

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. I, 4.

---

SUR LA MULTIPLICATION DE SÉRIES  
ABSOLUMENT CONVERGENTES

PAR DES SÉRIES SOMMABLES PAR LA MÉTHODE DE CESÀRO

PAR

A. F. ANDERSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1918



§ 1.

CONFORMÉMENT à la définition généralement reçue, nous appellerons dans ce mémoire la série  $\sum_0^{\infty} u_n$  sommable au sens de CESARO de l'ordre  $r$ , ou, plus brièvement, sommable  $(C, r)$ , avec la valeur de sommabilité  $u$ , si

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} = u$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n A_0^{(r)} + u_{n-1} A_1^{(r)} + \dots + u_{n-\nu} A_{\nu}^{(r)} + \dots + u_1 A_{n-1}^{(r)} + u_0 A_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} = u$$

où, pour abrégé, nous avons posé

$$\binom{\nu + r}{\nu} = \frac{(\nu + r)(\nu + r - 1) \dots (r + 1)}{\nu!} = A_{\nu}^{(r)}.$$

Cette définition est équivalente à celle adoptée par CESARO lui-même<sup>1</sup> pour les valeurs entières positives du nombre ordinal  $r$ . CESARO considérait uniquement celles-ci; cependant, en formulant la définition de la sorte — comme l'a fait déjà S. CHAPMAN<sup>2</sup> —, la notion de sommabilité  $(C, r)$  devient valable pour toute valeur réelle de  $r$ , toutefois à l'exception des nombres entiers négatifs, puisque, pour  $r$  entier négatif,  $A_n^{(r)}$  sera constamment, à partir d'un certain  $n$ , égal à zéro. On voit que les notions de sommabilité  $(C, 0)$  et de convergence sont identiques.

<sup>1</sup> Bulletin des Sciences Mathématiques (2), Tome 14 (1890), page 114.

<sup>2</sup> Proceedings of the London Mathematical Society (2), Vol. 9 (1911), page 369.

Avant d'entrer en matière, nous allons établir quelques-unes des formules les plus simples et les plus usitées concernant la méthode de sommabilité employée.

La formule du binôme donne pour  $|x| < 1$

$$(1-x)^{-(r+1)} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \binom{-r-1}{n} x^n.$$

Comme cependant

$$\binom{-r-1}{n} = (-1)^n A_n^{(r)}$$

cette équation peut aussi s'écrire

$$(2) \quad (1-x)^{-(r+1)} = \sum_0^{\infty} A_n^{(r)} x^n \quad (|x| < 1)$$

d'où, en remplaçant  $x$  par  $-x$ :

$$(3) \quad (1+x)^{-(r+1)} = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r)} x^n. \quad (|x| < 1)$$

De (2) on déduit en outre, en vertu de (1):

$$(4) \quad (1-x)^{-(r+1)} \sum_0^{\infty} u_n x^n = \sum_0^{\infty} S_n^{(r)} x^n. \quad (|x| < 1)$$

Enfin, (2) donnera pour des valeurs arbitrairement choisies de  $r$  et de  $s$  (en ne considérant toutefois ici que les valeurs réelles qui ne sont pas entières négatives):

$$\begin{aligned} \left( \sum_0^{\infty} A_n^{(r)} x^n \right) \cdot \left( \sum_0^{\infty} A_n^{(s)} x^n \right) &= (1-x)^{-(r+1)} \cdot (1-x)^{-(s+1)} \\ &= (1-x)^{-(r+s+2)} = \sum_0^{\infty} A_n^{(r+s+1)} x^n \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

d'où, en appliquant le théorème de multiplication de CAUCHY, la formule

$$(5) \quad A_0^{(r)} A_n^{(s)} + A_1^{(r)} A_{n-1}^{(s)} + \dots + A_{n-1}^{(r)} A_1^{(s)} + A_n^{(r)} A_0^{(s)} = A_n^{(r+s+1)},$$

qui dans le cas particulier de  $s = 0$ , se réduit à

$$(6) \quad A_0^{(r)} + A_1^{(r)} + A_2^{(r)} + \dots + A_{n-1}^{(r)} + A_n^{(r)} = A_n^{(r+1)}.$$

Rappelons, de plus, la formule

$$(7) \quad A_n^{(r)} = p_{n,r} \frac{n^r}{\Gamma(1+r)},$$

où  $p_{n,r} \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $r$  demeurant constant.

Il convient aussi de se rendre compte dès maintenant que la suite

$$A_0^{(r)} = 1, \quad A_1^{(r)}, \quad A_2^{(r)}, \quad \dots, \quad A_n^{(r)}, \quad \dots$$

1° pour  $r > -1$

est à éléments positifs, qui pour  $r > 0$  vont toujours croissant (d'après (7), vers  $\infty$ ), tandis que pour  $-1 < r < 0$  ses éléments sont toujours décroissants (d'après (7) vers 0);

2° pour le nombre non entier  $r = -s < -1$

elle présente des éléments qui pour l'indice  $n \leq [s]$  sont à signes alternés, alors que pour tous  $n \geq [s]$  ils sont de signe constant:  $(-1)^{[s]}$ . Ici,  $[s]$  signifie le plus grand des nombres entiers positifs inférieurs à  $s$ .

Citons enfin deux énoncés de S. CHAPMAN<sup>1</sup> que nous aurons lieu d'utiliser assez souvent dans la suite :

I. Si la série  $\sum_0^{\infty} u_n$  est sommable  $(C, r)$ ,  $r > -1$ , elle sera aussi sommable  $(C, s)$  quand  $s > r$ , avec la même valeur de sommabilité.

II. Si la série  $\sum_0^{\infty} u_n$  est sommable  $(C, r)$ ,  $r > -1$ , on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^r} = 0.$$

<sup>1</sup> Proceedings of the London Mathematical Society (2), Vol. 9 (1911), pages 377—379.

## § 2.

On sait que le produit de deux séries convergentes, formé suivant la règle de multiplication de CAUCHY, est loin d'être toujours une série convergente. Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de la multiplication de séries sommables. En effet, dans l'ouvrage précité, CESARO a démontré le théorème suivant, également bien connu:

III. Si les séries  $\sum_0^{\infty} u_n$  et  $\sum_0^{\infty} v_n$  sont sommables, respectivement  $(C, r)$  et  $(C, s)$  avec les valeurs de sommabilité  $u$  et  $v$ , la série produite suivant la règle de multiplication de CAUCHY<sup>1</sup>:

$$\sum_0^{\infty} w_n = \sum_0^{\infty} (v_n u_0 + v_{n-1} u_1 + \dots + v_1 u_{n-1} + v_0 u_n)$$

sera sûrement sommable  $(C, r + s + 1)$  avec la valeur de sommabilité  $u \cdot v$ . Ici,  $r$  et  $s$  sont des entiers positifs ou bien égaux à zéro.

Le résultat formulé dans cet énoncé offre un intérêt considérable pour la théorie des séries, même au point de vue de l'évolution historique de la dite théorie. En fait, c'est en grande partie ce théorème qui provoqua l'établissement de la théorie de la sommabilité, corps de doctrine qui, une fois fondé, ne tarda pas à évoluer progressivement et a donné naissance à des résultats nombreux et importants<sup>2</sup>. En effet, le théorème cité semblait indiquer qu'on pourrait atteindre à une plus grande simplicité comme aussi à une harmonie plus parfaite de la théorie des séries, et que, d'autre part, celle-ci se trouverait susceptible d'être appliquée à d'autres domaines, si, au lieu de considérer et d'utiliser uniquement des séries convergentes — ainsi qu'on avait fait

<sup>1</sup> Dans la suite nous désignons cette série par «série produit».

<sup>2</sup> Parmi ces résultats, nous pouvons relever ici la part qui lui revient dans la théorie des séries de FOURIER et de DIRICHLET.

pendant la plus grande partie du dix-neuvième siècle —, on se décidait à se servir aussi des séries non convergentes.

Cependant, le théorème III ne donne qu'une limite supérieure de l'ordre de sommabilité de la série produit. Citons à titre d'exemple la série sommable du 1<sup>er</sup> ordre :

$$(8) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

dont le carré serait, en vertu de ce théorème, sommable (C, 3), alors qu'il est facile de démontrer directement que le carré de cette série :

$$(9) \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

est sommable (C, 2). —

Une fois qu'on eut commencé de considérer des valeurs soit non entières soit négatives (abstraction faite des valeurs entières négatives) du nombre ordinal, il devint possible de trouver à la limite supérieure de l'ordre de la série produit une valeur moindre que celle indiquée par le théorème III. Aussi, S. CHAPMAN<sup>1</sup> put-il démontrer le théorème suivant :

IV. Si  $\sum_0^{\infty} u_n$  et  $\sum_0^{\infty} v_n$  sont sommables respectivement (C, r) et (C, s), où r et s sont des nombres réels arbitrairement choisis tels que  $r > -1$  et  $s > -1$ , ayant les valeurs de sommabilité respectives de u et de v, la série produite suivant la règle de multiplication de CAUCHY :

$$\sum_0^{\infty} w_n = \sum_0^{\infty} (v_n u_0 + v_{n-1} u_1 + \dots + v_1 u_{n-1} + v_0 u_n)$$

sera sûrement sommable (C, r + s + 1) avec la valeur de sommabilité  $u \cdot v$ .

