Geometriske Opgaver

og Arithmetiske Opgaver

II Klasse.

Spang

B

Jorlen.

IIden 4 Klasse

Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen i December 1885.

af

N. L. Christensen.

Afl. Kl. 7.

N:1

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket 2 Tangenter. Angiv og bevis, igjennem hvilke Punkter, hörende til Cirklen, Tangentvinkelens Halveringslinje gaar.
Naar Tangentvinklen er $n°$, Hvor store blive saa de Buer, hvori Cirklen deles, ved Beröringspunkterne og Skjæringspunkterne med Halveringslinjen?

Tangentvinklers Halveringslinje gaar igjennem Centrum.

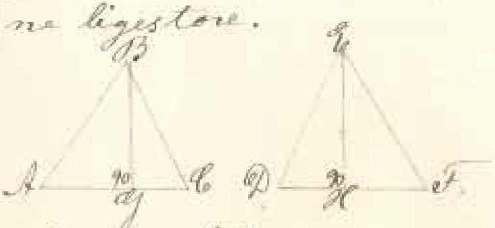
Buerne blive $90 ÷ \frac{1}{2}n$, $90 ÷ \frac{1}{2}n$, $180 ÷ \frac{1}{2}n$ og $180° ÷ 1/2n$, fordi Tangentvinklens ∠ maales ved at man trækker dens mindste Bues Gradeantal fra 180°.

No 2.

Konstruer en Trekant af to Sider og Höjden paa den tredje Side.

No 3.

Bevis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Höjden paa denne ligestore.



△ ABG ≅ med △ DEH fordi de have ∠ GAB = ∠ HDE (givet), ∠ AGB = ∠ DHE, AB = DE. Siden AC = DF (givet). Altsaa naar AG = DH maa GC = HF. △ BGC ≅ HEF.

II. Klasse

Geometriske Opgaver

til

Halvaarsexamen 1885.

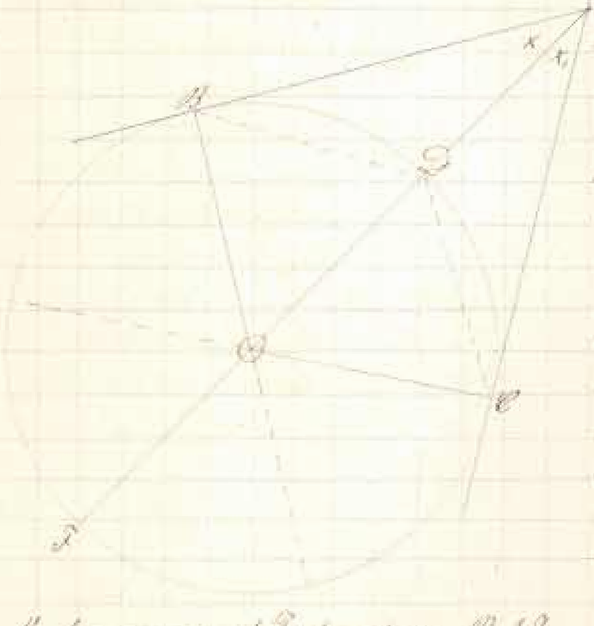
af

A. Kjelst.

Afl. Kl. 5,45

№ 1.

Til en Cirkel er fra et Punkt A trukket 2 Tangenter. Angiv og bevis, igjennem hvilke Punkter, hørende til Cirklen, Tangentvinklens Halveringslinje gaar. Naar Tangentvinklen er 60°, hvor store blive da de fire Buer, hvori Cirklen deles ved Berøringspunkterne og Skjæringspunkterne med Halveringslinjen.



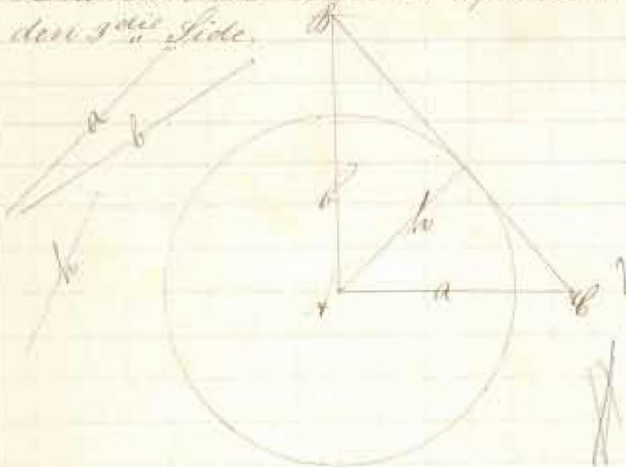
Tangentvinklens Halveringslinje gaar igjennem Cirklens Centrum; Thi Trekanterne BAO og CAO ere kongruente, thi de have to Sider og den mellemliggende Vinkel stykkeviis ligestore.
Tangentvinklens Halveringslinje halverer $\angle BDC$. Man har trukket Linjer fra B og C op til Punktet D, hvor Tangentvinklens Halveringslinje skærer $\frown BC$.

Nu faar man at Trekanterne BAD og CAD ere kongruente, thi de have 2 Sider og den mellemliggende Vinkel stykkeviis ligestore, derved bliver $BD = DC$, de ere Korder i Cirklen, og til ligestore Korder svarer ligestore Buer. — Tang. Halveringslinje halverer ogsaa $\frown BFC$, thi naar $\frown BD = \frown DC$, saa maa $\frown BF$ være lig $\frown CF$, det er fordi Tang. Halveringslinje gaar igjennem Centrum, og deler Cirklen i 2 ligestore Dele. — Man forlænger nu BO og CO ud til Cirkelperiferien, derved faar man 6 Vinkler, som alle ere ligestore altsaa hver 60°. Nu bliver $\frown BD = 60°$, $\frown DC = 60°$, $\frown CF = 120°$ og $\frown FB = 120°$, fordi Centervinkler maales ved deres Buer.

Mangler
Ex: $\angle A =$ [illegible]

No. 2.

Konstruer en Trekant af 2 Sider og Højden paa den 2den Side.



Først tegner man Siden a og i et af dens Endepunkter, slaar man en Cirkel med Højden til Radius og a's Endepunkt til Centrum. Derpaa trækker man en Tangent fra a's andet Endepunkt og forlænger den. Nu tager man b i Passeren og sætter dets ene Endepunkt i det af a's Endepunkter, hvor man tog Centrum til Cirklen, og slaar en Bue, og hvor den skærer Tangenten, bliver det tredje Punkt; og nu har man Trekanten ABC, som er den søgte.

+2.

No. 3.

Bevis at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Højden paa denne ligestore.

Trekanterne ABD og EFH ere kongruente, fordi de have en Side den hosliggende og den modstaaende Vinkel stykkevis ligestore. Trekanterne BDC og FHG ere kongruente, fordi de have 2 Sider og den mellemliggende Vinkel stykkevis ligestore, DC = HG, fordi at AD = EH, og der er givet at ~~a~~ b = b

Da nu Trekanterne: ABD ≅ EFH

BDC ≅ FHG

dette adderer man og faar at △ ABC ≅ △ EFG.

A. Kyllet.

Kl

Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen

Alfred Filskov

II Klasse

No. 1

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket to Tangenter. Angiv og bevis, gjennem hvilke Punkter, hörende til Cirklen, Tangentvinklens Halveringslinie gaar. Naar Tangentvinklen er n°, hvorstore blive da de fire Buer, hvori Cirklen deles ved Beröringspunkterne og Skæringspunkterne med Halveringslinien?

Tangentvinklens Halveringslinie gaar:

1) gjennem Centrum; thi △ aAC er ≅ △ aBC, fordi ∠ CAa = ∠ CBa = 90, Aa = Ba, og Ca er fælles (Ca > aC).

