Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III,** 10.

NOTE SUR UNE CLASSE
DE
SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1921

En étudiant des développements en séries de formes différentes j'ai cherché, pendant plusieurs années, une série infinie $\Sigma a_n f_n(x)$, possédant la propriété d'être toujours convergente, pourvu qu'elle soit convergente pour une seule valeur quelconque x_1 de x.

Dans mes recherches sur les polynomes d'HERMITE[1] j'ai démontré que la série $\Sigma a_n B_n(x)$, où les $B_n(x)$ sont les polynomes de BERNOULLI, possède la propriété susdite, pourvu que x_1 ne soit pas choisi parmi les éléments d'une certaine suite infinie.

Or, dans mes cours universitaires, j'ai trouvé, à l'improviste, une classe de séries trigonométriques de la forme $\Sigma a_n \cos \alpha_n x$ toujours convergentes, pourvu qu'il existe une valeur quelconque x_1, de sorte que les séries en question soient convergentes pour $x = x_1$.

La Note que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à notre Académie donne une généralisation des séries susdites, en indiquant une classe de séries trigonométriques qui possèdent une propriété analogue à celle des séries de polynomes de BERNOULLI.

A cet effet nous choisissons les éléments de la suite infinie

$$\alpha_0 \, \alpha_1 \, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_n \, \ldots, \tag{1}$$

[1] Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Mathematisk-fysiske Meddelelser, t. I, 6; 1918.

de sorte que la série à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left| \alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2 \right| \tag{2}$$

soit convergente, tandis que les éléments susdits sont du reste aussi arbitraires que cette condition le permet.

Cela posé, il est évident que la série infinie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2) \tag{3}$$

est absolument convergente. De plus, soit s_n la somme des n premiers termes de cette dernière série, nous aurons précisément

$$s_n = \alpha_0^2 - \alpha_n^2;$$

c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini α, tel que

$$\lim_{n=\infty} (\alpha_n^2) = \alpha^2, \tag{4}$$

ce qui n'entraîne pas généralement l'existence de $\lim \alpha_n$, à moins que α soit égal à zéro, tandis que cette autre suite infinie

$$\cos \alpha_0 x,\ \cos \alpha_1 x,\ \cos \alpha_2 x, \ldots, \cos \alpha_n x, \ldots$$

a toujours, quelle que soit la variable complexe x, une valeur limite, savoir

$$\lim_{n=\infty} \cos \alpha_n x = \cos \alpha x. \tag{5}$$

De plus, il existe, en vertu de (4), un nombre positif g, tel que nous aurons constamment, quel que soit l'indice n,

$$\left| \alpha_n \right| \leq g. \tag{6}$$

Quant à la série (2), nous avons à démontrer les deux lemmes suivants:

A. Supposons convergente la série à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|, \tag{7}$$

la série (2) est aussi convergente.

En effet, la convergence de la série (7) entraîne nécessairement l'existence d'une valeur limite de α_n, de sorte que l'équation (4) est à remplacer par cette autre

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha; \tag{8}$$

c'est-à-dire que l'inégalité (6) est vraie aussi dans ce cas, ce qui donnera

$$|\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2| = |\alpha_n - \alpha_{n+1}| \cdot |\alpha_n + \alpha_{n+1}| \leqq 2g| \cdot |\alpha_n - \alpha_{n+1}|,$$

de sorte que la série (2) est convergente.

B. Supposons que les α_n aient une valeur limite α différente de zéro, les deux séries à termes positifs (2) et (7) sont en même temps convergentes ou divergentes.

En premier lieu, supposons convergente la série (7), nous venons de démontrer que la série (2) est aussi convergente. En second lieu, supposons convergente la série (2), puis posons, quel que soit l'indice n,

$$\alpha_n = \alpha + \delta_n,$$

il existe un positif entier N, de sorte que nous aurons toujours, pour $n \geqq N$,

$$|\delta_n| < \varepsilon,$$

où ε désigne une quantité positive arbitrairement petite. Cela posé, l'identité évidente

$$\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2 = (\alpha_n - \alpha_{n+1})(2\alpha + \delta_n + \delta_{n+1})$$

donnera immédiatement

$$|\alpha_n - \alpha_{n+1}| \leqq \frac{|\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2|}{2|\alpha| - 2\varepsilon}, \quad n \geqq N;$$

c'est-à-dire que la série (7) est convergente, pourvu que la série (2) soit convergente.

