Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III,** 17.

BERTRANDS PROBLEM

AF

VALDEMAR LARSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1921

FORORD

Efterfølgende Meddelelse er et Uddrag af en Afhandling om »Bertrand's Problem«, som afdøde Adjunkt Valdemar Larsen havde udarbejdet, og som efter Forf.'s Død blev indsendt til Videnskabernes Selskab. Manuskriptet til Afhandlingen vil blive deponeret i det kgl. Bibliotek.

Afhandlingen omhandler de Kraftlove, der lader en fri Partikel beskrive et Keglesnit, uafhængig af Begyndelsesbetingelserne. I det foreliggende Afsnit undersøges de Kraftlove, der baade afhænger af Partiklens Sted og Hastighed. Dette Emne er i den nyeste Tid behandlet af P. J. Suchar, der finder 8 forskellige Kraftlove. Forf. af nærværende Arbejde føjer hertil 2 nye, hidtil ikke omtalte Kraftlove, der ogsaa tilfredsstiller Betingelserne. Til Vejledning for Læseren fremsættes nedenstaaende indledende Bemærkninger, uddragne af Afhandlingens forudgaaende Afsnit.

J. Hjelmslev.

Kraften maa under de givne Betingelser være en Centralkraft. Kraftcentret lægges i Begyndelsespunktet af et retvinklet Koordinatsystem, og Kraftens Størrelse, regnet paa sædvanlig Maade, betegnes med R. Man har da i alle Tilfælde følgende Bevægelsesligninger:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}.$$

Da Banen er et Keglesnit, har man

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = 0, \quad \frac{d^3}{dy^3}\left(\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = 0,$$

hvoraf følger

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = P, \quad \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = Q,$$

idet P og Q betegner Polynomier af 2. Grad i henholdsvis x og y. Man har nu

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} = c\cdot\frac{R}{r},$$

altsaa

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{dx}{dt}\left(\frac{cR}{r}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{P},$$

og paa lignende Maade

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{cR}{r}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{Q},$$

hvoraf, da

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

$$R = \frac{c^2 r}{(x\sqrt{Q} - y\sqrt{P})^3}.$$

Er nu Banekurvens Ligning

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

har man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{P}},$$

som kan tilfredsstilles af

$$\sqrt{Q} = -K(Ax + By + D),$$
$$\sqrt{P} = \quad K(Bx + Cy + E),$$

hvor K er en Konstant.

Derved faas, idet k er en ny Konstant:

$$R = \frac{kc^2 r}{(Dx + Ey + F)^3}, \tag{1}$$

der atter ved Keglesnittets Ligning lader sig omskrive til

$$R = \frac{kc^2 r}{\left[(D^2 - AF)x^2 + 2(DE - BF)xy + (E^2 - CF)y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

Disse Udtryk for Kraften vil finde Anvendelse i det følgende.

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

XII.

Vi har i det foregaaende bevist, at der findes to og kun to Kraftlove, under Paavirkning af hvilke en Partikel altid beskriver et Keglesnit, hvordan end Begyndelsesbetingelserne er, naar Kraften skal være en Funktion af Angrebspunktets Coordinater. Vi vil nu løse det almindelige Problem og antage, at Kraften ikke alene er en Funktion af Angrebspunktets Coordinater x og y, men ogsaa af Hastighedskomposanterne x' og y' i Punktet. Kraften er ifølge det foregaaende rettet mod et fast Punkt eller parallel med en fast Retning;[1] det sidste specielle Tilfælde vil vi i det følgende lade ude af Betragtning, idet Undersøgelsen heraf kan gennemføres paa lignende Maade i alle Tilfælde, som vi har gjort, da Kraften var en Funktion af x og y alene.

Vi vil først undersøge Sagen, naar Kraften[2] er en Funktion af to af de Variable x, y, x' og y'. Disse 4 Variable skal tilfredsstille følgende Relationer:

$$\text{(I)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad (Ax + By + D)\,x' + (Bx + Cy + E)\,y' = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad yx' - xy' = c,$$

heraf

$$\frac{x'}{Bx + Cy + E} = \frac{-y'}{Ax + By + D} =$$

$$\frac{yx' - xy'}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey} = \frac{c}{Dx + Ey + F}.$$

De to første Forhold faas af II; det tredie Forhold faas af de to første ved at multiplicere i Tæller og Nævner med henholdsvis x og y og derefter addere; ved Brug af Keglesnittets Ligning faas det fjerde Forhold af det tredie, idet Tælleren omskrives ved III.

Af de to første og det sidste Forhold faas to Ligninger mellem x, y og x', y'; heraf og af Keglesnittets Ligning kan der dannes følgende Relationer:

1) En Relation mellem x' og y' af anden Grad.

2) 4 Relationer mellem en Hastighedskomposant og en Coordinat. Hver af disse er i Almindelighed af fjerde Grad, men kan specielt reduceres til anden Grad.

[1] Beviset herfor beror simpelthen paa, at konsekutive Kraftlinier maa skære hinanden (eller være parallele). (Udg.)

[2] Her og ofte i det følgende er Ordet »Kraft« brugt som Udtryk for $R:r$. (Udg.)

Alle disse Relationer indeholder foruden Konstanterne i I tillige Arealkonstanten c.

Vi ser heraf, som da Kraften var en Funktion af Angrebspunktets Coordinater, at eventuelle Kraftlove, som tilfredsstiller Problemet, ikke kan indeholde mere end 3 Konstanter; hvis det er muligt at finde to Kraftlove som indeholder to af de fire Variable x, y, x' og y', lad os som Exempel tænke os to Kraftlove, der alene afhænger af x' og y', som tilfredsstiller Problemet, bliver Spørgsmaalet om der findes flere end disse to Kraftlove, som alene indeholder x' og y', afgjort ved, om det er muligt af de derved fremkomne to lige store Forhold at danne et nyt Forhold der er lig med de givne, og som ikke indeholder mere end 3 Konstanter; thi var det muligt at finde andre, kunde vi opstille flere Relationer mellem x' og y', men Betingelsen, at Kurven er et Keglesnit, giver kun én saadan. Det samme gælder om x', x og y', x o. s. v. Følgende Tilfælde maa altsaa undersøges:

1. Kraften er en Funktion af x' og y'.
2. Kraften er en Funktion af x', y eller x, y'.
3. Kraften er en Funktion af x', x eller y', y.

Kraftlovene, der indeholder x, x' og y, y', er ikke forskellige; den ene er dannet af den anden ved Ombytning af Axerne. Det samme gælder om Kraftlovene, der indeholder x', y og x, y'; de er altsaa kun formelt forskellige Udtryk for Kraften.

Det bemærkes, at vi her og i det følgende bruger Betegnelserne »Udtryk for Kraften« og »Kraftlove« i det væsentlige i samme Betydning. Coordinatsystemets Begyndelsespunkt er altid i Kraftcentrum; ved en eller anden Beliggenhed af Coordinatsystemet er det muligt at danne et eller andet Antal Udtryk for Kraften, men to saadanne Udtryk regnes for een Kraftlov, hvis det er muligt at transformere det ene til det andet ved Drejning af Coordinataxerne.

XIII.