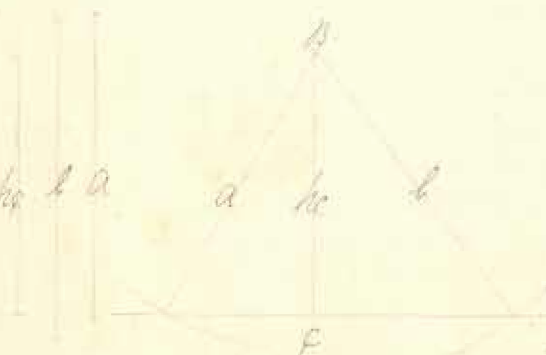
2) gjennem Midtpunktet af AB; thi △ AOC ≅ BOC, fordi de have 2 Sider og den indsluttede Vinkel lige store. aC staar nemlig vinkelret paa AB, thi i en ligebenet Trekant falder Höjden sammen med Halveringslinien. 3) gjennem Midtpunktet af de to

Buer AB = $\smile$ AC = CB; thi $\angle a = \angle b$. AD = DB; thi AD = 180 − AC, og BD = 180 ÷ BC. Da nu AC og BC ere ligestore, maa ogsaa AD og BD være ligestore.

Naar $\angle a = n^\circ$, maa Vinklerne ved Grundlinien i den ligebenede Trekant hver blive $90 \div \frac{1}{2}n^\circ$. Hele $\smile$ AB er da $180 \div n$, og $\smile$ AC $90 \div \frac{1}{2}n$. Den halve Forskjel mellem $\smile$ AC og $\smile$ AD er $\frac{1}{2}n^\circ$, den hele n°; altsaa maa AD være $90 - \frac{1}{2}n + n = 90 + \frac{1}{2}n^\circ$. Ligesaastor er $\smile$ DB.

№ 2.

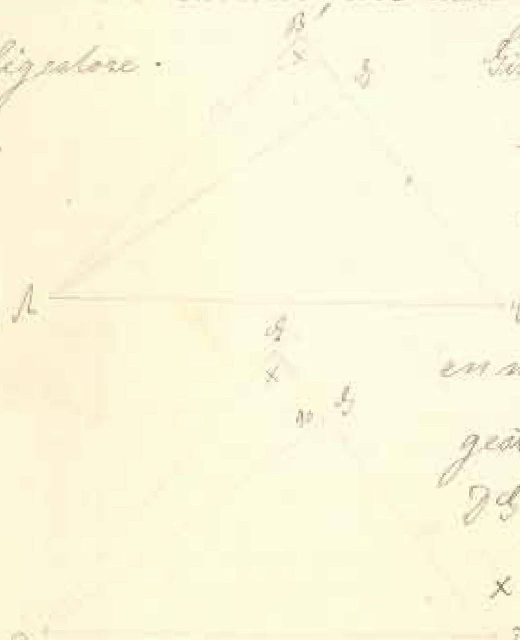
Konstruere en Trekant af 2 Sider og Höjden paa den 3die.



Man tegner en vilkaarlig Linie c. I et vilkaarligt Punkt af denne oprejser man den givne Höjde. Det geometriske Sted for de Punkter, der ligge i en given Afstand fra et givet Punkt, er en Cirkel med det givne Punkt til Centrum og den givne Afstand til Radius. Man slaar da Buer med de to givne Linier a og b til Radier og Punktet B til Centrum. Disse Buers Skæringspunkter med c betegne de søgte Vinkelspidse, og Trekanten er konstrueret.

No 3.

Bevis, at 2 Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Höjden paa denne ligestore.



Givet: $BC = EF$, $AG = DG$, og $x = x$

Man har, at $\Delta\ ABG \cong DEG$; thi de have en Side, en hosliggende og en modstaaende Vinkel ligestore. AD er nemlig lig DG; $\angle AGB = \angle DGE = 90°$, $x = x$. Der er ogsaa givet, at $BC = EF$; naar nu $BG = EG$, maa ogsaa GC være lig GF. Heraf faar man, at $\Delta\ AGC \cong DGF$; thi de have 2 Sider og den indesluttede Vinkel ligestore.

Naar nu Δ ABG $\cong$ DEG, og Δ AGC $\cong$ DGF, saa maa ogsaa ABC være $\cong$ DEF.

II. Klasse.

Geometriske Opgaver

ved

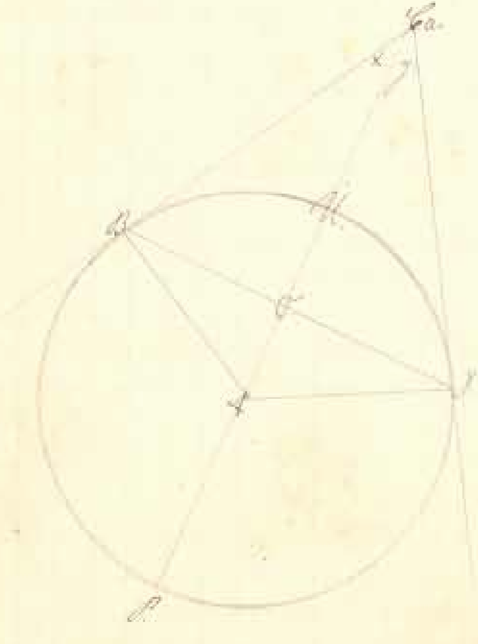
Halvaarsexamen 1885.

N. Linnet.

Aft. Kl. 7.

N° 1.

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukken 2 Tangenter. Angiv og bevis gjennem hvilke Punkter, hörende til Cirklen, Tangentvinklens Halveringslinie gaar. Naar Tangentvinklen er n°, hvor store blive da de fire Buer hvori Cirklen deles ved Beröringspunkterne og Skjæringspunkterne med Halveringslinien?



I. Tangentvinklens Halveringslinie gaar igjennem Centrum.

Bevis!

Man trækker to Radier til Røringspunkterne, og tænker sig Opgaven som løst. Man beviser derpaa at △ ABC ≅ △ ADC. AC = AC, BC = CD fordi Tangentvinklens Ben ere lige lange regnede fra Toppunktet til Røringspunktet. ∠B = ∠D, fordi Radius staar vinkelret paa Tangenten til Røringspunktet, altsaa ere Trekanterne kongruente, og CO vil da nødvendigvis gaa igjennem Centrum.

II. Den halverer den Korde der forbinder Røringspunkterne

Bevis!

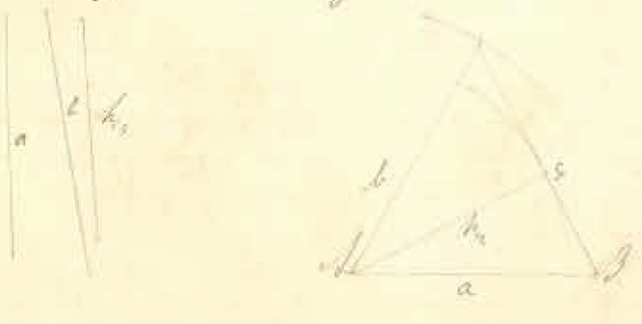
Man beviser at BO = OD. △ OBC er nemlig kongruent med △ OCD. $\overline{CB} = \overline{CD}$, $\overline{CO} = \overline{CO}$. ∠x = ∠y, da ∠a er halveret

III. Da den halverer $\overline{BD}$ maa den ogsaa halvere den tilsvarende Bue.

Da ∠a er n° saa er ∠ OBC og ∠ ODC hver 90 − ½ n°, da det er en ligebenet Trekant. Da nu ∠ OBC og ∠ ODC hver ere 90 − ½ n°, maa BD være 180 − n°, og da Buen er halveret bliver UD og UB hver 90 − ½ n°. Da UP er en Diameter er ⌒ UD + ⌒ DP lig 180°, og da UD = 90 − ½ n°, saa bliver ⌒ DP 90 + ½ n°. Det samme er Tilfældet med ⌒ BP.

N: 2.

