Matematisk-fysiske Meddelelser
udgivet af
Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Bind **34**, nr. 6

Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **34**, no. 6 (1964)

ÜBER DIE FOURIERSCHEN KOEFFIZIENTEN DER EISENSTEINSCHEN REIHEN

VON

CARL LUDWIG SIEGEL

København 1964
Kommissionær: Ejnar Munksgaard

Synopsis

Es sei $\mathfrak{Z}$ ein Punkt der verallgemeinerten oberen Halbebene n-ten Grades, g eine gerade Zahl und

$$s_g(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{C},\mathfrak{D}}{}' |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^{-g} \qquad (g > n+1)$$

die Eisensteinsche Reihe des Gewichtes g. Sie hat eine absolut konvergente Fouriersche Entwicklung

$$s_g(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a_g(\mathfrak{T})\, e^{\pi i \sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})},$$

worin $\mathfrak{T}$ alle nicht-negativen geraden symmetrischen Matrizen von n Reihen durchläuft. In einer Arbeit des Verfassers vom Jahre 1939 wurde bewiesen, dass alle Koeffizienten $a_g(\mathfrak{T})$ rationale Zahlen sind. E. Witt hat dann 1941 zeigen können, dass die Nenner dieser Koeffizienten sogar beschränkt sind, falls g durch 4 teilbar ist, indem er nachwies, dass die Funktion $s_g(\mathfrak{Z})$ in diesem Fall mit der analytischen Invariante des Geschlechtes der positiven geraden quadratischen Formen von $2g$ Variablen und der Determinante 1 übereinstimmt. Mit Benutzung dieses Zusammenhanges wird hier für $4 \mid g$ bewiesen, dass die Koeffizienten einen gemeinsamen Nenner haben, der sich in einfacher Weise durch g und die Bernoullischen Zahlen ausdrücken lässt. Im restlichen Fall, wo g nicht durch 4 teilbar ist, wird ein entsprechendes Resultat auf mühsamere Weise mit Hilfe der analytischen Theorie der indefiniten quadratischen Formen und der verallgemeinerten Gauss-Bonnetschen Formel erhalten.

PRINTED IN DENMARK
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A-S

Im Folgenden wird die Kenntnis meiner Veröffentlichungen [1] bis [7] vorausgesetzt.

Es sei $\mathfrak{Z}$ ein Punkt der verallgemeinerten oberen Halbebene n-ten Grades, g eine gerade Zahl und

$$s_g(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{C},\mathfrak{D}}{}' |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^{-g} \qquad (g > n+1) \tag{1}$$

die Eisensteinsche Reihe des Gewichtes g. Sie hat eine absolut konvergente Fouriersche Entwicklung

$$s_g(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a_g(\mathfrak{T})\, e^{\pi i \sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}, \tag{2}$$

worin $\mathfrak{T}$ alle nicht-negativen geraden symmetrischen Matrizen von n Reihen durchläuft. Ich habe bewiesen, dass alle Koeffizienten $a_g(\mathfrak{T})$ rationale Zahlen sind. In einer sehr bemerkenswerten Untersuchung hat dann Witt [8] sogar die Beschränktheit der Nenner dieser Koeffizienten gezeigt, falls die feste Zahl g durch 4 teilbar ist. Witt weist nämlich dort nach, dass in jenem Falle die Funktion $s_g(\mathfrak{Z})$ gleich der analytischen Invariante des Geschlechtes der positiven geraden quadratischen Formen von $2g$ Variabeln und der Determinante 1 ist. Aus diesen Zusammenhang ergibt sich nun, wie in den beiden ersten Paragraphen ausgeführt wird, als gemeinsamer Nenner der $a_g(\mathfrak{T})$ im Falle $4 \mid g$ ein einfacher Wert, in welchem nur die Bernoullischen Zahlen $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots$ noch auftreten.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird auf mühsamere Weise der restliche Fall behandelt, wobei also g nicht durch 4 teilbar ist. Hierfür ist die analytische Theorie der indefiniten quadratischen Formen heranzuziehen, und die arithmetische Untersuchung der auftretenden Masszahlen erfolgt mittels der verallgemeinerten Gauss-Bonnetschen Formel. Man erhält das folgende Ergebnis.

Satz: *Es sei d_g das Produkt der Zähler der g Zahlen B_{2k}/k ($k = 1,2,\ldots,g-1$ und $g/2$) und $2z_g$ die höchste Potenz von 2 unterhalb g. Im Falle $4 \mid g$ ist dann d_g gemeinsamer Nenner aller Fourierschen Koeffizienten $a_g(\mathfrak{T})$, und im Falle $4 \nmid g$ ist $z_g d_g$ gemeinsamer Nenner.*

Es bleibt unentschieden, ob der Faktor z_g wirklich in der Aussage des Satzes nötig ist, und es wird auch nicht behauptet, dass d_g im ersten Falle der genaue Hauptnenner ist. Bekanntlich [9] gehen in d_g nur irreguläre Primzahlen p auf, für welche also nach Kummer die Klassenzahl des Körpers der p-ten Einheitswurzeln durch p teilbar ist.

§ 1. Fouriersche Entwicklung

Für $\mathfrak{T} = 0$ ist trivialerweise $a_g(\mathfrak{T}) = 1$. Es sei $\mathfrak{T} \neq 0$, also vom Range r mit $0 < r \leq n$, und es werde $m - r = f$, $m = 2g$ gesetzt. Es gibt dann eine primitive Matrix $\mathfrak{Q}^{(r,n)}$ und eine positive gerade symmetrische Matrix $\mathfrak{T}_1^{(r)}$, so dass $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1[\mathfrak{Q}]$ wird. Durchläuft $\mathfrak{R}^{(r)}$ ein volles System rationaler symmetrischer Matrizen modulo 1, so gilt nach § 7 von [3] die Formel

$$a_g(\mathfrak{T}) = (-1)^{\frac{gr}{2}} \frac{\varrho_m}{\varrho_f} 2^r |\mathfrak{T}_1|^{\frac{f-1}{2}} \sum_{\mathfrak{R}} e^{\pi i \sigma(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{R})} (\nu(\mathfrak{R}))^{-g}; \tag{3}$$

dabei ist zur Abkürzung

$$\varrho_k = \prod_{l=1}^{k} \frac{\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} \qquad (k = 1,2,\ldots) \tag{4}$$

gesetzt, und $\nu(\mathfrak{R})$ bedeutet das Produkt der Nenner der Elementarteiler von $\mathfrak{R}$. Wegen der absoluten Konvergenz der Eisensteinschen Reihe in (1) ist auch die rechte Seite von (3) absolut konvergent. Für die weitere Umformung kommt es darauf an, die Zahl $(\nu(\mathfrak{R}))^{-g}$ durch einen rechnerisch brauchbaren Ausdruck mit Hilfe verallgemeinerter Gaussischer Summen darzustellen.