Le fait que le nombre (r + s + 1) qui figure dans le théorème IV est souvent plus petit que celui du théorème

<sup>1</sup> Proceedings of the London Mathematical Society (2), Vol. 9 (1911), page 378.

III, quand on fait application des deux théorèmes aux mêmes deux séries, est dû à la précision plus élevée avec laquelle on est à même de déterminer l'ordre de sommabilité en considérant aussi les valeurs non entières du nombre ordinal. C'est ainsi que, par exemple, on peut aisément démontrer (voir page 19) que la série (8) est sommable  $(C, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  représentant — comme partout ailleurs où nous employons cette lettre — un nombre positif arbitrairement petit, et le théorème IV montre alors que la série (9) est sommable  $(C, 1 + 2\varepsilon)$ , de sorte que, en appliquant ce théorème, nous sommes parvenus à réduire de 3 à  $(1 + \delta)$  la limite supérieure de l'ordre de sommabilité appartenant à la série produit (9).<sup>1</sup>

Désignons en outre, toujours avec CHAPMAN, par indice de sommabilité, ou indice tout court, d'une série sommable le nombre  $g$ , qui forme la limite inférieure de ceux,  $k$ , ayant ceci de particulier que la série est sommable  $(C, r)$  pour tout  $r$  (non entier négatif) plus grand que  $k$ . Le théorème I fait voir que toute série sommable  $(C, r)$  pour une valeur de  $r$  supérieure à  $-1$  est affectée d'un indice; par contre, rien ne garantit qu'il en soit de même d'une série qui ne serait reconnue sommable  $(C, r)$  que pour une valeur de  $r$  inférieure à  $-1$ . — Lorsque la série considérée est sommable  $(C, g)$ , nous désignerons son indice comme «indice atteint», dans l'autre cas comme «indice non atteint».

Maintenant que nous nous sommes rendu compte combien le théorème de CHAPMAN se prête bien, mieux que le théorème III, à nous fournir des renseignements sur l'ordre de sommabilité de la série produit, il se pose naturellement cette question: le théorème IV donne-t-il réellement sur ce sujet des éclaircissements aussi précis qu'il est possible d'en obtenir? Ou, plus exactement: La série produit est-elle affectée de l'indice (atteint ou non atteint)  $(r + s + 1)$ , si  $r$

<sup>1</sup>  $\delta$  étant positif et aussi petit que l'on voudra.

et  $s$  sont les indices respectifs (atteints ou non atteints) des deux séries facteurs?

Quelques exemples fourniront la réponse à cette question. Au préalable, il faut prouver le lemme suivant:

La série

$$(10) \quad \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r)}$$

a l'indice non atteint  $r$ . Ici  $r$  est un nombre réel quelconque, avec cette restriction toutefois qu'il ne sera pas entier négatif.

La démonstration de la proposition sus-indiquée se divise en trois parties:

1<sup>o</sup>  $r < 0$ .

Si nous posons  $r = -s$ ,  $s$  sera plus grand que 0, et nous aurons donc à prouver que

$$(11) \quad \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-s)}$$

est sommable  $(C, -s + \delta)$  pour toute valeur positive de  $\delta$  (à condition toutefois que  $-s + \delta$  ne soit pas entier négatif), et, d'autre part, que cette série n'est pas sommable  $(C, -s)$ .

Pour  $s > 1$ , (11) est absolument convergent en vertu de (7); puisque la suite

$$A_0^{(-s)}, A_1^{(-s)}, A_2^{(-s)}, \dots, A_n^{(-s)}, \dots$$

se compose, pour  $0 < s < 1$ , d'éléments positifs et toujours décroissants vers 0, on verra que (11) est convergente pour toutes valeurs positives de  $s$ . L'application d'un théorème bien connu dû à ABEL<sup>1</sup> montrera que la somme de la série [voir (3)] est

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1+x)^{-(-s+1)} = 2^{s-1}.$$

<sup>1</sup> Crelles Journal, Bd. 1 (1826), pag. 314.

Nous posons maintenant

$$s_0 = A_0^{(-s)} \quad \text{et} \quad s_n = \sum_0^n (-1)^\nu A_\nu^{(-s)} \quad (n \geq 1)$$

et

$$(12) \quad 2^{s-1} - s_n = \varepsilon_n,$$

ce qui donnera pour toutes valeurs de  $n$

$$\varepsilon_n = (-1)^n [(-A_{n+1}^{(-s)} + A_{n+2}^{(-s)}) + (-A_{n+3}^{(-s)} + A_{n+4}^{(-s)}) + (-A_{n+5}^{(-s)} + A_{n+6}^{(-s)}) + \dots].$$

Or, attendu que d'après (6)

$$A_{n+2}^{(-s)} - A_{n+1}^{(-s)} = A_{n+2}^{(-s-1)},$$

on aura, également pour  $n \geq 0$ :

$$|\varepsilon_n| \leq |A_{n+2}^{(-s-1)}| + |A_{n+4}^{(-s-1)}| + |A_{n+6}^{(-s-1)}| + \dots$$

Il s'ensuit alors de (7) que

$$(13) \quad \begin{aligned} & |\varepsilon_n| \\ < K \left( \frac{1}{(n+2)^{s+1}} + \frac{1}{(n+4)^{s+1}} + \frac{1}{(n+6)^{s+1}} + \dots \right) \\ < K \left( \frac{1}{(n+2)^{s+1}} + \frac{1}{(n+3)^{s+1}} + \frac{1}{(n+4)^{s+1}} + \frac{1}{(n+5)^{s+1}} + \frac{1}{(n+6)^{s+1}} + \dots \right) \\ < K \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} = \frac{K_1}{(n+1)^s}, \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante positive et  $K_1 = \frac{K}{s}$ .

En employant la transformation bien connue proposée par ABEL et qui peut être formulée ainsi :

$$(14) \quad \sum_0^n a_\nu b_\nu = \sum_0^{n-1} s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + s_n b_n, \quad s_\nu = a_0 + a_1 + \dots + a_\nu,$$

on aura, en utilisant en même temps (6) :

$$\frac{C_n^{(-s+\delta)} = A_0^{(-s)} A_n^{(-s+\delta)} - A_1^{(-s)} A_{n-1}^{(-s+\delta)} + \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1}^{(-s)} A_1^{(-s+\delta)} + (-1)^n A_n^{(-s)} A_0^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}}$$

$$= \frac{s_0 A_n^{(-s-1+\delta)} + s_1 A_{n-1}^{(-s-1+\delta)} + \dots + s_{h-1} A_1^{(-s-1+\delta)} + s_n A_0^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}}$$

A l'aide de (12), on obtiendra ensuite

$$C_n^{(-s+\delta)} = \frac{2^{s-1} A_n^{(-s-1+\delta)} + A_{n-1}^{(-s-1+\delta)} + \dots + A_1^{(-s-1+\delta)} + A_0^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - \frac{\varepsilon_0 A_n^{(-s-1+\delta)} + \varepsilon_1 A_{n-1}^{(-s-1+\delta)} + \dots + \varepsilon_{n-1} A_1^{(-s-1+\delta)} + \varepsilon_n A_0^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}},$$

équation qui, si la fraction à soustraire est désignée par  $c_n$ , peut s'écrire en vertu de (6):

$$C_n^{(-s+\delta)} = 2^{s-1} - c_n.$$

De ce résultat il appert que la série considérée (11) est sommable ( $C, -s + \delta$ ) pour toute valeur positive de  $\delta$  ayant la valeur de sommabilité  $2^{s-1}$ , pourvu que nous puissions démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

pour ces valeurs de  $\delta$ .

En vue de cette démonstration, nous décomposerons  $c_n$  en deux parties:

$$c_n = \sum_0^m \varepsilon_\nu \frac{A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} + \sum_{m+1}^n \varepsilon_\nu \frac{A_{n-\nu}^{(-s+1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}},$$

ici  $m = \left[ \frac{n}{2} \right]$ , où  $\left[ \frac{n}{2} \right]$  désigne, comme plus haut, le plus grand des nombres entiers inférieurs à  $\frac{n}{2}$ .