Konstruer en Trekant af 2 Sider og Højden paa den tredje



Man afsætter först $\bar{a}$ og omkring A slaar man en Cirkel med b til Radius. Derpaa slaar man en anden Cirkelbue omkring A med Höjden paa den tredje Side til Radius. Denne Cirkelbue maa den tredje Side röre og den bliver da en Tangent. Denne Tangent tegner man fra B og der hvor den rörer den med b som Radius konstruerede Cirkelbue er Toppunktet.

No 3.

Bevis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Höjden paa denne ligestore.

Givet $\angle a = \angle \bar{u}$, $\angle x = y$, $g = h$.

Man beviser at de smaa Trekanter ere kongruente $\triangle ABC \cong \triangle ABC$ $\angle a = \angle \bar{u}$, $x = y$, og $C = C$, den er nemlig 90^0

$\triangle ACD \cong \triangle ACD$, $x = y$. $h = g$, $\angle C = \angle C = ret$.

altsaa ere Trekanterne ABD og ABD kongruente.

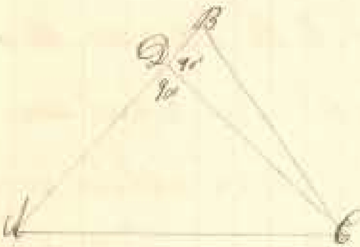
Geometriske Opgaver II Klasse

ved

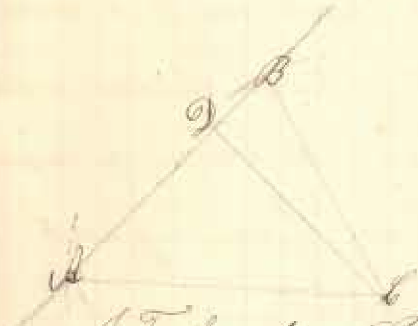
Halvaarsexamenen 1885

Rasmus Lassen

№ 1. Konstruer en Trekant af to Sider og Höjden paa den tredie



Man tænker sig Opgaven löst



I Trekanten CDB kjender man en Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side. Man afsætter altsaa den hosliggende Side DC og Vinkel CDB ved et af DC's Endepunkter. Den Linje, som med CD danner ~~den givne~~ en ret Vinkel, trækkes af vilkaarlig Længde. ret
Man konstruerer nu en Bue med den givne Linje CB som Radius.

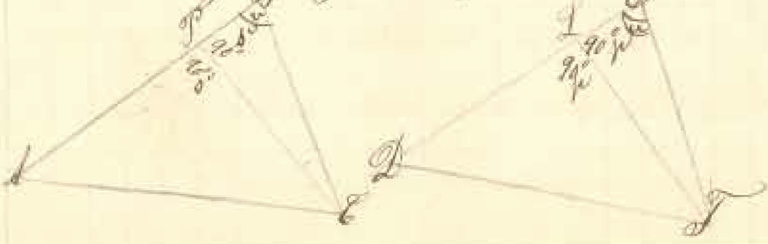
Man har et geometrisk Sted nemlig den Linje af vilkaarlig Længde, som med CD danner den givne Vinkel. Det andet maa ligge hvor Pkt med Radius CB skærer den. Fra deres Skjæringspunkt trækkes nu den tredie Side u. s. v. Trekant DCB er altsaa fundet. BD forlænges derpaa. Man tager nu CA som Radius til en Cirkel. Hvor denne skjæ-

Fremstilling:

rer BD Forlængelse maa A være, og man trækker altsaa nu en Linje fra C til Skjæringspunktet. Derved fremkommer altsaa den søgte Trekant.

№ 2.

Bevis at to Trekanter ere kongru-ente, naar de have en Vinkel, en Side og Höjden paa denne ligestore.



AB=DE; ∠ABC=DEF, CP=FL givet

Trekant CPB ≅ △FLE, da de have to Vinkler og en Side fælles; nemlig ∠p=∠s; ∠u=∠v og PC=LF. LE er altsaa PB, og da AB=DE maa AP ogsaa være = DL. De to BC er altsaa ogsaa = EF. De to Trekanter ABC og DEF ere altsaa kongruente, da to Sider nemlig AB og BC ligestore DE og EF samt den indesluttede Vinkel nemlig ∠s = ∠p ligestore

No 3 Til en Cirkel er fra et Punkt A trukket to Tangenter. Angiv og bevis igjennem hvilke mærk. Punkter hørende til Cirklen Tangentvinklens Halveringslinje gaar. Naar Tangentvinklen deles ved Berøringspunkterne er n°, hvor store ere da de Buer, hvori Cirklen deles ved Berøringspunkterne og Skæringspunkterne ved Halveringslinjen?

Afl. 12.6.25

Geometriske Opgaver

ved

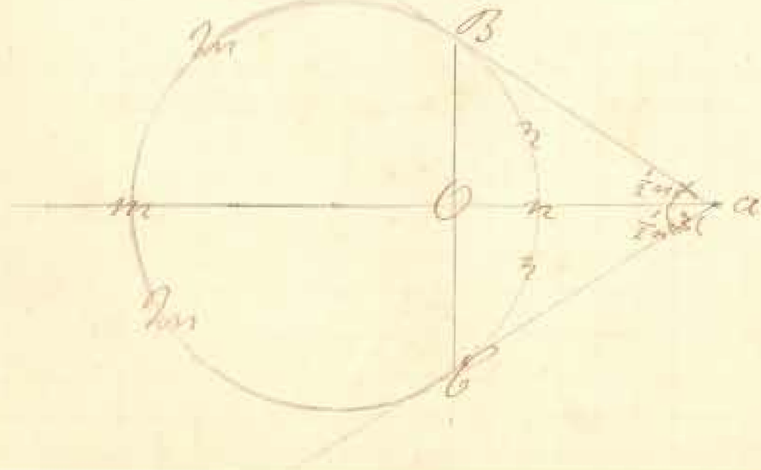
Halvaarsexamen 1885

for

Harald Giessing II Klasse

No 1

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukken to Tangenter. Angiv og bevis, gjennem hvilke Punkter, hørende til Cirkelen, Tangentvinkelens Halveringslinie gaar. Naar Tangentvinkelen er n°, hvor store blive da de 4 Buer, hvori Cirkelen deles ved Berøringspunkterne og Skæringspunkterne med Halveringslinien?



Halveringslinien gaar:

a. gjennem Midten af Röringspunkternes Forbindelseslinie, da $\triangle BaO \cong \triangle Oab$, thi de have to Sider og en mellemliggende Vinkel ligestor, og

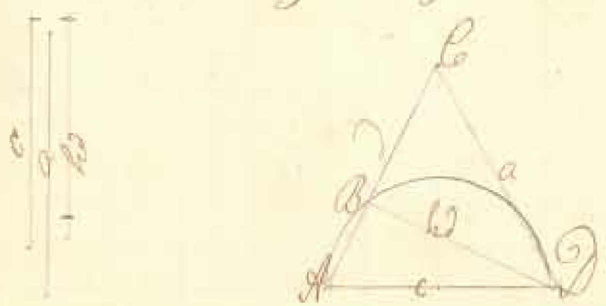
b gjennem Buerne AB's Midtpunkter, thi $\angle x = \angle y$, og de maa altsaa spænde over de samme Buer,

og c. gjennem Centrum, da Buerne ifölge det foregaaende ere lige store.

$\smile Bn$ og $\smile nb$ ere hver $n°$, og $\smile Bm$ og $\smile mb$ er hver $2n°$ ifölge den Sætning, at Sekantvinkler, Sekant-Tangentvinkler og Tangentvinkler maales ved den halve Differens mellem de (to) Buer, som de spænde over

No 2

Konstruer en Trekant af (Höj=) to Sider og Höjden paa den tredie.



Man afsætter först Siden c. Derpaa konstrueres en Cirkel med denne til Diameter. Man afsætter derpaa fra c's Endepunkt hₐ, saaat den rører Cirkelpereferien, og forbinder de to Liniers Endepunkter. Nu konstrueres man △ BCD af en Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side, og △ ACD haves.

