OSKAR KLEIN

LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE D'EINSTEIN UTILISÉ POUR UNE ALTERNATIVE DE LA COSMOLOGIE RELATIVISTE EN REGARDANT LE SYSTÈME DES GALAXIES COMME LIMITÉ ET NON COMME L'UNIVERS

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Matematisk-fysiske Meddelelser **39**, 2

Kommissionær: Munksgaard
København 1974

Synopsis

Après l'introduction, le principe d'équivalence – étant la base de la théorie gravitationnelle d'Einstein –, est discuté en détail et illustré par le paradoxe de l'horloge. Puis il est montré que les arguments d'Einstein pour sa cosmologie sont incompatibles avec le principe d'équivalence. Aussi il est montré que la singularité de Schwarzschild, qui signifie une limite de la densité, rendra impossible la formation naturelle des cosmologies relativistes.
Dans la seconde partie de l'article, l'alternative, proposée depuis longtemps par l'écrivain, est présentée, finissant par un modèle du rayonnement prédit par Alpher et Herman – mais sans le "fireball".

Erratum

P. 8 dernière ligne ajouter:

« , mettant $\vartheta = 3$. »

PRINTED IN DENMARK
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
ISBN 87 7304 031 2

I. 1. Introduction

La cosmologie relativiste est actuellement en vogue parmi les chercheurs travaillant sur la théorie de la gravitation d'Einstein ainsi que parmi les astronomes, qui y voient une interprétation remarquable des grandes découvertes qui signifient non seulement une énorme expansion de la connaissance, mais aussi une expansion littérale de la multitude des galaxies, dont la vitesse est à peu près proportionnelle à leur distance.

Il faut se demander cependant si cette interprétation, qui ressemble plutôt à la physique prégaliléenne qu'à celle de nos jours, est vraiment motivée par les faits. En essayant de répondre à cette question, il est bon de commencer par la première cosmologie relativiste, celle développée par Einstein lui-même avant ces découvertes, et dont descendent les cosmologies présentes. En étudiant le chef-d'œuvre d'Einstein, où il a fondé la théorie générale de la relativité, on y trouve une vacillation entre deux points de vue, qui selon lui se soutiennent, mais qui en vérité sont contradictoires. Le premier de ceux-ci – la source principale de sa cosmologie – est la réponse à sa question: pourquoi la relativité du mouvement se limite-t-elle à des vitesses constantes en grandeur et direction? Cette question paraît bien naturelle, le mouvement étant par définition relatif. Donc, l'idée de Mach que les forces inertiales – qu'on connaît des véhicules accélérés – sont en fait une sorte de gravitation provenant de la multitude des masses dans l'univers, leur centre de gravité définissant le système de référence considéré par Newton comme l'*espace absolu*, paraît bien promettante à Einstein, quoiqu'il fallût l'adapter à la théorie de la relativité du mouvement uniforme. Tandis que ce point de vue a son origine dans des considérations philosophiques, selon lesquelles la nature doit se comporter selon nos habitudes de raisonner, l'autre point de vue Einstein l'a pris directement d'un fait expérimental, à savoir cette remarquable proportionnalité entre la masse inertiale et la masse pesante, jusque-là sans interprétation, qui s'exhibe dans l'égalité des temps de chute de tout corps tombant d'une tour haute quand la résistance de l'air peut être négligée.

2. Le principe d'équivalence, la vraie base de la théorie générale d'Einstein

Commençons par le dernier point de vue par lequel Einstein a créé le formalisme mathématique de sa théorie, définissant par lui les concepts qui remplacent le potentiel et le champ de la théorie ordinaire de la gravitation – ainsi que son interprétation physique. Comme une introduction Einstein a considéré certaines expériences imaginaires très simples et éclairantes – tout à fait dans la tradition des successeurs d'Archimède, qui ont établi la nouvelle physique, dont le plus connu est Galilée. Donc, à l'intérieur d'une chambre, qui tombe dans un champ gravitationnel, constant en grandeur et en direction pendant l'observation, la pesanteur est pratiquement éliminée – fait bien connu des navigateurs des satellites artificiels – parce que les objets y contenus subissent la même accélération. Inversement, si la chambre est accélérée dans une région sans gravitation, les passagers qui y sont, peuvent se croire dans un champ gravitationnel, dont la force correspond précisément à l'accélération, car un objet qu'on y lâche, est atteint par le plancher juste comme s'il tombait dans une chambre en repos.

Par un véritable trait de génie Einstein a aperçu dans ces faits, essentiellement connus depuis longtemps, un principe profond de la nature, plus tard appelé *le principe d'équivalence*, le mot équivalence se rapportant à l'identité *essentielle* des forces inertiales – produites par un mouvement non-uniforme relatif à un système de référence sans gravitation, appelé *système inertial* – et des forces gravitationnelles, produites par des masses. Et immédiatement il en a tiré des conclusions nouvelles concernant les effets de la gravitation sur la lumière: déviation d'un rayon lumineux en passant devant un corps comme le soleil, et changement de la fréquence selon le potentiel gravitationnel, ces deux effets étant vérifiés depuis.