Nous arrivons ainsi à

$$|c_n| \leq A_n + B_n,$$

où

$$A_n = \sum_0^m \varepsilon_\nu \left| \frac{A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} \right| \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{m+1}^n \varepsilon_\nu \left| \frac{A_{n-\nu}^{(-s+1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} \right|.$$

Or, d'après (7), il existe une constante  $K_2$  et un nombre positif  $N$  tels, que pour tous  $n \geq N$  et tous  $0 \leq \nu \leq m = \left[ \frac{n}{2} \right]$  on aura:

$$(15) \quad \left| \frac{A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} \right| < K_2 \frac{(n-\nu)^{-s-1+\delta}}{n^{(-s+\delta)}} = K_2 \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-s+\delta} \frac{1}{n-\nu}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{K_2}{m} \cdot 2^{s-\delta}, & \text{si } -s + \delta < 0 \\ \frac{K_2}{m} \cdot 1, & \text{si } -s + \delta \geq 0. \end{cases}$$

En conséquence, au moins pour toute valeur assez grande de  $n$ , on aura :

$$\left| \frac{A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} \right| < \frac{K_2}{m} \cdot 2^d = \frac{K_3}{m}$$

pour  $0 \leq \nu \leq m$  et pour tous  $\delta > 0$ , où  $d$  est un nombre supérieur à toute valeur de  $s - \delta$ , c'est-à-dire que  $d \geq s$ .

Il s'ensuit que

$$A_n < \frac{K_1 \cdot K_3}{m} \sum_0^m \frac{1}{(\nu+1)^s} < \frac{K_1 \cdot K_3}{m} \left(1 + \int_1^m \frac{dx}{x^s}\right)$$

$$= \frac{K_1 \cdot K_3}{m} \left(1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1} \frac{1}{m^{s-1}}\right) = \frac{K_1 K_3}{s-1} \left(\frac{s}{m} - \frac{1}{m^s}\right),$$

d'où l'on verra immédiatement que  $A_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , puisque en ce cas on a également  $m \rightarrow \infty$ .

Il est à remarquer que  $s$  n'est jamais égal à 1, attendu que d'après notre supposition  $r = -s$  n'est jamais un nombre entier négatif et ne peut, par conséquent, être égal à  $-1$ .

Ensuite on trouve

$$B_n < K_1 \sum_{m+1}^n \frac{1}{(\nu+1)^s} \left| \frac{A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} \right| < \frac{K_1}{m^s} \frac{\sum_0^n \left| A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)} \right|}{\left| A_n^{(-s+\delta)} \right|}$$

Quand  $-s + \delta \geq 0$ , tous  $A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}$  ( $0 \leq \nu \leq n$ ) seront positifs ou nuls, de même que  $A_n^{(-s+\delta)}$  est positif; de sorte que, en considérant (6), on aura :

$$\frac{\sum_0^n \nu |A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}|}{|A_n^{(-s+\delta)}|} = \frac{\sum_0^n \nu A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} = \frac{A_n^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} = 1,$$

d'où il s'ensuit immédiatement que  $B_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Si  $-s + \delta < 0$ , la série

$$\sum_0^\infty A_n^{(-s-1+\delta)}$$

est absolument convergente en vertu de (7) et, par conséquent, il existe une constante positive  $K_4$  telle que, pour toute valeur de  $n$ ,

$$\sum_0^n \nu |A_{n-\nu}^{(-s-1+\delta)}| = \sum_0^n \nu |A_\nu^{(-s-1+\delta)}| < K_4$$

de sorte que

$$B_n < \frac{K_1 \cdot K_4}{m^s} \cdot \frac{1}{|A_n^{(-s+\delta)}|},$$

d'où, étant donné que  $\delta > 0$ , on conclut immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0.$$

Ayant ainsi démontré que la série (11) est sommable  $(C, -s + \delta)$  pour toute valeur positive de  $\delta$ , nous allons montrer qu'elle n'est pas sommable  $(C, -s)$ .

A cet effet, rappelons tout d'abord que, pour  $|x| < 1$ , on a [voir (3)]

$$\sum_0^\infty (-1)^n A_n^{(-s)} x^n = (1+x)^{s-1};$$

en multipliant cette équation par cette autre, également valable pour  $|x| < 1$  [v. (2)]:

$$\sum_0^\infty A_n^{(-s)} x^n = (1-x)^{s-1},$$

on aura:

$$\begin{aligned} \sum_0^n (A_0^{(-s)} A_n^{(-s)} - A_1^{(-s)} A_{n-1}^{(-s)} + \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1}^{(-s)} A_1^{(-s)} + (-1)^n A_n^{(-s)} A_0^{(-s)}) x^n \\ = (1-x^2)^{s-1} = \sum_0^{\infty} A_\nu^{(-s)} x^{2\nu}, \end{aligned}$$

d'où il résulte immédiatement que

$$\frac{A_0^{(-s)} A_n^{(-s)} - A_1^{(-s)} A_{n-1}^{(-s)} + \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1}^{(-s)} A_1^{(-s)} + (-1)^n A_n^{(-s)} A_0^{(-s)}}{A_n^{(-s)}} = \begin{cases} \frac{A_n^{(-s)}}{2} & \text{pour } n \text{ pair et } n = 0 \\ A_n^{(-s)} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases}$$

de sorte que cette expression n'a point de valeur limite quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui revient à dire précisément que (11) n'est pas sommable ( $C, -s$ ).

$$2^0 \quad r = 0.$$

Dans le cas de  $r = 0$ , la série considérée (10) est justement celle-ci:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots;$$

laquelle, comme on le sait, présente l'indice non atteint 0. D'ailleurs, ce résultat se trouve contenu dans un énoncé bien connu dont nous aurons à faire usage dans la suite et que pour ce motif nous reproduisons et prouvons un peu plus loin (page 17).

$$3^0 \quad r > 0.$$

Si l'on pose  $r = [r+1] - p$ ,  $p$  est positif et inférieur à 1, ou bien  $p = 0$ .

Nous considérons la série

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-p)}$$

qui, nous l'avons vu, a l'indice non atteint ( $-p$ ).

En multipliant cette série par la série  $\sum_0^{\infty} (-1)^n$ , nous obtiendrons [voir (6)] la série

$$(16) \quad \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-p+1)}$$

qui, en vertu du théorème de multiplication de CHAPMAN, est sûrement sommable  $(C, -p+1+\varepsilon)$ . Or, par un procédé parfaitement analogue à celui qui nous a permis tout à l'heure de démontrer que la série (11) n'est pas sommable  $(C, -s)$ , nous pouvons prouver que la série (16) n'est pas sommable  $(C, -p+1)$  (ce qui, d'ailleurs, résulte aussi de l'énoncé II de CHAPMAN, page 5); donc, elle a l'indice non atteint  $(-p+1)$ . Si maintenant on multiplie de nouveau par  $\sum_0^{\infty} (-1)^n$ , on a la série produit

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-p+2)},$$

qu'on trouvera également muni de l'indice non atteint  $(-p+2)$ . En employant ce procédé encore  $[r+1]-2$  fois, on obtiendra le résultat cherché, à savoir, que la série

$\sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r)}$  a l'indice non atteint  $r$ . Le lemme proposé est donc prouvé d'une façon complète. —

Ayant maintenant à revenir sur la question posée plus haut, il convient de remarquer d'abord que, pour toute valeur réelle de  $r$  et de  $s$ <sup>1</sup>, la formule (5) permet de déduire immédiatement l'égalité

$$\left( \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(s)} \right) \cdot \left( \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r)} \right) = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r+s+1)}.$$

Les deux séries facteurs présentent les indices non atteints respectifs  $s$  et  $r$ , la série produit ayant l'indice non atteint  $(r+s+1)$ . Pour  $s > -1$  et  $r > -1$ , cet exemple montre que la règle de multiplication de CHAPMAN peut fournir parfois, touchant l'ordre de sommabilité de la série produit,

<sup>1</sup> En laissant de côté, toutefois, celles où un ou plusieurs des nombres  $r$ ,  $s$  et  $r+s+1$  sont des entiers négatifs.

les meilleurs renseignements possible, puisque, appliquée au cas qui nous occupe, elle nous permet de déterminer l'indice (non atteint) de la série produit.

Il faut remarquer cependant qu'il n'en est pas toujours ainsi, ce que nous mettrons en évidence plus loin à l'aide d'autres exemples. Ici, il convient d'ajouter que celui qui précède nous conduit encore à un résultat assez important. Le voici :

Il est impossible d'apporter au théorème de multiplication de CHAPMAN une amélioration tendant à remplacer  $(r + s + 1)$  par une expression dépendante de  $r$  et de  $s$  et qui — ne fût-ce que pour quelques-unes seulement des valeurs que  $r$  et  $s$  sont susceptibles d'assumer — assigne à l'ordre de la série produit une limite supérieure moins élevée, — il est impossible, disons-nous, d'opérer cette amélioration sans que, du coup, le théorème cesse d'être applicable à la multiplication de deux séries sommables quelconques ayant des ordres supérieurs à  $-1$ . —

C'est CHAPMAN qui a le premier fait observer<sup>1</sup> que le théorème IV ne donne pas toujours l'indice de la série produit, lorsqu'on fait la multiplication de séries convergentes (c'est-à-dire ayant l'indice de sommabilité  $\leq 0$ ). Le même auteur a remarqué qu'on peut facilement former des exemples de ce fait en partant de cette particularité — qui semble peut-être peu probable au premier abord —, qu'il existe des séries absolument convergentes dont l'indice est plus grand que  $-1$ ; il en existe même dont l'indice (bien entendu, l'indice atteint) égale 0.

