Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III,** 18.

EN LUFTSTRØMS INDFLYDELSE PAA ET LEGEMES FORDAMPNINGSHASTIGHED

AF

SOPHUS WEBER

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1921

§ 1. Medens man i Almindelighed vil være tilbøjelig til at antage, at et plant Legemes Fordampningshastighed er proportional med dettes Overflade, fremgaar det, saaledes som STEFAN[1] har paavist, af en nærmere Undersøgelse, at en cirkelformet Flades Fordampningshastighed under visse Omstændigheder ikke er proportional med Arealet, men med dennes Periferi. Saaledes paaviste STEFAN, at en cirkulær Overflades Fordampningshastighed er proportial med dennes Radius, naar Fordampningen foregaar i stillestaaende Luft, og naar Vædskespejlet staar lige med Karrets Rand. Staar Vædskespejlet tilstrækkelig dybt under Karrets Rand, bliver Fordampningshastigheden naturligvis proportional med Arealet.

Den experimentelle Stadfæstelse af STEFAN's Lov foreligger endnu ikke; kun har WINKELMANN[2] foretaget nogle enkelte kvalitative Forsøg over STEFAN's Lov. Desuden har B. SRENEWSKI[3] undersøgt Fordampningen af liggende Vædskedraaber og fundet, at Fordampningen af disse med Tilnærmelse var proportional med Periferien. Da de experimentelle Omstændigheder næppe var helt veldefinerede i SRENEWSKI's Forsøg, skal jeg ikke her gaa nærmere ind paa disse. Senere har imidlertid J. VON PALLICH[4] foretaget

[1] J. STEFAN: Sitzungsberichte K. A. d. W. in Wien, II a, Bd. LXXXIII, 1881, p. 943.

[2] WINKELMANN: W. A. 35, p. 401, 1888.

[3] B. SRENEWSKI: Beiblätter d. Ph. VII, p. 888, 1883.

[4] J. VON PALLICH: Sitzungsberichte K. A. d. W. in Wien, II a, Bd. CVI, 1897, p. 384.

et stort Arbejde for at undersøge og paavise Stefan's Lov. Disse Forsøg, for hvilke de experimentelle Metoder er særdeles smukt valgte, viser dog saa store Afvigelser fra Stefan's Teori, i nogle Tilfælde fandtes de fordampede Mængder 2 á 300 Procent for store, at man tvinges til at antage, at der maa være en eller anden Faktor, som enten Teorien eller Forsøgene ikke har taget Hensyn til. Som jeg senere skal vise, kan disse Afvigelser forklares ved ganske langsomme Konvektionsstrømninger i Luften. I denne Forbindelse vil jeg ogsaa henvise til den store Betydning, som Overfladens Beskaffenhed har for Fordampningen. Dette er særlig paavist af Martin Knudsen.[1]

Nu har imidlertid for kort Tid siden Miss N. Thomas og A. Fergusson[2] behandlet den foreliggende experimentelle Litteratur over Fordampningshastigheden kritisk samt foretaget en Række Forsøg over Vands Fordampning fra cirkulære Overflader under forskellige Omstændigheder. De fandt som Resultat af deres Forsøg, at den fordampede Mængde kan sættes lig med $K \cdot r^n \cdot t$, hvor t og r betegner Tiden og Overfladens Radius, medens K og n afhænger af de ydre Omstændigheder. Stod Vædskespejlet lige med Karrets Rand, varierede n fra 1,43 til 1,65. I Tilslutning til dette Arbejde har H. C. Burger[3] gjort opmærksom paa, at dette Resultat for n kan forklares ved Luftstrømningernes Indflydelse, idet han, gaaende ud fra forskellige Forudsætger, fandt, at Fordampningshastigheden i dette Tilfælde maa være proportional med $r^{5/3}$.

Inden jeg imidlertid gaar videre med Diskussionen af disse experimentelle Undersøgelser, skal jeg først gaa over

[1] Martin Knudsen: Ann. d. Ph. 47, 1915, p. 697.
[2] Miss N. Thomas and A. Fergusson: Phil. Mag. 34, p. 308, 1917.
[3] H. C. Burger: Proc. Kon. Akad. v. W. A'dam, vol XXI, Nr. 3, p. 271.

til at betragte disse Forhold teoretisk og søge at aflede en Formel for Fordampningshastighedens Afhængighed af Luftstrømmens Hastighed og Luftartens Egenskaber samt ogsaa i enkelte Tilfælde undersøge Indflydelsen af Legemets Form.