I det foregaaende fandt vi følgende Proportioner:

$$\frac{x'}{Bx + Cy + E} = \frac{-y'}{Ax + By + D} = \frac{c}{Dx + Ey + F}. \qquad \text{(a)}$$

Vi multiplicerer det andet og tredie Forhold i For- og Efterled med henholdsvis D og A, danner af disse to et nyt Forhold ved som Forled at tage Differensen mellem Forleddene og som Efterled at tage Differensen mellem Efterleddene, derved faas, idet det nye Forhold er lig hvert af de givne:

$$\frac{c}{Dx + Ey + F} = \frac{cA + Dy'}{(EA - BD)\,y + AF - D^2}.$$

Indsættes det fundne Udtryk i Formlen (se S. 5):

$$R = \frac{kc^2 r}{(Dx + Ey + F)^3}, \qquad (1)$$

faas:

$$R = \frac{k\,(cA + Dy')^3 r}{c\left[(EA - BD)\,y + AF - D^2\right]^3}. \qquad (3)$$

Af (a) faas paa lignende Maade:

$$\frac{c}{Dx + Ey + F} = \frac{cB - Dx'}{(EB - DC)\,y + BF - ED} =$$

$$\frac{cB + Ey'}{(DB - AE)\,x + BF - ED} = \frac{cC - Ex'}{(DC - EB)\,x + CF - E^2}.$$

Heraf faas følgende Udtryk for Kraften:

$$R = \frac{k\,(cB - Dx')^3 r}{\left[(EB - DC)\,y + BF - ED\right]^3 c} \qquad (4)$$

$$R = \frac{k\,(cB + Ey')^3 r}{c\left[(DB - AE)\,x + BF - ED\right]^3} \qquad (5)$$

$$R = \frac{k\,(cC - Ex')^3\,r}{\left[(DC - EB)\,x + CF - E^2\right]^3 c} \tag{6}$$

Ved at eliminere x og y af (a) faar man:

$$\frac{(cA + Dy')(EB - CD) - (cB - x'D)(EA - BD)}{(AF - D^2)(BE - CD) - (BF - ED)(EA - BD)} = \frac{c}{Dx + Ey + F},$$

og ved at Indsættelse af dette fremkommer:

$$R = \frac{k\left[(cA + Dy')(EB - CD) - (cB - Dx')(AE - BD)\right]^3 r}{c\left[(AF - D^2)(EB - CD) - (BF - ED)(EA - BD)\right]^3}. \tag{7}$$

Man har identisk:

$$(Dx + Ey + F)^2 = (D^2 - AF)\,x^2 + 2\,(DE - BF)\,xy + (E^2 - CF)y^2;$$

altsaa haves:

$$\frac{x'^2}{(Bx + Cy + E)^2} = \frac{y'^2}{(Ax + By + D)^2} =$$

$$\frac{c^2}{(D^2 - AF)\,x^2 + 2\,(DE - BF)\,xy + (E^2 - CF)\,y^2}.$$

Af Keglesnittets Ligning faas let:

$$(Bx + Cy + E)^2 = (B^2 - AC)x^2 + 2\,(BE - DC)\,x + E^2 - CF,$$

$$(Ax + By + C)^2 = (B^2 - AC)\,y^2 + 2\,(BD - AE)\,y + D^2 - AF.$$

Ved Indsættelse af dette i Kraftloven (se S. 5):

$$R = \frac{kc^2\,r}{\left[(D^2 - AF)\,x^2 + 2\,(DE - BF)\,xy + (E^2 - CF)\,y^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

fremkommer følgende to Udtryk:

$$R = \frac{kx'^3\,r}{c\left[(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BE - DC)\,x + E^2 - CF\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{8}$$

$$R = \frac{ky'^3\,r}{c\left[(B^2 - AC)\,y^2 + 2\,(BD - AE)\,y + D^2 - AF\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

Af de to første Forhold i (a) dannes let følgende Forhold:

$$\frac{x'^2}{(Bx + Cy + E)^2} = \frac{y'^2}{(Ax + By + D)^2} =$$

$$\frac{-x' y'}{(Ax + By + D)(Bx + Cy + E)}.$$

Ved at multiplicere disse tre Forhold i For- og Efterled med henholdsvis A, C og $2\,B$ og heraf danne et nyt Forhold, der er lig med de givne, ved som Forled at tage Summen af de to første Forled minus det tredie Forled og som Efterled Summen af de to første's Efterled minus det tredie Efterled, faar man ved Brug af Keglesnittets Ligning følgende Forhold, der ikke indeholder x og y:

$$\frac{Ax'^2 + 2\,Bx'y' + Cy'^2}{D^2\,C - E^2\,A - 2\,BDE - F\,(AC - B^2)}.$$

Dette indsættes i (1); derved fremkommer:

$$R = \frac{k\,(Ax' + 2\,Bx'y' + Cy'^2)^{\frac{3}{2}}\,r}{c\left[D^2\,C + E^2\,A - 2\,B\,DE - F(AC - B^2)\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Alle de Kraftlove, som vi har fundet, kan skrives paa en saadan Form, at de kun indeholder tre Konstanter; der er derfor Mulighed for, at de tilfredsstiller Problemet.

Derimellem er to Kraftlove, som kun indeholder de Variable x' og y', og de derved fremkomne lige store Forhold er saadanne, at der ikke kan dannes et nyt Forhold, der er lig disse og kun indeholder 3 Konstanter, der er derfor ikke Mulighed for flere Kraftlove, der alene indeholder x' og y'. — To Kraftlove indeholder kun de Variable x og x', heraf faar vi de to lige store Forhold:

$$\frac{x'^2}{(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BE - DC)\,x + E^2 - CF} =$$

$$= \frac{(Ex' - cC)^2}{[(EB - DC)\,x - E^2 - CF)]^2} = \frac{x'^2\,CF - 2\,CE\,cx' + c^2\,C^2}{x^2\left[(EB - DC)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF)\right]},$$

herved faas den nye Kraftlov:

$$R = \frac{k\,(x'^2\,CF - 2\,CE\,cx' + c^2\,C^2)^{\frac{3}{2}}\,r}{x^3\left[(EB - DC)^2 - (B^2 - AC)\,(E^2 - CF)\right]^{\frac{3}{2}}}; \qquad (11)$$

der er nu ikke Mulighed for flere Love, der alene indeholder x og x'.

Af (3) og (9) faas Relationen:

$$\frac{cA + Dy'}{EA - BD)\,y + AF - D^2} = \frac{-y'}{\pm\sqrt{(B^2 - AC)\,y^2 + 2\,(BD - AE)\,y + D^2 - AF}} =$$

$$\frac{-Ac}{BD - AE)\,y + D^2 - AF \mp D\sqrt{B^2 - AC)\,y^2 + 2\,(BD - AE)\,y + D^2 - AF}},$$

som giver en ny Kraftlov, hvor Kraften er en Funktion af y-Coordinaten alene

$$= \frac{k\,A^3\,c^2\,r}{\left[(AE - BD)\,y + AF - D^2 \pm D\sqrt{(B^2 - AC)\,y^2 + 2\,(BD - AE)\,y + D^2 - AF}\right]^3},$$

og paa samme Maade faas af (6) og (8) Kraftloven:

$$= \frac{k\,C^3\,c^2\,r}{\left[(DC - EB)\,x + (CF - E^2) \pm E\sqrt{(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BE - DC)\,x + E^2 - CF}\right]^3}.$$

Da disse Kraftlove indeholder 4 Konstanter, tilfredsstiller de ikke Problemet. Vi skal dog senere komme tilbage til dem.

Vi sætter: $DB - AE = M_1$; $BF - ED = q_1$;

$$D^2 - AF = L_1; \; B^2 - AC = N;$$

$$EB - DC = p_1; \; E^2 - CF = L_2.$$

Af de to sidste Kraftlove og (4) og (5) dannes følgende Forhold:

$$\frac{cB - Dx'}{p_1\,y + q_1} = \frac{-cA}{M_1\,y + L_1 - D\sqrt{Ny^2 + 2M_1\,y + L_1}}$$

$$\frac{cB + Ey'}{M_1 x + q_1} = \frac{-cC}{p_1 x + L_2 - E\sqrt{Nx^2 + 2p_1 x + L_2}};$$

af de to første Forhold dannes let følgende nye Forhold, der er lig med hvert af de givne:

$$\frac{(cB - Dx')M_1 + p_1 cA}{-p_1 L_1 + q_1 M_1 + Dp_1\sqrt{Ny^2 + 2M_1 y + L_1}} =$$

$$= \frac{-ADx'}{A(p_1 y + q_1) + B(M_1 y + L_1) - DB\sqrt{Ny^2 + 2M_1 y + L_1}},$$

af disse og af de to tilsvarende, der faas paa samme Maade af de to sidste Forhold, udledes følgende 4 Udtryk for Kraften:

$$R = \frac{Kx'^3 r}{\left[ey + b + a\sqrt{Ny^2 + 2My + L}\right]^3}$$

$$R = \frac{K(x' + k)^3 r}{\left[b + a\sqrt{Ny^2 + 2My + L}\right]^3}$$

$$R = \frac{Ky'^3 r}{\left[ex + b + a\sqrt{Ny^2 + 2My + L}\right]^3}$$

$$R = \frac{K(y' + k)^3 r}{\left[b + a\sqrt{Ny^2 + 2My + L}\right]^3}.$$

Alle disse Kraftlove indeholder mere end 3 Konstanter og tilfredsstiller derfor ikke Problemet; men Grunden til, at vi har udledet dem, er, at vi ved Hjælp af disse og (4) samt (5) kan faa dannet lige store Forhold, hvoraf vi paa sædvanlig Maade kan se, at der ikke er mere end én Kraftlov, der indeholder x og y', som tilfredsstiller Problemet. Hermed er alle de Love fundne for hvilke der er Mulighed, naar Kraften er en Funktion af de Variable x, y og x', y' og kun indeholder to af disse. —

XIV.

