, 289), (995, 696)
(17, 29), (75, 46), (167, 121), (409, 288), (985, 697).

L'équation (10), étant du genre 4, admet encore deux autres suites coordonnées, dont les cinq premiers éléments sont

(23, 31), (85, 54), (193, 139), (471, 332), (1135, 803)
(39, 8), (55, 47), (149, 102), (553, 251), (855, 604).

QUATRIÈME PARTIE

Sur la hauteur d'un nombre premier.

XII. Applications de certaines bases spéciales.

Les tables numériques jointes au présent Mémoire exigent des éclaircissements sur la hauteur d'un nombre premier, par rapport à une base donnée.

En me réservant de revenir à ce problème, je me bornerai ici à développer les conséquences immédiates des recherches précédentes concernant certaines bases de formes spéciales, recherches que j'ai établies seulement parce que les résultats ainsi obtenus sont indispensables pour le calcul des tables numériques en question.

Soit a un nombre de la forme $8\nu+5$, nous disons pour abréger que a est une base $8\nu+5$ de première ou de seconde classe, selon que l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 4$$

soit résoluble ou non. Et, cette définition adoptée, il est facile de démontrer les deux propositions suivantes:

I. Supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 4p^r, \tag{1}$$

où a est une base $8\nu+5$ de seconde classe, tandis que p est un nombre premier impair, p est, par rapport à la base a, de la hauteur $3r$.

En effet, l'opération itérative du troisième ordre conduira, en vertu de (1), à l'équation résoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} p^{3r},$$

de sorte que la hauteur ϱ du nombre premier p, par rapport à la base a, est diviseur de $3r$, ce qui donnera nécessairement $\varrho = 3r$, parce que l'équation n'est pas décomposable, de sorte que l'hypothèse $\varrho = r$ est exclue.

II. Le nombre premier impair p est de la hauteur $3r$, par rapport à la base

$$a = 4p^{2r} + 1. \tag{2}$$

Remarquons que a est une base $8\nu + 5$ de seconde classe et que l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm 4 p^r$$

est résoluble, la proposition II est une conséquence immédiate de I.

On voit que cette dernière proposition explique la table concernant la base 101, obtenue de (2) en y posant

$$p = 5, \quad r = 1.$$

Quant à la base $82 = 3^4 + 1$, nous avons à démontrer cette autre proposition:

III. Le nombre premier impair p est, par rapport à la base

$$a = p^{2r} + 1, \tag{3}$$

de la hauteur $2r$.

Remarquons que l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm p^{2r}$$

est toujours résoluble, ayant la solution (1, 1), tandis que cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = \pm p^r$$

est irrésoluble, il est évident que p est précisément de la hauteur $2r$, par rapport à la base a.

Remarquons ensuite que les bases 34 et 79 sont toutes deux de la forme

(4) $$a = 9\alpha^2 - 2,$$

et que cette base admet les paramètres minimums

(5) $$\omega_1 = 6\alpha - 3, \quad \omega_2 = 6\alpha + 3,$$

puis désignons par h la hauteur du nombre premier 3, par rapport à la base a, nous aurons le tableau

α	a	ω_1	ω_2	h
1	7	3	9	1
2	34	9	15	2
3	79	15	21	3
4	142	21	27	3
5	223	27	33	3
6	322	33	39	4

car les bases 79 et 322 donnent respectivement

$$17^2 - 79 \cdot 2^2 = -27, \quad 37^2 - 322 \cdot 2^2 = 81.$$

Au reste, il est facile de démontrer la proposition:

IV. Supposons

(6) $$\alpha > \frac{3^n + 3}{2},$$

la hauteur du nombre premier 3, par rapport à la base

(7) $$a = 6\alpha^2 - 2,$$

est au moins égale à $n+1$.

On aura, en effet, en vertu de (6),

$$2\alpha - 3 > 3^n;$$

c'est-à-dire que 3^n et toutes les puissances inférieures de 3 sont exclues, comme paramètres des équations de LAGRANGE qui correspondent à la base (7).

Quant aux bases de la forme $\alpha^2 + 2$ ou $\alpha^2 - 1$, remarquons que le nombre premier 5 est de la hauteur 2, par rapport aux bases

$$146 = 12^2+2, \quad 24 = 5^2-1,$$

mais de la hauteur 4 par rapport à la base

$$99 = 10^2-1,$$

car nous aurons

$$7^2-99\cdot 1^2 = -50, \quad 47^2-99\cdot 4^2 = 625,$$

et la base 99 n'admet pas le paramètre 2, de sorte que le paramètre 25 est aussi exclu.