Pour développer ces considérations en une théorie de la gravitation, qui comprend la théorie de Newton – comme la théorie électromagnétique de Maxwell comprend l'électrostatique fondée sur la loi de Coulomb – il fallait généraliser et préciser les conclusions de ces expériences imaginaires, chose plus difficile qu'on ne l'estime aujourd'hui, à cause de l'admirable simplicité du premier résultat obtenu par Einstein: à savoir que la connaissance des lois qui gouvernent un phénomène dans le cas où il n'y a aucune gravitation – *lois qui satisfont au principe de la relativité du mouvement uniforme* – suffisent pour déterminer l'effet d'un champ arbitraire de gravitation sur ce phénomène. Le premier exemple du nouveau point de vue, sans appliquer la théorie de la relativité, est que la loi de Galilée du mouvement d'un projectile est une conséquence directe de la loi d'inertie valable dans un système de référence inertial.

Pour avancer plus loin il fallait d'abord généraliser les expériences par la remarque qu'un champ gravitationnel – sans singularité – dans une région autour d'un point en espace et en temps est de plus en plus constant quand on diminue cette région; la situation étant pareille à celle d'un petit lac, dont la courbure est négligeable. Cette situation est pratiquement réalisée par un satellite circulant autour de la terre – donc son manque de pesanteur.

La comparaison avec le lac n'est pas arbitraire. En effet, le formalisme mathématique de la théorie générale d'Einstein, y compris son interprétation de la physique, constitue une analogie très proche de la géométrie interne des surfaces courbes développée par Gauss et généralisée pour des espaces d'un nombre arbitraire de dimensions par Riemann. Comme cette géométrie est fondée sur la validité de la géométrie euclidienne dans les régions infinitésimales, la théorie d'Einstein est fondée sur la validité du principe de la relativité du mouvement uniforme dans les systèmes locaux, dit *inertiaux*, où la gravitation est éliminée.

Donc, dans la géométrie des surfaces courbes le concept de longueur est basé sur l'application du théorème de Pythagore pour exprimer l'intervalle ds entre deux points voisins en coordonnées usant d'abord les coordonnées cartésiennes d'une région infinitésimale, c'est-à-dire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

Similairement l'intervalle entre deux événements proches, en distance et en temps, s'exprime dans un système inertial par la formule de Minkowski

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \tag{2}$$

où c est la vitesse de la lumière et t le temps, expression qui est invariante non seulement sous des déplacements et rotations du système des coordonnées cartésiennes, mais aussi sous des transformations de Lorentz, où la vitesse du système est changée.

Ce sont des formules pour des régions infinitésimales quand il y a de la courbure. Pour décrire une région finie il y faut introduire des coordonnées générales, deux pour une surface (comme les latitudes et les longitudes) et quatre pour l'espace et le temps, dans les champs de gravitation. Les différentielles dans les formules (1) et (2) sont alors des fonctions linéaires des différentielles des coordonnées générales, dont les coefficients sont des fonctions de ces coordonnées. Donc, on a

$$ds^2 = \sum g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{3}$$

où les x^i sont deux dans le cas des surfaces courbes et quatre dans la physique. Un concept de toute première importance dans les deux cas est celui de lignes géodésiques – les lignes de droiture optimale, qui sont aussi les plus courtes entre deux points d'une région univoque. Une partie infinitésimale d'une telle ligne étant droite, il est aisé de voir comment on peut les construire, quand les g_{ik} sont connus – simplement en utilisant les coordonnées cartésiennes locales pas à pas, chaque pas infinitésimal ayant la même direction que le pas précédent. Leur importance dans la théorie des surfaces est évidente, définissant la route la plus courte entre deux points. Et dans la théorie de la gravitation le mouvement d'une particule – pratiquement aussi des corps macroscopiques, comme les planètes – suit une ligne géodésique en quatre dimensions.

Ici nous rencontrons une différence essentielle entre les deux cas – non pas dans les mathématiques formelles, ni dans le fait que l'interprétation va par les systèmes locaux, où la métrique, définie par les g_{ik}, est constante – mais dans la *signification des transformations des coordonnées.* Donc, dans la géométrie interne des surfaces on s'intéresse en premier lieu aux grandeurs invariantes – une ligne droite étant une ligne droite simplement, aussi quand on écrit son équation en coordonnées curvilignes. Ce qui compte, c'est de quelle sorte de géométrie – euclidienne ou un des différents genres de géométries non-euclidiennes – il s'agit.

Pour les transformations qui touchent seulement l'espace et non le temps, la situation est similaire dans la théorie d'Einstein, selon laquelle la géométrie est ordinairement celle de Riemann en trois dimensions. C'est dans les transformations touchant le temps que la différence se montre – en fait, comme nous avons déjà vu, dans les considérations originelles d'Einstein – car l'apparition, ou le changement, de la gravitation sont sans doute de première importance dans cette théorie.