Es seien r rationale Zahlen

$$c_k = \frac{u_k}{t_k} \qquad (k = 1,\ldots,r)$$

mit den gekürzten positiven Nennern t_k gegeben, und es sei q irgend ein positiver gemeinschaftlicher Nenner. Durchlaufen die beiden ganzzahligen Variabeln x_k, y_k je ein volles Restsystem modulo q, so wird

$$\sum_{x_k, y_k} e^{2\pi i c_k x_k y_k} = q^2 t_k^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die aus den Elementen x_k und y_k $(k = 1, \ldots, r)$ gebildeten Spalten. Da für jede unimodulare Matrix $\mathfrak{U}^{(r)}$ mit $\mathfrak{x}$ auch $\mathfrak{U}\mathfrak{x}$ ein volles Restsystem modulo q durchläuft, so folgt

$$\sum_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \,(\mathrm{mod}\, q)} e^{2\pi i \mathfrak{x}' \mathfrak{R} \mathfrak{y}} = q^{2r} (\nu(\mathfrak{R}))^{-1},$$

falls $q\mathfrak{R}$ ganz ist. Setzt man noch

$$\mathfrak{S}^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E}^{(g)} \\ \mathfrak{E}^{(g)} & 0 \end{pmatrix}$$

und versteht unter $\mathfrak{K}$ eine variable ganze Matrix mit m Zeilen und r Spalten, so wird also

$$\sum_{\mathfrak{K} \,(\mathrm{mod}\, q)} e^{\pi i \sigma(\mathfrak{S}[\mathfrak{K}] \mathfrak{R})} = q^{mr} (\nu(\mathfrak{R}))^{-g} \qquad (q\mathfrak{R} \text{ ganz}). \tag{5}$$

Diese Vereinfachung einer von mir benutzten Formel wurde von Witt a. a. O. gegeben.

Bei geradem q setze man $\mathfrak{R} = q^{-1}\mathfrak{P}$ und lasse die r Diagonalelemente von $\mathfrak{P}$ unabhängig voneinander die $\frac{1}{2}q$ Restklassen gerader Zahlen modulo q durchlaufen, die übrigen Elemente von $\mathfrak{P}$ jedoch volle Restsysteme modulo q. Dann wird

$$\sum_{\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{K} \,(\mathrm{mod}\, q)} e^{\pi i \sigma(\mathfrak{R}(\mathfrak{S}[\mathfrak{K}] - \mathfrak{T}_1))} = 2^{-r} q^{\frac{r(r+1)}{2}} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_1), \tag{6}$$

wenn $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_1)$ die Lösungsanzahl von

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{K}] \equiv \mathfrak{T}_1 \;(\mathrm{mod}\, q)$$

in modulo q inkongruenten $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Schliesslich möge q eine Folge $q_1, q_2, \ldots$ durchlaufen, in welcher fast alle Elemente durch jede vorgegebene natürliche Zahl teilbar sind. Ersetzt man in (3) die Matrix $\mathfrak{R}$ durch $-\mathfrak{R}$, so ergibt sich nach (5) und (6) die Beziehung

$$a_g(\mathfrak{T}) = (-1)^{\frac{gr}{2}} \frac{\varrho_m}{\varrho_f} |\mathfrak{T}_1|^{\frac{f-1}{2}} \lim_{q \to \infty} \left(q^{\frac{r(r+1)}{2} - mr} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_1) \right). \tag{7}$$

Nun sei g ein Vielfaches von 4, also m durch 8 teilbar. Dann existiert ein Geschlecht positiver gerader quadratischer Formen von m Variabeln mit der Determinante 1, und zwar genau ein solches. Ist $\mathfrak{S}_0^{(m)}$ die Matrix einer Form dieses Geschlechtes, so sind $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}$ nach jedem Modul q äquivalent, und daher gilt auch

$$A_q(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{T}_1) = A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_1). \tag{8}$$

Nach der Massformel [1] ist andererseits

$$\frac{\sum_{k=1}^{h} \frac{A(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{T}_1)}{E(\mathfrak{S}_k)}}{\sum_{k=1}^{h} \frac{1}{E(\mathfrak{S}_k)}} = \frac{\varrho_m}{\varrho_f} |\mathfrak{T}_1|^{\frac{f-1}{2}} \lim_{q \to \infty} \left(q^{\frac{r(r+1)}{2} - mr} A_q(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{T}_1)\right); \tag{9}$$

dabei bedeuten $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_h$ Repräsentanten der sämtlichen verschiedenen Klassen des Geschlechtes von $\mathfrak{S}_0$, ferner ist $A(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{T}_1)$ die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{T}_1$ durch $\mathfrak{S}_k$ und $E(\mathfrak{S}_k)$ die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{S}_k$. Aus (2), (7), (8), (9) folgt das von WITT gefundene Resultat

$$s_g(\mathfrak{Z}) = F(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{Z}) \qquad (4|g) \tag{10}$$

mit

$$F(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^{h} \frac{f(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{Z})}{E(\mathfrak{S}_k)}}{\sum_{k=1}^{h} \frac{1}{E(\mathfrak{S}_k)}}, \tag{11}$$

$$f(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{G}} e^{\pi i \sigma(\mathfrak{S}_k[\mathfrak{G}]\mathfrak{Z})} \tag{12}$$

bei Summation über alle ganzen $\mathfrak{G}^{(m,n)}$.

§ 2. Beweis des ersten Teiles des Satzes

Es laufe $\mathfrak{B}^{(r)}$ über ein volles System linksseitig nicht-assoziierter ganzer Matrizen mit positiven Determinanten, für welche $\mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]$ ganz ist, und es bedeute $B(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}])$ die Anzahl der primitiven Darstellungen von $\mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]$ durch $\mathfrak{S}_k$. Dann ist

$$A(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{T}_1) = \sum_{\mathfrak{B}} B(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]). \tag{13}$$

Durchläuft nun $\mathfrak{U}$ alle Einheiten von $\mathfrak{S}_k$, so erhält man aus irgend einer primitiven Lösung $\mathfrak{C}^{(m,r)}$ von $\mathfrak{S}_k[\mathfrak{C}] = \mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]$ durch die Matrizen $\mathfrak{U}\mathfrak{C}$ insgesamt j verschiedene Darstellungen, wenn j den Index der durch die Bedingung $\mathfrak{U}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}$ erklärten Untergruppe in der vollen Einheitengruppe bedeutet. Man verwende jetzt den Satz von der quadratischen Ergänzung, wie er in Hilfssatz 11 von [1] ausgesprochen ist, wobei dort $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]$ ersetzt werden. Dann wird jene Untergruppe isomorph einer gewissen Untergruppe der Einheitengruppe von $\mathfrak{H}^{(f)}$ und folglich j ein Vielfaches der Zahl $E(\mathfrak{S}_k)/E(\mathfrak{H})$.