Beviis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Höjden paa Midten af denne ligestore.

△ BCD ≅ △ FGH
△ BDA ≅ △ EFH
da de have to Sider og en mellemliggende Vinkel ligestore.

H. Gjessing

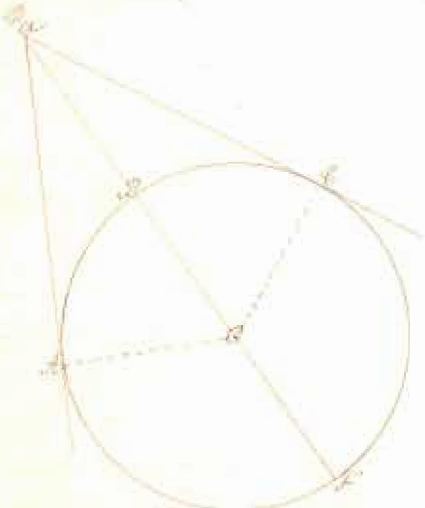
Geometriske Opgaver

ved Hovedexamen 1885. Anden Klasse

Th. M. Jensen.

No 1.

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket to Tangenter. Angiv og beviis igjennem hvilke Punkter, foruden til Cirkelens, Tangentvinkelens Halveringslinje gaar.



Trækker man fra Tangentvinkelens Toppunkt en Linje igjennem Centrum og trækker Radier til Røringspunkterne, da er $\triangle ADO = \triangle CDO$, thi $DA = DC$, $AO = OC$ og DO er fælles. Da de to Trekanter ere kongruente er $\angle ADO = \angle ODC$, og naar de tilsammen ere $n°$, er hver af dem $\frac{1}{2}n°$.

Tangentvinkelens Halveringslinje gaar altsaa igjennem Centrum.

Halveringslinjen halverer ogsaa Buen AC; thi naar DCO er $90°$ og $ODC = \frac{1}{2}n$, er $\angle DOC$ $90 - \frac{1}{2}n$, og BC er altsaa ogsaa $90 - \frac{1}{2}n$. Da $\angle ADO$ er $\frac{1}{2}n$, maa AB, i Følge det forrige Beviis, være $90 - \frac{1}{2}n$.

Den store Bue AC er ogsaa halveret. Thi naar $\angle DOC$ er $90 - \frac{1}{2}n$, maa $\angle COF$ som dens Nabovinkel, være $90 + \frac{1}{2}n$. CF er altsaa ogsaa $90 + \frac{1}{2}n$. Det samme er Tilfældet paa den anden Side af Halveringslinjen. Buen AC er følgelig halveret.

Naar Tangentvinkelen er n°, hvor store blive da de fire Buer, hvori Cirkelen deles ved Berøringspunkterne og Skæringspunkterne med Halveringslinjerne?

I det foregaaende er det bevist, at AB og BC hver ere $90+\frac{1}{2}n$, og at AF og FC hver ere $90+\frac{1}{4}n$.

No. 2.

Konstruer en Trekant af to Sider og Højden paa den tredje.

Først tænker man sig Opgaven løst.

△ ABD kan ~~afsættes~~ konstrueres, thi man kjender BD, BA og ∠ BDA; den modstaaende Side er større end den hosliggende (den vinkelrette er nemlig den korteste Vej fra et Punkt til en Linje)

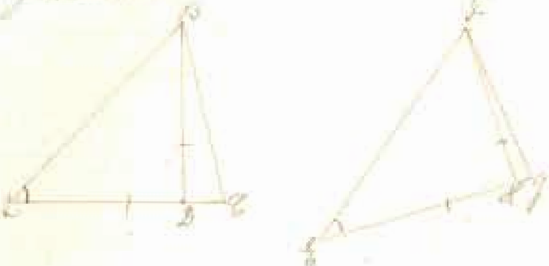
Konstruktionen mangler.

△ BDC kan ogsaa afsættes, da man kjender BD, BC og ∠ BDC, af samme Grund som før.

Trekanterne lægges saaledes, at BD i den ene falder sammen med BD i den anden.

No 3

Bevis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Højden paa denne ligestore.



$\triangle ABD \cong \triangle EFH$, da $\angle BAD = \angle FEH$, $BD = FH$ og $\angle BDA = \angle FHE = 90°$

$\triangle BDC \cong FHG$, da $BD = FH$, $\angle BDC = \angle FHG$ og $DC = HG$ (thi da $AD = EH$ og $AC = EG$ maa $DC = HG$)

Da $\triangle ABD \cong \triangle EFH$ og $\triangle DBC \cong \triangle FHG$, maa $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Geometriske Opgaver

ved

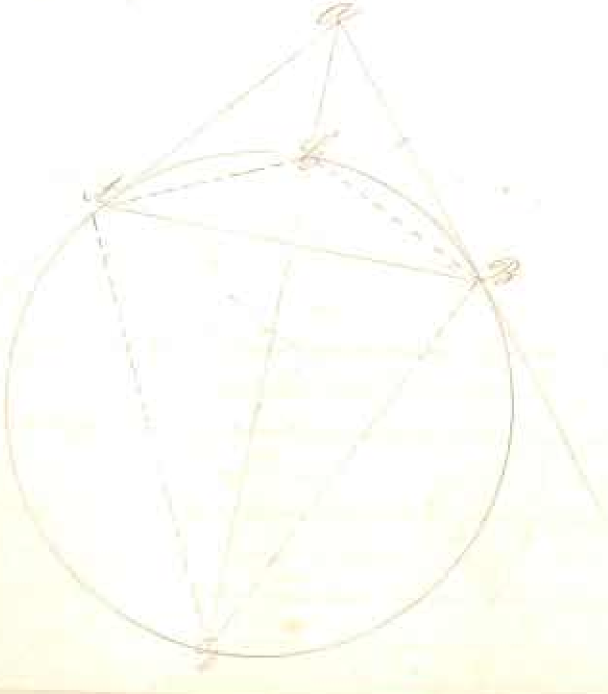
Halvaarsexamen 1885.

Chr. Petersen II Klasse.

afl. 14.6, 45

N: 1

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket to Tangenter. Angiv og bevis igjennem hvilke Punkter hörende til Cirklen Tangentvinklens Halveringslinie gaar. Naar Tangentvinklen er 70°, hvor stor bliver da de fire Buer, hvori Cirklen deles ved (Halv.) Röringspunkterne og Skjæringspunkterne med Halveringslinien.



1) Den staar vinkelret paa Korden, som forbinder Röringspunkterne.

2) Den halverer Buen A B.

3) Den halverer den store Bue A B.
4) Gaar igjennem Centrum.
1) Den staar vinkelret paa Korden, fordi at A a B er en ligebenet Trekant (Tangentvinklerne ere ligestore regnede fra Toppunktet til Röringspunkterne) i en ligebenet Trekant falde Höiden, Medianen og Vinklens Halveringslinje sammen til én, altsaa staar den ⊥ paa Midten af Korden.

2) Den halverer Buen A B. Et hvert Punkt i den ⊥ paa Midten af en Linje, ligger ligelangt fra Liniens Endepunkter, Punktet C ligger altsaa ligelangt fra A og B, heraf følger, at A C = C B, men til ligestore Korder svare ligestore Buer.

3) Den halverer den store Bue A B af samme Grund, som den lille Bue A B, da nemlig Punktet D ligger ligelangt fra A og B.

4) Den gaar igjennem Centrum. Naar Buen C A + A D = ⌣ C B + B D, maa C D være en Diameter.

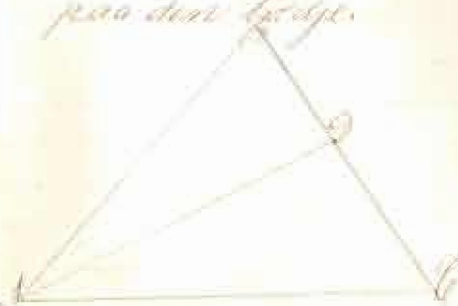
Naar Topvinklen er n°, bliver hver af Vinklerne i Trekanten A a B = 90° ÷ ½ n.