§ 2. Lad os tænke os en Vædskeoverflade, AB (Fig. 1), og at der i Luften over denne Vædskeoverflade forefindes en Strømning, parallel med AB og med den konstante Hastighed w. Lad os desuden først antage, at der ikke findes

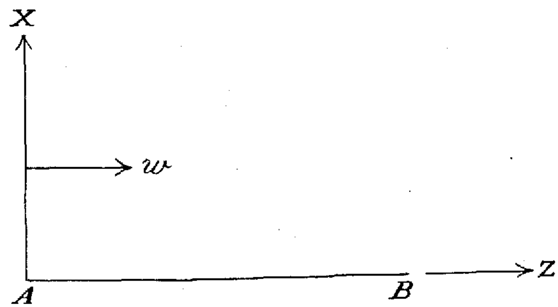

Fig. 1.

nogen Gnidning mellem Luften og Vædsken, saaledes at Luftstrømmens Hastighed ogsaa ved Overfladen AB er w. Betegner da c Vædskedampenes Concentration i Punktet (x,z) og D Vædskedampenes Diffusionskoefficient, faas for den stationære Tilstand følgende Differentialligning:

$$w \cdot \frac{dc}{dz} = D \cdot \left(\frac{d^2c}{dx^2} + \frac{d^2c}{dz^2}\right)$$

med Grænsebetingelserne:

$$x = \infty, \; z = \infty, \; c = c_\infty, \; \frac{dc}{dx} = \frac{dc}{dz} = 0$$

$$x = 0 \qquad c = c_0$$

og $$z = 0 \qquad c = c_\infty.$$

Hvis Hastigheden w ikke er altfor lille, kan vi antage, at den i Strømningens Retning diffunderede Mængde er forsvindende i Sammenligning med den Mængde, som transporteres af Strømningen selv, og finder saa:

$$w \cdot \frac{dc}{dz} = D \cdot \frac{d^2 c}{dx^2}. \tag{1}$$

Lad os nu for denne Ligning søge en particulær Løsning, som tilfredsstiller Grænsebetingelser.[1] Vælges som Hjælpevariable:

$$\xi = \sqrt{\frac{w}{D}} \cdot x \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

faas af (1)
$$\frac{d^2 c}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \cdot \frac{dc}{d\xi} = 0$$

eller
$$\frac{dc}{d\xi} = B \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi^2}.$$

Da Grænsebetingelserne er:

$$\xi = 0, \quad c = c_0$$
$$\xi = \infty, \; c = c_\infty, \; \frac{dc}{d\xi} = 0$$

faas:
$$c - c_\infty = B \int_\infty^\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi$$

eller, da $c = c_0$ for $\xi = 0$, $B = -\frac{c_0 - c_\infty}{\sqrt{\pi}}$.

Heraf findes:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{dc}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = B \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \cdot \sqrt{\frac{w}{Dz}}$$

og altsaa
$$\left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{c_0 - c_\infty}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{w}{D \cdot z}}.$$

Beregner vi nu den fordampede Mængde, Q, for Tidsenheden og for Længden, L cm, samt for Bredden, b cm, faas:

$$Q = -\int_0^L D \cdot \left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=0} \cdot dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{D \cdot w}\, (c_0 - c_\infty) \cdot b \sqrt{L}. \tag{2}$$

[1] Sml. Sophus Weber: Kgl. D. Vid. Selsk. 1920 M.-f. Medd. III, 3 p. 10.

Heraf ses, at den fordampede Mængde, Q, er proportional med Kvadratroden af Længden, L, og med Kvadratroden af Luftstrømmens Hastighed, w.