Es sei b_k der Nenner der rationalen Zahl B_{2k}/k $(k = 1,2,\dots)$ und

$$\overline{l|} = 2^l b_1 b_2 \dots b_{\left[\frac{l}{2}\right]} \qquad (l = 1,2,\dots). \tag{14}$$

Nach einem Minkowskischen Satze [10] ist dann die Gruppenordnung $E(\mathfrak{H})$ ein Teiler der Zahl $\overline{f|}$. Mit Rücksicht auf (13) erweist sich also $\overline{f|}$ als gemeinschaftlicher Nenner der h Brüche $A(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{T}_1)/E(\mathfrak{S}_k)$. Bezeichnet

$$M(\mathfrak{S}_0) = \sum_{k=1}^{h} \frac{1}{E(\mathfrak{S}_k)}$$

das Mass des Geschlechtes von $\mathfrak{S}_0$, so ist daher zufolge (2), (10), (11), (12) die Zahl $\overline{f|}\, M(\mathfrak{S}_0) a_g(\mathfrak{T})$ ganz.

Zur Berechnung von $M(\mathfrak{S}_0)$ benutzen wir die Minkowskische Massformel

$$\frac{1}{M(\mathfrak{S}_0)} = \frac{\varrho_m}{2} \lim_{q \to \infty} \left(2^{-\omega(q)} q^{-\frac{m(m-1)}{2}} E_q(\mathfrak{S})\right),$$

wobei $\omega(q)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von q bedeutet. Ist q Potenz einer Primzahl p und $a_p = 2^m$ für $p = 2$, $a_p = 1$ für $p \neq 2$, so gilt

$$\tfrac{1}{2} q^{-\frac{m(m-1)}{2}} E_q(\mathfrak{S}) = a_p (1 - p^{-g}) \prod_{l=1}^{g-1} (1 - p^{-2l}) \qquad (m = 2g),$$

also

$$M(\mathfrak{S}_0) = 2^{1-m} \varrho_m^{-1} \zeta(g) \prod_{l=1}^{g-1} \zeta(2l).$$

Nun ist

$$\zeta(2l) = (-1)^{l-1}\frac{(2\pi)^{2l}}{2(2l)!}B_{2l} \qquad (l = 1,2,\ldots)$$

und nach (4) die Zahl

$$\varrho_m = \frac{\pi^g}{\Gamma(g)}\prod_{l=1}^{g-1}\frac{(2\pi)^{2l}}{2\Gamma(2l)},$$

so dass sich die Formel

$$M(\mathfrak{S}_0) = \frac{B_g}{2g}\prod_{l=1}^{g-1}\frac{B_{2l}}{4l} \tag{15}$$

ergibt.

Es werde

$$\left[\frac{f}{2}\right] = c$$

gesetzt. Da dann $c \leq g-1$ ist, so ist zufolge (14) und (15) die Zahl

$$\overline{f}|M(\mathfrak{S}_0) = 2^{-r}\frac{2B_g}{g}\prod_{l=1}^{c}\frac{b_l B_{2l}}{l}\prod_{l=c+1}^{g-1}\frac{B_{2l}}{l} = d_{g,r} \tag{16}$$

ein Teiler der im Wortlaut des Satzes erklärten natürlichen Zahl d_g. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.

§ 3. Anwendung der Massformel für indefinite Formen

Wenn m nicht durch 8 teilbar ist, so existiert nach einem Satze von Witt [8] keine definite gerade quadratische Form mit m Variabeln und der Determinante 1. Aus diesem Grunde werden nun indefinite Formen herangezogen.

Wir betrachten eine Zerlegung $g = 4w + 2t$ mit ganzen nicht-negativen w und t. Im Falle $g \equiv 2 \pmod 4$, der uns weiterhin vorwiegend interessiert, sind dann die Werte $t = 1,3,\ldots,\frac{1}{2}g$ zulässig, und im Falle $g \equiv 0 \pmod 4$ die Werte $t = 0,2,\ldots,\frac{1}{2}g$. Mit der früheren Bedeutung von $\mathfrak{S}_0^{(8w)}$ und $\mathfrak{S}^{(4t)}$ wird anstelle von $\mathfrak{S}_0^{(m)}$ allgemeiner die m-reihige Matrix

$$\mathfrak{S}^* = \begin{pmatrix} \varepsilon\mathfrak{S}_0^{(8w)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}^{(4t)} \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

gebildet. Sie ist ebenfalls symmetrisch, gerade und von der Determinante 1; ihre Signatur ist $8w+2t, 2t$ für $\varepsilon = 1$ und $2t, 8w+2t$ für $\varepsilon = -1$. Die Formel (8) gilt dann auch für $\mathfrak{S}^*$ anstelle von $\mathfrak{S}_0$.

Nach dem Ergebnis meiner Arbeit [2] ist

$$\frac{\mu(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{T}_1)}{\mu(\mathfrak{S}^*)} = \lim_{q \to \infty} \left(q^{\frac{r(r+1)}{2} - mr} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_1)\right) \tag{17}$$

sowie

$$\mu(\mathfrak{S}^*) = \varrho_m M(\mathfrak{S}_0), \tag{18}$$

wenn die Masse $\mu(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{T}_1)$ und $\mu(\mathfrak{S}^*)$ in den dort auf S. 231 und S. 232 erklärten Bedeutungen verstanden werden. Da $\mathfrak{T}_1$ die Signatur $r, 0$ hat, so muss im Falle $\varepsilon = -1$ noch $2t \geq r$ vorausgesetzt werden. Dagegen ist im Falle $\varepsilon = 1$ die entsprechende Voraussetzung $8w + 2t \geq r$ wegen

$$r \leq n < g-1 = m-g-1 < m-2t = 8w+2t$$

von selbst erfüllt. Sind jetzt $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_h$ Repräsentanten der sämtlichen verschiedenen Klassen des Geschlechtes von $\mathfrak{S}^*$, so ist

$$\mu(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{T}_1) = \sum_{k=1}^{h} \sum_{\mathfrak{C}_k} \varrho(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{C}_k) \tag{19}$$

definiert, wobei $\varrho(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{C}_k)$ das Mass einer Darstellung $\mathfrak{S}_k[\mathfrak{C}_k] = \mathfrak{T}_1$ bedeutet und über ein volles System solcher $\mathfrak{C}_k$ summiert wird, die bezüglich der Einheitengruppe von $\mathfrak{S}_k$ nicht-assoziiert sind.