Remarquons, en passant, que les nombres premiers

$$3 \quad 13 \quad 23$$

sont de la hauteur 4 par rapport à la base 2005[1], puis remarquons que les bases $a(\xi)$ et $a_1(\xi)$ que j'ai introduites, dans une autre publication récente[2], conduiront souvent au problème compliqué concernant la détermination de la hauteur d'un nombre premier.

Posons par exemple, dans la base spéciale de première espèce

$$a_1(\xi) = 25\xi^2-14\xi+2,$$

$\xi = 12$, nous aurons

$$a_1(12) = 3434,$$

et, avec les significations de Degen, la fraction continue

$$\frac{58}{1}, \ \frac{1}{80}, \ \left(\frac{1}{47}, \ \frac{1}{47}\right).$$

Et les décompositions

$$3434 = 53^2+25^2 = 47^2+35^2,$$

montrent immédiatement que les nombres premiers

[1] Voir l'article XI de mon Mémoire: Recherches sur certaines équations de Lagrange de formes spéciales.

[2] Tidsskrift for Matematik, Aargang 1923, p. 61—65.

5 7

sont tous deux, par rapport à la base 3434, de la hauteur 4.

Cela posé, il est évident que le problème concernant la détermination des hauteurs des nombres premiers n'est pas borné aux bases susdites de formes spéciales, que nous venons d'étudier.

XIII. Remarques sur les hauteurs 2, 3, 4.

Dans ce qui suit, nous désignons par

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots,\ p_n,\ \ldots\ldots \tag{1}$$

des nombres premiers qui sont tous de la hauteur ϱ par rapport à une base a, où

$$\varrho = 2,\ 3,\ 4. \tag{2}$$

Ces définitions adoptées, nous savons que l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} p_r p_s \tag{3}$$

est, pour $\varrho = 2$, du genre 4, et il est facile de démontrer que l'équation (3) est, pour $\varrho = 3,\ 4$, du genre 2.

En effet, supposons que l'équation (3) soit du genre 4, puis désignons par $(u_1,\ v_1)$ et $(u_2,\ v_2)$ deux solutions de cette équation, appartenant à chacun des couples de ses suites coordonnées, nous aurons, en multipliant les deux équations correspondantes, l'équation résoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon} p_r^2,$$

ce qui est impossible.

Cela posé, il est facile de démontrer la proposition curieuse:

I. Supposons que les nombres premiers impairs p_r et p_s soient tous deux, par rapport à la base a, de la hauteur 4, l'opération itérative du second ordre conduira, de l'équation (3) du genre 2, à l'équation du genre 4

$$u^2 - av^2 = p_r^2 p_s^2. \tag{4}$$

Quant au genre de l'équation (4), multiplions cette équation par cette autre

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon} p_r^4,$$

il est évident que (4) est du genre 4.

Soient ensuite

$$p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma$$

trois nombres premiers impairs de la même hauteur ϱ, de sorte que les trois équations de la forme (3) sont résolubles, nous avons à démontrer les propositions:

II. Soit $\varrho = 2$ ou $\varrho = 4$, l'équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon} p_\alpha p_\beta p_\gamma \tag{5}$$

est toujours irrésoluble.

En effet, multiplions (5) par l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon_1} p_\alpha p_\beta,$$

nous aurons une équation de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon + \varepsilon_1} p_\beta^2 p_\gamma \tag{6}$$

ou de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon + \varepsilon_1} p_\gamma, \tag{7}$$

et il est évident que cette dernière équation est irrésoluble.

Quant à l'équation (6), elle est certainement irrésoluble pour $\varrho = 2$, car cette valeur de ϱ conduira à l'équation (7). Soit ensuite $\varrho = 4$, l'opération itérative du second ordre conduira à cette autre équation irrésoluble

$$u^2 - av^2 = p_\gamma^2.$$

Étudions maintenant la hauteur $\varrho = 3$, il est facile de démontrer cette autre proposition:

III. Supposons qu'aucun des exposants r, s, t ne soit multiple de 3, l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} p_\alpha^r p_\beta^s p_\gamma^t \tag{8}$$

est résoluble et du genre 2.

Remarquons tout d'abord que nous pouvons nous borner à étudier l'équation (8) qui correspond à

$$r = s = t = 1, \tag{9}$$

parce que les trois équations aux paramètres

$$p_\alpha^3 \quad p_\beta^3 \quad p_\gamma^3$$

sont résolubles.

Multiplions ensuite les deux équations résolubles

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon} p_\alpha p_\beta, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon_1} p_\alpha p_\gamma,$$

nous aurons cette autre équation résoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon + \varepsilon_1} p_\alpha^2 p_\beta p_\gamma,$$

de sorte que l'équation (8) qui correspond aux exposants (9) est certainement résoluble.