Buen A B = 180° ÷ n, Buen A C = 90° ÷ ½ n = ⌣ C B,

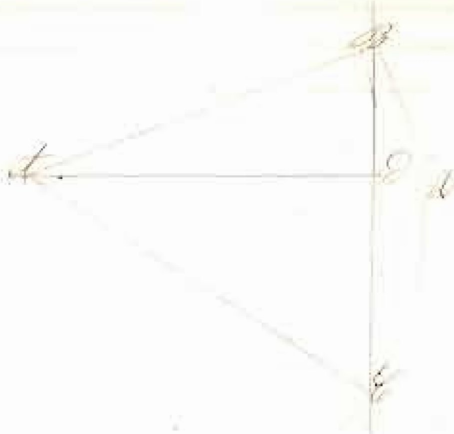
Buen A D = ⌣ D B = 90 + ½ n.

№ 2.

Konstruer en Trekant af to Sider og Höiden paa den tredje.



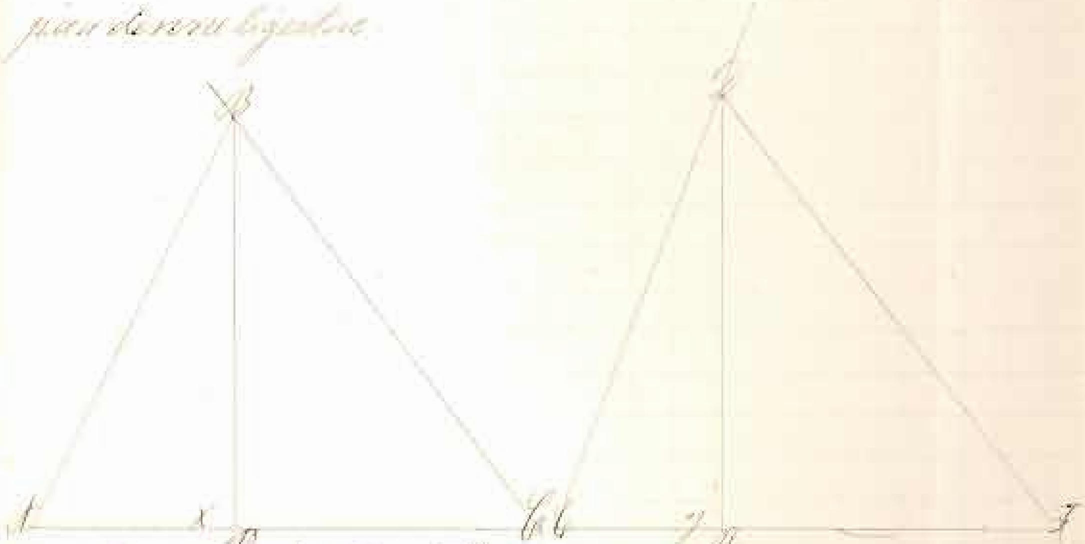
Gjort $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, som er en Höjde.



Man ~~afsætter~~ konstruerer først △ ABC, først afsætter man den rette Vinkel, og afsætter paa et af dens Ben Højden. Det geometriske Sted for de Punkter, som ligge lige langt fra et givet Punkt) i en given Afstand fra et givet Punkt, er en Cirkel med det givne Punkt til Centrum og den givne Afstand til Radius, man slaar da en Bue med AB, med AC, hvor dens Skæringspunkt med aatrækkes Linierne AB og AC.

N° 3

Bevis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Højden paa denne ligestore.



Givet $\angle A = \angle E$, $AC = EF$, $BP = DR$ en Højde og $\angle$ et.

△ ABP er $\cong$ △ EDR, de have to Vinkler og en Side hver for sig ligestore, Linjen $AC = EF$, naar nu $AP = ER$, maa ogsaa $PC = RF$, Trekant $PBC \cong$ Trekant RDF, de have to Sider og den mellemliggende Vinkel hver for sig ligestore.

Chr. Petersen

II Klasse

Geometriske Opgaver

ved

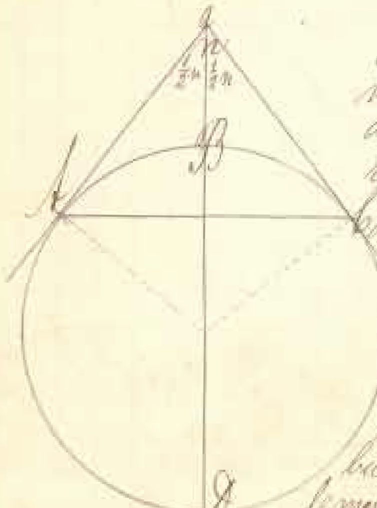
Halvaarsexamen 1885

for

P. Amorsen

Abl. $\frac{1}{4}$ 6, 10

1/ Til en Cirkel er fra et Punkt (D) trukket 2 Tangenter. Angiv og bevis gjennem hvilke Punkter hørende til Cirklen Tangentvinklens Halveringslinie gaar. Naar Tangentvinklen er n°, hvor store blive da de fire Buer, hvori Cirklen deles ved Berøringspunkterne og Skæringspunkterne med Halveringslinien.



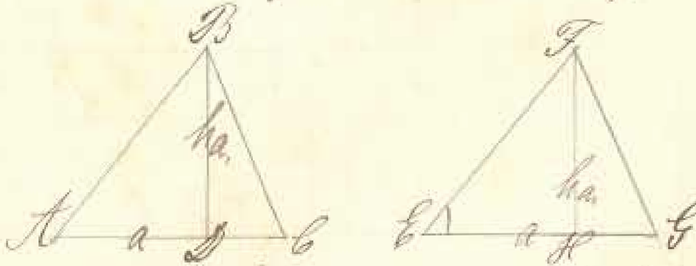
Tangentvinklens Halveringslinie skærer ⌒ A B C i et Punkt der ligger lige langt fra A og C, thi Tangentvinklens Halveringslinie gaar gjennem Centrum, altsaa bliver B D en Diameter, og da Diameteren staar vinkelret paa Korden der som her deles i to ligestore Dele, saa maa ethvert Punkt i den vinkelrette (Diameteren) ligge lige langt fra A og C. ⌒ A D C er Supplementbue til ⌒ ABC, ⌒ A D og ⌒ D C ere Supplementbuer til ⌒ AB og ⌒ BC og maa altsaa være ligestore. Diameteren maa altsaa skære ⌒ A D C i det Punkt, som ligger lige langt fra A og C. Buen A B er lig $90° - \frac{1}{2}n$. ⌒ BC = det samme. ⌒ AD = $90 + \frac{1}{2}n$. ⌒ CD = det samme.

2/ Konstruer en Trekant af 2 Sider og Højden paa den tredie.

Man afsætter den vilkaarlige Linie c og en Linie parallel med den i Højdens Afstand, fordi det geometriske Sted for de Punkter, der ligge i en given Afstand fra en given Linie er en Linie parallel med den givne i den givne Afstand. Derpaa slaaer man fra et vilkaarligt Punkt i Linien d en Bue med a til Radius som skærer c i Punktet A, fordi de Punkter, der ligge i en given Afstand fra et givet Punkt er en Cirkel med det givne Punkt til Centrum og den givne Afstand til Radius. Derpaa slaar man en Bue om det samme Punkt med b til Radius, denne Bue skærer c i Punktet C. Nu har man Trekanten ABC.

3)

Bevis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel en Side og Højden paa denne ligestore.