Considérons ce cas un peu en détail – la relation d'un champ constant de gravitation et le système inertial correspondant, traité rigoureusement par C. Møller. Ici l'élément de ligne *ds* prend la forme

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2\left(1 + \frac{g\zeta}{c^2}\right)d\vartheta^2 \tag{4}$$

où ζ est la cordonnée correspondant à la hauteur dans le champ de la terre, g étant l'accélération produite par le champ. La transformation qui mène du système inertial (avec les cordonnées x, y, z, et le temps t) au système en repos dans le champ (avec les coordonnées ξ, η, ζ et celle pour le temps ϑ) peut s'écrire

$$x = \xi,\ y = \eta,\ z = \frac{c^2}{g}\left(\left(1 + \frac{g\zeta}{c^2}\right)\cosh\frac{g\vartheta}{c} - 1\right),\ t = \frac{c}{g}\left(1 + \frac{g\zeta}{c^2}\right)\sinh\frac{g\vartheta}{c}. \tag{5}$$

Pour un projectile, lancé verticalement dans le système inertial, on a l'équation

$$z = z_0 + vt \tag{6}$$

et en la traduisant par les relations (5) on obtient directement l'équation pour son mouvement dans le champ gravitationnel, qui en même temps est celle d'une ligne géodésique de l'élément de ligne de la métrique (4). Pour le cas non-relativiste quand $g\vartheta \ll c$ et $g\xi \ll c^2$ on a

$$\zeta = z_0 + v\vartheta - \tfrac{1}{2}g\vartheta^2 \tag{7}$$

c'est-à-dire la loi de Galilée.

En résumant ces considérations, on peut dire que la similarité entre la théorie d'Einstein et la géométrie de Riemann correspond à celle de l'invariant de Minkowski et l'élément de ligne – selon le théorème de Pythagore de la géométrie, tandis que leur différence correspond à celle entre le temps et une cordonnée spatiale comme elle paraît déjà dans le signe négatif du carré dt^2. Donc, il ne faut pas oublier la différence entre la géométrie, au sens ordinaire, et la physique relativiste, ce qui est bien exprimé par le physicien hollandais Fokker par le mot *chronogéométrie*.

3. Le paradoxe de l'horloge et le principe d'équivalence

Comme un autre exemple du fonctionnement du principe d'équivalence, nous choisissons le paradoxe dit de l'horloge; on désigne par là la conclusion tirée par Einstein qu'une personne qui voyage aller-retour avec une vitesse comparable à celle de la lumière se trouve moins vieillie à son retour sur terre que ceux qui y sont restés, le rapport entre leurs âges étant alors égal à $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} : 1$, où v est la vitesse moyenne du voyageur et c celle de la lumière. Quoique ce rapport ait été vérifié par des expériences très précises sur la vie moyenne de particules instables, il y a encore des physiciens qui n'y croient pas, et en outre, d'autres qui débattent s'il s'agit là d'un effet de la relativité spéciale ou de la théorie générale d'Einstein. Comme nous allons voir, cette dernière dispute est aisément résolue par le principe d'équivalence en réalisant que tous ont raison, parce que la mesure du temps est définie par des systèmes inertiaux locaux, où la théorie spéciale est valable, mais qu'un voyage aller-retour ne peut pas rester dans un seul système inertial. D'ailleurs, ceci correspond précisément à la solution du paradoxe par Einstein lui-même. Mais pour rendre les choses plus intuitives, il vaut la peine de considérer un peu en détail un tel voyage, où les conditions sont telles qu'il est impossible de fonder des doutes sur le manque de réalisme de l'entreprise.

Imaginons donc qu'un nombre de techniciens, physiciens et astronomes font un voyage aller-retour pour étudier en particulier d'autres systèmes planétaires que le nôtre en s'éloignant d'une vingtaine d'années-lumière de la terre. Leur grand vaisseau doit être fourni de toutes sortes de commodités pour le travail et le bien-être des participants, et, surtout, il faut que l'accélération du vaisseau, dirigée vers le toit, corresponde à peu près à la gravité ici sur terre – ce qui veut dire que les provisions d'aliments etc. doivent être suffisantes pour une douzaine d'années. Cette dernière supposition est la seule qui empêchera la réalisation du voyage, mais pour une raison assez triviale – le manque de carburant, dont il faudrait une quantité impossible, à savoir au moins quelques centaines de milliers de fois le poids du vaisseau même.

Il convient de diviser le voyage en quatre parties – égales au point de vue du vaisseau: accélération g jusqu'à la vitesse optimale, retardation (g renversé) jusqu'à la vitesse zéro, accélération g vers la terre, retardation pour atterrir (g renversé). Les deux moments sans gravité, où la direction de l'accélération est renversée et où le plancher et le plafond échangent leurs rôles, ne vont pas gêner les passagers.