Cela posé, nous avons encore à démontrer que l'équation résoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} p_\alpha p_\beta p_\gamma \tag{10}$$

est toujours du genre 2.

A cet effet, supposons que (10) ait deux solutions (u_1, v_1) et (u_2, v_2) n'appartenant pas au même couple de suites coordonnées, puis multiplions les deux équations (10) correspondantes, il existe, pour

$$r = \alpha, \beta, \gamma,$$

un exposant ε_r, tel que

$$u_1 u_2 + (-1)^{\varepsilon_r} a v_1 v_2 \equiv 0 \pmod{p_r}$$
$$u_1 v_2 + (-1)^{\varepsilon_r} u_2 v_1 \equiv 0 \pmod{p_r}.$$

Or, ε_r n'ayant que les deux valeurs 0 et 1, il existe un exposant ε_r, tel que

$$(11)\quad \begin{cases} u_1 u_2 + (-1)^{\varepsilon_r} a v_1 v_2 \equiv 0 \pmod{p_r p_s} \\ u_1 v_2 + (-1)^{\varepsilon_r} u_2 v_1 \equiv 0 \pmod{p_r p_s}, \end{cases}$$

de sorte que la multiplication susdite conduira à l'équation irrésoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta_1} p_t^2 ;$$

c'est-à-dire que l'équation (10) est du genre 2.

XIV. Sur les bases 34, 79, 82, 101.

Il nous reste encore à donner quelques éclaircissements sur les quatre bases qui sont les fondements des tables numériques jointes au présent Mémoire.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la forme quadratique

$$x^2 - 34 y^2$$

admet 79 diviseurs premiers inférieurs à 1000, savoir

3	5	11	29	37	47	61	89	103	107	109
127	131	137	139	151	163	173	181	191	197	211
223	227	239	257	263	269	271	277	281	283	317
347	353	359	379	383	397	409	419	433	457	463
541	547	569	571	577	593	599	619	631	643	647
653	677	683	691	709	727	761	769	787	811	821
827	853	863	877	907	919	937	941	947	953	967
977	997.									

Parmi ces 79 nombres 35 seulement sont applicables comme paramètres dans l'équation de Lagrange ayant la base 34, diviseurs premiers que nous désignons comme étant de la hauteur 1, savoir

47	89	103	127	137	151	191	223	239	257	263
271	281	353	359	383	409	433	457	463	569	577
593	599	631	647	727	761	769	863	919	937	953
967	977									

Les 44 autres diviseurs premiers sont de la hauteur 2, savoir

3	5	11	29	37	61	107	109	131	139	163
173	181	197	211	227	269	277	283	317	347	379
397	419	541	547	571	619	643	653	677	683	691
709	787	811	821	827	853	877	907	941	947	997

Quant à la forme quadratiques

$$x^2 - 79y^2,$$

elle admet 80 diviseur premiers impairs, inférieurs à 1000, savoir

3	5	7	13	43	47	59	71	73	89	97
101	103	107	127	139	181	191	199	211	227	241
251	257	269	271	277	281	307	311	313	317	331
337	359	379	389	397	419	421	433	443	457	463
491	503	541	557	569	587	593	607	617	619	631
641	647	653	659	677	691	733	739	757	761	773
809	821	823	827	857	859	877	883	941	947	953
983	991	997								

Parmi ces diviseurs 24 seulement sont de la hauteur 1, savoir

43	73	181	211	227	257	271	307	311	313	331
443	569	647	733	761	773	821	823	877	941	947
983	997									

Les 56 diviseurs restants sont de la hauteur 3, savoir

3	5	7	13	47	59	71	89	97	101	103
107	127	139	191	199	241	251	269	277	281	317

337	359	379	389	397	419	421	433	457	463	491
503	541	557	587	593	607	617	619	631	641	653
659	677	691	739	757	809	827	857	859	883	953
991										

De même, la forme quadratique

$$x^2 - 82y^2$$

a 74 diviseurs premiers inférieurs à 1000, savoir

3	11	13	19	23	29	31	53	67	73	101
103	109	113	127	149	157	179	181	211	223	227
229	241	271	293	317	331	337	347	353	359	367
397	401	409	421	431	433	449	487	499	509	547
557	563	569	571	587	599	607	617	631	643	647
659	683	691	709	743	757	761	769	773	827	857
863	881	883	911	953	971	983	997			