Ved Afledningen af denne Formel forudsatte vi, at der ingen Gnidning var mellem Vædskeoverfladen og Luften. I Almindelighed maa man dog antage, at Luftstrømmens Hastighed er 0 ved Vædskens Overflade, idet dette stemmer med Undersøgelserne over Luftarternes Strømning i Rør og Kanaler. Lad os derfor ogsaa betragte dette Tilfælde og for Simpelheds Skyld undersøge Strømningen mellem et Par planparallelle Plader, hvis Afstand er $2a$. I dette Tilfælde findes som bekendt:

$$w = w_0 \cdot \frac{x}{a}\left(2 - \frac{x}{a}\right),$$

idet vi sætter $w = w_0$ for $x = a$.

Antager vi Afstanden mellem Pladerne stor, faas i første Tilnærmelse:

$$w = \alpha \cdot w_0 \cdot x,$$

hvilken Nøjagtighed sandsynligvis her er tilstrækkelig, da det dog især er Lagene tættest ved Pladen AB, som spiller en Rolle.

Ligning (1) bliver i dette Tilfælde:

$$\alpha\, w_0 \cdot x\, \frac{dc}{dz} = D \cdot \frac{d^2c}{dz^2}.$$

Løsningen af denne Ligning med de her foreliggende Grænsebetingelser har jeg undersøgt i en tidligere Afhandling,[1] hvor jeg fandt:

$$Q = \text{konstant} \cdot \alpha^{1/3} \cdot w_0^{1/3} \cdot D^{2/3} \cdot L^{2/3}\, (c_0 - c_\infty), \qquad (3)$$

saaledes at det her viser sig, at Fordampningshastigheden i dette Tilfælde maatte være proportional med $\sqrt[3]{w}$.

§ 3. Hvis vi nu vil sammenligne den her udviklede Teori med de foreliggende experimentelle Undersøgelser, viser det

[1] Sofhus Weber: loc. cit. p. 11.

sig, at disse kun er faatallige. De mest bekendte Undersøgelser paa dette Omraade er foretagne af Schierbeck[1] og de Heen.[2] Schierbeck undersøgte Fordampningshastighedens Afhængighed af Luftstrømmens Hastighed paa forskellig Maade og fandt, at denne var proportional med $\sqrt{w}$. Senere har Trabert[3] paavist, at Schierbeck's Resultater kan fremstilles ved Formlen:

$$Q = \text{konstant} \cdot \sqrt{w} \cdot (c_0 - c_\infty),$$

altsaa i fuldstændig Overensstemmelse med Formel (2). Dette Resultat bekræftes ogsaa ved en Undersøgelse af de Heen, som ogsaa fandt Q proportional med $\sqrt{w}$, saaledes at det vel maa antages, at Experimenterne stemmer med Formel (2) og ikke med Formel (3).

Endnu en Bekræftelse af dette Resultat kan findes, naar vi i Stedet for Fordampningen betragter Legemets Varmetab. I dette Tilfælde maa man i Differentialligningen (1) erstatte c med Temperaturen t og D med $\frac{k}{\rho \cdot c}$, hvor k, ρ og c betegner Luftartens Varmeledningksoefficient, Vægtfylde og Varmefylde. Her foreligger kun en ganske enkelt Undersøgelse, nemlig af Oberbeck.[4] I hans Forsøg undersøgte han Varmetabet for en Platintraad, 13 cm. lang og 0,01 cm. i Diameter. Vindhastighederne var henholdsvis 146 $^{cm}/_{Sek}$ og 434 $^{cm}/_{Sek}$, og deres Retning var vinkelret paa Traadens Længderetning. I omstaaende Tabel ses hans Forsøgsresultater, idet Q betegner den afgivne Varmemængde, S Straalingen, som er beregnet ifølge Platinets Straalingskonstanter[5], og Δt Traadens Temperaturforskel med Omgivelserne.

[1] Schierbeck: Oversigt K. D. V. S. Forh. 1896, Nr. 1.
[2] P. de Heen: Bull. Acad. Belge (3) 21, p. 214, 1891.
[3] Trabert: Meteor. Zeitschrift Bd. XXXI, p. 261, 1896.
[4] A. Oberbeck: W. A. 56, p. 405, 1895.
[5] Sml. Sophus Weber: Doktordisputats 1916, København.