Par un calcul simple – remplaçant l'accélération continue par des changements $g\Delta$ subits à des intervalles Δ – on obtient, par des transformations de Lorentz répétées, en allant à la limite, pour le temps t du système en repos et le temps ϑ du vaisseau, la relation

$$t = \frac{c}{g} \sin h \frac{g\vartheta}{c}. \tag{8}$$

C'est, comme on voit, la formule (5) avec $\zeta = 0$, l'origine du système accéléré étant placée dans le vaisseau. Pour les passagers la durée du voyage est donc quatre fois le temps ϑ pour une des quatre parties, et pour les observateurs à terre quatre fois le temps t correspondant. Pour la distance optimale, selon la terre, on obtient similairement

$$l = 2\frac{c^2}{g}\left(\cos h\frac{g\vartheta}{c} - 1\right). \tag{9}$$

Dans notre exemple nous allons prendre pour unités: l'an pour le temps et l'année lumière pour la distance, mettant $g = 1$, ce qui correspond à peu près à la gravitation ici sur terre, à savoir 950 cm/sec^2. Pour la durée du voyage nous obtenons donc 12 ans selon les horloges du vaisseau, mais pour les terriens à peu près 40 ans, la distance optimale étant de 18 années-lumière. Donc un des participants ayant 28 ans au départ, qui a laissé un nouveau-né à la maison, retrouvera à son retour un fils de son propre âge!

Ce calcul, où le temps ϑ est défini par la limite de la somme des éléments temporels Δ des systèmes inertiaux locaux par lesquels le vaisseau passe, donne le vrai temps, les horloges emportées étant faites pour le montrer; cela devrait suffire pour effacer tous doutes sur la réalité du paradoxe des horloges.

4. Les arguments d'Einstein pour sa cosmologie

Comme nous allons voir, ces arguments – le plus important d'eux étant basé sur l'hypothèse de Mach sur l'origine de l'inertie – sont étrangement contraires à son propre principe d'équivalence. Donc, Einstein a conclu que dans un univers vide il n'y aurait pas d'inertie; et il a essayé de montrer par sa théorie de la gravitation que la masse d'un corps est augmentée par la présence d'autres corps. Mais selon le principe d'équivalence la masse d'un corps est définie à l'aide d'un système inertial asymptotique exigeant des environs aussi vides que possible. Par exemple, la masse du système solaire est définie par un système de référence dans lequel le centre de gravité du soleil et ses planètes est en repos, c'est-à-dire qu'il tombe librement dans le champ gravitationnel des autres étoiles, lequel, d'ailleurs, est très faible, mais surtout extrêmement homogène dans l'étendue du système solaire. En fait, c'est ainsi qu'Einstein lui-même a défini l'énergie totale d'un système quelconque – et comme montré par lui, l'énergie totale d'un système est proportionnelle à la masse totale. L'expression mathématique due à la présence d'autres corps, représente en vérité un champ gravitationnel assez étrange, qu'on peut écarter par une transformation locale des coordonnées – donc en accord avec le principe d'équivalence.

Le système de coordonnées dans lequel le centre de gravité du système solaire est en repos, est, comme on voit, justement celui appelé par Newton *l'espace absolu,* étant très approximativement celui de Copernic, où le soleil est en repos. Il est donc erroné de croire que selon la théorie d'Einstein la différence entre ce système et celui de Ptolémée ne soit qu'une chose de nature pratique, plutôt conventionnelle qu'essentielle. Aussi le fait que ce système est presque en repos par rapport au ciel des étoiles fixes n'est aucunement un argument en faveur de l'hypothèse de Mach, comme il est parfois énoncé. L'essentiel est qu'il est inertial.

Comme un autre argument pour sa cosmologie Einstein a considéré la circonstance que dans son univers clos on évite les conditions de limite à l'infini pour cette solution de ses équations qui remplace la loi de Newton, conditions qu'il a considérées comme contraires à l'essence de sa théorie générale, parce qu'elles ne sont pas indépendantes des coordonnées qu'on choisit. Mais, comme le montre l'exemple de la masse, selon le principe d'équivalence, de telles conditions sont nécessaires pour la définition des proprietés d'un système isolé. Et, en plus, le mot *infini* sous ce rapport est simplement une expression d'un procédé mathématique, où il s'agit des distances longues en comparaison avec les dimensions de la source du champ.

Un troisième argument pour l'univers clos a rapport au paradoxe bien connu que la gravitation dans une région où la densité de la matière en moyenne est non zéro, croît vers l'infini avec ces dimensions. Mais, sans avoir recours à cette hypothèse, ce paradoxe est évité – comme l'a montré, il y a longtemps, l'astronome suédois Charlier – si la matière est distribuée en hiérarchie, et que la densité moyenne tende vers zéro par ordre d'hiérarchie. Et, ce qui est important, cette condition est satisfaite automatiquement par ces solutions des équations d'Einstein, qui correspondent à des systèmes matériels limités, qui sont le résultat d'une accumulation graduelle de matière – comme les étoiles et les galaxies. Leur limite est donnée par l'inégalité suivante entre la masse M et la densité μ du système

$$M^2\mu \leq \frac{3c^6}{32\pi G^3} = 0.73 \times 10^{83} g^3 \mathrm{cm}^{-3} \tag{10}$$

où G est la constante de gravitation et c, comme plus haut, la vitesse de la lumière. Cette limite est loin d'être approchée pour les étoiles ordinaires et les galaxies, tandis que pour les étoiles de neutrons, récemment découvertes, elle est assez proche – et pour les solutions cosmologiques elle est dépassée.