Parmi ces diviseurs 15 seulement sont de la hauteur 1, savoir

73	103	113	223	359	401	449	487	569	617	631
647	743	761	769							

19 diviseurs sont de la hauteur 2, savoir

23	31	127	241	271	337	353	367	409	431	433
599	607	857	863	881	911	953	983			

Restent encore 40 diviseurs qui sont de la hauteur 4, savoir

3	11	13	19	29	53	67	101	109	149	157
179	181	211	227	229	293	317	331	347	397	421
499	509	547	557	563	571	587	643	659	683	691
709	757	773	827	883	971	997				

Enfin, la forme quadratique

$$x^2 - 101\,y^2$$

a 75 diviseurs premiers, inférieurs à 1000, savoir

5	13	17	19	23	31	37	43	47	71	79
97	107	131	137	157	179	181	193	197	211	223
227	233	239	251	281	283	307	317	359	367	373
379	383	409	421	449	491	499	509	521	541	557
563	569	587	593	601	607	619	631	643	653	677
683	691	701	727	743	761	787	809	821	827	829
839	853	857	887	929	967	977	991	997		

23 seulement de ces diviseurs sont de la hauteur 1, savoir

37	43	97	179	223	233	283	379	383	409	509
557	593	653	683	691	761	809	821	827	839	853
887	991									

Les 52 autres diviseurs sont, au contraire, de la hauteur 3, savoir

5	13	17	19	23	31	47	71	79	107	131
137	157	181	193	197	211	227	239	251	281	307
317	359	367	373	421	449	491	499	521	541	563
569	587	601	607	619	631	643	677	701	727	743
787	829	857	929	967	977	997				

Nous avons encore à considérer la base de seconde espèce

$$2525 = 101 \cdot 25 = 43^2 + 26^2 = 37^2 + 34^2,$$

ayant les mêmes diviseurs premiers que la précédente, mais l'adjonction du facteur carré 25 introduit les deux autres hauteurs 2 et 6.

M. RASCH a démontré que 10 seulement des 75 diviseurs premiers susdits sont de la hauteur 1, savoir

179 379 409 509 691 761 809 821 839 991

tandis que 14 sont de la hauteur 2, savoir

37 43 97 223 233 283 383 557 593 653 683
827 853 887

24 sont de la hauteur 3:

19 31 71 79 131 181 211 239 251 281 359
421 449 491 499 521 541 569 601 619 631 701
829 929

Restent encore 27 diviseurs premiers qui sont de la hauteur 6, savoir

5 13 17 23 47 107 137 157 193 197 227
307 317 367 373 563 587 607 643 677 727 743
787 857 967 977 997

Les tables numériques qui suivent concernant les bases susdites et quelques autres qui s'y rattachent sont calculées par moi, revues et corrigées par M. Rasch.

Quant à ces tables, il nous semble nécessaire de donner certains éclaircissements et sur la nature des bases en question et sur le contenu des tables.

A cet effet, remarquons tout d'abord que

$$34 = 6^2 - 2$$

est la plus petite base de seconde espèce qui soit une somme de deux carrés premiers entre eux, savoir

$$34 = 5^2 + 3^2,$$

et que nous aurons, pour la plus petite solution de l'équation de Fermat correspondante,

$$A_1 = 35 \quad B_1 = 6,$$

ce que nous désignons par le symbole

$$34\,(35\,,\;6).$$

Cette signification adoptée, on aura de même les solutions

$$136\,(35\,,\;3)\quad 306\,(35\,,\;2)\quad 850\,(1449\,,\;84).$$

La base de seconde espèce 850 est également la somme de deux carrés, premiers entre eux, savoir

$$850 = 29^2+3^2 = 27^2+11^2.$$

De plus, nous aurons

$$9\cdot 136 = 1224 = 35^2-1.$$

Quant à la base

$$79 = 9^2-2\,,$$

on aura les solutions

$$79\,(80\,,\;9)\quad 711\,(80\,,\;3)\quad 6399\,(80\,,\;1)\,,$$

de sorte que

$$6399 = 80^2-1.$$

La table qui correspond à 79 est suppléée par les solutions qui correspondent aux paramètres $3p > 1000$, où $p < 1000$ est un diviseur premier de la hauteur 3.

La base

$$82 = 9^2+1$$

donnera de même les solutions

$$82\,(9\,,\;1)\quad 738\,(163\,,\;6)\quad 6642\,(163\,,\;2)\,,$$

et l'on aura donc

$$26568 = 163^2-1.$$

La table de 82 est suppléée par les solutions qui correspondent aux paramètres $3p > 1000$ ou $9p > 1000$, $p < 1000$ étant un diviseur premier de la hauteur 2 respectivement de la hauteur 4.

Quant à la dernière base

$$101 = 10^2+1\,,$$

on aura les solutions

$$101\,(10,\,1) \quad 404\,(201,\,10) \quad 2525\,(201,\,4),$$

donc

$$40400 = 201^2 - 1.$$

Remarquons, en passant, que la base

$$2525 = 43^2 + 26^2 = 37^2 + 34^2$$

est de seconde espèce.