Δt		$Q_1 - S$	$Q_2 - S$	$Q_2 - S / Q_1 - S$
100° ÷ 20°		0,32	0,60	1,87
150°	»	0,50	0,96	1,92
200°	»	0,68	1,34	1,97
250°	»	0,88	1,78	2,02
300°	»	1,14	2,50	2,19
350°	»	1,64	3,28	2,00
400°	»	2,26	4,30	1,90

medens $$\sqrt{\frac{w_1}{w_2}} = \sqrt{\frac{434}{146}} = 1{,}73.$$

Overensstemmelsen er sikkert saa god, som man kan vente efter Forsøgenes Nøjagtighed, der næppe er særlig stor. Desuden maa man sandsynligvis ogsaa vente, at Overensstemmelsen er mindre god ved Varmetabet end ved Fordampningshastigheden, da de store Temperaturforskelle kan forandre Strømningsforholdene, hvis Hastigheden da ikke er særlig stor. Vi ser imidlertid heraf, at et Varmtraadsanemometers Følsomhed ikke er proportional med Vindhastigheden, saaledes som Oberbeck troede, men derimod med Kvadratroden af Vindhastigheden.

Da det saaledes synes at være fastlagt experimentelt, at Fordampningshastigheden er proportional med $\sqrt{w}$, skal jeg i det følgende henholde mig til den første Beregning og Formel (2).

I første Øjeblik er dette et overraskende Resultat, idet man paa Forhaand vilde være tilbøjelig til at vente, at Formel (3) maatte være nøjagtigere og stemme bedre med Experimenterne end Formel (2), da de Grænsebetingelser, som er anvendt ved Afledningen af Formel (3), sikkert stemmer bedst med de virkelige Forhold. Overensstemmelsen med Formel (2) kan imidlertid forstaas, hvis Hastighedsdiagrammet ved Vædskens Overflade kan fremstilles

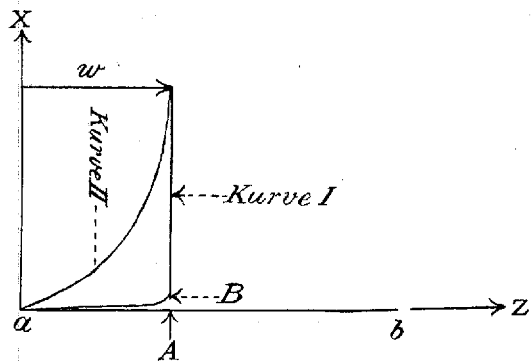

Fig. 2.

ved en Kurve som Kurve I i Fig. 2. Heraf ses nemlig, at de ved Afledningen af Formel (2) anvendte Grænsebetingelser bliver praktisk rigtige, hvis Afstanden AB er saa lille, at Concentrationsforskellen mellem Punkterne A og B er forsvindende. I dette Tilfælde er det ogsaa tydeligt, at Formel (3) ikke kan være rigtig, fordi det da ikke er tilladt at se bort fra de højere Potenser af x i Rækkeudviklingen for Hastigheden. Har Hastighedsdiagrammet ved Overfladen imidlertid den ved Kurve II angivne Form, er der ingen Tvivl om, at man med Rette maatte vente Overensstemmelse med Formel (3). At Hastighedsdiagrammet imidlertid kan fremstilles ved en Kurve af samme Form som Kurve I er meget sandsynligt, især naar Hastigheden er stor. Endnu en Bekræftelse af det her fundne Resultat kan faas ved Maalingerne over Psychrometret's Afhængighed af Ventilationen, men dette skal jeg behandle i en følgende Afhandling.

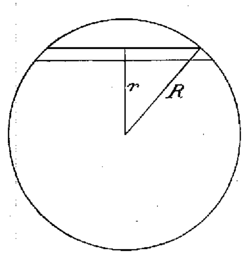

Fig. 3.

Af Formel (2) følger endvidere, at Fordampningshastigheden er proportional med Kvadratroden af Diffusionskoefficienten, saa man maa vente, at et Stofs Fordampningshastighed er betydelig større i f. Eks. en Brintstrøm end i en Iltstrøm. En experimentel

Undersøgelse af disse Forhold vilde næppe være uden Interesse.