De 6 nye Kraftlove, som vi lige har fundet, omskrives let til:

$$\frac{k\,(a+y')^3 r}{(y+b)^3}$$

$$\frac{k\,x'^3\, r}{\left[\pm\, x^2+bx+a\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$k\,(x'+ay'+b)^3 r$$

$$\left[Ax'^2+2\,Bx'y'+Cy'^2\right]^{\frac{3}{2}}\cdot r$$

$$\frac{k\,(a+x')^3 r}{(b+y)^3}$$

$$\frac{k\,(ax'^2+bx'+c)^{\frac{3}{2}}\, r}{x^3}.$$

Vi skal nu vise, at disse Love virkelig tilfredsstiller Problemet, d. v. s. bevise, at en Partikel, der bevæger sig under Virkning af en Kraft, som er underkastet en af disse Love, altid beskriver et Keglesnit, hvordan end Begyndelsesbetingelserne er.

Vi vil først vise det for Kraftloven

$$\frac{k\,(a+y')^3 r}{(y+b)^3}.$$

Kraftens Komposanter langs Axerne er:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-k\,(a+y')^3 x}{(b+y)^3};\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{-k\,(a+y')^3 y}{(b+y)^3};$$

den sidste Ligning omskrives til:

$$\frac{\dfrac{dy'}{dt}}{(a+y')^3}=\frac{-ky}{(b+y)^3}.$$

ved at Multiplikation med $y'dt$ bliver den til

$$\frac{y'dy'}{(a+y')^3}=\frac{-ky\,dy}{(b+y)^3};$$

ved Integration faas:

$$-\frac{a+2\,y'}{(a+y')^2} = k\,\frac{b+2\,y}{(b+y)^2} + \alpha\,,$$

der let omskrives til

$$\frac{a}{(a+y')^2} - \frac{2}{a+y'} = k\,\frac{b+2y}{(b+y)^2} + \alpha\,,$$

hvoraf

$$\frac{1}{a+y'} = \frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k}{a}\cdot\frac{b+2\,y}{(b+y)^2} + \frac{\alpha}{a}}\,,$$

eller

$$\frac{1}{a+y'} = \frac{1}{a\,(b+y)}\left[b+y \pm \sqrt{py^2+2\,qy+bq}\right],$$

hvor

$$p = 1 + \alpha a;\quad q = b + ak + a\alpha\, b;$$

$$a + y' = \frac{a\,(b+y)}{b+y\pm\sqrt{py^2+2\,qy+bq}}$$

eller

$$y' = \frac{\mp\, a\sqrt{py^2+2\,qy+bq}}{b+y\pm\sqrt{py^2+2\,qy+bq}}\,.$$

Ved at eliminere dt af denne Ligning og $ydx - xdy = cdt$ faar man Banens Differentialligning:

$$\frac{a}{c}(ydx - xdy) = \frac{\left[b+y\pm\sqrt{py^2+2\,qy+bq}\right]dy}{\mp\sqrt{py^2+2\,qy+bq}} =$$

$$= \frac{(b+y)\,dy}{\mp\sqrt{py^2+2\,qy+bq}} - dy.$$

For at udføre Integrationen indføres en ny Variabel z, idet vi sætter:

$$x = yz.$$

Herved omskrives Banens Ligning let til

$$\frac{a}{c}\,dz = \frac{(b+y)\,dy}{\mp\, y^2\sqrt{py^2+2\,qy+bq}} - \frac{dy}{y^2}\,,$$

hvoraf ved Integration

$$\pm \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{y} \sqrt{py^2 + 2\,qy + bq} + \frac{1}{y} = \frac{a}{c} z + e$$

eller

$$\pm \sqrt{py^2 + 2\,qy + bq} = \frac{aq}{c} x + eq\,y - q.$$

Dette er Banens Ligning; ved at opløfte til anden Potens og ordne den faar man

$$y^2 (q^2 e^2 - p) + \frac{a^2 q^2}{c^2} x^2 + 2 \frac{a}{c} eq^2\, xy - 2 \frac{a}{c} q^2 x - 2\,y\,(eq^2 + q) +$$
$$+ q^2 - bq = 0.$$

Banen er altsaa altid et Keglesnit. Banen er Ellipse, Parabel eller Hyperbel eftersom:

$$\frac{a^2}{c^2} q^2 p \lesseqqgtr 0,$$

eller da $\frac{a^2}{c^2} q^2$ altid er positiv

$$p = 1 + \alpha a \lesseqqgtr 0.$$

Ved at finde α af det foregaaende (S. 14 øverst) faar man

$$1 - \frac{a^2 + 2a\,y'}{(a + y')^2} - \frac{ak\,(b + 2\,y)}{(b + y)^2} \lesseqqgtr 0.$$

eller

$$\frac{y'^2}{(a + y')^2} \lesseqqgtr \frac{ak\,(b + 2\,y)}{(b + y)^2}.$$

Heraf faas, idet ak forudsættes positiv:

1) Naar $b + 2\,y$ er negativ, d. v. s. Bevægelsens Begyndelsespunkt ligger paa den negative Side af Linien $b + 2\,y = 0$, som er parallel med $b + y = 0$ og halverer Afstanden fra Kraftcentrum til denne Linie, saa er Banen altid en Hyperbel (el. ret Linie), hvordan end Begyndelsesbetingelserne er.

2) Naar Bevægelsens Begyndelsespunkt er et Punkt af

Linien $b+2y=0$, er Banen en Parabel, saafremt Begyndelseshastigheden er parallel med x-Axen, ellers en Hyperbel (ret Linie).

3) Naar Bevægelsens Begyndelsespunkt ligger paa den positive Side af Linien $b+2y=0$, maa vi først finde de Værdier af y, der tilfredsstiller:

$$(b+2y)\,ak \geqq (b+y)^2 \qquad \text{d. v. s.}$$

$$-b+ak+\sqrt{ak\,(ak-b)} \geqq y \geqq ak-\sqrt{ak\,(ak-b)}-b;$$

hvis ak og b har samme Fortegn, maa $ak > b$ for at dette kan finde Sted. Ligger Bevægelsens Begyndelsespunkt saaledes, at dets y-Coordinats Værdi falder mellem de ovenfor angivne Grænser, er Banen altid en Ellipse, hvis a og y' har samme Fortegn.

Ligger Bevægelsens Begyndelsespunkt udenfor det angivne Interval, saa er Banen for tilstrækkelige smaa Værdier af Begyndelseshastighedens y-Komposant en Ellipse, ved større bliver den en Parabel og tilsidst en Hyperbel.

Har a og y' modsat Fortegn, bliver Banen, naar Begyndelsespunktet y-Coordinat ligger udenfor de angivne Grænser, altid en Hyperbel; ligger Begyndelsespunktets y-Coordinat imellem disse Grænser, afhænger Keglesnittets Art af Begyndelseshastighedens y-Composant.

Hvis ak er negativ faas:

1) Naar Bevægelsens Begyndelsespunkt ligger paa den positive Side af Linien $b+2y=0$, saa er Banen altid en Hyperbel.

2) Naar Bevægelsens Begyndelsespunkt er et Punkt af Linien $b+2y=0$, er Banen en Parabel, naar Begyndelseshastigheden er parallel med x-Axen, ellers en Hyperbel (ret Linie).