Ces remarques faites, nous avons à démontrer un théorème, fondamental dans les recherches qui nous occupent ici, savoir:

I. *Supposons que les éléments α_n soient choisis tels que la série (2) est convergente, puis supposons convergente la série à termes constants Σa_n, la série infinie*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos \alpha_n x \tag{9}$$

est convergente pour une valeur quelconque de la variable complexe x et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$; c'est-à-dire que $f(x)$ est une transcendante entière.

Quant à la démonstration de ce théorème, nous avons à approfondir un théorème bien connu concernant la convergence d'une série de la forme $\Sigma a_n b_n$, théorème duquel DU BOIS REYMOND[1] et DEDEKIND[2] ont indiqué des cas spéciaux; c'est-à-dire que nous avons à étudier la série à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} |\cos \alpha_n x - \cos \alpha_{n+1} x|.$$

A cet effet, nous prenons pour point de départ l'identité

$$\left\{ \begin{aligned} & \cos \alpha_n x - \cos \alpha_{n+1} x = \\ & = -2 \sin \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} x \sin \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{2} x, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

[1] Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen. Fribourg 1871.

[2] Dans les Vorlesungen über Zahlentheorie de Dirichlet § 101, 3e édition 1879.

tandis que nous aurons, en vertu de la série de puissances qui représente $\sin \omega$,

$$|\sin \omega| \leqq |\omega| \cdot e^{|\omega|},$$

valable, quel que soit ω. Appliquons ensuite les inégalités

$$|\alpha_n \pm \alpha_{n+1}| \leqq |\alpha_n| + |\alpha_{n+1}|,$$

il résulte, en vertu de (10),

$$|\cos \alpha_n x - \cos \alpha_{n+1} x| \leqq \frac{|x|^2}{2} \cdot |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2| \cdot e^{(|\alpha_n| + |\alpha_{n+1}|)\,|x|};$$

c'est-à-dire que l'inégalité (6) donnera

$$(11) \quad |\cos \alpha_n x - \cos \alpha_{n+1} x| \leqq \frac{|x|^2}{2} \cdot |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2| \cdot e^{2g\,|x|}.$$

Enfin, soit $|x| \leqq K$, où K est une constante positive arbitrairement grande, il résulte finalement, en vertu de (11),

$$(12) \quad |\cos \alpha_n x - \cos \alpha_{n+1} x| \leqq \frac{K^2}{2} \cdot |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2| \cdot e^{2gK},$$

car la constante positive g est indépendante de x.

Cela posé, nous avons à étudier le terme de reste de la série (9), savoir

$$R_{n,\,p}(x) = \sum_{r=1}^{r=p} a_{n+r} \cos \alpha_{n+r} x.$$

A cet effet, posons, comme ordinairement

$$s_m = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m,$$

ce qui donnera évidemment, pourvu que $m \geqq 1$,

$$a_m = s_m - s_{m-1},$$

de sorte que le terme de reste se présente sous la forme

$$R_{n,\,p}(x) = -s_n \cos \alpha_{n+1} x + s_{n+p} \cos \alpha_{n+p} x + \\ + \sum_{r=1}^{r=p-1} s_{n+r} (\cos \alpha_{n+r} x - \cos \alpha_{n+r+1} x),$$

ce qui donnera

$$(13)\quad \begin{cases} |R_{n,\,p}(x)| \leqq |s_n \cos \alpha_{n+1} x - s_{n+p} \cos \alpha_{n+p} x| + \\ + \sum_{r=1}^{r=p-1} |s_{n+r}| \cdot |\cos \alpha_{n+r} x - \cos \alpha_{n+r+1} x|. \end{cases}$$