§ 4. Jeg skal nu gaa over til i et Par enkelte Tilfælde at undersøge, hvorledes Fordampningshastigheden afhænger af Legemets Form, og først skal jeg betragte en plan cirkulær Overflade med Radius R. Ved Hjælp af Formel (2) findes let (Fig. 3):

$$Q = 2\int_0^R \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{D\cdot w}\,(c_0 - c_\infty)\sqrt[4]{R^2 - r^2}\,dr$$

eller $$Q = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^1 \sqrt[4]{1 - x^2}\,dx\cdot\sqrt{D\cdot w}\,(c_0 - c_\infty)\cdot R^{3/2} \qquad (4)$$

$\int_0^1 \sqrt[4]{1 - x^2}\,dx$ findes let ved numerisk Integration lig med 0,874.

Denne Formel (4) stemmer med Miss N. Thomas og A. Fergusson's Resultater, idet de, som ovenfor omtalt, undersøgte Fordampningshastigheden for en Række cirkulære Kar, der stod frit i Luften, og som derfor var udsatte for alle mulige Luftstrømninger (»every day conditions«). Som ovenfor nævnt fandt de, at den fordampede Mængde, Q, kan sættes lig med $K\cdot R^n$, hvor K afhænger af de ydre Omstændigheder (Temperatur, Damptryk og Luftens Fugtighedsgrad), medens n afhænger af Vandspejlets Dybde, d, under Karrets Rand. For $d = 0$, fandtes i tre forskellige Forsøgsrækker $n = 1{,}43$, $n = 1{,}65$ og $n = 1{,}50$, altsaa i Middel $n = 1{,}53$, hvad stemmer godt med Formel (4). I den Forsøgsrække, hvor n fandtes lig 1,43, fandtes $K = 0{,}0307$ $^{\mathrm{gr}}/_{\mathrm{Time}}$, idet Vandets og Luftens Temperatur var 14,9° C., og Luftens relative Fugtighedsgrad 0,56. Heraf findes, idet $D = 0{,}23$, at $w = 3$ $^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{Sek}}$, hvad sikkert stemmer med den

Størrelsesorden, som man maa vente ved almindelige tilfældige Luftstrømninger (Konvektion).

I Tilslutning til Formel (4) og disse Forsøg skal jeg nu gaa over til at betragte VON PALLICH's Forsøg nærmere, da, saavidt jeg kan se, ogsaa svage Luftstrømninger har været Aarsag til, at han ikke fandt STEFAN's Lov bekræftet.

Jeg skal særlig behandle de Forsøgsrækker, i hvilke han undersøgte STEFAN's Teori ved at bestemme Fordampningen fra en plan, cirkulær Overflade, som var fremstillet ved at sætte ringformige Glasskaale coaxialt inden i hinanden. Paa denne Maade kunde han ved Vejning finde den fordampede Mængde for hver enkelt Ringflade samt for hele Overfladen (VON PALLICH loc. cit. p. 396) og derved undersøge, om Fordampningen var langt større ved Karrets Rand end i dets Midte, saaledes som STEFAN's Teori fordrer det.

I hans første Forsøgsrækker (loc. cit. Forsøg I og I[1]) havde han, naar r_n betegner Ringenes største Radius og F_n de enkelte Ringfladers Overflade, idet der tages Hensyn til Karvæggenes Tykkelse, som var ca. $^3/_4$ mm,

$$r_1 = 1{,}40 \quad r_2 = 2{,}56 \quad r_3 = 3{,}48 \quad r_4 = 5{,}12 \text{ cm.}$$
$$\text{og } F_1 = 6{,}15 \quad F_2 = 13{,}51 \quad F_3 = 24{,}49 \quad F_4 = 34{,}95 \text{ cm}^2,$$

medens han i Forsøgene II og II[1] havde endnu en Ring med $r_5 = 6{,}40$ cm. og $F_5 = 43{,}72$ cm^2.