3) Naar Bevægelsens Begyndelsespunkt ligger paa den

negative Side af Linien $b + 2y = 0$, og a og y' har samme Fortegn, er Banen altid en Ellipse, saafremt y-Coordinaten til Bevægelsens Begyndelsespunkt tilfredsstiller Uligheden

$$ak - b + \sqrt{ak\,(ak - b)} > y > ak - b - \sqrt{ak(ak - b)}.$$

Har y-Coordinaten Værdier, der ligger udenfor dette Interval, saa er Banen for tilstrækkelig smaa Værdier af y' en Ellipse, ved større bliver det en Parabel og tilsidst en Hyperbel.

Har a og y' modsat Fortegn, er Banen, naar Begyndelsespunktets y-Coordinat ligger udenfor de angivne Grænser, altid en Hyperbel; men ligger Bevægelsens Begyndelsespunkts y-Coordinat imellem disse Grænser, er Keglesnittets Art som før afhængig af Begyndelseshastighedens y-Composant.

Falder Begyndelseshastigheden sammen med radius vector, bliver Banen naturligvis altid en ret Linie.

Keglesnittets Art er uafhængig af baade Begyndelsesstillingens x-Coordinat og Hastighedens x-Composant.

XV.

Vi vil nu bevise, at en Partikel, der bevæger sig under Virkning af Centralkraften

$$\frac{kx'^3 r}{\left[\pm x^2 + bx + a\right]^{\frac{3}{2}}}$$

altid beskriver et Keglesnit.

Vi har da følgende Ligning for Bevægelsen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-kx'^3 x}{\left[\pm x^2 + bx + a\right]^{\frac{3}{2}}},$$

der omskrives til

$$\frac{dx'}{x'^2} = \frac{-kxdx}{\left[\pm x^2 + bx + a\right]^{\frac{3}{2}}},$$

hvoraf ved Integration

$$\frac{1}{x'} = \frac{k_1\left(x + \frac{2a}{b}\right)}{\sqrt{\pm x^2 + bx + a}} + i,$$

hvor

$$k_1 = \frac{k}{\frac{b}{2} \pm \frac{2a}{b}},$$

eller

$$dt = \frac{k_1\left(x + \frac{2a}{b}\right) dx}{\sqrt{\pm x^2 + bx + a}} + i dx.$$

Da Bevægelsen er en Centralbevægelse, haves

$$dt = \frac{xdy - ydx}{c}$$

hvor c er Arealkonstanten; ved at indføre dette for dt og derefter sætte

$$y = x \cdot z$$

faar man

$$\frac{x^2}{c} dz = \frac{k_1\left(x + \frac{2a}{b}\right) dx}{\sqrt{\pm x^2 + bx + a}} + i\, dx,$$

hvoraf

$$\frac{dz}{c} = \frac{k_1\left(x + \frac{2a}{b}\right) dx}{x^2 \sqrt{\pm x^2 + bx + a}} + i \frac{dx}{x^2},$$

og ved Integration faas:

$$\frac{z}{c} + j = -\frac{2k_1}{b} \frac{\sqrt{\pm x^2 + bx + a}}{x} - \frac{i}{x}.$$

Ved at indføre $z = \frac{y}{x}$ og multiplicere med x fremkommer

$$\frac{y}{c} + jx = -\frac{2k_1}{b} \sqrt{\pm x^2 + bx + a} - i$$

eller

$$\frac{b^2}{4k_1^2}\left(\frac{y}{c}+jx+i\right)^2=\pm x^2+bx+a,$$

der viser, at Banen altid er et Keglesnit.

De Keglesnit, som beskrives under Virkning af denne Kraftlov, har de to Linier

$$\pm x^2+bx+a=0$$

som reelle eller imaginære Tangenter parallele med y-Axen.

Ligningen kan skrives:

$$x^2\left(\frac{b^2}{4k_1^2}j^2\mp 1\right)+y^2\frac{b^2}{4k_1^2\,c^2}+2\frac{j}{c}xy\cdot\frac{b^2}{4k_1^2}+$$

$$+2\frac{i}{c}\frac{b^2}{4k_1^2}y+x\left(2j\,i\frac{b^2}{4k_1^2}-b\right)+i^2\frac{b^2}{4k_1^2}-a=0.$$

Banen er Ellipse, Parabel eller Hyperbel eftersom:

$$\left(\frac{j}{c}\cdot\frac{b^2}{4k_1^2}\right)^2-\frac{b^2}{4c^2k_1^2}\left(\frac{b^2j^2}{4k_1^2}\mp 1\right)\lesseqgtr 0$$

eller

$$\pm\frac{b^2}{4c^2k_1^2}\lesseqgtr 0.$$

Vi har saaledes bevist følgende Sætning:

En Partikel, der bevæger sig under Virkning af en Centralkraft, der er ligefrem proportional med Afstanden fra Partiklen til Kraftcentrum og proportional med 3. Potens af Hastighedens x-Composant og omvendt proportional med 3. Potens af Mellemproportionalen mellem Afstandene fra to rette Linier, der her er parallele med y-Axen, beskriver altid et Keglesnit.

Hvis $\pm x^2+bx+a=0$ fremstiller to imaginære rette Linier, har Polynomiet samme Fortegn som Koefficienten til x^2; er Linierne reelle, da har Polynomiet modsat Fortegn af Koefficienten til x^2, naar $\alpha>x>\beta$, hvor α og β er Rødderne i Ligningen $\pm x^2+bx+a=0$. Men saa snart $\pm x^2+bx+a<0$, maa k være rent imaginær, for at Kraften skal blive reel. Da Uligheden, der bestemmer Keglesnittets Art, skal have samme Fortegn som x^2, ser vi heraf, at enten x^2 har Fortegnet + eller —, er Banen altid en Hyperbel, naar Polynomiet har samme Fortegn som Koefficienten til x^2. Hvis Polynomiet derimod har modsat Fortegn af x^2, da er Banen en Ellipse, alt under den Forudsætning at $b \neq 0$. Er $b = 0$ bliver Banen altid en Parabel.[1]

Er $a = \frac{b^2}{4}$ d. v. s. de to rette Linier sammenfaldende, bliver Banen altid en ret Linie.

Er de to rette Linier L_1 og L_2, der er parallele med y-Axen, reelle, bliver Banen, naar $b \neq 0$, altid en Ellipse, naar Bevægelsens Begyndelsespunkt ligger indenfor den Del af Planen, der begrænses af L_1 og L_2; ligger Bevægelsens Begyndelsespunkt udenfor dette Interval, er Banen altid en Hyperbel. Er $b = 0$, d. v. s. y-Axen halverer Afstanden mellem L_1 og L_2, da er Banen altid en Parabel.[1]

XVI.

En Partikel, der bevæger sig under Paavirkning af Centralkraften

$$k\,(x' + ay' + b)^3 r,$$

beskriver altid et Keglesnit.

Differentialligningerne for Bevægelsen er:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = k\,(x' + ay' + b)^3\, x; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = k\,(x' + ay' + b)^3\, y.$$

Ved at multiplicere den første af disse med $(x' + ay')$, den sidste med $(ay' + x')\,a$ og addere de derved fremkomne Ligninger faas:

$$(x' + ay')\left(\frac{dx'}{dt} + a\,\frac{dy'}{dt}\right) = k\,(x + ay)\,(x' + ay' + b)^3\left(\frac{dx}{dt} + a\,\frac{dy}{dt}\right),$$

[1] En rent formel Betragtning af den fundne Ligning er her utilstrækkelig. Banen kan ikke være en egentlig Parabel. (Udg.)