La table de 101 est suppléée par les solutions qui correspondent aux paramètres $4p > 1000$, où $p < 1000$ est un diviseur premier de la hauteur 3.

Dans toutes les tables, j'ai marqué par un astérisque les paramètres qui donnent une équation du genre 4, par deux astérisques ceux qui correspondent au genre 8.

TABLES NUMÉRIQUES

Table I.

Les bases 34 306 850.

34

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—9	5	1	15 *	7	1	—15 *	11	2
—25	3	1	—33 *	1	1	33 *	13	2
47	9	1	—55 *	9	2	55 *	19	3
81	25	4	87 *	11	1	—87 *	7	2
89	15	2	—103	21	4	—111 *	5	2
111 *	31	5	—121	27	5	—127	3	2
—135 *	1	2	135 *	13	1	—137	13	3
145 *	37	6	—145 *	67	11	—151	45	8
—183 *	19	4	183 *	43	7	—185 *	11	3
185 *	27	4	191	15	1	223	23	3
225 *	49	8	225 *	19	2	239	33	5
—257	7	3	—263	31	6	271	55	9
—281	5	3	297 *	29	4	—297 *	37	7
—305 *	1	3	305 *	21	2	—319 *	15	4
319 *	25	3	321 *	61	10	—321 *	23	5
327 *	19	1	—327 *	43	8	—353	49	9
359	45	7	—375 *	13	4	375 *	67	11
—383	29	6	393 *	23	2	—393 *	61	11
407 *	31	1	—407 *	67	12	—409	21	5
417 *	31	4	—417 *	73	13	—423 *	11	4

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—423 *	79	14	433	73	12	457	41	6
—463	9	4	—489 *	19	5	489 *	25	2
—495 **	7	4	—495 **	41	8	495 **	23	1
495 **	79	13	—519 *	5	4	519 *	37	5
535 *	29	3	—535 *	3	4	—543 *	1	4
543 *	47	7	545 *	33	4	—545 *	47	9
569	63	10	—577	33	7	591 *	25	1
—591 *	53	10	593	27	2	—599	25	6
625	43	6	631	91	15	633 *	53	8
—633 *	59	11	647	69	11	655 *	31	3
—655 *	39	8	671 *	39	5	—671 *	65	12
681 *	35	4	—681 *	13	5	695 *	27	1
—695 *	23	6	705 *	29	2	—705 *	31	7
727	59	9	—729	11	5	—761	83	15
—769	9	5	—783 *	89	16	783 *	103	17
—801 *	7	5	—801 *	95	17	—807 *	37	8
807 *	29	1	815 *	81	13	—815 *	101	18
825 **	31	2	825 **	37	4	—825 **	29	7
—825**	107	19	831 *	41	5	—831 *	113	20
—841	3	5	—849 *	1	5	849 *	55	8
—863	19	6	—865 *	57	11	865 *	109	18
905 *	87	14	—905 *	43	9	919	35	3
927 *	31	1	927 *	71	11	—937	27	7
—951 *	35	8	951 *	115	19	953	33	2
967	61	9	977	39	4	—985 *	69	13
985 *	47	6	999 *	43	5	—999 *	49	10

136

—15	11	1	33	13	1	—55	9	1
81	25	2	—87	7	1	89	15	1
—103	21	2	—111	5	1	—127	3	1

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—135	1	1	145	37	3	—151	45	4
—183	19	2	185	27	2	225 *	49	4
225 *	19	1	—263	31	3	297	29	2
305	21	1	—319	15	2	—327	43	4
—375	13	2	—383	29	3	393	23	1
—407	67	6	417	31	2	—423 *	11	2
—423 *	79	7	433	73	6	457	41	3
—463	9	2	489	25	1	—495 *	7	2
—495 *	41	4	—519	5	2	—535	3	2
—543	1	2	545	33	2	569	63	5
—591	53	5	593	27	1	—599	25	3
625	43	3	633	53	4	—655	39	4
—671	65	6	681	35	2	—695	23	3
705	29	1	—783	89	8	—807	37	4
—815	101	9	825 *	31	1	825 *	37	2
—831	113	10	849	55	4	—863	19	3
865	109	9	905	87	7	—951	35	4
953	33	1	977	39	2	985	47	3
—999	49	5						