Désignons maintenant par s la somme de la série convergente Σa_n, puis posons, quel que soit l'indice m,

$$s_m = s + \delta_m,$$

il existe un positif entier M, tel que

$$|\delta_m| < \varepsilon, \quad m \geqq M,$$

où ε est une quantité positive arbitrairement petite. De plus, il existe une constante positive G, de sorte que nous aurons, pour une valeur quelconque de l'indice m,

$$|s_m| \leqq G.$$

Cela posé, il résulte, en vertu de (13),

$$(14)\begin{cases} |R_{n,\,p}(x)| \leqq |s| \cdot |\cos \alpha_{n+1} x - \cos \alpha_{n+p} x| + |\delta_n \cos \alpha_{n+1} x| + \\ + |\delta_{n+p} \cos \alpha_{n+p} x| + G \cdot \sum_{r=1}^{r=p-1} |\cos \alpha_{n+r} x - \cos \alpha_{n+r+1} x|. \end{cases}$$

Or, la série de puissances qui représente $\cos \omega$ donnera immédiatement, pour une valeur quelconque de la variable complexe x,

$$|\cos \alpha_m x| \leqq e^{|\alpha_m x|} \leqq e^{g|x|},$$

où g est la constante positive qui figure dans l'inégalité (6), ce qui donnera, en vertu de (11) et (14),

$$|R_{n,p}(x)| \leqq \frac{|s| \cdot |x|^2}{2} \cdot |\alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+p}^2| \cdot e^{2g|x|} + (|\delta_n| + |\delta_{n+p}|)\, e^{g|x|} + $$
$$+ \frac{G \cdot |x|^2}{2} e^{2g|x|} \cdot \sum_{r=1}^{r=p-1} |\alpha_{n+r}^2 - \alpha_{n+r+1}^2|.$$

Soit maintenant ε une quantité positive arbitrairement petite, il existe un positif entier N, de sorte que nous aurons à la fois, pour $n \geqq N$,

$$|\alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+p}^2| < \varepsilon,$$

$$|\delta_n| < \varepsilon, \quad |\delta_{n+p}| < \varepsilon,$$

$$\sum_{r=1}^{r=p-1} |\alpha_{n+r}^2 - \alpha_{n+r+1}^2| < \varepsilon,$$

conséquences immédiates de l'existence d'une valeur limite finie de α_n^2, de la convergence de la série Σa_n et de la convergence de la série (2). Remarquons en passant que la quantité ε est indépendante de la variable complexe x, ce qui est essentiel pour les applications suivantes.

Cela posé, la formule (14) donnera finalement, pourvu que $n \geqq N$,

$$(15) \qquad |R_{n,p}(x)| \leqq \left(\frac{(s+G)\,|x|^2}{2} e^{2g|x|} + 2e^{g|x|}\right)\varepsilon;$$

c'est-à-dire que la série (9) est convergente pour une valeur quelconque de la variable complexe x.

Soit ensuite $|x| \leqq K$, nous aurons de même, parce que les deux quantités positives g et ε sont indépendantes de x,

$$(16) \qquad |R_{n,p}(x)| \leqq \left(\frac{(s+G)\,K^2}{2} e^{2gK} + 2e^{gK}\right)\varepsilon,$$

de sorte que la série en question est uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$, et la somme $f(x)$ de cette série est par conséquent une transcendante entière.

Inversement, nous avons à démontrer cet autre théorème, où le nombre α qui figure dans la formule (4) est supposé différent de zéro:

II. Supposons que les éléments α_n soient choisis tels que la série (2) est convergente, puis supposons qu'il existe une seule valeur

$$x_1 \mp \frac{(2p+1)\pi}{2\alpha}, \tag{17}$$

où p est un entier, de sorte que la série (9) est convergente pour $x = x_1$, cette même série est convergente pour une valeur quelconque de la variable complexe x, et sa somme $f(x)$ est une transcendante entière.

Supposons convergente la série $\Sigma\, a_n \cos \alpha_n x_1$, nous avons à démontrer la convergence de $\Sigma\, a_n$, car, cette convergence établie, le théorème II est une conséquence immédiate du théorème I.