som ogsaa kan skrives paa følgende Maade:

$$\frac{dx' + a\,dy'}{(x' + ay' + b)^2} - b\frac{dx' + a\,dy'}{(x' + ay' + b)^3} = k\,(x + ay)\,(dx + ady);$$

heraf faas ved at integrere

$$\frac{-1}{x' + ay' + b} + \frac{b}{2}\frac{1}{(x' + ay' + b)^2} = k_1\,(x + ay)^2 + i_1,$$

hvor i_1 er Integrationskonstanten, og $k_1 = \frac{k}{2}$; heraf:

$$\frac{1}{x' + ay' + b} = \frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2k_1}{b}(x + ay)^2 + \frac{2i_1}{b}}$$

eller

$$x' + ay' + b = \frac{b}{1 \pm \sqrt{1 + bk\,(x + ay)^2 + i}}$$

og ved at bringe denne Ligning paa hel Form

$$x' + ay' \pm \sqrt{1 + bk\,(x + ay)^2 + i}\,(x' + ay' + b) = 0,$$

hvoraf:

$$x' + ay' + b = \frac{x' + ay'}{\pm\sqrt{1 + bk\,(x + ay)^2 + i}}.$$

Denne Ligning multipliceres med dt og divideres med $(x + ay)^2$; derved faas

$$\frac{dx + ady}{(x + ay)^2} + b\frac{dt}{(x + ay)^2} = \frac{dx + ady}{\pm\,(x + ay)^2\sqrt{1 + bk\,(x + ay)^2 + i}};$$

men ifølge Arealloven haves

$$dt = \frac{xdy - ydx}{c}$$

hvor c er Arealkonstanten; heraf

$$\frac{dx + ady}{(x + ay)^2} + \frac{b}{c}\frac{xdy - ydx}{(x + ay)^2} = \frac{dx + ady}{\pm\,(x + ay)^2\sqrt{1 + bk\,(x + ay)^2 + i}}$$

og ved Integration

$$j - \frac{1}{x+ay} + \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{x+ay} = \mp \frac{\sqrt{bk\,(x+ay)^2 + bk\,i + 1}}{x+ay} \cdot \frac{1}{1+bk\,i};$$

ved at multiplicere Størrelserne paa begge Sider af Ligningen med $(x+ay)$ og derefter opløfte til anden Potens faas:

$$\left[j\,(x+ay) - 1 + \frac{b}{c}\,y\right]^2 = \frac{bk_1\,(x+ay)^2 + bk\,i + 1}{(1+bki)^2};$$

heraf ses, at Banen altid er et Keglesnit.

Banen er Ellipse, Parabel eller Hyperbel eftersom:

$$\frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{bk}{(1+bk\,i)^2} \lesseqqgtr 0,$$

eller naar

$$bk \lesseqqgtr 0.$$

Banen er altid en Ellipse, hvis b og k har modsat Fortegn; har de samme Fortegn, er Banen altid en Hyperbel; er $b = 0$, vil Partiklen altid beskrive en Parabel.[1] Keglesnittets Art er uafhængig af Begyndelsesbetingelserne og af Koefficienterne til x' og y' i Kraftloven.

XVII.

Vi gaar nu over til at vise, at en Partikel, der bevæger sig under Virkning af Centralkraften

$$k\,[Ax'^2 + 2\,Bx'y' + Cy'^2]^{\frac{3}{2}}\,r,$$

altid beskriver et Keglesnit.

Bevægelsesligningerne er

$$\frac{dx'}{dt} = k\,P^3 x; \quad \frac{dy'}{dt} = kP^3 y$$

$$P = \sqrt{Ax'^2 + 2\,Bx'y' + Cy'^2};$$

heraf faas ved at multiplicere den første Ligning med y', den anden med x'

[1] Sml. Fodnoten S. 20.

$$\frac{y'dx'}{P^3} = kxdy; \quad \frac{x'dy'}{P^3} = kydx.$$

Ved at subtrahere den anden Ligning fra den første og benytte Arealloven fremkommer:

$$\frac{y'dx' - x'dy'}{P^3} = kcdt;$$

heraf ved Multiplication med henholdsvis x' og y'

$$\frac{x'(y'dx' - x'dy')}{P^3} = ckdx$$

$$\frac{y'(y'dx' - x'dy')}{P^3} = ckdy,$$

og ved Integration

$$-\left[\frac{Cy' + Bx'}{P} - \alpha\right]\frac{1}{CA - B^2} = ckx$$

$$\left[\frac{Ax' + By'}{P} - \beta\right]\frac{1}{CA - B^2} = cky,$$

hvoraf

$$-(Cy' + Bx') = [k_1 + x]\,P(CA - B^2)\,ck \tag{1}$$

$$Ax' + By' = [k_2 + y]\,P(CA - B^2)\,ck \tag{2}$$

$$k_1 = \frac{\alpha}{ck(AC - B^2)}, \quad k_2 = \frac{\beta}{ck(AC - B^2)}.$$

Vi dividerer nu (1) med (2)

$$-\frac{Cy' + Bx'}{Ax' + By'} = \frac{k_1 + x}{k_2 + y}; \tag{3}$$

af (3) faas let

$$Axx' + Cyy' + B(yx' + xy') + k_2(Cy' + Bx') + k_1(Ax' + By') = 0,$$

vi multiplicerer denne med $2dt$ og integrerer:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,k_2(Cy + Bx) + 2k_1(Ax + By) = i,$$

hvor i er en Konstant, hvis Værdi det er muligt at bestemme, ved at opløfte Størrelserne paa begge Sider af Ligningen til anden Potens og indsætte Værdien for P i baade (1) og (2); derved faar vi to Ligninger, der er homogene af anden Grad i x' og y'. Af hver af disse kan $\frac{dy}{dx}$ findes, og ved at sætte de herved fundne to Udtryk ligestore faas Banens Ligning, og det viser sig, at

$$i = -B^2 + AC + k_1{}^2 A + k_2{}^2 C - 2Bk_1 k_2.$$

Banen er altsaa altid et Keglesnit. Vi faar den mærkelige Egenskab ved denne, at dens Art er uafhængig af Begyndelsesbetingelserne og alene afhængig af Kraftlovens Konstanter.

Banen er nemlig Ellipse, Parabel eller Hyperbel eftersom

$$B^2 - AC \lesseqqgtr 0.$$

Ved i Kraftloven at sætte

$$B = 0, \; A = C$$

omskrives den let til

$$kv^3 \cdot r.$$

En Partikel, der er paavirket af en Kraft rettet mod et fast Punkt; der er proportional med tredie Potens af Partiklens Hastighed og med Afstanden fra Partiklen til Kraftcentrum, beskriver altid et Keglesnit, som enten er en Cirkel eller en ret Linie. Er Hastigheden vinkelret paa radius vector, bliver

$$vr = 2c$$

og da

$$-\frac{y'}{x'} = \frac{x}{y}$$

ser vi af (3), at

$$k_1 = k_2 = 0.$$

Kraftloven bliver da

$$K \cdot v^2$$

hvor K er en Konstant. Banen bliver en Cirkel med Centrum i Kraftcentrum.

XVIII.

En Partikel, der bevæger sig under Paavirkning af Centralkraften

$$k\frac{(a+x')^3\,r}{(b+y)^3},$$

beskriver altid et Keglesnit, hvordan end Begyndelsesbetingelserne er.

Bevægelsesligningerne er:

$$\frac{dx'}{dt} = k\frac{(a+x')^3 x}{(b+y)^3}; \quad \frac{dy'}{dt} = k\frac{(a+x')^3\,y}{(b+y)^3}.$$

Den første af disse omskrives til

$$\frac{dx'}{(a+x')^3} = k\frac{xdt}{(b+y)^3}$$

ved at multiplicere denne Ligning med $bx'+c$ og sætte:

$$dt = \frac{ydx - xdy}{c}$$

faas

$$\frac{bx'\,dx' + cdx'}{(a+x')^3} = k\frac{bxdx + xydx - x^2\,dy}{(b+y)^3}$$

der let omskrives til

$$\frac{bx'dx'}{(a+x')^3} + \frac{cdx'}{(a+x')^3} = k\frac{(y+b)\,xdx - x^2\,dy}{(y+b)^3};$$

ved Integration heraf faas

$$-b\frac{2x'+a}{(x'+a)^2} - \frac{c}{(x'+a)^2} = \frac{kx^2}{(y+b)^2} + i$$

altsaa

$$\frac{1}{(x'+a)^2} - \frac{2b}{ab-c}\cdot\frac{1}{x'+a} - \frac{1}{ab-c}\left(k\frac{x^2}{(y+b)^2} + i\right) = 0,$$

der giver

$$\frac{1}{x'+a} = \frac{b(y+b) \pm \sqrt{[b^2+(ab-c)i]\,(y+b)^2+kx^2(ab-c)}.}{(ab-c)(y+b)}$$