A cette critique des arguments donnés par Einstein en faveur de sa cosmologie il faut encore remarquer que, quoiqu'il soit possible de mesurer – dans les régions qu'on peut surveiller – les propriétés du champ, qui correspondent à la courbure des surfaces, il n'est pas possible – même dans le cas où ces propriétés sont celles de la cosmologie d'Einstein – de s'assurer que l'univers soit clos. En fait, la situation est analogue à celle qu'on connaît des discussions, menées jadis, regardant la forme de la terre, déterminée en définitive par sa circumnavigation. Il est vrai qu'on avait là, déjà tôt, une raison assez convaincante pour sa sphéricité par les éclipses de la lune. Mais sans la troisième dimension de l'espace c'eût été impossible. Et pour la cosmologie on n'a pas de dimensions supplémentaires.

Cela veut dire qu'une conclusion à cet égard serait seulement possible au moyen d'une théorie sûre et profonde. Et une telle théorie, nous ne l'avons pas. Aussi la théorie quantique de champs – qui, bien qu'encore inachevée, est la meilleure de ce genre – demande plutôt que l'univers représente l'état de moindre énergie, dont les parties où il y a une accumulation de matière, sont des fluctuations – donc, en moyenne, un vide infini.

II. La cosmologie nouvelle et son alternative

1. Un modèle de la métagalaxie

Par la découverte de Hubble d'une expansion régulière du système des galaxies la cosmologie statique d'Einstein fut abandonnée et remplacée par une autre classe de ses équations découverte par le mathématicien russe Friedmann – ce qui a donné lieu, non seulement à une interprétation promettante de la loi de Hubble, mais aussi à une théorie tentante de l'origine des éléments chimiques initiée par Gamow. A ce propos ses collaborateurs Alpher et Herman ont conclu que cette théorie demande l'existence au temps présent d'un rayonnement universel et isotrope correspondant à une température de quelques degrés au-dessus du zéro absolu, étant le reste d'un rayonnement d'intensité énorme à l'état d'univers au temps de la formation des éléments. La découverte, il y a quelques ans, d'un rayonnement pareil, découverte inspirée par des physiciens – en premier lieu Wheeler et Dicke – qui n'avaient pas cessé de croire à ces idées, a contribué grandement à l'acceptation assez générale de cette cosmologie, nommée communément le «big bang» à cause du commencement violent de l'univers qu'elle suppose.

Tout de même il faut avouer que cette cosmologie, selon laquelle l'univers change avec le temps, est extrêmement éloignée – même plus que celle d'Einstein – de la physique ordinaire, dont le but est de trouver des lois de la nature de plus en plus générales et non la structure de l'univers par des considérations plus ou moins philosophiques et esthétiques.

Donc, on se demande s'il n'y a pas une manière plus naturelle d'interpréter ces deux faits – l'expansion et le rayonnement isotrope – à savoir de regarder la multitude de galaxies, qui participent à l'expansion, comme un système régulier – une métagalaxie – bien qu'énorme, qui est limité, comme sont les étoiles et les galaxies, étant formé par contraction gravitationnelle d'un vaste nuage, extrêmement raréfié, nuage consistant de particules stables, les plus simples, protons et électrons et leurs antiparticules. C'est remplacer la cosmologie relativiste par l'étude d'un système dont les problèmes sont à peine moins difficiles que ceux qu'on a rencontrés dans l'étude des étoiles et des galaxies.

Avant d'esquisser ce qu'on a fait et ce qu'on peut attendre d'une telle étude nous allons considérer un peu un modèle – sûrement trop simplifié – de l'état présent de la métagalaxie, décrivant la loi de Hubble aussi bien que la cosmologie «big bang».

Le modèle en question est une sphère en expansion, remplie de matière, dont la densité μ est une fonction du temps, la même partout dans l'intérieur de la sphère et zéro dans l'espace extérieur. Dans l'intérieur le modèle satisfait à la solution de Friedmann usée pour le «big bang», qui à la surface est remplacée par celle de la théorie d'Einstein qui correspond à la loi de Newton. L'extrapolation en arrière, qui dans le «big bang» mène à l'état de «fire ball» (l'origine du rayonnement isotrope), est ici défendue par l'inégalité (10).