Posons pour abréger

$$b_n = a_n \cos \alpha_n x_1, \quad a_n = b_n \cdot \frac{1}{\cos \alpha_n x_1},$$

puis remarquons que la série $\Sigma\, b_n$ est supposée convergente, il s'agit de démontrer la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{n=q}^{n=\infty} \left| \frac{1}{\cos \alpha_n x_1} - \frac{1}{\cos \alpha_{n+1} x_1} \right|, \tag{18}$$

où le nombre entier q est choisi tel que, pour $m \geqq q$,

$$\alpha_m x_1 \mp \frac{(2p+1)\pi}{2},$$

ce qui est possible à cause de l'inégalité (17).

Or, nous aurons

$$\frac{1}{\cos \alpha_n x_1} - \frac{1}{\cos \alpha_{n+1} x} = \frac{2 \sin \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} x \sin \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{2} x}{\cos \alpha_n x_1 \cos \alpha_{n+1} x_1},$$

d'où, en vertu de (11),

$$(19) \quad \left|\frac{1}{\cos \alpha_n x_1} - \frac{1}{\cos \alpha_{n+1} x_1}\right| \leqq \frac{|x_1|^2 \cdot |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2|\, e^{2g|x_1|}}{2\,|\cos \alpha_n x_1| \cdot |\cos \alpha_{n+1} x_1|}.$$

Remarquons maintenant que la valeur limite

$$\lim_{n=\infty} \cos \alpha_n x_1 = \cos \alpha x_1$$

est supposée différente de zéro, puis posons

$$|\cos \alpha x_1| = d,$$

d est une quantité positive, et il existe par conséquent un positif entier N, tel que nous aurons, pour $n \geqq N$,

$$|\cos \alpha_n x_1| \geqq \frac{d}{2}.$$

Cela posé, il résulte, en vertu de (19),

$$\left|\frac{1}{\cos \alpha_n x_1} - \frac{1}{\cos \alpha_{n+1} x_1}\right| \leqq \frac{2\,|x_1|^2}{d^2} \cdot |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2|\, e^{2g|x_1|},$$

où il faut supposer $n \geqq N$; c'est-à-dire que la série (18) est convergente, et c'est par conséquent la même chose pour la série $\Sigma\, a_n$.

Soit particulièrement $\lim \alpha_n = 0$, savoir $\alpha = 0$, la condition (17) n'existe pas, et nous aurons cet autre théorème plus élégant que le théorème précédent, dont il est un cas assez spécial:

III. Supposons que les éléments α_n soient choisis tels que la valeur limite de α_n soit égale à zéro et que la série à termes positifs $\Sigma\, |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2|$ soit convergente, puis, supposons qu'il existe une seule valeur quelconque x_1, telle que la série trigonométrique (9) soit convergente pour $x = x_1$, cette même série est convergente pour une valeur quelconque de la variable complexe x, et sa somme $f(x)$ est une transcendante entière.

Étudions maintenant la transcendante entière $f(x)$ définie par la somme des séries trigonométriques que nous venons d'étudier, posons

$$(20)\quad f(x) = A_0 - \frac{A_1 x^2}{2!} + \frac{A_2 x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^r A_r x^{2r}}{(2r)!} + \ldots,$$

le coefficient général A_r de cette série de puissances toujours convergente se présente sous la forme

$$(21)\quad A_r = a_0 \alpha_0^{2r} + a_1 \alpha_1^{2r} + \ldots + a_n \alpha_n^{2r} + \ldots, \quad r \geqq 0.$$

Quant aux séries trigonométriques que nous venons de considérer et qui sont jusqu'ici très peu étudiées, que je sache, cette question se présente naturellement, s'il soit possible de développer, dans une telle série, qui correspond à une suite donnée des α_n, une transcendante entière donnée d'avance, par exemple à l'aide d'une série de puissances toujours convergente. C'est-à-dire qu'il s'agit de résoudre, par rapport aux coefficients a_n, les équations (21), en supposant connus les A_r et les α_n.

Or, une telle résolution des équations (21) ne semble pas être généralement conciliable aux conditions que les α_n sont assujettis à satisfaire, ce qui n'est pas surprenant du reste.

Meddelt paa Mødet d. 5. November 1920.
Færdig fra Trykkeriet d. 7. Januar 1921.