Vi sætter

$$b^2+i(ab-c)=p,$$

$$k(ab-c)=q,$$

og faar da

$$x'+a=\frac{(ab-c)(y+b)}{b(y+b)\pm\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}}$$

hvoraf

$$x' = \frac{-c(y+b)\mp a\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}}{b(y+b)\pm\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}},$$

der let omformes til

$$\frac{bdx}{cdt} = \frac{-(y+b)\mp\frac{a}{c}\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}}{(y+b)\pm\frac{1}{b}\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}};$$

ved at anvende en bekendt Sætning fra Proportionslæren fremkommer

$$\frac{bdx+cdt}{cdt} = \frac{\mp\left(\frac{a}{c}-\frac{1}{b}\right)\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}}{b+y\pm\frac{1}{b}\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}};$$

ved at indføre

$$dt = \frac{ydx-xdy}{c}$$

faas let

$$\frac{(y+b)(bdx+ydx-xdy)}{\mp\sqrt{p(y+b)^2+qx^2}} - \frac{1}{b}(bdx+ydx-xdy) =$$

$$= \left(\frac{a}{c}-\frac{1}{b}\right)(ydx-xdy),$$

der omskrives til

$$\frac{(b+y)(bdx+ydx-xdy)}{\mp x^3\sqrt{p\frac{(y+b)^2}{x^2}+q}} = \frac{dx}{x^2}+\frac{a}{c}\frac{ydx-xdy}{x^2}$$

eller

$$\frac{(y+b)^2\,dx - (y+b)\,xdy}{\mp x^3 \sqrt{p\dfrac{(y+b)^2}{x^2}+q}} = \frac{dx}{x^2} + \frac{a}{c}\,\frac{ydx - xdy}{x^2};$$

ved Integration faas nu

$$\pm\frac{1}{p}\sqrt{p\cdot\frac{(y+b)^2}{x^2}+q} = -\frac{1}{x} - \frac{a}{c}\,\frac{y}{x} - j,$$

og ved at multiplicere Størrelserne paa begge Sider af Ligningen med px og derefter opløfte til anden Potens, faas Banens Ligning:

$$x^2(j^2p^2 - q) + y^2\left(\frac{a^2}{c^2}p^2 - p\right) + 2j\frac{a}{c}p^2xy + 2jp^2x +$$

$$+ 2\frac{a}{c}p^2y - 2pby + p^2 - b^2p = 0$$

Banen er altsaa altid et Keglesnit.

XIX.

En Partikel, der er underkastet Centralkraften:

$$\frac{k(\pm x'^2 + 2bx' + a)^{\frac{3}{2}}\,r}{x^3}$$

beskriver altid et Keglesnit.

Vi har

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{k\left[\pm x'^2 + 2bx' + a\right]^{\frac{3}{2}}x}{x^3} \tag{1}$$

ved at multiplicere denne Ligning med $(\pm x' + b)\,dt$ faas let:

$$\frac{\pm x'dx' + bdx'}{(\pm x'^2 + 2bx' + a)^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{kdx}{x^2} + \frac{bk}{c}\,\frac{ydx - xdy}{x^2};$$

ved Integration fremkommer:

$$+\frac{1}{\sqrt{\pm x'^2 + 2bx' + a}} = \pm\frac{k}{x} + \frac{bk}{c}\cdot\frac{y}{x} + j. \tag{2}$$

Ved at multiplicere (1) med x' bliver denne til:

$$\frac{x'dx'}{[\pm x'^2 + 2bx' + a]^{\frac{3}{2}}} = \frac{k\,dx}{x^2},$$

ved at integrere denne Ligning faas:

$$\frac{k_1\left(x' + \frac{a}{b}\right)}{\sqrt{\pm x'^2 + 2bx' + a}} = -\frac{k}{x} + i \tag{3}$$

hvor

$$k_1 = \frac{1}{b \mp \frac{a}{b}}.$$

Af (2) og (3) dannes let følgende Ligning:

$$k_1\left(x' + \frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{k}{x} + i\right) : \left(\pm\frac{k}{x} + \frac{bk}{c}\cdot\frac{y}{x} + j\right). \tag{3}$$

Af (2) udledes:

$$\pm x'^2 + 2bx' + a - \frac{x^2}{\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)^2} = 0$$

deraf

$$x' = \mp b \pm \sqrt{b^2 \mp a \pm \frac{x^2}{\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)^2}}; \tag{4}$$

af (3) og (4) elimineres x'

$$\mp b \pm \sqrt{b^2 \mp a \pm \frac{x^2}{\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)^2}} = -\frac{a}{b} +$$

$$+ \frac{ix - k}{k_1\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)};$$

ved at isolere Kvadratroden og opløfte Størrelserne paa begge Sider af Ligningen til anden Potens faar man

$$b^2 \mp a \pm \frac{x^2}{\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)^2} = \left[\pm b - \frac{a}{b} + \frac{ix - k}{k_1\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)}\right]^2,$$

og heraf atter

$$p\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right)^2 \pm k_1^2x^2 = \pm 2(ix - k)\left(\pm k + \frac{bk}{c}y + jx\right) + \\ + (ix - k)^2,$$

hvor

$$p = \pm \frac{a}{b}k_1.$$

Da denne Ligning er af anden Grad i x og y, er Banen altid et Keglesnit.

Ved at ordne denne Ligning faas paa sædvanlig Maade Kriteriet over Keglesnittets Art.

Vi har nu undersøgt alle de Kraftlove, for hvilke der er Mulighed, naar Kraften skal være en Funktion af 2 af de 4 Variable x, y og x', y', og fundet, at alle 8 Kraftlove tilfredsstiller Problemet.

XX.

Tilbage er nu at finde de Kraftlove, hvor Kraften er en Funktion af 3 eller 4 af de Variable x, y, x' og y'.

Vi har

$$\frac{x'}{Bx + Cy + E} = \frac{-y'}{Ax + By + D} = \frac{c}{Dx + Ey + F}; \qquad (\alpha)$$

heraf faas ved at indsætte i

$$R = \frac{kc^2r}{(Dx + Ey + F)^3}$$

de to nye Udtryk for Kraften

$$R = \frac{kx'^3r}{c(Bx + Cy + E)^3}$$

$$R = \frac{ky'^3r}{c(Bx + Cy + E)^3};$$

det ene af disse Udtryk er dannet af det andet ved Ombytning af Axerne; da det er muligt at reducere Antallet af

Konstanter, som indgaar i Kraftloven, til 3, kan den tilfredsstille Problemet.

Af (α) dannes let følgende lige store Forhold

$$\frac{c}{Dx+Ey+F} = \frac{Dx'+Ey'}{(BD-AE)x+(CD-BE)y} =$$

$$\frac{Fx'-Ec}{(BF-DE)x+(CF-E^2)y} = \frac{cD+Fy'}{(D^2-AF)x+(DE-BF)y} =$$

$$\frac{(Dx'+Ey')(CF-E^2)-(Fx'-Ec)(CD-BE)}{x\left[(BD-AE)(CF-E^2)-(BF-DE)(CD-BE)\right]} =$$

$$\frac{(Dx'+Ey')(BF-DE)-(Fx'-Ec)(BD-AE)}{y\left[(CD-BE)(BF-ED)-(CF-E^2)(BD-AE)\right]},$$

hvorved vi faar følgende nye Udtryk for Kraften:

$$R = \frac{k(Dx'+Ey')^3 r}{c\left[(BD-AE)x+(CD-BE)y\right]^3}$$

$$R = \frac{k(Fx'-Ec)^3 r}{c\left[BF-DE)x+(CF-E^2)y\right]^3}$$

$$R = \frac{k(Fy'+Dc)^3 r}{c\left[(D^2-AF)x+(DE-BF)y\right]^3}$$

$$R = \frac{k\left[(Dx'+Ey')(CF-E^2)-(Fx'-Ec)(DC-BE)\right]^3 r}{cx^3\left[(BD-AE)(CF-E^2)-(BF-DE)(CD-BE)\right]^3}$$

$$R = \frac{k\left[(Dx'+Ey')(BF-DE)-(Fx'-Ec)(BD-AE)\right]^3 r}{cy^3\left[(CD-BE)(BF-ED)-(CF-E^2)(BD-AE)\right]^3}.$$

Alle disse Udtryk for Kraften kan ved Drejning af Coordinataxerne reduceres til den Kraftlov, vi lige har fundet, eller til den nye Kraftlov:

$$R = \frac{k(ax'+by'+e)^3 r}{x^3}.$$

Af (α) er det desuden muligt at danne følgende Udtryk for Kraften:

$$R = \frac{(ax' + by')^3 r}{(ex + fy + g)^3}$$

$$R = \frac{(ax' + by' + g)^3 r}{(fy + ex)^3};$$

det er dog ikke nye Kraftlove, thi ved Drejning af Coordinataxerne om Begyndelsespunktet reduceres de til de to Kraftlove, som vi lige har henført alle de øvrige til.

