Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 2.

SUR UNE FORMULE D'ADDITION DES POLYNOMES D'HERMITE

PAR

J. KAMPÉ DE FÉRIET

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

Les polynomes dérivant d'une exponentielle, définis et étudiés par HERMITE,[1] ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux; récemment M. NIELS NIELSEN[2] a consacré à leur étude approfondie un mémoire qui contient une bibliographie complète à laquelle je me contenterai de renvoyer. Je voudrais simplement montrer ici comment on peut établir, par une voie toute élémentaire, une formule d'addition très simple pour ces polynomes, formule qui ne me paraît pas néanmoins avoir encore attiré l'attention.

Les polynomes $H_n(x)$ d'Hermite[3] sont définis par le développement de la fonction génératrice:

$$(1) \qquad e^{ax-\frac{a^2}{2}} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{a^n}{n!} H_n(x)$$

(qui est convergent quels que soient la constante a et la variable x), de telle sorte que l'on a:

$$(2) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Ce polynome est de degré n et a pour expression:

[1] C. HERMITE. — Comptes Rendus t. LVIII. (1864). — p. 94—100 — ou Œuvres t. II. p. 293—308.

[2] NIELS NIELSEN. — »Recherches sur les polynomes d'Hermite« (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. — Math.-fys. Medd. I, 6. 1918).

[3] — HERMITE désigne ses polynomes par $U_n(x)$; ils se déduisent des polynomes désignés par M. NIELS NIELSEN par $H_n(x, a)$ en y faisant $a = \frac{1}{2}$ et en les multipliant par $n!$; ce qui simplifie beaucoup les formules que je donne plus bas.

$$(3)\quad H_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 1!}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2!}x^{n-4} - \ldots$$

Ceci étant rappelé, considérons la fonction

$$F = e^{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - \frac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)}$$

$x_1, \ldots, x_n$ désignant n variables et $a_1, \ldots a_n$, n constantes quelconques.

D'une part on a:

$$F = e^{a_1 x_1 - \frac{a_1^2}{2}} \cdot e^{a_2 x_2 - \frac{a_2^2}{2}} \ldots e^{a_n x_n - \frac{a_n^2}{2}}$$

D'où en développant chacune des exponentielles par la formule (1):

$$(4)\qquad F = \sum_{m_1 = \ldots = m_n = 0}^{m_1 = \ldots = m_n = +\infty} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n).$$

D'autre part, il est clair que F s'identifie avec la fonction génératrice (1) en posant:

$$a = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \qquad x = \frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

d'ou

$$(5)\quad F = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \frac{1}{\mu!}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right]$$

Or il résulte de l'expression (3) que le terme de rang μ de cette dernière série est homogène de degré μ par rapport aux constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n$.

Donc en identifiant les deux développements (4) et (5) de F:

$$(6)\qquad (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right] =$$

$$= \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n)$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $m_1, \ldots, m_n$ vérifiant la relation: $m_1 + \ldots + m_n = \mu$.

Telle est la relation simple qui constitue pour les polynomes d'Hermite une véritable formule d'addition.

On peut lui donner une forme très condensée:

$$(7) \quad H_\mu\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right] = \left[\frac{a_1 H(x_1) + \ldots + a_n H(x_n)}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right]^\mu$$

en convenant de remplacer dans le développement du second membre une puissance telle que $[H(x_1)]^{m_1}$ par le polynome $H_{m_1}(x_1)$.