Es sei $\mathfrak{C}_k$ fest gewählt und $\mathfrak{C}_k \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{C}$ primitiv. Mit analoger Bedeutung von $\mathfrak{H}^{(f)}$ wie in § 2 erhalten wir dann nach den Hilfssätzen 18, 17 von [2] und der Formel (110) von [5] die Beziehungen

$$\varrho(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{C}_k) = (\operatorname{abs} \mathfrak{B})^{1-f} \varrho(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{C}), \tag{20}$$

$$\varrho(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{C}) = j |\mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]|^{-f} \varrho(\mathfrak{H}), \tag{21}$$

$$\varrho(\mathfrak{H}) = \tfrac{1}{2} \varrho_a \varrho_b |\mathfrak{T}_1[\mathfrak{B}^{-1}]|^{\frac{f+1}{2}} v(\mathfrak{H}); \tag{22}$$

darin ist $j = j(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{C})$ ein gewisser endlicher Gruppenindex, also eine natürliche Zahl, und $v(\mathfrak{H})$ das Volumen eines Fundamentalbereiches F der Einheitengruppe Γ von $\mathfrak{H}$, ferner $a = m-2t-r$, $b = 2t$ für $\varepsilon = 1$ und $a = 2t-r$, $b = m-2t$ für $\varepsilon = -1$ die Signatur von $\mathfrak{H}$. Im Falle $ab = 0$ ist $\varrho_0 = 1$ und

$v(\mathfrak{H}) = 2/E(\mathfrak{H})$ zu setzen. Weiterhin sei $ab > 0$ bis zum Ende des fünften Paragraphen.

Das Volumen von F ist gemäss den Formeln (103), (104) von [5] und (1), (2), (5) von [6] auf folgende Weise zu berechnen. Wir betrachten den Raum Q aller positiven reellen symmetrischen $\mathfrak{Q}^{(f)}$ mit $\mathfrak{H}^{-1}[\mathfrak{Q}] = \mathfrak{H}^{-1}$, der ab Dimensionen besitzt, wählen darauf einen Fundamentalbereich F bezüglich Γ und führen durch die Gleichung

$$\dot{s}^2 = \tfrac{1}{8}\,\sigma(\dot{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}^{-1}\dot{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}^{-1}) \tag{23}$$

eine Riemannsche Metrik ein. Eine Parameterdarstellung von Q erhält man nach Formel (34) von [4] in der Gestalt

$$\mathfrak{Q} = 2\mathfrak{W}^{-1}[\mathfrak{Y}'\mathfrak{H}] + \mathfrak{H}, \qquad -\mathfrak{H}[\mathfrak{Y}] = \mathfrak{W} > 0 \tag{24}$$

mit variablem reellen $\mathfrak{Y}^{(f,b)}$. Dabei ist zu beachten, dass für beliebiges umkehrbares reelles $\mathfrak{R}^{(b)}$ die Matrizen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{R}$ denselben Punkt $\mathfrak{Q}$ von Q liefern. Indem man noch $\mathfrak{H}$ durch eine reelle Transformation in

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{L}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}^{(a)} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{E}^{(b)} \end{pmatrix}$$

überführt und für $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{Y}$ wieder $\mathfrak{Y}$ schreibt, kann man die Normierung

$$\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}^{(a,b)} \\ \mathfrak{E}^{(b)} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{E}^{(b)} - \mathfrak{X}'\mathfrak{X} > 0$$

treffen, wobei jetzt die Elemente von $\mathfrak{X}$ unabhängige reelle Variable werden. Damit erhalten wir

$$\dot{s}^2 = \sigma\big(\dot{\mathfrak{X}}(\mathfrak{E}^{(b)} - \mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}\dot{\mathfrak{X}}'(\mathfrak{E}^{(a)} - \mathfrak{X}\mathfrak{X}')^{-1}\big) \tag{25}$$

und das entsprechende Volumenelement

$$dv = |\mathfrak{E} - \mathfrak{X}'\mathfrak{X}|^{-\frac{f}{2}}\{d\mathfrak{X}\}.$$

Der Inhalt $v(\mathfrak{H})$ ändert sich seiner Definition nach nicht, wenn die Matrix $\mathfrak{H}$ mit einem von 0 verschiedenen skalaren Faktor multipliziert wird. In der bisherigen Bedeutung waren die Elemente von $\mathfrak{H}$ rationale Zahlen. Zur Untersuchung von $v(\mathfrak{H})$ kann also weiterhin $\mathfrak{H}$ als ganz vorausgesetzt werden.

Es sei Γ_0 die orthogonale Gruppe bezüglich $\mathfrak{H}$, die durch die reellen Lösungen $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}[\mathfrak{F}] = \mathfrak{H}$ erklärt ist. Vermöge (23) und (24) sind die Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{F}\mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{Q} \to \mathfrak{Q}[\mathfrak{F}^{-1}]$ gleichbedeutend und auf Q isometrisch. Da sie ausserdem auf Q transitiv wirken, so ist die zur Metrik (23) gehörige Killing-Lipschitzsche skalare Krümmung $\varkappa$ auf Q konstant.

Ist G eine geschlossene Mannigfaltigkeit mit der durch (23) gegebenen Riemannschen Metrik, so sind bekanntlich [11] [12] [13] ihr Volumen $v(G)$ und ihre Eulersche Charakteristik $\chi(G)$ durch die verallgemeinerte Gauss-Bonnetsche Formel

$$\chi(G) = \pi^{-\frac{ab+1}{2}} \Gamma\left(\frac{ab+1}{2}\right) \varkappa v(G) \tag{26}$$

miteinander verknüpft. Man beachte dabei, dass die Dimensionenzahl ab gerade ist, weil nämlich b es ist. Der Anwendung von (26) auf den Fundamentalbereich F der Einheitengruppe Γ stellen sich nun aber drei Schwierigkeiten entgegen: 1) Es können Fixpunkte für gewisse von $\pm \mathfrak{E}$ verschiedene Elemente von Γ auftreten. 2) Der Bereich F ist in Q nicht kompakt. 3) Die Krümmung $\varkappa$ ist bisher nicht für den vorliegenden Fall bestimmt worden. Wir wollen nun zunächst die dritte Schwierigkeit behandeln.