Endelig er det muligt af (α) at danne de tre nye Udtryk for Kraften

$$R = \frac{k\,(ay' + b)^3 r}{(ex + fy + g)^3}$$

$$R = \frac{k\,(ax' + b)^3 r}{(ex + fy + g)^3}$$

$$R = \frac{k\,(ax' + by' + h)^3 r}{(ex + fy + g)^3};$$

de heraf resulterende to nye Kraftlove tilfredsstiller ikke Problemet, da det ikke er muligt ved Drejning af Coordinataxerne om Begyndelsespunktet at reducere Antallet af Konstanter, som indgaar i Kraftloven, til mindre end 4.

Her kan altsaa kun blive Tale om to nye Kraftlove:

$$R = \frac{kx'r}{(ax + by + e)^3}.$$

$$R = \frac{k\,(ax' + by' + e)^3 r}{x^3}.$$

Ved Brug af Keglesnittets Ligning og (α) har vi følgende lige store Forhold:

$$\frac{c^2}{(D^2 - AF)\,x^2 + 2\,(DE - BF)\,xy + (E^2 - CF)\,y^2} =$$

$$\frac{x'^2}{(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BE - DC)\,x + E^2 - CF} =$$

$$= \frac{y'^2}{(B^2 - AC)\, y^2 + 2\,(BD - AE)\, y + D^2 - AF},$$

men da de Kraftlove, som kan udledes af disse Forhold og (α), mindst indeholder 4 Konstanter, saa tilfredsstiller ingen af de herved fundne Kraftlove Problemet. Hermed er alle Muligheder for nye Kraftlove udtømte.

XXI.

En Partikel, der bevæger sig under Paavirkning af Centralkraften:

$$\frac{kx'^3 r}{(ax + by + e)^3},$$

beskriver altid et Keglesnit.

Ligningerne for Bevægelsen er

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-kx'^3 x}{(ax + by + e)^3}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-kx'^3 y}{(ax + by + e)^3};$$

ved at multiplicere den første af disse Ligninger med $y'dt$, den anden med $x'dt$ og subtrahere den første fra den anden faas let:

$$\frac{x'dy' - y'dx'}{x'^3} = -\frac{k\,(ydx - xdy)}{(ax + by + e)^3},$$

da

$$ydx - xdy = cdt$$

fremkommer ved at indføre dette og multiplicere Størrelserne paa begge Sider af Ligningen med $ax' + by'$ følgende Ligning ved en let Omskrivning:

$$a\,\frac{x'dy' - y'dx'}{x'^2} + b\,\frac{y'x'dy' - y'^2 dx'}{x'^3} =$$

$$= -ck\,\frac{(adx + bdy)}{(ax + by + e)^3},$$

hvoraf ved Integration

$$2\,a \cdot \frac{y'}{x'} + b\,\frac{y'^2}{x'^2} = \frac{ck}{(ax+by+e)^2} + i, \tag{1}$$

hvor i er Integrationskonstanten; heraf findes:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{kc}{b\,(ax+by+e)^2} + \frac{i}{b}},$$

der omskrives til:

$$by' = -ax' \pm \frac{x'}{(ax+by+e)} \sqrt{(a^2+ib)\,(ax+by+e)^2 + ckb}$$

eller

$$\frac{(ax+by+e)\,(adx+bdy)}{\pm\sqrt{(a^2+ib)\,(ax+by+e)^2+ckb}} = dx;$$

ved at integrere faas:

$$\pm\sqrt{(a^2+ib)\,(ax+by+e)^2+ckb} = (a^2+ib)\,x + j.$$

Banens Ligning fremkommer nu ved at opløfte Størrelserne paa begge Sider af Ligningen til anden Potens

$$(a^2+bi)\,(ax+by+e)^2 + bck = [(a^2+ib)\,x+j]^2.$$

Banen er altsaa altid et Keglesnit. Banen er Ellipse, Parabel eller Hyperbel eftersom

$$(a^2+ib)^3\,b^2 \lesseqgtr 0$$

eller for $b^2 > 0$ eftersom

$$a^2 + ib \lesseqgtr 0.$$

Ved Brug af (1) omskrives dette Kriterium til

$$\left(a + b\,\frac{y'}{x'}\right)^2 - \frac{bkc}{(ax+by+e)^2} \lesseqgtr 0.$$

Er $bkc < 0$, er Banen altid en Hyperbel, er $bkc > 0$, er Keglesnittets Art afhængig af Begyndelsesbetingelserne; i et givet Punkt vil Banen for smaa Værdier af $a + b\,\frac{y'}{x'}$

være en Ellipse, for større en Parabel, og endelig en Hyperbel.

En Partikel, der bevæger sig under Virkning af Kraften:

$$\frac{k\,(ax' + by' + e)^3 r}{x^3},$$

beskriver altid et Keglesnit.

Bevægelsesligningerne er:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{k\,(ax' + by' + e)^3 x}{x^3},$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{k\,(ax' + by' + e)^3 y}{x^3};$$

ved at multiplicere den første af disse Ligninger med adt den sidste med bdt og benytte at

$$dt = \frac{ydx - xdy}{c}$$

faas

$$\frac{adx' + bdy'}{k\,(ax' + by' + e)^3} = a\,\frac{ydx - xdy}{cx^2} + b\,\frac{y^2dx - xydy}{cx^3},$$

hvoraf ved Integration

$$\frac{1}{k\,(ax' + by' + e)^2} = 2\,\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{x} + \frac{b}{c}\cdot\frac{y^2}{x^2} + \frac{\alpha}{c},$$

$\frac{\alpha}{c}$ er Integrationskonstanten; denne Ligning omskrives til

$$\frac{1}{\sqrt{k}\,(ax' + by' + e)} = \pm\frac{\sqrt{2axy + by^2 + \alpha x^2}}{\sqrt{c}\cdot x},$$

der ogsaa kan skrives

$$\frac{x\,(ydx - xdy)}{\sqrt{2axy + by^2 + \alpha x^2}} = \sqrt{ck}\,(adx + bdy + edt).$$

For at integrere denne Ligning maa vi multiplicere Størrelserne paa begge Sider af Ligningen med $(ax + by)^2$; derved fremkommer

$$\frac{x\,(ydx - xdy)}{(ax+by)^2\sqrt{2axy+by^2+\alpha x^2}} = k_1\left(\frac{adx+bdy}{(ax+by)^2}c + e\frac{ydx-xdy}{(ax+by)^2}\right),$$

hvoraf ved Integration

$$\frac{1}{b\alpha - a^2}\cdot\frac{\sqrt{2axy+by^2+\alpha x^2}}{ax+by} = -k_1\left(\frac{c}{ax+by}+\frac{e}{b}\frac{ax}{ax+by}+\beta\right);$$

denne Ligning omskrives til:

$$\sqrt{2axy+by^2+\alpha x^2} = k_1\,(a^2 - b\alpha)\,(c + \frac{a}{b}ex + \beta\,(ax+by)).$$

Ved at opløfte Størrelserne paa begge Sider af Ligningen til anden Potens faas:

$$2axy + by^2 + \alpha x^2 = k_1^2\,(a^2 - b\alpha)^2\,(c + \frac{a}{b}\,ex + \beta\,(ax+by))^2.$$

Banen er altsaa altid et Keglesnit.