306

55	19	1	—137	13	1	145	37	2
—185	11	1	223	23	1	—257	7	1
—263	31	2	271	55	3	—281	5	1
—305	1	1	319	25	1	—353	49	3
—383	29	2	—407	67	4	433	73	4
457	41	2	535	29	1	—545	47	3
—599	25	2	625	43	2	631	91	5
655	31	1	—671	65	4	—695	23	2
727	59	3	—761	83	5	—815	101	6
—863	19	2	865	109	6	—905	43	3
919	35	1	967	61	3	985	47	2

1224

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
145	37	1	—263	31	1	—383	29	1
—407	67	2	433	73	2	457	41	1
—599	25	1	625	43	1	—671	65	2
—695	23	1	—815	101	3	—863	19	1
865	109	3	985	47	1			

850

—9	29	1	81	59	2	89	117	4
111 *	31	1	—111 *	233	8	—121	27	1
—151	57	2	191	321	11	239	33	1
271	89	3	—281	437	15	—319 *	291	10
319 *	263	9	359	149	5	—409	21	1
—489 *	19	1	489 *	467	16	—519 *	641	22
519 *	37	1	569	63	2	—591 *	53	2
591 *	671	23	—599	349	12	631	91	3
671 *	39	1	—671 *	173	6	—681 *	13	1
681 *	409	14	—729	11	1	—761	83	3
—769	9	1	—801 *	7	1	—801 *	143	5
831 *	41	1	—831 *	113	4	—841	3	1
—849 *	1	1	849 *	293	10	919	613	21
951 *	149	5	—951 *	407	14	999 *	43	1
—999 *	49	2						

3400

81	59	1	89	117	2	—111	233	4
—151	57	1	—319	291	5	489	467	8
—519	641	11	569	63	1	—591	53	1
—599	349	6	—671	173	3	681	409	7
—831	113	2	849	293	5	—951	407	7
—999	49	1						

7650

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
271	89	1	—281	437	5	319	263	3
—599	349	4	631	91	1	—671	73	2
—761	83	1	919	613	7			

13600

89	117	1	—111	223	2	489	467	4
—599	349	3	—851	113	1			

30600

—599	349	2	—671	173	1

122400

—599	349	1

Table II.

Les bases 79 711 6399.

79

2	9	1	—15	8	1	21	10	1
—27	17	2	—30	7	1	—35	26	3
—39	35	4	42	11	1	—43	6	1
45	19	2	—54	5	1	—63	4	1
65	12	1	—70	3	1	73	28	3
—75	2	1	—78	1	1	—86	25	3
90	13	1	—91	15	2	105	37	4
117	14	1	125	21	2	—126	43	5
130	29	3	141	46	5	146	15	1
—147	13	2	—150	61	7	—175	33	4
177	16	1	181	55	6	—182	23	3
—195	11	2	210	17	1	—211	42	5
213	23	2	225	64	7	—227	22	3
234	47	5	—235	9	2	245	18	1
250	31	3	257	39	4	—267	7	2

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—271	60	7	273	73	8	282	19	1
—291	5	2	—294	41	5	—295	69	8
—303	31	4	—307	3	2	309	25	2
—311	20	3	313	32	3	—315	1	2
321	20	1	325	82	9	329	48	5
—331	87	10	—343	96	11	—350	19	3
354	65	7	—355	114	13	362	21	1
381	91	10	—390	59	7	405	22	1
413	27	2	417	41	4	—422	17	3
—423	29	4	441	100	11	—443	49	6
445	34	3	450	23	1	—454	39	5
—455	16	3	—470	77	9	485	66	7
490	83	9	497	24	1	505	109	12
—507	58	7	514	35	3	—515	14	3
525	29	2	—531	38	5	—534	95	11
—535	27	4	—542	13	3	546	25	1
—567	67	8	569	75	8	573	118	13
—582	113	13	585	43	4	—590	11	3
597	26	1	—606	37	5	—611	10	3
—614	131	15	618	67	7	—622	57	7
—623	76	9	626	51	5	—630	149	17
—635	47	6	637	59	6	—639	25	4
642	101	11	645 *	31	2	645 *	127	14
—647	8	3	650	27	1	658	37	3
—662	7	3	—679	36	5	—686	5	3
—695	4	3	705	28	1	—707	2	3
—710	1	3	721	136	15	—723	94	11
729	52	5	733	38	3	—735	23	4
749	93	10	753	68	7	761	45	4
767	29	1	—767	103	12	773	33	2
801	145	16	—807	112	13	810	119	13