§ 4. Berechnung der Krümmung

Die direkte Berechnung von $\varkappa$ mittels Verjüngung des Riemannschen Krümmungstensors führt auf kombinatorische Schwierigkeiten. Deswegen wird folgender Kunstgriff verwendet. Es wird die durch (25) gegebene Riemannsche Metrik dadurch abgeändert, dass dort auf der rechten Seite das negative Vorzeichen an beiden Stellen durch das positive ersetzt wird, also nunmehr

$$s^2 = \sigma\left(\dot{\mathfrak{X}}(\mathfrak{E}^{(b)} + \mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}\dot{\mathfrak{X}}'(\mathfrak{E}^{(a)} + \mathfrak{X}\mathfrak{X}')^{-1}\right) \tag{27}$$

erklärt. Entsprechend wird dann $\mathfrak{H}$ durch $-\mathfrak{E}^{(f)}$ ersetzt und Γ_0 durch die gewöhnliche reelle orthogonale Gruppe. Sie wirkt transitiv auf die Grassmannsche Mannigfaltigkeit Q^*, welche von den reellen Matrizen $\mathfrak{Y}^{(f,b)}$ des Ranges b gebildet wird, und diese ist nun aber kompakt. Es ist durch die Untersuchungen von E. CARTAN bekannt und auch nach (25) und (27) durch Angabe des Riemannschen Tensors leicht zu verifizieren, dass die skalare Krümmung bezüglich (27) gleich dem absoluten Betrage von $\varkappa$ ist, wobei sich als Vorzeichen von $\varkappa$ der Wert $(-1)^{\frac{ab}{2}}$ ergibt. Bedeutet dann $\chi(Q^*)$ die Eulersche Charakteristik von Q^* und $v(Q^*)$ den mit dem Volumenelement

$$dv = |\mathfrak{E} + \mathfrak{X}'\mathfrak{X}|^{-\frac{f}{2}}\{d\mathfrak{X}\}$$

berechneten Inhalt von Q^*, so gilt analog zu (26) die Formel

$$\chi(Q^*) = (-1)^{\frac{ab}{2}}\pi^{-\frac{ab+1}{2}}\Gamma\left(\frac{ab+1}{2}\right)\varkappa v(Q^*). \tag{28}$$

Die Bestimmung von $\varkappa$ ist damit auf die von $v(Q^*)$ und $\chi(Q^*)$ zurückgeführt.

Bedeutet P den Raum aller positiven reellen symmetrischen $\mathfrak{P}^{(h)}$, so wird

$$\int\limits_P |\mathfrak{P}|^{\varrho-\frac{h+1}{2}} e^{-\sigma(\mathfrak{P}\mathfrak{R})}\{d\mathfrak{P}\} = \pi^{\frac{h(h-1)}{4}}|\mathfrak{R}|^{-\varrho}\prod_{l=0}^{h-1}\Gamma\left(\varrho-\frac{l}{2}\right) \quad \left(\varrho > \frac{h-1}{2};\ \mathfrak{R}^{(h)} > 0\right).$$

Wählt man hierin speziell

$$h = b, \qquad \varrho = \frac{f}{2}, \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{E}^{(b)} + \mathfrak{X}'\mathfrak{X},$$

so folgt

$$\pi^{\frac{b(b-1)}{4}} v(Q^*)\prod_{l=0}^{b-1}\Gamma\left(\frac{f-l}{2}\right) = \int\limits_{Q^*}\left(\int\limits_P |\mathfrak{P}|^{\frac{a-1}{2}} e^{-\sigma(\mathfrak{P}(\mathfrak{E}+\mathfrak{X}'\mathfrak{X}))}\{d\mathfrak{P}\}\right)\{d\mathfrak{X}\}$$

$$= \pi^{\frac{ab}{2}}\int\limits_P |\mathfrak{P}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\sigma(\mathfrak{P})}\{d\mathfrak{P}\} = \pi^{\frac{ab}{2}+\frac{b(b-1)}{4}}\prod_{l=0}^{b-1}\Gamma\left(\frac{b-l}{2}\right),$$

also

$$v(Q^*) = \frac{\varrho_f}{\varrho_a\varrho_b}, \tag{29}$$

womit das Volumen von Q^* bekannt ist.

Die Charakteristik $\chi(Q^*)$ bestimmt sich nach dem von Hopf und Samelson [14] bewiesenen Satz durch die Anzahl der Fixpunkte, welche eine eigentlich orthogonale Abbildung $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{F}\mathfrak{Y}$ auf Q^* besitzt; dabei ist vorauszusetzen, dass diese Anzahl endlich ist. Wir setzen weiterhin

$$\left[\frac{f}{2}\right] = \left[\frac{a+b}{2}\right] = c, \qquad \frac{b}{2} = d$$

und wählen $\mathfrak{F}$ speziell auf die folgende Art. Wenn r gerade ist, also $c = \frac{f}{2}$, so sei $\mathfrak{F}$ aus c zweireihigen eigentlich orthogonalen Kästchen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_c$ aufgebaut; wenn r ungerade ist, also $c = \frac{f-1}{2}$, so nehme man zu diesen c Kästchen noch das weitere Diagonalelement 1. Zur Bestimmung der Fixpunkte hat man

$$\mathfrak{F}\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}\mathfrak{K}$$

zu setzen, wobei $\mathfrak{Y}$ reell und vom Range b sein soll. Sind die Eigenwerte von $\mathfrak{F}$ alle voneinander verschieden, so muss $\mathfrak{K}$ reell äquivalent einer Matrix sein, die aus d von jenen Kästchen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_c$ zusammengesetzt ist, und $\mathfrak{Y}$ ergibt sich dann eindeutig aus $\mathfrak{K}$. Für die Wahl von d Kästchen hat man nun insgesamt $\binom{c}{d}$ Möglichkeiten, und es folgt also

$$\chi(Q^*) = \binom{c}{d}.$$

Aus (28) und (29) ergibt sich damit die gewünschte Beziehung

$$\pi^{-\frac{ab+1}{2}} \Gamma\left(\frac{ab+1}{2}\right) \varkappa = (-1)^{\frac{ab}{2}} \binom{c}{d} \frac{\varrho_a \varrho_b}{\varrho_f}. \tag{30}$$

Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, dass die zur Bestimmung von $\varkappa$ benutzte Methode auch bei den Wirkungsräumen anderer Lieschen Gruppen verwendet werden kann. Von Interesse ist dabei der Fall der verallgemeinerten oberen Halbebene mit der symplektischen Metrik, die durch

$$\dot{s}^2 = \sigma(\mathfrak{Y}^{-1} \dot{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Y}^{-1} \dot{\bar{\mathfrak{Z}}}) \qquad (\mathfrak{Z}^{(n)} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y};\ \mathfrak{Y} > 0)$$

definiert wird. Legt man vermöge der Abbildung

$$\mathfrak{Z} = i(\mathfrak{E} + \mathfrak{W})(\mathfrak{E} - \mathfrak{W})^{-1}$$

den verallgemeinerten Einheitskreis

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\overline{\mathfrak{W}} > 0 \qquad (\mathfrak{W} = \mathfrak{W}')$$

zugrunde, so wird

$$\dot{s}^2 = 4\sigma\left(\dot{\overline{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}\overline{\mathfrak{W}})^{-1} \dot{\mathfrak{W}}(\mathfrak{E} - \overline{\mathfrak{W}}\mathfrak{W})^{-1}\right). \tag{31}$$