Hermed er Bertrands Problem fuldstændig løst, der findes altsaa 10 og kun 10 Kraftlove under Paavirkning af hvilke en Partikel altid beskriver et Keglesnit, hvordan end Begyndelsesbetingelserne er; og vi har fundet følgende Formler for disse

(1) $$\frac{kr}{(ax+by+d)^3}$$

(2) $$\frac{kr}{(ax^2+2dxy+by^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) $$\frac{ky'^3r}{[\pm\, y^2+by+a]^{\frac{3}{2}}}$$

(4) $$k\,(x'+ay'+b)^3r$$

(5) $$k\,(ax'^2+2bx'y'+dy'^2)^{\frac{3}{2}}\,r$$

(6) $$\frac{k\,(\pm\, x'^2+2bx'+a)^{\frac{3}{2}}\,r}{x^3}$$

(7) $$\frac{kx'^3r}{(ax+by+e)^3}$$

$$(8) \qquad \frac{k\,(ax' + by' + e)^3\, r}{x^3}$$

$$(9) \qquad \frac{k\,(a + y')^3 r}{(b + y)^3}$$

$$(10) \qquad k\,\frac{(a + x')^3\, r}{(b + y)^3}$$

De to første Love er fundet af Darboux og Halphen, (3) til (8) er fundet af P. J. SUCHAR, medens de to sidste ikke synes at være opstillet før.

Den første, som har stillet Problemet i det almindelige Tilfælde, hvor vi gaar ud fra, at Kraften er en Funktion af Partiklens Stilling og Hastighedskomposanterne langs Coordinataxerne, er P. J. SUCHAR i Afhandlingen: Recherche de la loi que doit suivre une force centrale, sachant que la trajectoire est une conique quelles que soient les conditions initiales[1]. Han finder ialt 8 Love, der tilfredsstiller Problemet. Det Grundlag, fra hvilket han gaar ud, har han givet i en Afhandling: Sur une transformation réciproque en Mécanique. (Bull. de la Soc. des Sciences t. XXXIII), hvor han beviser følgende. Et Legeme tænkes angrebet af en Centralkraft, og $F = u \cdot r$ er Kraftloven, hvor u er en eller anden Funktion; dersom Tiden ikke indgaar explicit i u, og dersom man for en vis Funktion u, der i Almindelighed kan afhænge af x og y og deres Afledede med Hensyn til Tiden t, kan bestemme Bevægelsen, svarende til Kraftloven F, saa ved man ligeledes at bestemme Bevægelsen, dersom Kraftloven er af Formen $F = \frac{1}{u} \cdot r$, hvor $\frac{1}{u}$ er den inverse Funktion af den foregaaende, og i hvilken man ombytter x og y med x' og y', x' og y' med x og y. Suchars Undersøgelser fører ham til det Resultat, at Banen for en Parti-

[1] Nouv. ann. (4), t. VI, 1906 p. 532—546.

kel, der bevæger sig under Paavirkning af den anden Kraftlov, er den samme som den hodografe Kurve til den Bane, som en Partikel beskriver, der bevæger sig under Paavirkning af den første Kraftlov. Dersom Banen svarende til en Centralkraft er et Keglesnit, vil den hodografe Kurve ogsaa være et Keglesnit; har man fundet én Lov for Centralkraften, der lader Angrebspunktet beskrive et Keglesnit, kan man herved udlede en anden Kraftlov, der ligeledes lader sit Angrebspunkt beskrive et Keglesnit.

Ved Anvendelse af denne Transformation paa de to nye Kraftlove (9) og (10) bliver begge disse Love uforandret.

At de 8 Kraftlove virkelig tilfredsstiller Problemet, beviser Suchar dels direkte ved at integrere Bevægelsesligningerne, dels ved at anvende Formlen:

$$-\frac{\gamma^2}{v^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2}+\frac{1}{v}\right]=\frac{rv}{F};$$

hvor F er Kraften, v er Hastigheden og α Vinklen mellem Hastigheden og Polaraksen. Denne Formel er analog med Binets, og Suchar har fremsat den i det lige omtalte Arbejde.

Vi har overalt bevist, at Lovene virkelig tilfredsstiller Problemet, ved direkte Integration og paa andre Maader end Suchar, og har derved opnaaet Kriterier over Keglesnittets Art.

Suchar fører tilsidst et Bevis for, at der kun findes de af ham fundne 8 Kraftlove. I dette Bevis gaar Suchar ud fra den urigtige Paastand, at det ikke er muligt at opstille mere end to Kraftlove, der indeholder x', x og y, da det ellers var muligt at opstille en Relation mellem x og y, der var forskellig fra Keglesnittets Ligning; det mærkelige er, at Suchar selv har fundet 3 Kraftlove, der indeholder x', x og y nemlig (3), (6) og (7); denne Modsigelse har for Suchar været saa stor, at han for at føre sit Bevis igennem vilkaarlig omdanner (3) til

$$\frac{x'r}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

og (6) til:

$$\frac{(ax'^2+2bx'y'+cy'^2)^{\frac{3}{2}}r}{x^3},$$

d. v. s. to Kraftlove, som slet ikke tilfredsstiller Problemet. Vi har i det foregaaende set, at der existerer 3 Kraftlove, der indeholder x' og x, saa Suchars Paastand er i alle Tilfælde urigtig, og hele hans Bevis mister dermed sin Betydning.

Denne Methode, som vi her har anvendt paa Keglesnit d. v. s. Kurver, hvis Ligning er af anden Grad, kan anvendes til at finde de Kraftlove, under Paavirkning af hvilke en Partikel beskriver en Kurve, hvis Ligning er af 3. Grad, hvordan end Begyndelsesbetingelserne er, og i det hele paa Kurver, hvis Ligning er af en eller anden Grad. Kraftlovene, der lader en Partikel beskrive en Kurve, hvis Ligning f. Eks. er af tredie Grad, maa indeholde 7 Konstanter, da den almindelige Ligning af 3. Grad indeholder 9 Konstanter.

I sine Litteraturhenvisninger giver Forf. den vigtige Oplysning, at »Bertrands Problem« i dets oprindelige Form (stillet i C. R. 84) allerede er blevet opstillet og løst i 1852 af YVON VILLARCEAU i Afhandlingen: Sur les étoiles doubles (Addition à la Connaissance des Temps, 1852 S. 76—85), 25 Aar før Bertrand opstillede det. Villarceaus Resultater indholder begge de to af Darboux og Halphen fundne ovennævnte Kraftlove (1) og (2).

Résumé.

L'Auteur s'occupe du problème de la loi que doit suivre une force centrale, sachant que la trajectoire est une conique, quelles que soient les conditions initiales. Ce problème a été résolu par DARBOUX et par HALPHEN dans le cas où la loi de la force ne dépend que de la position du mobile, (le problème de BERTRAND; v. C. R. t. 84). L'Auteur suppose le cas plus général que la loi de la force est une fonction de la position du mobile et de la vitesse. Cette question à été traitée par M. P.-J. SUCHAR (C. R., t. 135; Nouv. ann. (4) t. VI), et M. Suchar a trouvé 8 lois de la force. L'Auteur du présent mémoire trouve deux lois nouvelles. En somme il indique les 10 lois suivantes de la force R:

$$R = \frac{kr}{(ax + by + d)^3}, \tag{1}$$

$$R = \frac{kr}{(ax^2 + 2dxy + by^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

$$R = \frac{ky'^3 r}{(\pm\, y^2 + by + a)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3}$$

$$R = k\,(x' + ay' + b)^3 r, \tag{4}$$

$$R = k\,(ax'^2 + 2bx'y' + dy'^2)^{\frac{3}{2}} r, \tag{5}$$

$$R = \frac{k\,(\pm\, x'^2 + 2bx' + a)^{\frac{3}{2}}\, r}{x^3}, \tag{6}$$

$$R = \frac{kx'^3 r}{(ax + by + e)^3}, \tag{7}$$

$$R = \frac{k\,(ax' + by' + e)^3 r}{x^3}, \tag{8}$$

$$R = \frac{k(a + y')^3 r}{(b + y)^3}, \tag{9}$$

$$R = \frac{k(a + x')^3 r}{(b + y)^3}. \tag{10}$$

Les lois (1) et (2) sont trouvées par DARBOUX et HALPHEN, et, selon l'Auteur, antérieurement par YVON VILLARCEAU (Addition à la Connaissance des Temps, 1852, p. 76—85), les lois (3)—(8) par M. SUCHAR, les deux dernières par l'Auteur.

Færdig fra Trykkeriet den 15. Septbr. 1921.