D'après la relation (2) on peut aussi écrire en utilisant le procédé symbolique bien connu:

$$(8) \quad H_\mu\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right] =$$

$$= (-1)^\mu e^{\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)} \left[\frac{a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right]^\mu e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

Quelques cas particuliers de la formule (6) conduisent à des expressions curieuses, parmi lesquelles je signalerai les suivantes:

1° En faisant: $a_1 = \ldots = a_n = 1$, $x_1 = \ldots = x_n = x$ on exprime un polynome dont l'argument est $\sqrt{n}x$ en fonction des polynomes dont l'argument est x:

$$(9) \quad n^{\frac{\mu}{2}} H_\mu(\sqrt{n}x) = \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1}(x) \ldots H_{m_n}(x)$$
$$(m_1 + \ldots + m_n = \mu).$$

2° En faisant $a_1 = \ldots = a_n = 1$ et en remplacant $x_1 \ldots,$ x_n par $\sqrt{n}x_1, \ldots, \sqrt{n}x_n$ on a d'abord:

$$n^{\frac{\mu}{2}} H_\mu(x_1 + \ldots + x_n) = \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1}(\sqrt{n}x_1) \ldots H_{m_n}(\sqrt{n}x_n).$$

Puis en appliquant à chacun des polynomes du 2e membre la formule (9), après avoir multiplié les deux membres par $n^{\frac{\mu}{2}}$, on obtient:

$$(10) \qquad n^{\mu} H_\mu(x_1 + \ldots + x_n) =$$

$$= \sum \frac{\mu!}{m_{1,1}! \ldots m_{1,n}! \ldots m_{n,1}! \ldots m_{n,n}!} H_{m_{1,1}}(x_1) \ldots H_{m_{1,n}}(x_1) \ldots$$

$$H_{m_{n,2}}(x_n) \ldots H_{m_{n,n}}(x_n)$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des n^2 entiers $m_{i,j}$ vérifiant la condition: $(m_{1,1} + \ldots + m_{1,n}) + \ldots + (m_{n,1} + \ldots + m_{n,n}) = \mu$.

Le terme général contient n^2 polynomes H dont n dépendent de x_j.

Par exemple pour $n = 2$:

$$2^{\mu} H_\mu(x+y) = \sum \frac{\mu!}{p!\,q!\,r!\,s!} H_p(x)\, H_q(x)\, H_r(y)\, H_s(y)$$

$$(p + q + r + s = \mu)$$

3° En faisant $a_1 = x_1, \ldots, \quad a_n = x_n$ on a:

$$(11) \qquad (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) =$$

$$= \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n).$$

4° En faisant: $n = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \dfrac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}, \; x_1 = x,$ $x_2 = 0$, on a:

$$H_\mu(\lambda x) = \sum \frac{\mu!}{m!\,n!} \lambda^m (1-\lambda^2)^n H_m(x)\, H_n(0).$$

Or de la formule (1) on tire:

d'où $\qquad H_{2k+1}(0) = 0 \quad H_{2k}(0) = (-1)^k \dfrac{(2\,k)!}{k!} \dfrac{1}{2^k}$

$$H_\mu(\lambda x) = \lambda^\mu H_\mu(x) - \frac{\mu(\mu-1)}{2\cdot 1!}\lambda^{\mu-2}(1-\lambda^2)H_{\mu-2}(x) +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2^2\cdot 2!}\lambda^{\mu-4}(1-\lambda^2)^2 H_{\mu-4}(x) - \dots$$

Si l'on rapproche cette expression de (3), il saute aux yeux que l'on peut écrire symboliquement:

$$H_\mu(\lambda x) = (1-\lambda^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} H(x)\right] \tag{12}$$

en convenant de remplacer dans le 2e membre une puissance telle que $[H(x)]^m$ par le polynome $H_m(x)$.

En prenant en particulier $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ on retrouve une formule donnée par M. Appell[1]:

$$H_\mu[H(x)] = 2^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

5° Lorsque $n = 2$, la formule générale (6) s'écrit:

$$(a^2+b^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] = a^\mu H_\mu(x)\, H_0(y) +$$

$$+ \frac{\mu}{1} a^{\mu-1} b\, H_{\mu-1}(x) H_1(y) + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} a^{\mu-2} b^2 H_{\mu-2}(x) H_2(y) + \dots$$

Or les polynomes d'Hermite rentrent dans la classe de M. Appell, c'est-à-dire que l'on a:

$$\frac{dH_n}{dx} = n\, H_{n-1}$$

et d'une manière générale:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^k H_n}{dx^k} = \frac{1}{(n-k)!} H_{n-k}.$$