For fire Kar fandtes (loc. cit. p. 403), at Middelværdien for Fordampningen pr. cm^2 og pr. Ring forholder sig som:

$$1 : 1{,}03 : 1{,}14 : 1{,}84 \quad \text{(obs. VON PALLICH)},$$

medens man ifølge STEFAN's Teori finder:

$$1 : 1{,}12 : 1{,}27 : 2{,}94$$

og ifølge Konvektionens Indflydelse (se senere)

$$1 : 1{,}07 : 1{,}19 : 1{,}84.$$

For fem Ringe findes paa samme Maade:

1 : 1,03 : 1,12 : 1,21 : 1,98 (obs. von Pallich)
1 : 1,17 : 1,23 : 1,53 : 3,35 (Stefan's Teori)
1 : 1,08 : 1,17 : 1,19 : 2,00 (Konvektionsteorien).

Beregningen af Strømningernes Indflydelse har jeg for Simpelheds Skyld udført med henholdsvis 4 og 5 concentriske Kvadrater med parallele Sider. Arealerne er de samme, som de 5 concentriske Cirklers Arealer. I dette Tilfælde faas, idet Strømningen er parallel med Sidernes Retning (sml. Fig. 4):

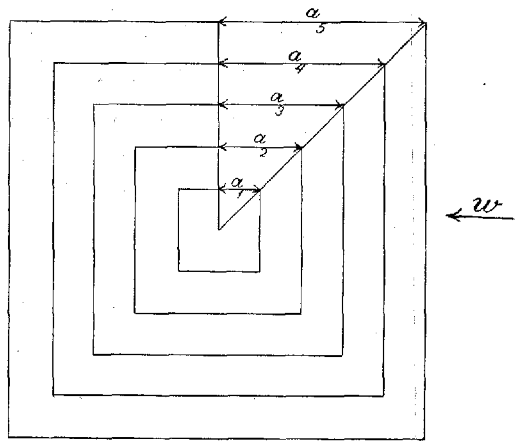

Fig. 4.

$$
\begin{aligned}
Q_5 &= \text{const.} \cdot 2\sqrt{2} \cdot a_5^{3/2} &&= \text{const.} \cdot 45{,}8 \\
Q_4 &= \text{»} \quad 2a_4\left(\sqrt{a_5 + a_4} - \sqrt{a_5 - a_4}\right) &&= \text{»} \quad 23{,}21 \\
Q_3 &= \text{»} \quad 2a_3\left(\sqrt{a_5 + a_3} - \sqrt{a_5 - a_3}\right) &&= \text{»} \quad 12{,}60 \\
Q_2 &= \text{»} \quad 2a_2\left(\sqrt{a_5 + a_2} - \sqrt{a_5 - a_2}\right) &&= \text{»} \quad 5{,}27 \\
Q_1 &= \text{»} \quad 2a_1\left(\sqrt{a_5 + a_1} - \sqrt{a_5 - a_1}\right) &&= \text{»} \quad 1{,}57
\end{aligned}
$$

hvoraf findes, at Fordampningen pr. cm^2 og pr. Ring maa forholde sig som:

$$\frac{Q_1}{F_1} : \frac{Q_2 - Q_1}{F_2} : \frac{Q_3 - Q_2}{F_3} : \frac{Q_4 - Q_3}{F_4} : \frac{Q_5 - Q_4}{F_5} \text{ eller som}$$

$$1 : 1{,}08 : 1{,}17 : 1{,}19 : 2{,}00,$$

saaledes som ovenfor angivet.

Heraf ses, at Overensstemmelsen er meget bedre, naar man antager, at man har haft med Konvektionsstrømninger at gøre, hvad ogsaa er meget sandsynligt, da hvert enkelt Forsøg varede ca. 24 Timer.

Vi kan endnu undersøge, hvilken Værdi vi finder for Konvektionsstrømningernes Hastighed ved Vandets Overflade i von Pallich's Forsøg. Paa samme Maade som ovenfor findes af Forsøg I[1] (loc. cit. p. 398) $w = 1{,}4\ {}^{\text{cm}}/_{\text{Sek}}$. Denne Hastighed er ikke større, end at den rimeligvis kan opstaa ved ganske tilfældige Temperaturforskelle i det Rum, hvori Forsøgene foretoges.

Der kan efter det ovenstaaende vel næppe være Tvivl om, at von Pallich's Undersøgelser er komplicerede ved Strømninger i Luften, tilmed da Konvektionsstrømningerne naturligvis, hvilken Hovedretning de end har, maa have en Komposant parallel med Vædskens Overflade. Ved en fornyet Undersøgelse over Stefan's Lov vil det derfor være af den største Betydning at forebygge Strømningernes Opstaaen og deres Indflydelse.