Un exemple de ce dernier cas est fourni par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ dont les termes se trouvent définis par les égalités}$$

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\delta}}, \text{ quand } n \neq [e^p] \quad (p = 1, 2, 3, 4, \dots),$$

<sup>1</sup> Proc Lond. Math. Soc. (2), Vol. 9 (1911), page 398.

et

$$(17a) \quad u_{[e^p]} = \frac{(-1)^{[e^p]-1}}{p^{1+\delta}},$$

où  $\delta > 0$ .

Cet exemple se simplifie encore davantage, si l'on pose

$$(17b) \quad u_n = 0, \quad \text{quand } n \neq [e^p] \quad (p = 1, 2, 3, 4 \dots),$$

les termes munis de l'indice  $[e^p]$  restant définis par (17a).

Comme le fait voir immédiatement le théorème II, ces séries ne sont pas sommables  $(C, -\varepsilon)$ . — Si l'on multiplie une

de ces séries, soit par la série convergente  $\sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-s)}$ ,

où  $0 < s < 1$  et qui a l'indice non atteint  $-s$ , le produit sera, en vertu du théorème de multiplication de CAUCHY, une série convergente, donc une série qui est sûrement sommable  $(C, 0)$ , alors que le théorème IV, appliqué à ce cas, dit seulement que la série produit est sommable  $(C, -s + \varepsilon + 1)$ ,  $-s + 1 > 0$ .

A ce propos, il est à noter toutefois que le fait dont nous venons de parler peut se produire non seulement lors de la multiplication de séries convergentes, mais aussi lorsqu'il s'agit de séries divergentes.

Nous allons le démontrer par un exemple bien simple.

La série

$$(18) \quad \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots$$

est sommable  $(C, \varepsilon)$  avec la valeur de sommabilité 0, pourvu que  $\theta \neq 2p\pi$ , où  $p$  est un nombre entier quelconque. Bien que ce soit là un fait bien connu, nous croyons devoir en rappeler la démonstration très simple, parce que cette série est à la base de l'exemple allégué. Nous allons donc montrer que

$$\frac{S_n^{(\varepsilon)}}{A_n^{(\varepsilon)}} = \frac{A_n^{(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{2} + A_{n-1}^{(\varepsilon)} \cos \theta + A_{n-2}^{(\varepsilon)} \cos 2\theta \dots + A_0^{(\varepsilon)} \cos n\theta}{A_n^{(\varepsilon)}}$$

a la valeur limite 0 quand  $n \rightarrow \infty$  ( $\theta \neq 2p\pi$ ).

En faisant application de l'identité élémentaire

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad (\theta \neq 2p\pi)$$

et se rappelant que  $A_0^{(\varepsilon)} = A_0^{(\varepsilon-1)} = 1$ , on aura à l'aide de la transformation d'ABEL (14):

$$(19) \quad \frac{S_n^{(\varepsilon)}}{A_n^{(\varepsilon)}} = \frac{A_n^{(\varepsilon-1)} \sin \frac{\theta}{2} + A_{n-1}^{(\varepsilon-1)} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots + A_1^{(\varepsilon-1)} \sin(2n-1)\frac{\theta}{2} + A_0^{(\varepsilon-1)} \sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2A_n^{(\varepsilon)} \sin \frac{\theta}{2}}$$

La suite  $A_\nu^{(\varepsilon-1)}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) se compose d'éléments positifs toujours décroissant vers zéro<sup>1</sup>. Ensuite, en utilisant de nouveau la transformation sus-indiquée d'ABEL, on verra que le numérateur de (19) est numériquement inférieur à  $A_0^{(\varepsilon-1)} = 1$  multiplié par la plus grande des quantités

$$|\sigma_0|, |\sigma_1|, |\sigma_2|, \dots, |\sigma_n|,$$

où nous avons posé

$$\sum_0^\nu \sin(2n+1)\frac{\theta}{2} = \sigma_\nu.$$

Or, comme cette série oscille entre des limites finies, il existe une constante  $K$  telle, que

$$\left| \frac{S_n^{(\varepsilon)}}{A_n^{(\varepsilon)}} \right| < \frac{K}{2A_n^{(\varepsilon)} \sin \frac{\theta}{2}}$$

pour toute valeur de  $n$ ; et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(\varepsilon)} = \infty$ , si petit que soit  $\varepsilon$ , on aura donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(\varepsilon)}}{A_n^{(\varepsilon)}} = 0 \quad \text{pourvu que } \theta \neq 2p\pi.$$

Par suite, la série (18), n'étant pas convergente, à l'indice non atteint 0.

<sup>1</sup> Bien entendu, on peut supposer  $\varepsilon < 1$ .

On peut facilement — soit dit en passant — se rendre compte que ce résultat implique ce fait utilisé précédemment, à savoir, que la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots\dots$$

est sommable  $(C, \varepsilon)$  et avec la valeur de sommabilité  $\frac{1}{2}$ ; car, si la série

$$\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots\dots,$$

— qui, étant convergente et de somme  $\frac{1}{2}$ , est sûrement sommable  $(C, \varepsilon)$  avec la valeur de sommabilité  $\frac{1}{2}$  — est ajoutée à la série (18), on obtient la série

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots\dots,$$

également sommable  $(C, \varepsilon)$  avec la valeur  $\frac{1}{2}$  pourvu que  $\theta \neq 2p\pi$ ; or, pour  $\theta = \pi$ , cette série se trouve identique à celle écrite ci-dessus. —

En remplaçant dans (18)  $\theta$  par  $(\pi - \theta)$ , on constatera immédiatement que la série

$$(20) \quad \frac{1}{2} - \cos \theta + \cos 2\theta - \cos 3\theta + \cos 4\theta \dots\dots$$

est également sommable  $(C, \varepsilon)$  avec la valeur 0 quand  $\theta \neq (2p + 1)\pi$ .

Multiplions maintenant (20) ( $\theta \neq (2p + 1)\pi$ ) par (8), nous obtiendrons la série

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta \right)$$

ou, si nous avons aussi  $\theta \neq 2p\pi$ :

$$(21) \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \sum_0^{\infty} (-1)^n \sin(2n + 1) \frac{\theta}{2}.$$

Le théorème de multiplication de CHAPMAN nous montre seulement que la série (21) est sommable  $(C, 1 + \varepsilon)$  et de valeur 0; mais il est facile de démontrer directement qu'elle est bien réellement sommable  $(C, \varepsilon)$  quand  $\theta \neq p\pi$ . A cet effet on peut, par exemple, procéder ainsi:

Remplaçons  $\theta$  par  $(\pi - \theta)$  dans la série (21), qui se transforme ainsi en

$$(22) \quad \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \sum_0^{\infty} \cos(2n+1) \frac{\theta}{2}.$$

Si maintenant nous pouvons démontrer que (22) soit sommable  $(C, \varepsilon)$  avec la valeur 0 pour  $\theta \neq p\pi$ , il est évident que (21) l'est aussi. Or, cette démonstration peut se faire par un procédé absolument identique à celui dont nous nous sommes servis à l'endroit de (18), en tenant compte de l'identité valable pour  $\theta \neq p\pi$ :

$$\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} + \dots + \cos(2n+1) \frac{\theta}{2} = \frac{\sin(n+1) \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

### § 3.

Dans le théorème IV les ordres de sommabilité  $r$  et  $s$  sont assujettis à la condition d'être l'un et l'autre plus grands que  $-1$ . Quand les deux ordres, ou même l'un d'entre eux seulement, sont inférieurs à  $-1$ , le dit théorème n'est plus nécessairement valable. On peut le démontrer facilement au moyen d'un exemple:

La série

$$(23) \quad \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^s}$$

est, comme CHAPMAN l'a montré<sup>1</sup>, affecté de l'indice non atteint  $-s$ . Nous supposons  $2 > s > 1$ ; en multipliant alors cette série par (8), nous obtiendrons la série

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

qui, si le théorème IV était valable, devrait être sûrement sommable  $(C, -s + \varepsilon + \varepsilon + 1) = (C, -s + 1 + 2\varepsilon)$ ,  $-1 < -s + 1 < 0$ ; or, il ne peut pas en être ainsi, vu que

<sup>1</sup> Proc. Lond. Math. Soc. (2), Vol. 9 (1911), page 397.

la série n'est pas même convergente, puisque les termes qui la constituent ne tendent pas vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