Erklärt man statt dessen die Metrik durch

$$\dot{s}^2 = 4\sigma\left(\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{E} + \mathfrak{W}\overline{\mathfrak{W}})^{-1}\dot{\mathfrak{W}}(\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{W}}\mathfrak{W})^{-1}\right) \tag{32}$$

mit beliebigem komplexen symmetrischen $\mathfrak{W}^{(n)}$, so stehen die zu (31) und (32) gehörigen skalaren Krümmungen K und K^* in der Beziehung

$$(-1)^\nu K = K^* > 0, \tag{33}$$

wobei $\nu = \frac{1}{2}n(n+1)$ gesetzt ist. Mit

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{B}\mathfrak{N}^{-1}, \quad \begin{pmatrix}\mathfrak{N}\\ \mathfrak{B}\end{pmatrix} = \mathfrak{Q}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E}^{(n)} \\ -\mathfrak{E}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{J}$$

wird $\mathfrak{Q}'\mathfrak{J}\mathfrak{Q} = 0$, und die komplexe Matrix $\mathfrak{Q}^{(2n,\, n)}$ besitzt den Rang n. Durch diese homogene Schreibweise wird der Raum W der $\mathfrak{W}$ kompakt und vermöge der Abbildungen $\mathfrak{Q} \to \mathfrak{U}\mathfrak{Q}$ ein Wirkungsraum der Gruppe aller symplektischen unitären $\mathfrak{U}^{(2n)}$. Das gemäss (32) bestimmte Volumenelement ist dann

$$d\omega = 2^{3\nu - n}|\mathfrak{E} + \mathfrak{W}\overline{\mathfrak{W}}|^{-n-1}\{d\mathfrak{W}\},$$

und die Berechnung des Inhaltes von W liefert ein hübsches Beispiel zur Integralrechnung, mit dem Resultat

$$v(W) = \int_W d\omega = 2^{3\nu}\pi^\nu \prod_{l=1}^{n} \frac{l!}{(2l)!}.$$

Der Satz von Hopf und Samelson ergibt andererseits leicht die Eulersche Charakteristik

$$\chi(W) = 2^n,$$

sodass nach der verallgemeinerten Gauss-Bonnetschen Formel

$$\pi^{-\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu + \tfrac{1}{2})K^* = 2^{n-3\nu}\pi^{-\nu}\prod_{l=1}^{n}\frac{(2l)!}{l!} \tag{34}$$

wird. Dadurch lässt sich auch der Wert

$$a_n = (-1)^\nu 2^{\nu-2n}(2\nu)!K$$

ermitteln, dessen allgemeine Bestimmung als expliziter Funktion von n mir bei einer früheren Untersuchung [15] nicht gelungen war. Vermöge (33) und (34) erhalten wir

$$\frac{a_n}{\nu!} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!}{(k-1)!}$$

in Übereinstimmung mit einer Formel, die F. HIRZEBRUCH vor einigen Jahren bei einer mathematischen Konferenz in Princeton, N. J. angegeben und auf komplizierterem Wege bewiesen hat. In [15] ist übrigens, wie schon HIRZEBRUCH bemerkte, der für a_3 ausgerechnete Wert falsch und durch das Vierfache zu ersetzen.

§ 5. Anwendung der Gauss-Bonnetschen Formel auf den Fundamentalbereich der Einheitengruppe

Nachdem die Krümmung $\varkappa$ bestimmt ist, müssen noch die beiden anderen früher erwähnten Schwierigkeiten eliminiert werden.

Es sei q eine natürliche Zahl > 2 und Γ_q die Gruppe aller Elemente $\mathfrak{M}$ von Γ mit $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$. Da $\mathfrak{M}$ ganz ist, so ist dann nach einem Minkowskischen Satze [10] keine Potenz $\mathfrak{M}^k$ $(k = 1,2,\ldots)$ gleich $\mathfrak{E}$, ausser wenn bereits $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ ist. Nun ist Γ diskontinuierlich auf Q, und folglich ist Γ_q fixpunktfrei. Bedeutet j_q den Index von Γ_q bezüglich Γ, so zerfallen die Elemente von Γ in genau j_q verschiedene Restklassen modulo q.

Es sei insbesondere q teilerfremd zu $|\mathfrak{H}|$. Wir betrachten die Gruppe der Einheiten modulo q, die von den inkongruenten ganzen Lösungen $\mathfrak{X}$ der Kongruenz $\mathfrak{H}[\mathfrak{X}] \equiv \mathfrak{H} \pmod{q}$ gebildet wird und die Ordnung $E_q(\mathfrak{H})$ habe. Es ist klar, dass die obigen j_q Restklassen eine Untergruppe der Einheitengruppe modulo q ergeben, und folglich ist $E_q(\mathfrak{H})$ durch j_q teilbar. Wenn wir für q alle zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremden Zahlen > 2 zulassen, so ergibt ein weiterer Satz von MINKOWSKI [10], dass der grösste gemeinsame Teiler der entsprechenden Ordnungen $E_q(\mathfrak{H})$ ein Faktor der Zahl $\overline{f}|$ ist. Also gilt dies auch für den grössten gemeinsamen Teiler der j_q.

Wir müssen nun auf die Konstruktion des Fundamentalbereiches F näher eingehen, wie sie zuerst in [4] ausgeführt wurde. Es sei R der Bereich aller im Minkowskischen Sinne reduzierten reellen positiven $\mathfrak{P}^{(f)}$ mit der festen Determinante $|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{H}|$. Bei unimodularem $\mathfrak{U}^{(f)}$ bedeute $R(\mathfrak{U})$ das durch die Zuordnung $\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}[\mathfrak{U}]$ entstehende Bild von R. Wenn der Durchschnitt von $R(\mathfrak{U})$ und Q nicht leer ist, so heisst $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}^{-1}]$ reduziert. Es gibt dann nur endlich viele verschiedene zu $\mathfrak{H}$ äquivalente reduzierte Matrizen, die mit $\mathfrak{H}_1,\ldots,\mathfrak{H}_v$ bezeichnet seien. Zu $\mathfrak{H}_k$ $(k = 1,\ldots,v)$ wähle man eine feste unimodulare Matrix $\mathfrak{U}_k$ mit $\mathfrak{H}_k[\mathfrak{U}_k] = \mathfrak{H}$ und setze

$$R_k = R(\mathfrak{U}_k) \qquad (k = 1,\ldots,n), \qquad F = \bigcup_k (Q \cap R_k),$$

wodurch F ein Fundamentalbereich auf Q bezüglich der Gruppe Γ wird.