Δ ABD $\cong$ EFH, thi de have en Vinkel A = $\angle$ E, en Vinkel ADB = EHF og en Side BD = FH. Δ BDC $\cong$ Δ FHG, thi de have en Vinkel BDC = FHG, en Side BD = FH og en Side DC = HG, fordi AD = EH, maa DC ogsaa være lig med HG, thi AC = EG. Da de to Trekanter, hvoraf den store bestaar, ere kongruente, saa maa ogsaa Δ ABC $\cong$ EFG.

II Klasse.

Geometriske Opgaver

ved

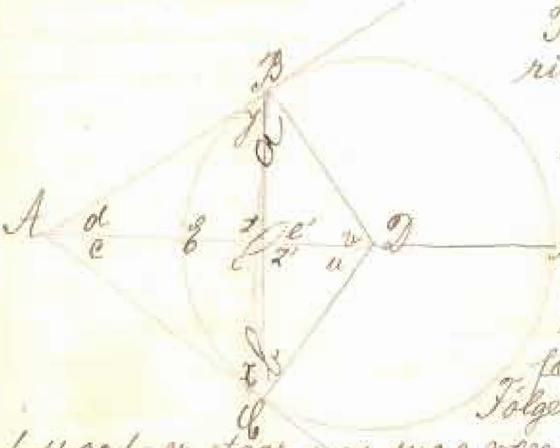
Halvaarsexamen 1885

S. Harbye

Ch. 6, 23

Nr. 1.

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket to Tangenter. Angiv og bevis, igjennem hvilke Punkter, hørende til Cirklen, Tangentvinklens Halveringslinie gaar. Naar Tangentvinklen er n°, hvor store blive da de 4 Buer, hvori Cirklen deles ved Berøringspunkt. og Skjæringspunkterne med Halveringslinien?



Tangentvinklens Halveringslinie gaar igjennem:

a) den mindste Bue A B's Midpunkt, paa Grund af følgende. $\triangle ABD \cong ACD$, fordi $AB = AC$, $\angle a = \angle b$ og $\angle d = \angle e$, desuden er AD fælles. Altsaa er $\angle u = \angle v$; Følgelig er $BE = EC$, da Buerne $\angle u$ og $\angle v$ staar paa maa være ligestore.

b) Midpunktet af Røringspunkternes Forbindelseskorde BC. $\triangle AOC$ er nemlig $\cong \triangle AOB$, da $AC = AB$, $AO = AO$ og $\angle x = \angle y$. Da Altsaa er $CO = OB$.

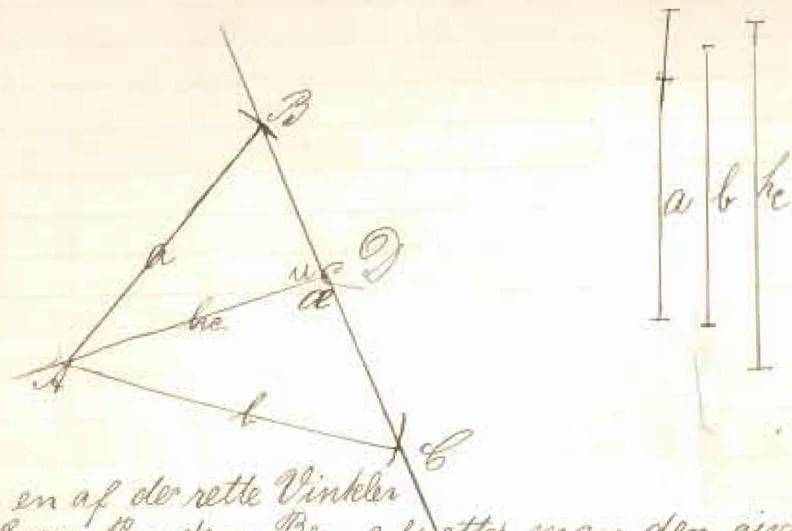
c) Midtpunktet af den største (Korde) Bue CB
Da $\angle e = \angle z$ er ogsaa $\angle e' = \angle z'$ og $\smile CF$ er altsaa lig $\smile BF$.

d) Centrum,
da $\triangle ACD \cong A'BD$

Da $\angle b = 90°$ og $e = \frac{1}{2}n°$, er $\angle u = 90° \div \frac{1}{2}n°$ og $\smile CE$ og $90° \div \frac{1}{2}n° = \smile EB$. Den store $\smile A'B$ er altsaa $= 360° \div (90° \div \frac{1}{2}n° + 90° \div \frac{1}{2}n°) = 180 + n$, og CF altsaa $= 90 + \frac{1}{2}n = \smile BF$

Nr. 2

Konstruer en Trekant af to Sider og Højden paa den tredje Side

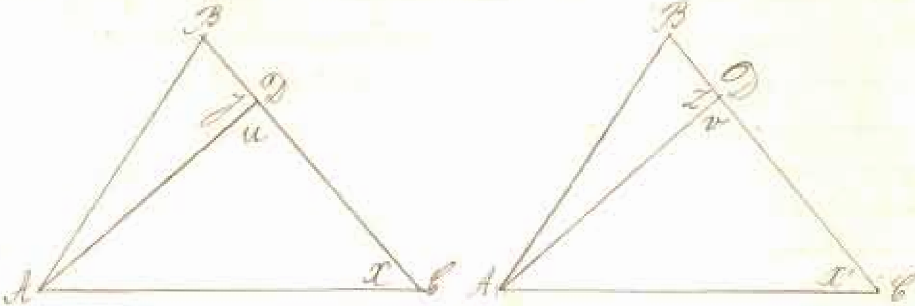


Man afsætter en af de rette Vinkler ved Højden, f Exd. Paa dens Ben afsætter man den givne Højde. ~~Paa~~ Med dennes ene Endepunkt som Centrum tegner man en Cirkel, efter at man har taget Linjen b som Radius. ∠ d's anden Ben. Skjæringspunkt naaer altaa til Linjen b's Skjæringspunkt med det. Efter at saaledes △ ADC er konstrueret, konstruerer man △ ABD. Man afsætter den rette Vinkel u med hc som det ene Ben. Derpaa slaar man en Cirkel med A til Centrum og Linien a til Radius. Linien c's Længde gaar altaa fra Skjæringspunktet B, det Sted, hvor den sidste Cirkel skærer ∠ u's ene Ben, og hele Trekanten ABC er nu konstrueret.

r, men Fremstillingen mindre god.

Nr. 3.

Bevis, at to Trekanter ere kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Højden paa denne ligestore



Da $\angle x = \angle x'$ og $\angle u = \angle v$ samt Højden $AD = AD$, saa er $\triangle ADC \cong \triangle ADC$

Da $\angle y = \angle z$, $AD = AD$ og $BD = BD$, da CD var lig CD og BC var givet at være lig BC, saa er $\triangle ABD = ABD$.

Altsaa ere de to Trekanter kongruente.

Afh. Nr. 6

II Klasse

Geometriske Opgaver

ved

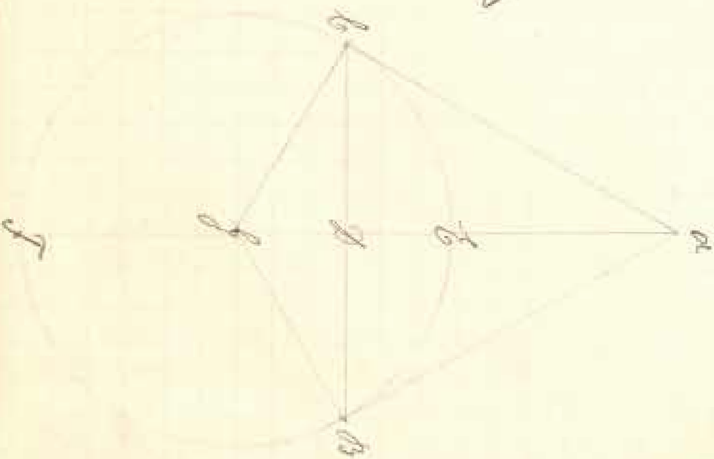
Halvaarsexamen 1885.