D'une manière générale, on a pu constater, comme l'on sait, que la sommabilité  $(C, r)$  présente des différences essentielles selon que  $r$  est plus grand ou plus petit que  $-1$ . Ainsi donc, l'exigence que l'ordre de sommabilité soit supérieur à  $-1$  constitue une condition essentielle pour les deux énoncés I et II (page 5) de CHAPMAN cités précédemment. — Au fait, ce qui a fait naître la théorie de sommabilité, c'est le désir de rendre les séries non convergentes utilisables dans l'analyse, et il n'est donc pas étonnant que dans le cours de son évolution on ait eu principalement en vue ces dernières séries, et cela même après avoir reconnu que la notion de sommabilité est aussi applicable aux séries convergentes. Aussi, alors qu'on a créé une théorie assez compréhensive concernant les séries sommables  $(C, r)$ ,  $r > -1$ , il a été, autant que je sais, presque complètement négligé de considérer la sommabilité  $(C, r)$  pour  $r < -1$ . C'est certainement là une limitation des recherches qui, toute naturelle qu'elle soit par rapport aux propriétés de la méthode de sommabilité employée, ne saurait dans le domaine étudié être considérée comme justifiée par la nature du sujet même, attendu qu'il est tout aussi raisonnable de chercher à établir une limite supérieure de l'ordre de la série produit lorsque les séries multipliées sont rapidement convergentes (ayant un ordre  $< -1$ ) que lorsqu'elles le sont lentement (étant d'ordre compris entre  $-1$  et  $0$ ) ou pas du tout (d'ordre positif).

#### § 4.

D'après ce qui précède, on verra qu'il y a pour le moins deux directions différentes dans lesquelles on peut chercher à compléter le théorème IV: on peut tâcher d'établir

1° des propositions susceptibles dans des cas particuliers de donner à l'ordre de la série produit une limite supérieure moins élevée que celle que comporte le théorème IV;

2° des propositions ayant trait à la multiplication par des séries affectées d'indices plus petits que  $-1$ .

Nous pouvons regarder comme des propositions supplémentaires de ce genre celles que CAUCHY et MERTENS<sup>1</sup> avaient avancées sur la multiplication des séries, bien longtemps avant que le théorème IV eût été énoncé; de plus, divers théorèmes de PRINGSHEIM<sup>2</sup>, VOSS<sup>3</sup>, CAJORI<sup>4</sup>, et d'autres<sup>5</sup>, théorèmes qui se rapportent à la question de savoir dans quel cas le produit de deux séries semi-convergentes est, lui aussi, une série convergente.

A ce propos, citons aussi un théorème de G. H. HARDY<sup>6</sup> dont voici l'énoncé:

V. Si  $\sum_0^{\infty} u_n$  est une série absolument convergente dont la somme soit  $u$ , et si, d'autre part,  $\sum_0^{\infty} v_n$  est une série oscillant entre des limites finies et dont les termes satisfassent à cette condition:

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0,$$

alors la série produit sera, elle aussi, oscil-

<sup>1</sup> Crelles Journal, Bd. 79 (1875), page 182.

<sup>2</sup> Mathematische Annalen, Bd. 21 (1883), pages 327—376, et Bd. 26 (1886), pages 157—166.

<sup>3</sup> Mathematische Annalen, Bd. 24 (1884), pages 42—47.

<sup>4</sup> American Journal of Mathematics, Vol. 15 (1895), pages 339—343.

<sup>5</sup> Pour ce qui concerne ces derniers énoncés, il est toutefois possible qu'ils soient impliqués dans le théorème IV; en effet, il se pourrait que celui-ci arrive à les rendre superflus, à la condition qu'on soit à même de déterminer l'état de sommabilité des séries en question. Mais, tant qu'on n'y sera pas parvenu, les énoncés susmentionnés auront leur importance à côté du théorème IV.

<sup>6</sup> Proc. Lond. Math. Soc. (2), Vol. 6 (1908) p. 420.

lante entre des limites finies, et cela de telle manière que ses limites d'oscillation seront  $ug_1$  et  $ug_2$ , si celles de la série  $\sum_0^{\infty} v_n$  sont  $g_1$  et  $g_2$ .

Ce théorème, qui comprend celui de MERTENS comme cas particulier, est pourtant en lui-même d'une validité assez restreinte, en ce sens qu'il ne s'applique qu'à des séries oscillant entre des limites finies; encore exige-t-il que la condition (24) soit remplie.

Les théorèmes que nous allons établir dans ce qui suit et qui, à leur tour, constituent des suppléments du genre en question du théorème de multiplication de CHAPMAN, pourront être considérés comme des extensions de celui-ci (et, par conséquent, de ceux dus à CAUCHY et à MERTENS) réalisées dans les cadres de la théorie de sommabilité.

VI. Si la série

$$(25) \quad \sum_0^{\infty} u_n$$

est sommable  $(C, r)$ ,  $r \geq 0$ , avec la valeur de sommabilité  $u$ , et si la série

$$(26) \quad \sum_0^{\infty} v_n$$

est absolument convergente, ayant la somme  $v$ , la série produite par leur multiplication:

$$\sum_0^{\infty} w_n = \sum_0^{\infty} (v_n u_0 + v_{n-1} u_1 + \dots + v_1 u_{n-1} + v_0 u_n),$$

se trouvera sûrement sommable  $(C, r)$  et aura la valeur de sommabilité  $u \cdot v$ .

Il est évident que, si la série (26) est affectée de l'indice  $-s > -1$ , ce théorème fournira, de l'ordre de sommabilité de la série produit, une détermination plus exacte que celle réalisée au moyen du théorème IV; car, puisque  $-s + 1 > 0$ ,

on a  $r < r - s + 1$ . — En outre, notre nouveau théorème trouve encore son application lorsque  $\sum v_n$  a un index inférieur à  $-1$ .

Pour en faire la démonstration, nous prendrons notre point de départ dans la formule (4). Multiplions les deux membres de cette équation par la série  $\sum_0^{\infty} v_n x^n$  absolument convergente pour  $|x| < 1$ ; nous aurons

$$(1-x)^{-(r+1)} \sum_0^{\infty} w_n x^n = \sum_0^{\infty} (v_n S_0^{(r)} + v_{n-1} S_1^{(r)} + \dots + v_1 S_{n-1}^{(r)} + v_0 S_n^{(r)}) x^n.$$

Il s'agit donc simplement de montrer que

$$(27) \quad C_n^{(r)} = \frac{v_n S_0^{(r)} + v_{n-1} S_1^{(r)} + \dots + v_1 S_{n-1}^{(r)} + v_0 S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} \\ = v_n \frac{A_0^{(r)}}{A_n^{(r)}} \cdot \frac{S_0^{(r)}}{A_0^{(r)}} + v_{n-1} \frac{A_1^{(r)}}{A_n^{(r)}} \cdot \frac{S_1^{(r)}}{A_1^{(r)}} + \dots + v_1 \frac{A_{n-1}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \cdot \frac{S_{n-1}^{(r)}}{A_{n-1}^{(r)}} + v_0 \frac{A_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} \cdot \frac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}}$$

a la valeur limite  $u \cdot v$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Si nous posons

$$(28) \quad \frac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} = u + \varepsilon_n,$$

il existe, puisque (25) est sommable  $(C, r)$ , un nombre positif  $K$  tel que

$$(29) \quad |\varepsilon_n| < K \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

et, en outre, un nombre positif  $N$  tel que

$$(30) \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon \quad \text{pour tous } n > N.$$

En appliquant (28), on peut transformer l'équation (27) en

$$(31) \quad C_n^{(r)} = u \left( v_n \frac{A_0^{(r)}}{A_n^{(r)}} + v_{n-1} \frac{A_1^{(r)}}{A_n^{(r)}} + \dots + v_1 \frac{A_{n-1}^{(r)}}{A_n^{(r)}} + v_0 \frac{A_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} \right) \\ = v_n \frac{A_0^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_0 + v_{n-1} \frac{A_1^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_1 + \dots + v_1 \frac{A_{n-1}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_{n-1} + v_0 \frac{A_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_n.$$

En vertu du théorème I, le facteur de  $u$  aura la valeur limite  $v$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi donc, si nous désignons le

second membre de l'égalité (31) par  $c_n^{(r)}$ , il ne s'agit que de démontrer que cette quantité a la valeur limite 0.