Voici quelques formules pour ceux qui s'intéressent aux détails des calculs suivants:

L'élément de ligne ds est donné par

$$ds^2 = a^2\left(\frac{d\eta^2}{1 + \varepsilon\eta^2} + \eta^2 d\Omega^2\right) - c^2 d\vartheta^2 \tag{11}$$

où la longueur a, qui est responsable de l'expansion, est une fonction du temps ϑ, η étant une coordonnée radielle et $d\Omega$ l'élément de ligne de la surface sphérique, où $\eta = 1$. Pour les solutions, qui sont en expansion vers l'infini, ε est égal à $+1$, tandis que $\varepsilon = -1$ appartient aux solutions pour lesquelles l'expansion est limitée. L'intermédiare de ces deux classes correspond à $\varepsilon = 0$. Les solutions en question sont définies par les relations suivantes

$$T^{-1} = \frac{1}{a}\frac{da}{d\vartheta}, \quad \frac{8\pi}{3} G\mu T^2 = \frac{a_0}{a_0 + \varepsilon a}, \quad a_0 = \frac{8\,\pi}{3}\frac{G\mu\, a^3}{c^2} \tag{12}$$

où T^{-1} est le paramètre de Hubble – la vitesse d'expansion pour des distances courtes étant donnée par la distance divisée par T – et la longueur a_0 est constante. Comme la densité μ, T est une fonction du temps seul, tandis que

$$M = \frac{4\pi}{3}\mu\, a^3 \eta_l^3 \qquad (13),$$

étant la masse totale du système, est constante. Comme on voit, l'expression $\frac{8\pi}{3} G\mu T^2$ détermine la valeur de $\varepsilon(+1,0,-1)$, selon qu'elle est moins que, égale à ou plus grande que l'unité. Dans la formule (13) η_l est la valeur de η à la surface, la distance d'un point du centre étant égale à $a \cdot \ln\,((1+\eta^2)^{1/2}+\eta)$, où ln signifie le logarithme naturel.

Comme le montre les équations (12), la connaissance au temps présent de la densité μ et du paramètre T permet de déterminer les valeurs de a_0 et a, plus ou moins réelles selon le degré de validité du modèle. Tandis que T paraît être assez bien connu – 4. 10^{17} sec. – ce qui correspond à une vitesse de 25 kilomètres par seconde à une distance d'un million d'années-lumière, la densité μ est encore incertaine, les masses estimées variant selon le jugement concernant la quantité de masse dans l'espace entre les galaxies; la masse déduite en comptant seulement les galaxies dans un volume assez grand étant estimée à $3 \cdot 10^{-31} g\,\mathrm{cm}^{-3}$. Connaissant ce nombre, j'ai choisi, il y a quelques ans, un peu au hasard, la valeur $10^{-30} g\,\mathrm{cm}^{-3}$, correspondant à une expansion vers l'infini, la limite pour une telle expansion ($\varepsilon = 0$) étant $10^{-29} g\,\mathrm{cm}^{-3}$ avec la valeur mentionnée de T. Pour a_0 et a cela donne

$$a_0 = 1.23 \times 10^{27}\,\mathrm{cm}, \; a = 12.6 \times 10^{27}\,\mathrm{cm}.$$

Pour compléter le modèle il faut encore avoir une valeur pour η_l. Après la découverte des quasars, dont les déplacements-rouge sont les plus grands qu'on a observés, il fut naturel de penser que ces objets, qui paraissent représenter la jeunesse des galaxies, se trouvent près de la frontière de la métagalaxie, ce qui donnerait pour η_l une valeur d'environ un. Mais depuis quelque temps on a trouvé des indications que ces objets ne sont pas tellement distants qu'on l'avait conclu par les déplacements-rouge. Et il paraît possible – même probable – que ces déplacements ont une autre cause que l'expansion.

Si on laisse de côté les quasars, le déplacement-rouge le plus grand observé correspond à un effet Doppler d'une vitesse égale à 2/5 de celle de la lumière, donnant pour η_l une valeur de près de 0.4 – si notre galaxie se trouve dans la proximité du centre de la métagalaxie, ce qui est probable. Car, autrement, on s'attendrait à quelques effets observables de la surface dans certaines directions. Pour le lecteur qui s'intéresse aux détails de ce calcul, voici la formule donnant η quand on connaît le rapport λ de la fréquence observée et de celle à la source:

$$(1+\eta^2)^{1/2}+\eta=\left(\frac{\left(1+\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}+\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}}{\left(1+\lambda\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}+\left(\lambda\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}}\right)^2. \tag{14}$$

Avec les valeurs données en haut pour a_0 et a et celle pour le plus grand déplacement-rouge (2/5 de la vitesse de la lumière, ce qui donne $\lambda=\sqrt{\frac{3}{7}}$) on obtient $\eta=0.417$.

2. Emploi des rapports d'Eddington

Une première indication que le rayonnement joue un rôle essentiel dans le développement de la métagalaxie fut obtenue par une tentative d'utiliser quelques rapports assez mystérieux découverts par Eddington, le grand astrophysicien, entre les dimensions de l'univers clos d'Einstein et les grandeurs atomiques, regardés par lui comme indiquant une relation profonde entre le macrocosme et le microcosme.