§ 5. Den matematiske Behandling af Fordampningshastighedens Afhængighed af Legemets Form er for nogle Tilfælde egentlig allerede foretaget af Boussinesq, som undersøgte en Cylinders og en Kugles Varmetab i en strømmende Vædske, som forudsattes gnidningsfri, usammentrykkelig og diatherman. Boussinesq's[1] Arbejder er refererede i en Afhandling af Russell,[2] men da han har bibeholdt Boussinesq's vanskelige matematiske Behandling, skal jeg ganske kort behandle et enkelt Tilfælde i Analogi med det foregaaende.

Lad os betragte en uendelig lang Cylinder med Radius R i en Luftstrøm, vinkelret paa Cylinderens Akse, og lad os se bort fra Gnidningen i Luftarten. I dette Tilfælde kendes fra Hydrodynamiken Strømliniernes og de æquipotentielle Liniers Forløb. Kaldes Luftstrømmens konstante Hastighed i

[1] J. Boussinesq: Theorie analytique de la chaleur, II, 1903.
[2] A. Russell: Phil. Mag. 20, 1910, p. 591.

stor Afstand fra Cylinderen w_0, er Strømfunktionen $w_0 \cdot \psi$ og Hastighedspotentialet $w_0 \cdot \varphi$. Betragtes nu et Element $ds_1 \, ds_2$, hvor ds_2 er et Bueelement paa Strømlinien og ds_1 et Bueelement paa den

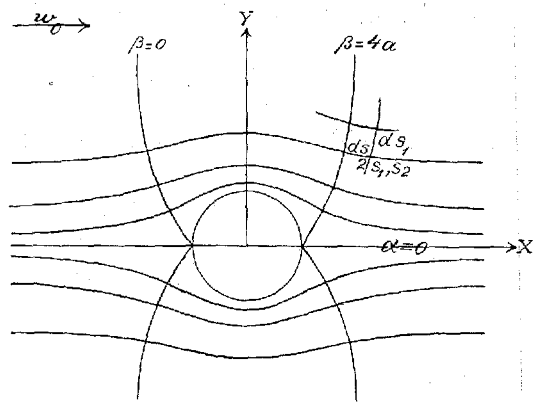

Fig. 5.

æquipotientielle Linie (sml. Fig. 5), faas i den stationære Tilstand følgende Differentialligning til Bestemmelse af Diffusionen:

$$u \frac{dc}{ds_2} = D\left(\frac{d^2c}{{ds_1}^2} + \frac{d^2c}{{ds_2}^2}\right),$$

idet u betegner Hastigheden i Punktet (s_1, s_2). Som bekendt haves:

$$u = w_0 \cdot \frac{d\psi}{ds_1} = w_0 \cdot \frac{d\varphi}{ds_2}.$$

Vælges nu $\alpha = \psi + \mu$ og $\beta = \varphi + \nu$, hvor μ og ν er et Par Konstanter til uafhængige Variable, faas let, da

$$\frac{d\alpha}{ds_1} = \frac{d\beta}{ds_2} = \frac{u}{w_0}, \quad \frac{d\alpha}{ds_2} = -\frac{d\beta}{ds_1} = 0, \quad \Delta^2\alpha = \Delta^2\beta = 0$$

at
$$\frac{d^2c}{{ds_1}^2} + \frac{d^2c}{{ds_2}^2} = \frac{u^2}{{w_0}^2}\left(\frac{d^2c}{d\alpha^2} + \frac{d^2c}{d\beta^2}\right)$$

og
$$\frac{dc}{ds_2} = \frac{dc}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{ds_2} = \frac{u}{w_0} \cdot \frac{dc}{d\beta}$$

eller altsaa
$$D\left(\frac{d^2c}{d\alpha^2} + \frac{d^2c}{d\beta^2}\right) = w_0 \cdot \frac{dc}{d\beta}.$$

Dette bliver til den af Boussinesq anvendte Transformation, hvis $\mu = \nu = 0$.