On a

$$(32) \quad c_n^{(r)} = v_0 \frac{A_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_n + v_1 \frac{A_{n-1}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_{n-1} + \dots + v_{P-1} \frac{A_{n-P+1}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_{n-P+1} \\ + v_P \frac{A_{n-P}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_{n-P} + \dots + v_{n-1} \frac{A_1^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_1 + v_n \frac{A_0^{(r)}}{A_n^{(r)}} \varepsilon_0.$$

Ici  $P$  doit représenter un nombre entier positif tel que

$$(|v_P| + |v_{P+1}| + \dots + |v_n|) < \varepsilon$$

pour toute valeur de  $n \geq P$ ; le fait que la série (26) est absolument convergente nous permet de déterminer un tel  $P$ ,

Si maintenant on se rappelle que, puisque  $r \geq 0$ , on a

$$\frac{A_{n-\nu}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \leq 1, \text{ pour } 0 \leq \nu \leq n \text{ et toute valeur de } n,$$

l'application de (29) et de (30) permet de tirer de (32) que

$$|c_n^{(r)}| < (|v_0| + |v_1| + \dots + |v_{P-1}|) \cdot \varepsilon + K \cdot \varepsilon,$$

pourvu que  $n$  ait été choisi tel que  $n - P + 1 > N$ . En

désignant par  $V_1$  la somme de la série convergente  $\sum_0^\infty |v_n|$ , nous aurons pour toutes valeurs suffisamment grandes de  $n$

$$|c_n^{(r)}| < (V_1 + K) \cdot \varepsilon,$$

ce qui montre précisément que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(r)} = 0.$$

L'indice de la série produit est-il toujours déterminé par ce théorème? Qu'il en soit parfois ainsi, c'est ce que nous pouvons facilement démontrer par des exemples: Multiplions

une série absolument convergente de la forme  $\sum_0^\infty (-1)^n v_n$  où  $v_n$  est positif pour tout  $n$ , la série étant d'ailleurs arbitraire, par une série  $\sum_0^\infty (-1)^n u_n$  affectée de l'indice  $s > 0$

et ayant  $u_n$  positif pour tout  $n$ , tandis que

$$\frac{u_n}{n^{s-\varepsilon}} \quad \text{ou} \quad \frac{u_n}{n^s}$$

(selon que  $s$  est indice atteint ou indice non atteint) ne tend pas vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , si petit que soit  $\varepsilon$  (on peut employer, par exemple, la série  $\sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(s)}$ ). La série produit sera

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n (v_0 u_n + v_1 u_{n-1} + \dots + v_{n-1} u_1 + v_n u_0)$$

qui, en vertu du théorème VI, est sommable, respectivement,  $(C, s)$  ou  $(C, s + \varepsilon)$ ; or, par suite de la supposition ci-dessus indiquée, relative à  $u_n$ , cette série ne peut cependant pas être sommable respectivement  $(C, s - \varepsilon)$  ou  $(C, s)$ ; donc, son indice (respectivement atteint ou non atteint) se trouve être précisément  $s$ .

D'un autre côté, il est tout aussi facile de donner des exemples — comme cela était à attendre d'ailleurs — où l'indice de la série produit n'est point déterminé par le théorème VI. C'est ainsi que la multiplication faite à la page 15:

$$\left( \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(s)} \right) \cdot \left( \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r)} \right) = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(r+s+1)}$$

fournit la preuve immédiate de cette affirmation quand on choisit  $r > 0$  et  $s < -r - 1$ . —

Nous avons dans le théorème VI supposé  $r \geq 0$ , condition sans laquelle il n'est plus nécessairement valable. Qu'il en soit bien réellement ainsi, c'est ce que montre l'exemple suivant :

Multiplions la série semi-convergente

$$(33) \quad \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-s)} \quad (0 < s < 1)$$

affectée de l'indice  $-s$ , par l'une des séries absolument convergentes données aux pages 16—17 et dont l'indice est 0.

La série produit sera

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} w_n,$$

$w_n$  étant égal à

$$|u_n|A_0^{(-s)} + |u_{n-1}|A_1^{(-s)} + \dots + |u_2|A_{n-2}^{(-s)} + |u_1|A_{n-1}^{(-s)},$$

où tous les termes sont positifs ou nuls.

Cette série produit, contrairement à la série (33), ne présente pas l'indice non atteint  $-s$ , mais bien l'indice atteint 0. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut (p. 17), elle est convergente, et l'on s'apercevra immédiatement qu'elle n'est sommable  $(C, -\varepsilon)$  pour aucune valeur, si petite soit-elle, de  $\varepsilon$ ; car le premier terme de  $w_{[e^p]}$  étant en vertu de (17a)  $\frac{1}{p^{1+\delta}}$ , on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{w_{[e^p]}}{[e^p]^{-\varepsilon}} = \lim_{p \rightarrow \infty} [e^p]^{\varepsilon} w_{[e^p]} = \infty$$

alors que d'après le théorème II cette valeur limite devrait être 0, si la série en question était sommable  $(C, -\varepsilon)$ .

### § 5.

Avant d'aborder l'examen des faits valables pour  $r < 0$ , il convient de démontrer quelques théorèmes dont nous aurons besoin.

VII. A supposer que les termes composant la série

$$(34) \quad \sum_0^{\infty} v_n$$

satisfassent à la condition

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^s v_n = 0, \quad \text{où } s > 1,$$

cette série sera sommable  $(C, -s + \delta)$  pour toute valeur de  $\delta \geq 0$ , sauf bien entendu pour

les valeurs entières négatives de  $(-s + \delta)$ ; la somme de la série représentera sa valeur de sommabilité.

Ce résultat a déjà été avancé — sans preuve toutefois — par CHAPMAN (l'ouvrage cité, p. 406), sous une forme légèrement différente. Comme cependant nous aurons lieu d'utiliser le théorème à plusieurs reprises dans la suite, nous croyons devoir en faire la démonstration ici.

Étant donné que  $s > 1$ , il est évident d'après (35) que  $\sum v_n$  est (absolument) convergent; donc  $\sum_0^n v_\nu$  tend vers une limite déterminée (formée par la somme de la série) quand  $n \rightarrow \infty$ . Nous avons donc seulement à montrer que

$$\begin{aligned} & c_n^{(-s+\delta)} \\ = & \frac{v_n A_0^{(-s+\delta)} + v_{n-1} A_1^{(-s+\delta)} + \dots + v_1 A_{n-1}^{(-s+\delta)} + v_0 A_n^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ = & \sum_0^n v_{n-\nu} \left( \frac{A_\nu^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - 1 \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pour toute valeur de  $\delta \geq 0$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .

A cet effet, décomposons  $c_n^{(-s+\delta)}$  en trois parties:

$$c_n^{(-s+\delta)} = \sum_0^n v_{n-\nu} \left( \frac{A_\nu^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - 1 \right) = \sum_0^{n-m} v_\nu + \sum_{n-m+1}^{n-P-1} v_\nu + \sum_{n-P}^n v_\nu;$$

ici,  $m = \left[ \frac{n}{2} \right]$ , et  $P$  est un nombre entier positif, dont nous indiquerons tout à l'heure la détermination. Désignons par  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  les sommes dans lesquelles nous avons partagé  $c_n^{(-s+\delta)}$ .

Si pour  $n \geq 1$  nous posons

$$(36) \quad v_n = \frac{\varepsilon_n}{n^s},$$

il résulte de (35) qu'il existe une constante positive  $K$  telle que

$$(37) \quad |\varepsilon_n| < K \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots,$$

et, de plus, un nombre entier positif  $N$  tel que

$$(38) \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon \quad \text{pour tous } n \geq N.$$

En appliquant maintenant (36), on a

$$A_n = \sum_0^{n-m} \frac{\varepsilon_{n-\nu}}{(n-\nu)^s} \left( \frac{A_\nu^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - 1 \right);$$

tenant compte ensuite de (38), on aura pour tous  $n \geq 2N$ :

$$|A_n| \leq \varepsilon \left( \frac{\sum_0^{n-m} |A_\nu^{(-s+\delta)}|}{m^s |A_n^{(-s+\delta)}|} + \frac{(n-m+1)}{m^s} \right);$$

or, ayant, d'après ce que nous avons fait observer en 2°, page 5,

$$\sum_0^{n-m} |A_\nu^{(-s+\delta)}| = \left| \sum_0^{n-m} A_\nu^{(-s+\delta)} \right| + G = |A_{n-m}^{(-s+1+\delta)}| + G,$$

$G$  étant une constante (qui est nulle quand  $-s+\delta > -1$ ), il ressort, puisque  $s > 1$ , immédiatement de l'inégalité ci-dessus indiquée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0.$$

Ensuite on voit facilement (comp. (15)) que pour  $n$  assez grand on a

$$\left| \frac{A_\nu^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} \right| < K_1$$

pour  $n - P - 1 \geq \nu \geq n - m + 1$  et tous  $\delta \geq 0$ ,  $K_1$  étant une constante positive.