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—819	34	5	821	30	1	—823	21	4
826	85	9	—831	65	8	834	53	5
—843	121	14	845	102	11	—846	55	7
873	77	8	877	61	6	882	31	1
885	154	17	—886	33	5	889	40	3
890	69	7	—903	19	4	909	35	2
—910	93	11	—923	74	9	—927	128	17
941	54	5	945 *	32	1	945 *	47	4
—947	157	18	—951	32	5	—955	54	7
—963	166	19	970	41	3	973	163	18
—975	17	4	—983	184	21	—987	193	22
994	137	15	—995	43	6	997	86	9
—1011	83	10	1077	34	1	1137	49	4
—1167	52	7	—1191	28	5	1257	104	11
—1263	1	4	—1299	26	5	—1371	50	7
1389	58	5	1473	208	23	1509	97	10
—1623	164	19	—1671	173	20	1761	55	4
—1779	14	5	1821	235	26	—1851	218	25
1857	44	1	1893	47	2	—1923	254	29
—1959	4	5	1977	149	16	—2031	55	8
2073	253	28	2217	59	4	—2271	40	7
—2427	38	7	2481	280	31	—2571	73	10
2577	151	16	2649	68	5	—2859	71	10
—2973	203	22						

711

—35	26	1	73	28	1	— 86	25	1
130	29	1	181	55	2	—182	23	1
—227	22	1	250	31	1	—311	20	1
313	32	1	325	82	3	—350	19	1
—422	17	1	—443	49	2	445	34	1

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—455	16	1	—470	77	3	490	83	3
505	109	4	514	35	1	—515	14	1
—542	13	1	—590	11	1	—611	10	1
—614	131	5	—623	76	3	—635	47	2
637	59	2	—647	8	1	658	37	1
—662	7	1	—686	5	1	—695	4	1
—707	2	1	—710	1	1	721	136	5
733	38	1	—767	103	4	826	85	3
877	61	2	889	40	1	—923	74	3
—947	157	6	970	41	1	973	163	6
—983	184	7	994	137	5	—995	43	2
997	86	3						

6399

325	82	1	—470	77	1	490	83	1
—623	76	1	826	85	1	—923	74	1
—947	157	2	973	162	2	997	86	1

Table III.

Les bases 82 738 6642.

82

—33	7	1	39	11	1	—57	5	1
—73	3	1	—81	1	1	87	13	1
—103	15	2	113	21	2	143	15	1
—159	13	2	201	23	2	207 *	17	1
—207 *	11	2	—209	23	3	223	31	3
—247	9	2	—279 *	7	2	279 *	19	1
297	25	2	—303	5	2	—319	3	2
—327	1	2	—351	31	4	359	21	1
369	41	4	—377	19	3	401	27	2
447	23	1	—449	17	3	—471	29	4
487	35	3	513	29	2	—529	39	5

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
537	43	4	543	25	1	—551	49	6
—569	13	3	—583	27	4	—617	11	3
631	37	3	633	31	2	647	27	1
—681	37	5	—687	25	4	—689	7	3
—713 *	5	3	713 *	45	4	—737	1	3
743	47	6	759 *	29	1	759 *	53	5
761	33	2	—769	57	7	—783	23	4
—871	21	4	879	31	1	897 *	35	2
897 *	47	4	—951	19	4	—961	33	5
—993	55	7						
1041	37	2	—1191	11	4	—1263	7	4
1497	53	4	1527	107	11	—1641	91	11
1671	61	5	—1689	19	5	1713	55	4
—1761	17	5	—1929	11	5	—1977	109	13
—2049	1	5	2073	49	2	2127	47	1
—2271	77	10	2319	49	1	2481	53	2
—2649	37	7	—2913	65	4	2991	71	5
—1143 *	13	4	1143 *	35	1	—2169 *	43	7
2169 *	59	4	—2439 *	53	8	2439 *	67	5
—3033 *	83	11	3033 *	91	8	—3177 *	29	7
3177 *	67	4	—3303 *	115	11	—3303 *	113	14
—3681 *	109	10	3681 *	109	10	—3879 *	37	8
3879 *	77	5	—3897 *	11	7	3897 *	65	2
—5391 *	53	10	5391 *	97	7	—5463 *	103	14
5463 *	139	13	—7713 *	47	11	7713 *	95	4
—7767 *	115	16	7767 *	133	13	—7929 *	77	13
7929 *	127	10	—8199 *	1	10	8199 *	91	1
—8577 *	145	19	8577 *	157	14	—8847 *	85	14
8847 *	137	11						

738

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
73	55	2	103	29	1	—113	25	1
—143	53	2	—209	23	1	223	31	1
247	83	3	319	137	5	—359	107	4
—377	19	1	—401	79	3	—449	17	1
487	35	1	529	59	3	—551	49	2
—569	13	1	583	85	3	—617	11	1
631	37	1	—647	161	6	—689	7	1
—713 *	5	1	—713 *	77	3	—737	1	1
743	47	2	—761	133	5	769	61	2
871	139	5	961	113	4			

6642

247	83	1	—401	79	1	529	59	1
583	85	1	—647	161	2	—713	77	1

26568

—647	161	1

Table IV.