Da $f = m - r \geq g + g - n \geq g + 2 \geq 6$ und $ab \neq 0$ ist, so ist $\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]$ eine Nullform und folglich F nicht kompakt. Es sei δ eine positive Zahl, die nachher gegen 0 streben soll, und p das erste Diagonalelement von $\mathfrak{P}$. Auf R werde der durch die Ungleichung $p \geq \delta$ erklärte Teilbereich $R(\delta)$ betrachtet, der kompakt ist. Geht dann $R(\delta)$ durch die Abbildung $\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}[\mathfrak{U}_k]$ in $R_k(\delta)$ über, so ist auch der Bereich

$$F(\delta) = \bigcup_k \left(Q \cap R_k(\delta)\right)$$

kompakt und

$$\lim_{\delta \to 0} F(\delta) = F.$$

Nun seien $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^*$ zwei Punkte von Q, die bezüglich Γ äquivalent sind, und $\mathfrak{Q}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}^*[\mathfrak{U}^*] = \mathfrak{P}^*$ mit unimodularen $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*$ in R gelegen. Aus der Minkowskischen Definition des Bereiches R folgt dann, dass $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ das gleiche erste Diagonalelement $p = p^*$ haben. Es liegt also $\mathfrak{P}$ genau dann auf dem Randteil $p = \delta$ von $R(\delta)$, wenn $\mathfrak{P}^*$ dies tut, und beide liegen zugleich innerhalb oder ausserhalb von $R(\delta)$. Bedeutet nun $Q(\delta)$ denjenigen Teil von Q, zu dessen Punkten $\mathfrak{Q}$ es äquivalente Punkte $\mathfrak{Q}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{P}$ in $R(\delta)$ gibt, so ist wegen der Endlichkeit von j_q und v der Raum

$$Q_q(\delta)/\Gamma_q = G_q(\delta)$$

kompakt, und seine Randpunkte bestehen genau aus den $\mathfrak{Q}$ mit $p = \delta$. Dieser Raum entsteht aus $\frac{1}{2}j_q$ Bildern von $F(\delta)$, wenn sie an gewissen Rändern geeignet verheftet werden.

Da Γ_q fixpunktfrei ist, so lässt sich auf die berandete Mannigfaltigkeit $G_q(\delta)$ die verallgemeinerte Gauss-Bonnetsche Formel [16] [17] anwenden. So erhalten wir anstelle von (26) die Beziehung

$$\chi(G_q(\delta)) = \pi^{-\frac{ab+1}{2}} \Gamma\left(\frac{ab+1}{2}\right) \varkappa v(G_q(\delta)) + \eta(\delta);$$

dabei ist $\eta(\delta)$ ein Randintegral, dessen Integrand bei isometrischen Abbildungen von Q auf sich invariant bleibt, und $\chi(G_q(\delta))$ bedeutet die innere Eulersche Charakteristik von $G_q(\delta)$, also eine ganze Zahl. Nun ist

$$\lim_{\delta \to 0} v(G_q(\delta)) = \tfrac{1}{2}j_q \lim_{\delta \to 0} v(F(\delta)) = \tfrac{1}{2}j_q v(\mathfrak{H}).$$

Wenn wir noch die Aussage

$$\lim_{\delta \to 0} \eta(\delta) = 0 \tag{35}$$

beweisen können, so folgt, dass die Zahl

$$\tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{ab+1}{2}}\Gamma\left(\frac{ab+1}{2}\right)\varkappa j_q v(\mathfrak{H}) = v_q \tag{36}$$

ganz ist. Zum Nachweise von (32) genügt es aber, ein analoges Randintegral zu betrachten, das bei festem unimodularen $\mathfrak{U}$ über alle reduzierten $\mathfrak{Q}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{P}$ mit $p = \delta$ zu erstrecken ist.

Weiterhin sei $\delta < 1$. Zufolge [4] S. 234–235 und [7] § 13 kann man bei der Integration als Variable die Elemente der dort auf S. 51–53 mit $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ bezeichneten Matrizen einführen. Dabei ist

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1^{(s)} > 0, \quad \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2^{(f-2s)} > 0, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{(f-2s,s)}, \quad \mathfrak{G} = -\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}^{(s)},$$

ferner $0 < s \leq \frac{f}{2}$ und p das erste Diagonalelement von $\mathfrak{H}_1$. Wie aus [7] § 13 ersichtlich wird, lassen sich zwei Punkte von Q stets durch ein derartiges Element von Γ_0 ineinander transformieren, dass dabei die Koordinate p nur mit einem von den sämtlichen anderen Koordinaten unabhängigen Faktor multipliziert wird, es erfährt nämlich insbesondere $\mathfrak{H}_1$ eine Jacobische Transformation. Wegen dieser besonderen Art der Transitivität ergibt sich nun aber, dass der dabei invariante Integrand des noch abzuschätzenden Randintegrales folgendermassen gebildet werden kann. Man nehme das durch [7] (79) erklärte Volumenelement, ersetze darin dp durch p und multipliziere noch mit einem gewissen nur von a, b und s abhängigen positiven Faktor, auf den es jedoch für den Zweck der Restabschätzung (35) nicht ankommt.

Bei der Integration sind $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ gleichmässig in δ beschränkt. Nach der in [7] § 18 verwendeten Überlegung haben wir schliesslich das Integral I von

$$(h_1 \ldots h_s)^{\frac{f}{2}-s-1}(h_1^{s-1}h_2^{s-2}\ldots h_{s-1})h_1 dh_2 \ldots dh_s$$

mit $h_1 = p = \delta$ abzuschätzen, wobei über das Gebiet $\delta < h_2 < h_3 < \ldots < h_s < 1$ integriert wird. Nun ist $f \geq 6$, also

$$h_1^{\frac{f}{2}-1} \leq \delta^2.$$

Substituiert man

$$\frac{h_k}{h_{k+1}} = y_{k-1} \qquad (k = 2,\ldots,s-1), \qquad h_s = y_{s-1},$$

so folgt

$$I \leq \delta^2 \prod_{l=1}^{s-1} \left(\int_0^1 y_l^{\frac{l}{2}(f-l-3)-1} dy_l \right).$$

Wegen

$$f - l - 3 \geq f - s - 2 \geq \begin{cases} s-2 > 0 & (s > 2) \\ 2 & (s = 2) \end{cases}$$

konvergieren die einzelnen einfachen Integrale. Also erhalten wir die Restabschätzungen

$$I = O(\delta^2), \qquad \eta(\delta) = O(\delta^2)$$

und damit das Gewünschte.