Il s'agit du grand nombre N du rapport entre l'attraction électrique et celle de gravitation d'un proton et d'un électron, ainsi

$$N=\frac{e^2}{Gm_e\,m_p}=2.27\times 10^{39} \tag{15}$$

où e est la charge électrique élémentaire, G la constante de gravitation et m_e et m_p les masses respectives de l'électron et du proton. Avec d étant ce qu'on appelle le rayon d'électron, ces rapports sont

$$R\sim Nd,\ M\sim N^2 m_p,\qquad d=\frac{e^2}{m_e c^2}=2.82\times 10^{-13}\,cm \tag{16}$$

où R fut le rayon de courbure et M la masse de l'univers d'Einstein. Au lieu du rayon de courbure – qui est constant dans l'univers statique d'Einstein – nous allons considérer la longueur a_0, comparant la relation suivante

$$\frac{1}{a_0^2}=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{G\mu_0}{c^2} \tag{17}$$

cas spécial de (12) pour $a=a_0$, avec la relation entre le rayon de courbure et la densité dans l'univers clos, qui ne diffère de (17) que par le facteur

4π en place de $8/3\,\pi$. La valeur de Nd étant égale à 0.64×10^{27} cm, la valeur de a_0 du modèle est très proche de $2Nd$, et la masse, selon (13), est très proche de $N^2 m_p \eta_l^3$. Comme la valeur de μ est bien incertaine, on n'en peut pas conclure plus qu'une concordance d'ordre de grandeur du modèle et des rapports d'Eddington, qui paraît pourtant significative.

Leur application, cependant, dépend de l'hypothèse que le rayonnement joue un rôle essentiel dans le développement de la métagalaxie, et que son action est grandement due à sa dispersion par les électrons selon la formule bien connue de J. J. Thomson, formule valable pour des fréquences dont les quanta sont petits par rapport à l'énergie $m_e c^2$.

Une condition importante pour ce rôle est que l'opacité du nuage est suffisante pour la conversion de la contraction en expansion, surtout dans l'état le plus dense du nuage, la limite de Schwarzschild, probablement près du point tournant. Définissons donc l'opacité, à cet état, $\varkappa_s$, par le rapport entre le rayon R_s du nuage à ce point et le libre parcours d'un photon selon la formule de Thomson, ce qui donne

$$\varkappa_s = n_e \cdot \frac{8\,\pi}{3} d^2 R_s \tag{18}$$

où n_e est le nombre d'électrons par unité de volume à cet état. Pour R_s on a

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{19}$$

et avec n_p, le nombre $\dfrac{\mu_s}{m_p}$ de protons dans l'unité de volume, où μ_s est la densité à la limite Schwarzschild, nous obtenons

$$R_s = \frac{1}{\varkappa_s} \cdot \frac{n_e}{n_p} \cdot Nd,\ M = \frac{1}{2\varkappa_s} \cdot \frac{n_e}{n_p} N^2 m_p. \tag{20}$$

Avec $a_0 = 2Nd$, cela nous donne pour $\varkappa_s$ la valeur $\frac{1}{2} \cdot \dfrac{n_e}{n_p} \eta_l^{-3}$ c'est-à-dire avec $n_e = n_p$ et $\eta_l = 0.42$, $\varkappa = 6.75$, valeur assez grande.

3. Quelques remarques sur le développement de la métagalaxie et sur l'origine du rayonnement isotrope

Les premiers calculs sur le développement de la métagalaxie, par Alfvén et Bonnevier et surtout par Laurent et al., bien que nécessairement très simplifiés, paraissent confirmer en grands traits l'hypothèse mentionnée plus haut sur le rôle du rayonnement dans ce développement. Comme source primaire du rayonnement ils ont pris l'annihilation, mais dans le travail plus réaliste de Laurent a été inclus aussi l'effet Compton inverse – par lequel le rayonnement est augmenté pendant que le mouvement est freiné – et l'effet de la gravitation y est traité par la théorie d'Einstein, nécessaire dans le voisinage de la limite Schwarzschild. Dans un travail en préparation, Laurent a fait une étude approfondie de la probabilité de l'annihilation dans les circonstances en question; et il paraît qu'elle est considérablement plus grande qu'on n'avait supposé dans les travaux mentionnés.

En ce qui regarde le rôle de l'annihilation, il faut souligner l'extrême improbabilité qu'un nuage (très raréfié) contenant environ 10^{78} protons et électrons, n'ait pas pratiquement des quantités égales des deux espèces de matière. Ici le problème est de trouver des mécanismes vraisemblables pour leur séparation, sans laquelle toute la matière du nuage devrait être annihilée. Pour la solution de ce problème Alfvén a fait un commencement promettant, surtout par ce qu'il a appelé «l'effet Leidenfrost», la tendance d'accroissement de la séparation par l'attraction mutuelle des domaines de la même matière et la répulsion de ceux de matière opposée – causée par la pression créée par l'annihilation. Mais on ne connaît pas encore la grandeur des domaines séparés.

Ce qui suit, n'est qu'un essai préliminaire de tracer les grandes lignes d'une explication, par le modèle de la métagalaxie décrit plus haut, de ce rayonnement qu'on a considéré comme l'argument le plus fort pour la réalité de la cosmologie «big bang».