De là il résulte que

$$|B_n| < \sum_{n-m+1}^{n-P-1} |v_{n-\nu}| (K_1 + 1);$$

or, attendu que  $\sum_0^\infty v_n$  est absolument convergente, on peut déterminer le nombre entier positif  $P$  de telle sorte que

$$\sum_{n-m+1}^{n-P-1} |v_{n-\nu}| = \sum_{P+1}^{m-1} |v_\nu| < \varepsilon$$

pour toute valeur de  $n$  où  $m-1 \geq P+1$ ; donc, pour des valeurs suffisamment grandes de  $n$ , on a

$$|B_n| < (K_1 + 1) \varepsilon.$$

De plus, pour la valeur ci-dessus employée de  $P$  et pour  $0 \leq \nu \leq P$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n-\nu}^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} = 1,$$

d'où il résulte que, pour des valeurs suffisamment grandes de  $n$ , on aura

$$|C_n| \leq \sum_{n-P}^n |v_{n-\nu}| \left| \frac{A_\nu^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - 1 \right| = \sum_0^P |v_\nu| \left| \frac{A_{n-\nu}^{(-s+\delta)}}{A_n^{(-s+\delta)}} - 1 \right| < \varepsilon \sum_0^P |v_\nu|.$$

Donc, pour tous  $n$ , à partir d'un certain degré:

$$|B_n + C_n| \leq |B_n| + |C_n| < \varepsilon \left( K_1 + 1 + \sum_0^P |v_\nu| \right),$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n + C_n) = 0.$$

La condition (35) est, selon ce théorème même, suffisante pour entraîner la sommabilité  $(C, -s)$  de la série (34) (et, de plus, la sommabilité  $(C, -s')$  pour tout  $s'$  pour lequel  $-s' > -s$ ). Cependant remarquons que pour cela la condition indiquée n'est nullement nécessaire. Ceci résulte des faits suivants:

La série

$$(39) \quad \sum_0^\infty A_n^{(-r)}, \quad r > 1$$

est sommable  $(C, -\rho)$  pour toute valeur  $-\rho$  sauf bien entendu pour les valeurs entières négatives  $-\rho$  avec la valeur de sommabilité 0. En effet, à cause de (5) on a

$$\frac{A_n^{(-r)} A_0^{(-\rho)} + A_{n-1}^{(-r)} A_1^{(-\rho)} + \dots + A_1^{(-r)} A_{n-1}^{(-\rho)} + A_0^{(-r)} A_n^{(-\rho)}}{A_n^{(-\rho)}} = \frac{A_n^{(-r-\rho+1)}}{A_n^{(-\rho)}};$$

or, cette quantité tend vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , pourvu que

$$-r - \rho + 1 < -\rho,$$

autrement dit: à la condition que  $-r < -1$  ou  $r > 1$ , condition qui se trouve remplie quelle que soit la valeur de  $\rho$ . Toutefois, on n'a pas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\rho A_n^{(-r)} = 0$$

quand  $\rho \geq r$ .

De plus, nous remarquons que le théorème VII nous conduit à une proposition analogue à l'énoncé I de Chapman. Effectivement, notre théorème implique la proposition que voici:

VIII. Si la série  $\sum_0^\infty v_n$  est sommable  $(C, -s)$ ,  $s > 1$ ,

et que la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^s v_n = 0$$

soit remplie, la série se trouvera aussi sommable  $(C, -s')$  avec la même valeur de sommabilité, pourvu que  $-s' > -s$ .

Nous pouvons ensuite établir la proposition suivante:

IX. Au cas où la série à termes positifs  $\sum_0^\infty |v_n|$  est sommable  $(C, -s)$ ,  $0 < s < 1$ , la série  $\sum_0^\infty v_n$  le sera aussi.

En vertu du théorème I,  $\sum_0^\infty |v_n|$  est convergente, et la valeur de sommabilité de cette série égale sa somme. Posons

$$C_n^{(-s)} = \frac{|v_n| A_0^{(-s)} + |v_{n-1}| A_1^{(-s)} + \dots + |v_1| A_{n-1}^{(-s)} + |v_0| A_n^{(-s)}}{A_n^{(-s)}};$$

nous aurons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n^{(-s)} - (|v_n| + |v_{n-1}| + \dots + |v_1| + |v_0|)) = 0$$

ou, introduisant une désignation nouvelle,

$$(40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(-s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_n|(A_0^{(-s)} - A_n^{(-s)}) + |v_{n-1}|(A_1^{(-s)} - A_n^{(-s)}) + \dots + |v_1|(A_{n-1}^{(-s)} - A_n^{(-s)})}{A_n^{(-s)}} = 0.$$

Nous avons à démontrer que

$$C_n^{(-s)} = \frac{v_n A_0^{(-s)} + v_{n-1} A_1^{(-s)} + \dots + v_1 A_{n-1}^{(-s)} + v_0 A_n^{(-s)}}{A_n^{(-s)}}$$

a la valeur limite  $\sum_0^n v_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Nous pouvons de suite former l'équation

$$(41) \quad D_n^{(-s)} = C_n^{(-s)} - C_n'^{(-s)} = \frac{(|v_n| - v_n)A_0^{(-s)} + (|v_{n-1}| - v_{n-1})A_1^{(-s)} + \dots + (|v_1| - v_1)A_{n-1}^{(-s)} + (|v_0| - v_0)A_n^{(-s)}}{A_n^{(-s)}}.$$

Posons

$$(42) \quad \begin{cases} u_p = 0, & \text{quand } v_p \text{ est positif,} \\ u_p = |v_p|, & \text{quand } v_p \text{ est négatif;} \end{cases}$$

nous aurons

$$\frac{1}{2} D_n^{(-s)} = \frac{u_n A_0^{(-s)} + u_{n-1} A_1^{(-s)} + \dots + u_1 A_{n-1}^{(-s)} + u_0 A_n^{(-s)}}{A_n^{(-s)}}$$

et, par suite:

$$(43) \quad c_n'^{(-s)} = \left( \frac{1}{2} D_n^{(-s)} - \sum_0^n u_\nu \right) = \frac{u_n(A_0^{(-s)} - A_n^{(-s)}) + u_{n-1}(A_1^{(-s)} - A_n^{(-s)}) + \dots + u_1(A_{n-1}^{(-s)} - A_n^{(-s)})}{A_n^{(-s)}}.$$

Or, attendu que  $A_\nu^{(-s)}$  est positif pour tout  $\nu$  et décroissant lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ , il est immédiatement évident que la quantité positive

$$c_n'^{(-s)} \leq c_n^{(-s)},$$

d'où (40) nous permet de déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n'^{(-s)} = 0,$$

ce qui d'après (43) revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{(-s)} = 2 \sum_0^{\infty} u_n,$$

de sorte que, en vertu de (41),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^{(-s)} = \sum_0^{\infty} |v_n| - 2 \sum_0^{\infty} u_n = \sum_0^{\infty} v_n. \quad (\text{Comp. (42)}).$$

Il résulte du théorème VII que l'égalité que nous venons d'établir est encore valable pour  $s > 1$ , pourvu que la condition (35) soit remplie; car il en suit que  $\sum_0^{\infty} |v_n|$  aussi bien que  $\sum_0^{\infty} v_n$  sont sommables  $(C, -s)$ . Que la condition (35) ne soit pas sans importance pour la validité de l'énoncé ainsi élargi, on le voit par l'exemple suivant: La série  $\sum_0^{\infty} |A_n^{(-r)}|$ , où le nombre non entier  $r$  a été choisi de façon à ce que  $[r] = 2p$ ,  $p$  étant entier positif, ne se distingue de la série  $\sum_0^{\infty} A_n^{(-r)}$  qu'en ce que  $(p+1)$  des  $(2p+2)$  premiers termes sont de signe opposé. Or, on voit immédiatement qu'un changement apporté à un nombre fini des premiers termes d'une série sommable n'a point pour effet d'en changer l'ordre de sommabilité; par conséquent, d'après ce que nous avons démontré à la page 30 relativement à la série  $\sum_0^{\infty} A_n^{(-r)}$ , la série  $\sum_0^{\infty} |A_n^{(-r)}|$  doit être sommable  $(C, -\rho)$  pour toute valeur de  $\rho$  (sauf bien entendu pour celles qui sont entières négatives); donc elle est spécialement sommable  $(C, -r)$ . Ici on n'a pas  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r A_n^{(-r)} = 0$ ; aussi, la série  $\sum_0^{\infty} (-1)^n A_n^{(-r)}$  n'est pas sommable  $(C, -r)$ . (Comp. p. 9).

## § 6.

Pour terminer, nous allons démontrer le théorème suivant relatif à la multiplication de séries convergentes:

X. Si  $\sum_0^{\infty} |v_n|$  est sommable  $(C, -s)$  et que  $\sum_0^{\infty} u_n$  soit sommable  $(C, -r)$ ,  $0 \leq s < 1$  et  $0 < r < 1$ , la série produite par la multiplication de ces deux séries:  $\sum_0^{\infty} w_n$  sera sûrement sommable  $(C, -p)$ , où  $p$  représente le plus petit des deux nombres  $r$  et  $s$ ; quand  $r = s$ , on aura aussi  $p = r = s$ . L'énoncé conservera sa validité même si  $s$  ou  $r$  ou tous les deux dépassent 1, pourvu que, respectivement,

$$(44) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^s v_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^r u_n = 0$$

ou que les deux équations aient lieu à la fois.