Ser vi bort fra Diffusionen i Strømningens Retning, faas:

$$D \cdot \frac{d^2 c}{d\alpha^2} = w_0 \cdot \frac{dc}{d\beta}.$$

Da den gnidningsfrie Strømning er bekendt, har vi:

$$\psi = y - \frac{R^2}{r^2} \cdot y,$$

og

$$\varphi = x + \frac{R^2}{r^2} \cdot x.$$

Vælges nu $\mu = 0$ og $\nu = 2R$, faas følgende Grænsebetingelser:

$\alpha = \infty$ $\beta = \infty$ $c = c_\infty$, svarende til $x = y = \infty$

$\alpha = 0$ $c = c_0$ » $r = R$

$\beta = 0$ $c = c_\infty$ » $r = R$ og $x = -R$.

Vi faar altsaa ganske de samme Grænsebetingelser, som i Ligning (1), hvorved altsaa ogsaa dette Problem er løst. Vi finder heraf:

$$Q = -2 \int_{s_2 = 0}^{s_2 = \pi R} D \left(\frac{dc}{ds_1}\right) ds_2 = -\int D \left(\frac{dc}{d\alpha}\right)_{\alpha = 0} \cdot \frac{d\alpha}{ds_1} ds_2 =$$

$$= -\int_{\beta = 0}^{\beta = 4\alpha} D \left(\frac{dc}{d\alpha}\right)_{\alpha = 0} d\beta$$

eller:

$$Q = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{D \cdot w_0} \, (c_0 - c_\infty) \cdot L \cdot \sqrt{R}, \tag{5}$$

idet Cylinderens Længde kaldes L.

Ved en lignende, men mere indviklet Beregning, findes for en Kugle med Radius R:

$$Q = 4 \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{D \cdot w_0} \, (c_0 - c_\infty) \cdot R^{3/2}. \tag{6}$$

Vi ser heraf, at Fordampningshastigheden ikke er proportional med Overfladen. Betragter vi Fordampningshastigheden pr. cm^2, er den altsaa i en Luftstrøm for en Cylinder eller en Kugle omvendt proportional med $\sqrt{R}$, hvilket altsaa vil sige, at en lille Draabe under disse Omstændigheder fordamper langt hurtigere end en stor Draabe. Dette er sandsynligvis ikke uden meteorologisk Interesse med Hensyn til faldende Regndraaber.

§ 6. Vil vi i Stedet for Fordampningshastigheden beregne Legemets Varmetab, maa man som ovenfor omtalt erstatte D med $\frac{k}{\rho c}$ og $c_0 - c_\infty$ med Temperaturforskellen $t_0 - t_\infty$. Vi faar altsaa for en Cylinder Varmetabet pr. Længdeenhed, F:

$$F = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{k \cdot \rho \cdot c \cdot w_0}\, (\theta_0 - \theta_\infty) \cdot \sqrt{R}, \tag{7}$$

hvilken Formel allerede er angivet af BOUSSINESQ og RUSSELL. For Kuglen findes ligeledes:

$$F = 4\sqrt{2\pi} \sqrt{k \cdot \rho \cdot c \cdot w_0}\, (\theta_0 - \theta_\infty)\, R^{3/2}. \tag{8}$$

Formel (7) gengiver ogsaa den bekendte Ting, at en tynd Traads Varmetab pr. cm² i Luften er større, jo tyndere Traaden er. For at prøve Formel (7) kan man anvende OBERBECK's ovenfor omtalte Forsøg. Lad os f. Eks. tage det sidste Forsøg. Vi har her med de sædvanlige Værdier for k, ρ og c:

$\theta_0 - \theta_\infty = \Delta t = 380^0, w_0 = 434\ ^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{Sek}}, Q_{\mathrm{obs.}} = 4{,}30, Q_{\mathrm{ber.}} = 4{,}11$

» » » , $w_0 = 146$ » , » $= 2{,}26$, » $= 2.38$.

Naar man tager Hensyn til de observerede Værdiers Nøjagtighed, er Overensstemmelsen meget tilfredsstillende.

I en følgende Afhandling skal jeg bruge disse Formler, som her er afledede, til Undersøgelse af Psychrometrets Teori.

Leiden 1921.

Færdig fra Trykkeriet den 13. August 1921.