Supposons donc, qu'après une période de changements violents – pendant laquelle la contraction du nuage a été freinée, l'énergie gravitationnelle étant transformée en rayonnement et la séparation des deux espèces de matière pratiquement accomplie (les champs magnétiques y jouant un rôle décisif) – le système se trouve près de la limite Schwarzschild dans un état intermédiaire entre contraction et expansion.

Pour décrire mathématiquement cet état un peu imaginaire, nous partirons de l'état présent du modèle, dont la masse M est donnée par (13), tandis que la somme $\overline{M}$ des masses de ses subsystèmes (pratiquement égale à celle de ses particules) est donnée par

$$\overline{M} = M \cdot Z(\eta_l) \tag{21}$$

où

$$Z(\eta_l) = 3\,\eta_l^{-3} \int_0^{\eta_l} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \tfrac{3}{2}\,\eta_l^{-3}\left(\eta_l(1+\eta_l^2)^{1/2} - \quad (1+\eta_l^2) + \eta_l)\right). \tag{22}$$

Aussi nous supposons qu'à cet état la métrique correspond à $\varepsilon = 0$, ce qui veut dire que sa masse est égale à la somme des masses de ses particules, augmentée par celle du rayonnement U_s/c^2 à cet état, U_s étant l'énergie correspondante.

En ce qui regarde le développement subséquent nous allons faire l'hypothèse suivante – qui n'est certainement pas exacte, mais paraît justifiée par les résultats, qu'une partie essentielle du rayonnement s'y comporte adiabatiquement, tandis que le reste, qui ne doit pas être grand, s'enfuit et, donc, ne contribue pas à la masse présente M. Pour $\overline{M}$ nous supposons qu'elle est pratiquement égale à cette quantité au temps présent, c'est–à–dire qu'elle est donnée par les formules (21) et (22).

Il faut encore remarquer que l'état près de la limite Schwarzschild est obtenu par une extrapolation en arrière en temps, utilisant la masse présente M, étant l'état le plus dense permis par elle. Il faut donc que la perte d'énergie du système, après que cet état est atteint, soit inconsidérable.

Sûrement, ces considérations, il faut les prendre avec un petit grain de sel, mais, heureusement, il y a quelques arguments à priori en leur faveur; d'abord le fait que cette solution de Friedmann, employée par Alpher et Herman dans leurs calculs regardant le rayonnement du «fire ball», est aussi valable dans notre modèle, autant qu'on peut négliger ce qui se passe à la surface; car c'est par là que le courant commence de se produire, un courant relatif aux systèmes de référence locaux. Selon cette solution l'abaissement de la température est dû au travail exercé par le rayonnement contre la force gravitationnelle, un effet renforcé, quand il y a des électrons, par l'opacité produite par eux. Et, comme on sait, à la limite Schwarzschild la gravitation seule retient entièrement le rayonnement.

De plus, comme durant le processus adiabatique il n'y a pas de courant local, et comme la propagation du courant – de la surface jusqu'au voisinage du centre – où il est en tout cas faible – est très retardée à cause de la grande distance, un tel courant à notre position (près du centre) serait, selon nos considérations, à peine observable. Nous posons maintenant, selon les hypothèses faites,

$$U_s = c^2(M - \overline{M}) = Mc^2(1 - Z(\eta_l)) \tag{23}$$

et donc pour la densité u_s du rayonnement

$$u_s = \left(\frac{R}{R_s}\right)^3 (\mu c^2(1 - Z(\eta_l)) \tag{24}$$

où $R = a\eta_l$ est le rayon présent et $R_s = a_s\eta_l$ est celui à la limite Schwarzschild. Avec θ et θ_s étant les températures respectives présentes et à cette limite, on a, selon la loi de Stefan–Boltzmann,

$$u_s = \varrho\theta_s^4, \quad u = \varrho\theta^4 \tag{23}$$

où la constante ϱ est égale à $7.65.\ 10^{-15}$erg (cm^3 degré)$^{-1}$. Et selon l'hypothèse adiabatique on a

$$\theta = \frac{R_s}{R}\theta_s \tag{24}$$

d'où nous obtenons finalement

$$\theta = \left(\frac{a_0}{a}\frac{\mu c^2}{\varrho}\eta_l^2(1 - Z(\eta_l)\right)^{1/4}. \tag{25}$$

Introduisons maintenant les nombres estimés pour a_0, a, μ et η_l ($a_0 = 1.23 \times 10^{27}$ cm, $a = 12.6\ 10^{27}$ cm, $\mu = 10^{-30}$g cm^{-3} et $\eta_l = 0.42$ nous obtenons

$$\theta = 3.15°K. \tag{26}$$

Il faut accentuer que ce modèle n'est qu'un essai préliminaire. Toutefois il me paraît qu'une explication réaliste du phénomène en question se fera plûtot dans cette direction et non par le "big bang". Aussi il faut dire que la possibilité de décrire en grandes lignes l'évolution de la métagalaxie en utilisant les rapports d'Eddington ne les explique pas, ce qui demanderait une étude comparable à celle du problème analogue pour les étoiles.

Indleveret til Selskabet den 7. december 1973.
Færdig fra trykkeriet den 14. august 1974.