En outre, la valeur de sommabilité de la série produit est égale au produit des valeurs de sommabilité des séries facteurs.

On se rend compte que dans le cas où il s'agit de la multiplication de séries absolument convergentes, telles que  $\sum_0^{\infty} v_n$  et  $\sum_0^{\infty} u_n$ , dont les termes satisfont à la condition (44) pour des valeurs de  $s$  et  $r$  où  $s > 1$  et  $r > 1$ , l'énoncé que nous venons de formuler nous fournit immédiatement une limite supérieure de l'ordre de sommabilité de la série produit sans qu'il soit nécessaire d'examiner l'état de sommabilité des séries facteurs: étant donné, en effet, qu'en vertu du théorème VII la condition (44) a pour conséquence que non seulement  $\Sigma v_n$  et  $\Sigma u_n$  mais encore  $\Sigma |v_n|$  et  $\Sigma |u_n|$  sont sommables  $(C, -s)$  et  $(C, -r)$  respectivement, l'énoncé sus-indiqué nous permet de conclure immédiatement que la

série produit est sûrement sommable  $(C, -p)$ , où  $p$  est le plus petit des deux nombres  $r$  et  $s$ .

Pour démontrer le théorème X, nous suivrons un procédé sensiblement pareil à celui adopté pour le théorème VI, et, pour plus de clarté, il conviendra de diviser la démonstration en deux parties selon que  $r$  est supérieur ou non à  $s$ .

1° Commençons par les cas où

$$r \leq s.$$

De la même manière que dans la démonstration à laquelle nous venons de faire allusion, on trouve que (pour  $|x| < 1$ )

$$\begin{aligned} & (1-x)^{-r+1} \sum_0^{\infty} w_n x^n \\ &= \sum_0^{\infty} (v_n S_0^{(-r)} + v_{n-1} S_1^{(-r)} + \dots + v_1 S_{n-1}^{(-r)} + v_0 S_n^{(-r)}) x^n \end{aligned}$$

et l'on aura donc simplement à prouver que

$$\begin{aligned} (45) \quad C_n^{(-r)} &= v_n \frac{A_0^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \cdot \frac{S_0^{(-r)}}{A_0^{(-r)}} + v_{n-1} \frac{A_1^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \cdot \frac{S_1^{(-r)}}{A_1^{(-r)}} + \dots \\ &+ v_1 \frac{A_{n-1}^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \cdot \frac{S_{n-1}^{(-r)}}{A_{n-1}^{(-r)}} + v_0 \frac{S_n^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \end{aligned}$$

a la valeur limite  $u \cdot v$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Puisque  $\sum u_n$  est sommable  $(C, -r)$  et de valeur  $u$ , on peut, en posant

$$\frac{S_n^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} = u + \varepsilon_n,$$

déterminer un nombre entier positif  $P$  tel, que

$$(46 a) \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon \text{ pour tous } n \geq P.$$

De plus, il existe une constante  $K$  telle que

$$(46 b) \quad |\varepsilon_n| < K \text{ pour tout } n.$$

$\sum v_n$  est sommable  $(C, -s)$  d'après le théorème IX quand  $s < 1$ , et d'après le théorème VII quand  $s > 1$ ; donc  $\sum v_n$

est aussi sommable  $(C, -r)$ , en vertu des théorèmes respectivement I et VIII.

Cela étant, (45) donnera

$$C_n^{(-r)} = u \cdot V_n + c_n^{(-r)},$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = v$$

et

$$c_n^{(-r)} = v_n \frac{A_0^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \varepsilon_0 + v_{n-1} \frac{A_1^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \varepsilon_1 + \cdots + v_1 \frac{A_{n-1}^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \varepsilon_{n-1} + v_0 \cdot \varepsilon_n.$$

Or, comme en vertu du théorème II ou de (44)

$$(n - \nu)^s v_{n-\nu} \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\nu$  restant constant, il existe un  $N$  tel, que

$$|v_{n-\nu}| < \frac{\varepsilon}{(n-\nu)^s} \text{ pour toute valeur de } n > N \text{ et } \nu \leq P.$$

En appliquant aussi (46 b), on aura alors

$$|c_n^{(-r)}| < \frac{\varepsilon K (|A_0^{(-r)}| + |A_1^{(-r)}| + \cdots + |A_P^{(-r)}|)}{(n-P)^s |A_n^{(-r)}|} \\ + \varepsilon \left( |v_{n-P-1}| \left| \frac{A^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \right| + \cdots + |v_1| \left| \frac{A^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \right| + |v_0| \right),$$

d'où, en utilisant (7):

$$(47) \quad |c_n^{(-r)}| < \varepsilon \frac{K_1 n^r}{(n-P)^s} + \varepsilon \sum_0^n |v_\nu| \left| \frac{A^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \right|.$$

$\sum_0^\infty |v_n|$ , sommable  $(C, -s)$ , est d'après les théorèmes I ou VIII aussi sommable  $(C, -r)$ , de sorte que, en posant

$$\nu_n = \sum_0^n |v_\nu| \frac{A^{(-r)}}{A_n^{(-r)}},$$

nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \sum_0^\infty |v_n|;$$

or, vu que

$$\left| \frac{A_\nu^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \right| = \frac{A_\nu^{(-r)}}{A_n^{(-r)}} \text{ pour } n > \nu > [r],$$

il est évident que la différence entre  $\nu_n$  et la somme faisant partie de (47) est numériquement inférieure à une constante déterminée  $k$  si grand que soit  $n$ , en sorte que, pour des valeurs suffisamment grandes de  $n$ , on aura

$$|c_n^{(-r)}| < \varepsilon \left( \frac{K_1 n^r}{(n-P)^s} + \sum_0^\infty |v_n| + k \right)$$

inégalité qui, dans la supposition considérée ( $r$  au plus égal à  $s$ ), montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(-r)} = 0.^1$$

2°  $r > s$ .

En multipliant par  $\sum_0^\infty v_n x^n$  cette équation valable pour  $|x| < 1$ :

$$(1-x)^{-s+1} \sum_0^\infty u_n x^n = \sum_0^\infty S_n^{(-s)} x^n$$

on a

$$\begin{aligned} & (1-x)^{-s+1} \sum_0^\infty w_n x^n \\ &= \sum_0^\infty (v_n S_0^{(-s)} + v_{n-1} S_1^{(-s)} + \dots + v_1 S_{n-1}^{(-s)} + v_0 S_n^{(-s)}) x^n. \end{aligned}$$

Nous avons donc à prouver que

$$(48) \quad C_n^{(-s)} = \sum_0^n v_\nu \frac{A_{n-\nu}^{(-s)}}{A_n^{(-s)}} \cdot \frac{S_{n-\nu}^{(-s)}}{A_{n-\nu}^{(-s)}}$$

à la valeur limite  $u \cdot v$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

<sup>1</sup> Ainsi qu'il ressort de la démonstration ci-dessus, la condition  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r u_n = 0$  est, à vrai dire, superflue dans le cas considéré. Il n'en est plus ainsi dans le second cas, que nous allons étudier; la façon dont le théorème X se trouve formulé au début du présent paragraphe a été dictée par le désir de simplifier.

Etant donné que la série  $\Sigma u_n$  est sommable  $(C, -r)$  et de valeur  $u$ , elle est aussi — en vertu des théorèmes I ou VIII — sommable  $(C, -s)$  et de la même valeur de sommabilité. Posant

$$\frac{S_n^{(-s)}}{A_n^{(-s)}} = u + \varepsilon_n,$$

nous aurons en vertu de (48)

$$C_n^{(-s)} = u \cdot V_n + c_n^{(-s)},$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = v,$$

et

$$c_n^{(-s)} = \sum_0^n v_\nu \frac{A_{n-\nu}^{(-s)}}{A_n^{(-s)}} \cdot \varepsilon_{n-\nu}.$$

Or, étant donné que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \cdot n^s = 0,$$

on peut, en employant exactement le même procédé que celui utilisé en 1°, se convaincre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(-s)} = 0,$$

de sorte que, ici encore, on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^{(-s)} = u \cdot v.$$

Pour terminer, nous ferons seulement observer que le théorème établi en dernier lieu ne fournit pas toujours, lui non plus, le meilleur renseignement possible sur l'ordre de sommabilité de la série produit. Pour le mettre en évidence par un exemple, nous aurons recours derechef à la multiplication faite p. 15. Celle-ci, en effet, le montre immédiatement, si nous choisissons  $r$  et  $s$  de façon à ce que ni aucun de ces deux nombres ni leur somme additionnée de 1 ne

soient des nombres entiers négatifs, et que, en outre (par exemple)

$$s < r < -1;$$

car, en ce cas, l'indice non atteint de la série produit  $(r + s + 1)$  sera inférieur à  $s$ , donc plus petit que les indices non atteints des deux séries facteurs.

Copenhague, 20 janvier 1917.

*A. F. Andersen.*