Johannes Jepsen.

No. 1

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket to Tangenter.

Angiv og bevis igjennem hvilke Punkter, hørende til Cirklen, Halveringslinien gaar. Naar Tangentvinklen er n°, hvorstore blive da de 4 Buer, hvori Cirklen deles ved Berøringspunkterne og Skjæringspunkterne med Halveringslinien?

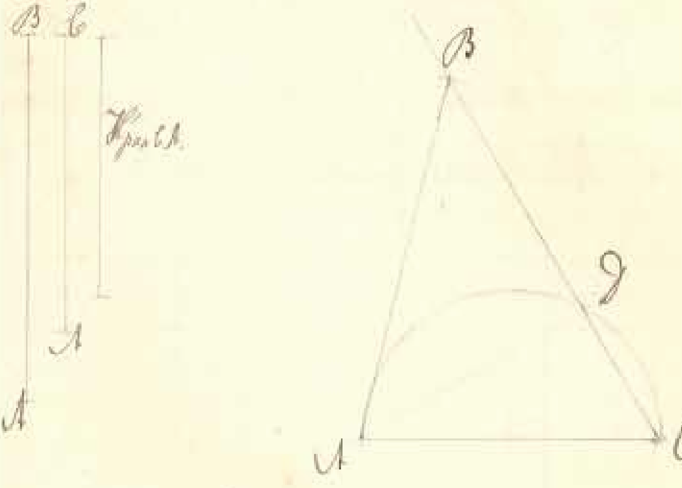


Man ved at Tangentvinklens Halveringslinie gaar igjennem Centrum, den gaar ogsaa igjennem Midtpunktet af Røringspunkternes Forbindelseslinie, $CD = DB$, fordi $Ca = aB$, $aD = aD$ og $\angle CaD = \angle BaD$ og altsaa bliver $\triangle CaD \cong \triangle BaD$.

den gaar ogsaa igjennem Buernes CB's Midtpunkt
$\smile CE = EB$ og $CF = FB$, fordi $\triangle CAaG \cong BaF$ og saa
bliver $\angle AaGC = \angle aGB$, og da de ere Centervinkler
maales de ved den Bue, som de staa paa.
$\smile EB = 90^{\circ} - \frac{1}{2}n = EC$ og $CF = 180^{\circ} - n = FB$.

No. 2.

Konstruer en Trekant af to Sider og Højden paa den tredie.



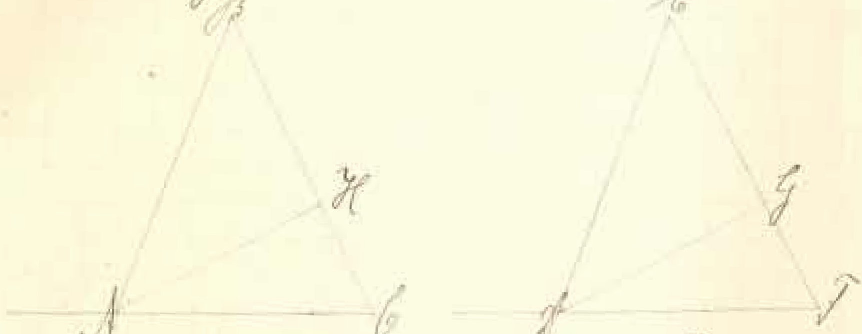
Man tænker sig Opgaven som löst, og saa kan man konstruere $\triangle ADC$, fordi man kjender to Sider og den modstaaende Vinkel.
Man afsætter först Siden AC, og derover tegner man en Halvcirkel, fordi man ved, at en Vinkel, der spænder over en Diameter, er $= 90^{\circ}$; derpaa slaar man med Passeren en Cirkel med A til Centrum og Höjden AD til Radius, og der, hvor Cirklerne skjære hinanden, er Topunktet, fordi det geometriske Sted, for de Punkter der ligge

i en given Afstand fra et givet Punkt, er en Cirkel, med det givne Punkt til Centrum og den givne Afstand til Radius; derpaa skal man CD ikke maa forlænge denfor til Punktet B man slaar derpaa en Cirkel med Siden AB til Radius og A til Centrum, og der, hvor den skjære Linien BC er Toppunktet til Trekanten; fordi det geometriske Sted, for de Punkter der ligge i en given Afstand fra fra et givet Punkt, er en Cirkel med o. s. v.
Og saa er Trekanten konstrueret.

Fremstillingen noget urolig.

No 3.

Bevis, at to Trekante ere $\cong$, naar de have en Vinkel, en Side og Højden paa denne, ligestore.



Bevis at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
Givet $\angle B = \angle E$, $BC = EF$ og $AH = DG$.

$\triangle ABH \cong \triangle DEG$, fordi $\angle B = \angle E$, $\angle BHA = \angle EGD = 90°$ og $AH = DG$. $\triangle AHC \cong DGF$ fordi $\angle AHC = \angle DGF$, $\angle HAC = \angle GDF$, fordi Nabovinkelen $\angle D = \angle E + \angle F$ og Nabovinkelen til $\angle A = \angle B + \angle C$, men da $\angle B = \angle E$ bliver $\angle C = \angle F$ og $AH = DG$ og saa har man bevist at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Mangelfuldt. Benytter slet ikke $BC = EF$

Johannes Jepsen

Geometriske Opgaver

ved

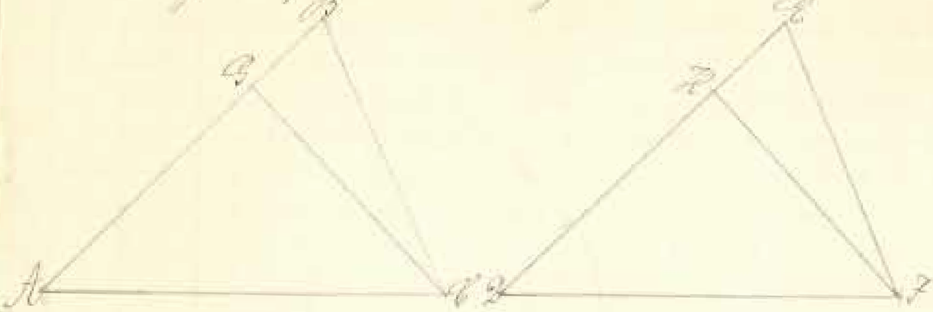
Halvaarsexamen 1885

for

Ude Haahr

II Klasse

Bevis, at to Trekanter er kongruente, naar de have en Vinkel, en Side og Höjden paa denne ligestore.

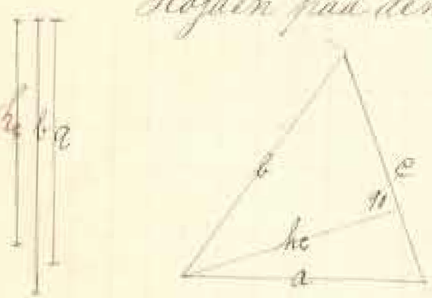


Givet: $\angle A = \angle D$, Siden $AB = DE$ og Höjden $GC = HF$.

Fölgelig er $\Delta\, AGC \cong \Delta\, DHF$, thi de have en Side $GC = HF$, en Vinkel $A = D$ og $\angle G = \angle H = 90°$.
Nu er $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$, thi de have en Vinkel $A = \angle D$, en Side $AB = DE$ og en Side $AC = DF$.

5.

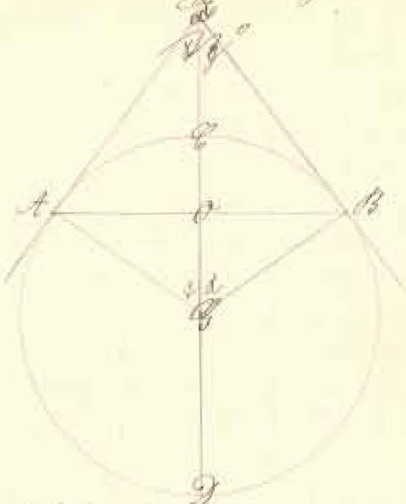
Konstruer en Trekant af 2 Sider og Höjden paa den tredje.