Donc:

[1] — P. Appell. — Ann. École normale 2e série t. IX. — (1880). p. 119.

$$(a^2+b^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] = a^\mu\Big[H_\mu(x)\,H_0(y) +$$
$$+\frac{1}{1}\,\frac{b}{a}\,\frac{dH_\mu}{dx}\,H_1(y) + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2H_\mu}{dx^2}\,H_2(y) + \ldots\Big]$$

ce que l'on peut écrire symboliquement:

$$(a^2+b^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] = a^\mu\, H_\mu\left[x + \frac{b}{a}\,H(y)\right] \tag{13}$$

en convenant toujours, dans le développement du 2[e] membre par la formule de Taylor, de remplacer la puissance $[H(y)]^n$ par le polynome $H_n(y)$.

6° Pour terminer je ferai remarquer qu'il existe des liaisons simples entre le produit de polynomes d'Hermite:

$$H_{m_1}(x_1)\ldots H_{m_n}(x_n)$$

— qui joue un rôle fondamental dans la formule d'addition (6), — et les polynomes hypersphériques[1] à n variables définis par la fonction génératrice:

$$(1-2\,a_1\,x_1-\ldots-2\,a_n x_n + a_1{}^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2}} =$$
$$= \sum_{m_1=\ldots=m_n=0}^{m_1=\ldots=m_n=+\infty} a_1{}^{m_1}\ldots a_n{}^{m_n}\, V^{(s)}_{m_1,\ldots,\,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

En effet partons de la formule élémentaire;

$$2^{k-1}\Gamma(k)\,\alpha^{-k} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\frac{t^2}{2}}\, t^{2k-1}dt.$$

Faisons: $$k = \frac{n+s-1}{2},$$

$$\alpha = 1-2\,a_1 x_1\ldots-2\,a_n x_n + a_1{}^2+\ldots+a_n^2$$

[1] — J'ai fait l'étude de ces polynomes dans ma Thèse »Sur les fonctions hypersphériques« (Paris 1915); dans le cas de $n=1$ ils se ramènent aux polynomes bien connus de Gegenbauer:

$$(1-2\,ax+a^2)^{-\frac{s}{2}} = \sum a^n\, V_n^{(s)}(x)$$

qui pour $s=1$ se réduisent aux polynomes de Legendre.

et développons les deux membres selon les puissances de $a_1, \ldots, a_n$; il vient en identifiant:

$$2^{\frac{n+s-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{t^{\mu+n+s-2}}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1}(tx_1) \ldots H_{m_n}(tx_n)\, dt.$$

Cette formule offre ceci de remarquable que, tandisque le polynome hypersphérique est indécomposable, la fonction sous le signe »somme« est décomposée en un produit de polynomes qui ne dépendent chacun que d'une variable.

On peut effectuer l'inversion de cette relation en partant de la formule de Hankel:

$$\frac{e^\alpha}{\Gamma(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^z (z-\alpha)^{-k}\, dz$$

où c désigne un contour longeant le bord inférieur de l'axe réel depuis $-\infty$ jusqu'à 0, tournant autour de 0, puis longeant le bord supérieur de l'axe réel depuis 0 jusqu'à $-\infty$. En faisant:

$$k = \frac{n+s-1}{2} \qquad \alpha = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - \tfrac{1}{2}(a_1{}^2 + \ldots + a_n^2),$$

puis en développant les deux membres, on obtient:

$$\frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{H_{m_1}(x_1)}{m_1!} \cdots \frac{H_{m_n}(x_n)}{m_n!} =$$

$$= \int_c e^z z^{-\frac{\mu+n+s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2z}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{2z}}\right) dz.$$

Ces deux formules ont été données par M. NIELS NIELSEN[1] dans le cas particulier ou $n = 1$.

[1] NIELS NIELSEN. — Loc. cit. — p. 48.

Lille, le 25 juillet 1922.

Færdig fra Trykkeriet den 9. Marts 1923.