Eine ähnliche Abschätzung findet sich für den Fall der Modulgruppe n-ten Grades bei Satake [18], wo aber die Überlegungen nicht einwandfrei durchgeführt worden sind.

§ 6. Schluss des Beweises

Zu Beginn des vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass der grösste gemeinsame Teiler aller Zahlen j_q mit $q > 2$ und $(q,|\mathfrak{H}|) = 1$ in $\overline{f}|$ aufgeht. Ferner ist die in (36) erklärte Zahl v_q ganz. Zufolge (19), (20), (21), (22), (30) ist dann

$$\left(\frac{c}{d}\right) \overline{f}| \varrho_f^{-1} |\mathfrak{T}_1|^{\frac{f-1}{2}} \mu(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{T}_1)$$

ganz, also schliesslich nach (7), (14), (15), (16), (17), (18) auch

$$a_g(\mathfrak{T}) \left(\frac{c}{d}\right) 2^{-r} \frac{2B_g}{g} \prod_{k=1}^{c} \frac{b_k B_{2k}}{k} \prod_{l=c+1}^{g-1} \frac{B_{2l}}{l} = a_g(\mathfrak{T}) \left(\frac{c}{d}\right) d_{g,r} \tag{37}$$

eine ganze Zahl. Dabei wurde $ab > 0$ vorausgesetzt. Im Falle $ab = 0$ ist in (22) für $v(\mathfrak{H})$ der Wert $2/E(\mathfrak{H})$ zu setzen, und dann kann man mit der in § 2 benutzten direkten Schlussweise feststellen, dass $a_g(\mathfrak{T}) d_{g,r}$ ganz ist; ferner ist dafür $\left(\frac{c}{d}\right) = 1$.

Zum Beweise des Satzes kann weiterhin $g \equiv 2 \pmod 4$ angenommen werden. Es ist $c = \left[\frac{f}{2}\right]$ und $d = \frac{b}{2}$; dabei sind für $\varepsilon = 1$ die Werte $d = t = 1, 3, \ldots, \frac{g}{2}$ zulässig und für $\varepsilon = -1$ die Werte $d = g - t \leq g - \frac{r}{2}$. Ist nun $r \equiv 2 \pmod 4$, so kann man speziell $\varepsilon = -1$, $t = \frac{r}{2}$, $a = ab = 0$ wählen. Ist $r \equiv 1 \pmod 4$, so nehme man entsprechend $\varepsilon = -1$, $t = \frac{r+1}{2}$, $d = g - \frac{r+1}{2} = c$, also $\binom{c}{d} = 1$. Ist $r \equiv 0$ oder $3 \pmod 4$, so ist c gerade, und dann nehme man für d sämtliche mit $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ zulässigen Werte, also $d = 1, 3, \ldots, c-3, c-1$. Enthält nun die gerade Zahl c eine ungerade Primzahl p zur genauen Potenz p^k $(k > 0)$, so ist der binomische Koeffizient $\binom{c}{d}$ für $d = p^k$ zu p teilerfremd. Bei $p = 2$ folgt leicht, dass die Zahlen $\binom{c}{1}, \binom{c}{3}, \ldots, \binom{c}{c-1}$ alle durch 2^k teilbar sind, während aber c nicht durch 2^{k+1} teilbar ist. Also ist dann 2^k der grösste gemeinsame Teiler jener binomischen Koeffizienten, und in der Aussage bei (37) kann daher $\binom{c}{d}$ durch 2^k ersetzt werden. Da $r \geq 1$ ist, so folgt jetzt die restliche Behauptung des Satzes.

Es wäre wünschenswert, für den Satz auch im Falle $g \equiv 2 \pmod 4$ einen einfacheren Beweis zu geben, doch ist mir dies nicht gelungen. Von gewissem Interesse dürfte noch folgende Bemerkung sein. Indem man die algebraischen Beziehungen zwischen den Modulformen $s_g(\mathfrak{Z})$ benutzt, kann man den Eisensteinschen Satz über die Potenzreihen algebraischer Funktionen sinngemäss übertragen und insbesondere zeigen, dass auf grund des ersten Teiles unseres Satzes auch im Falle $g \equiv 2 \pmod 4$ nur endlich viele verschiedene Primzahlen in den Nennern aller $a_g(\mathfrak{T})$ bei festem g auftreten können. Die Beschränktheit der Nenner ergibt sich aber auf diesem Wege nicht.

Literatur

[1] SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. of Math. 36, 527–606 (1935).

[2] SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen II. Ann. of Math. 37, 230–263 (1936).

[3] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. 116, 617–657 (1939).

[4] SIEGEL, C. L.: Einheiten quadratischer Formen. Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 13, 209–239 (1940).

[5] SIEGEL, C. L.: On the theory of indefinite quadratic forms. Ann. of Math. 45, 577–622 (1944).

[6] SIEGEL, C. L.: Some remarks on discontinuous groups. Ann. of Math. 46, 708–718 (1945).

[7] SIEGEL, C. L.: Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen. Publ. Math. Soc. Japan 5, VII + 69 S. (1959).

[8] WITT, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, 323–337 (1941).

[9] JENSEN, K. L.: Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske Tal. Nyt Tidskr. for Mat. B 26, 73–83 (1915).

[10] MINKOWSKI, H.: Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. Journ. reine angew. Math. 101, 196–202 (1887).

[11] ALLENDOERFER, C. B.: The Euler number of a Riemannian manifold. Amer. J. Math. 62, 243–248 (1940).

[12] FENCHEL, W.: On total curvatures of Riemannian manifolds I. Journ. London Math. Soc. 15, 15–22 (1940).

[13] CHERN, S.-S.: A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann. of Math. 45, 747–752 (1944).

[14] HOPF, H. und SAMELSON, H.: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. Comm. Math. Helv. 13, 240–251 (1941).

[15] SIEGEL, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. 65, 1–86 (1943).

[16] ALLENDOERFER, C. B. and WEIL, A.: The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. Trans. Amer. Math. Soc. 53, 101–129 (1943).

[17] CHERN, S.-S.: On the curvatura integra in a Riemannian manifold. Ann. of Math. 46, 674–684 (1945).

[18] SATAKE, J.: The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds. J. Math. Soc. Japan 9, 464–492 (1957).

Indleveret til Selskabet den 6. marts 1964.
Færdig fra trykkeriet den 24. november 1964.