Konstruktion mangler.

Man konstruerer först den store Trekant, thi man kjender en Vinkel = 90°, en Side nemlig hc og Siden b. Dernæst slaar man en Bue med a som Radius, og hvor denne skærer c, er den tredje Vinkelspids, og nu har man Trekanten.

Til en Cirkel er fra et Punkt a trukket 2 Tangenter. Angiv og bevis, igjennem hvilke Punkter, hörende til Cirklen, Tangentvinklens Halveringslinje gaar. Naar Tangentvinklen er $n°$ hvor store blive da de fire Buer, hvori Cirklen deles ved Beröringspunkterne og Skjæringspunkterne med Halveringslinjen?



Tangentvinklens Halveringslinje gaar igjennem:

1) Midtpunktet af Lengen AB, thi $\Delta AFO = \Delta BFO$, $\angle A = \angle B$, Siden $AF = BF$ og $\angle x = \angle y$.

2) Centrum, thi det ligger i en vinkelret paa Korden AB's Midtpunkt.

3) Midtpunktet af Buen ACB, thi $\Delta AOG = \Delta BOG$, de have nemlig Siden $AG = GB$, Vinklerne ved $O = 90°$ og $AO = OB$, de ere da lig i d. og til lige store Centervinkler höre lige store Buer, altsaa er $AC = CB$

4) Midtpunktet af Buen ADB, fölger af det forrige.

$180° \div ACB = n°$. $90° \div AC = \frac{1}{2}n$; $90° \div \frac{1}{2}n = AC = CB$

fölgelig er $AD = DB = 90 + \frac{1}{2}n$.

Geometriske Opgaver

ved

Forberedelseseksamenen i Juni 1896.

Toft Höyer.

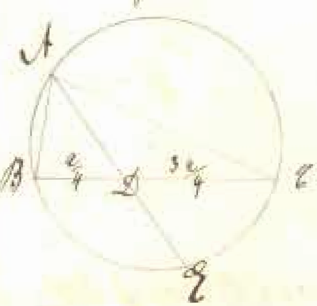
Kl 10,55

Simonsen

№ 1.

Konstruer en Trekant af: A og a, naar det vides, at Halveringslinjen deler a i Stykker, hvoraf det ene er 3 Gange saa stort som det andet.

(Fig I)

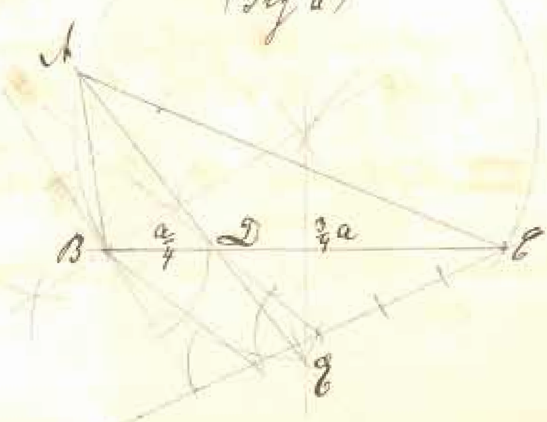


Tænkes Opgaven løst og Trekantens omskrevne Cirkel tegnet, ses at en Linje trukket fra den nederste Cirkelbues Midtpunkt E og gaaende gennem et Punkt D, der ligger $\frac{a}{4}$ fra B, bestemmer ved Overskærelsen af den øverste Cirkel Bue A.

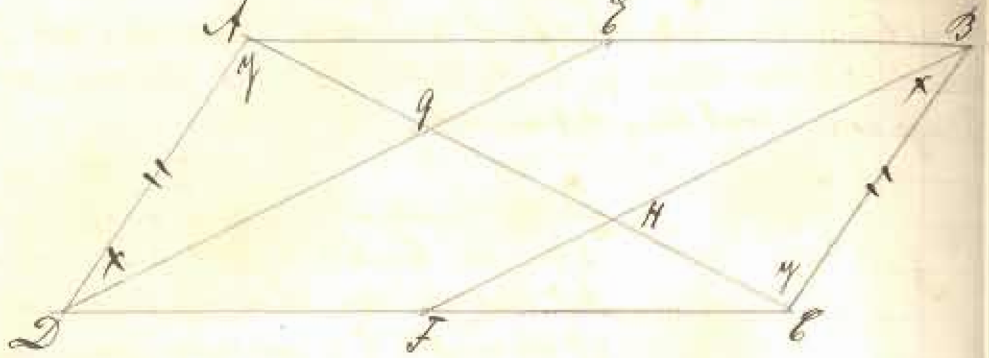
Konstruktion!

a afsættes og den Bue, der rummer $\angle A$, tegnes. Dernæst deles a i 4 lige store Stykker, og Linjen ED trækkes, og Skæringspunktet med den øverste Cirkelbue bestemmer A, som forbindes med B og C.

(Fig II)



№ 2.



I Bevis, Firkant EBFD er et ▱

Da Firkant ABCD er et Parall: vides: AB = og ǂ DC; følgelig, da E og F ere Midtpunkterne i AB og DC,

haves: AE = og ǂ DF = (og =) FC = og ǂ EB. ergo DF = og ǂ EB.
men en Firkant, hvori et Par modsaaende Sider ere lige store og parallele er et Parallelogram.

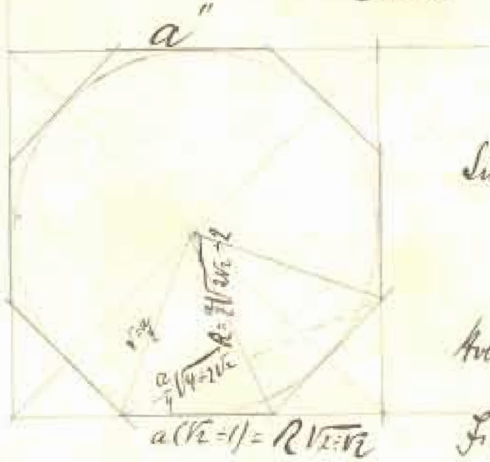
II Bevis AG = GH = HC.

EG gaar fra Midten af AB og er ǂ med BH. følgelig maa den ogsaa gaa til Midten af AH og AG er da lig GH.

Endvidere er Trekant BHC ≅ AGD, thi AD = BC, og de (to) hosliggende (Sider) Vinkler ere lige store.
Men i kongruente Trekanter ere Sider, der ligge over for lige store Vinkler, lige store.

ergo AG = HC = GH.

N: 3.



I Find Vinklerne.

Summen af Vink: i en n Kant:

$n \cdot 2R \div 4R$

hver Vink: i en n Kant $= 2R \div \frac{4R}{n}$

I en 8 kanter en Vinkel =

$180 \div \frac{360}{8} = \div 45 + 180 = \underline{135^\circ}$

II Find Siden.

Ottekantens Side $= t_8$ i Forhold til Kvadratets indskrevne Cirkel, hvor Radius $= \frac{a}{2}$

$$t_8 = \frac{r \cdot k_8}{\rho_8} = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{2 \div \sqrt{2}}}{\frac{a}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2 \div \sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{a(2 \div \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \underline{a(\sqrt{2} \div 1) = t_8}$$

III Find Ottekantens Areal.

$R\sqrt{2 \div \sqrt{2}} = a(\sqrt{2} \div 1)$; $R = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{2} \div 2}$

$$; T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2} \div 2}}{16} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3\sqrt{2} \div 4}}{8}$$

Højden!!

$$8T = \frac{8 \cdot a^2\sqrt{3\sqrt{2} \div 4}}{8} = \underline{a^2\sqrt{3\sqrt{2} \div 4} = \text{Ottekantens Areal.}}$$