Les bases 101 2525.

101

—20	9	1	—37	8	1	43	12	1
—52	7	1	—65	6	1	68	13	1
—76	5	1	—85	4	1	—92	3	1
95	14	1	—97	2	1	—100	1	1
—115	17	2	124	15	1	125	23	2
155	16	1	—179	15	2	188	17	1
221	25	2	223	18	1	—233	26	3
—235	13	2	247	34	3	260	19	1
—283	11	2	—284	25	3	299	20	1
316	35	3	—323	9	2	325	27	2
340	21	1	—355	7	2	—379	5	2

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
— 380	23	3	383	22	1	— 391	35	4
— 395	3	2	— 403	1	2	409	45	4
— 425	22	3	428	23	1	437	29	2
460	37	3	475	24	1	— 509	20	3
524	25	1	— 527	33	4	535	38	3
— 548	19	3	557	31	2	575	26	1
— 589	44	5	593	47	4	— 611	55	6
— 620	17	3	628	27	1	— 653	16	3
— 655	31	4	— 676	43	5	683	28	1
685	33	2	691	40	3	— 713	14	3
724	57	5	— 740 *	13	9	740 *	29	1
— 761	42	5	772	41	3	— 775	29	4
785	49	4	— 788	11	3	799	30	1
— 809	10	3	821	35	2	— 827	53	6
839	58	5	— 844	41	5	— 845	8	3
— 853	64	7	— 860 *	7	3	860 *	31	1
— 884	5	3	— 887	27	4	— 893	4	3
— 905	2	3	— 908	1	3	923	32	1
940	43	3	956	59	5	965	37	2
985	51	4	— 991	25	4			
— 1004	39	5	1124	35	1	— 1228	61	7
1268	37	1	— 1436	33	5	— 1468	59	7
1492	49	3	— 1684	29	5	— 1796	27	5
1964	67	5	— 1996	23	5	— 2084	21	5
— 2164	19	5	— 2252	77	9	2276	85	7
— 2348	51	7	— 2404	11	5	2428	103	9
— 2476	7	5	— 2524	1	5	2572	59	3
2708	53	1	2804	73	5	2908	123	11
2972	89	7	3148	57	1	3316	65	3
3404	77	5	— 3428	39	7	3716	79	5
— 3868	63	1	3908	127	11	— 3988	31	7

404

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
37	21	1	—43	19	1	65	41	2
85	61	3	—95	39	2	97	81	4
—115	17	1	125	23	1	—155	59	3
—179	15	1	221	25	1	—223	79	4
—233	43	2	—235	13	1	—247	37	2
—283	11	1	—299	99	5	—323	9	1
325	27	1	—355	7	1	—379	5	1
—383	119	6	—391	35	2	—395	3	1
—403	1	1	409	45	2	425	83	4
437	29	1	—475	139	7	509	103	5
—527	33	2	—535	77	4	557	31	1
—575	159	8	589	65	3	593	47	2
—611	55	3	653	143	7	—655	31	2
—683	179	9	685	33	1	—691	97	5
713	163	8	761	85	4	—775	29	2
785	49	2	—799	199	10	809	203	10
821	35	1	—827	53	3	—839	75	4
845	223	11	853	67	3	—887	27	2
893	263	13	905	283	14	—923	219	11
965	37	1	985	51	2	—991	25	2

1616

65	41	1	—95	39	1	97	81	2
—223	79	2	—233	43	1	—247	37	1
—383	119	3	—391	35	1	409	45	1
425	83	2	—527	33	1	—535	77	2
575	159	4	593	47	1	—655	31	1
713	163	4	761	85	2	—775	29	1
785	49	1	—799	199	5	809	203	5

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
—839	75	2	—887	27	1	905	283	7
985	51	1	—991	25	1			

2525

76	51	1	—124	49	1	179	52	1
—221	48	1	284	53	1	—299	99	2
—316	47	1	379	152	3	391	54	1
—409	46	1	509	103	2	—524	149	3
—589	44	1	611	56	1	—676	43	1
—691	97	2	724	57	1	—761	42	1
—799	199	4	809	203	4	—821	148	3
839	58	1	—844	41	1	884	253	5
956	59	1	991	154	3			

10100

—299	99	1	509	103	1	—691	97	1
—799	199	2	809	203	2			

40400

—799	199	1	809	203	1

TABLE DES MATIERES

TABLES NUMÉRIQUES

Forelagt paa Mødet den 20. April 1923.
Færdig fra Trykkeriet den 28. Juli 1923.