Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Matematisk-fysiske Meddelelser, bind **30**, nr. 12

Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, no. 12 (1955)

DEDICATED TO PROFESSOR NIELS BOHR ON THE OCCASION OF HIS 70TH BIRTHDAY

DEN KLASSISKE MEKANIK I GEOMETRISK BESKRIVELSE

AF

MOGENS PIHL

With an English Summary

København 1955
i kommission hos Ejnar Munksgaard

INDHOLD

Printed in Denmark
Bianco Lunos Bogtrykkeri A-S

Indledning.

Et væsentligt træk i den moderne matematiske fysik er indsigten i den *geometriske udtryksmaades rige muligheder.* En indsigt, som jo ogsaa i stedse mere vidtgaaende grad præger den rene matematik. Og samtidig med denne voksende brug af geometriske udtryksmaader i den matematiske formalisme er vi gennem den almindelige relativitetsteoris beskrivelse af gravitationsfeltet — og de forhaabninger, denne »geometrisering« har givet anledning til — blevet stillet overfor problemet om det *fysiske rums struktur.*

Begge disse tendenser — der ikke skarpt kan adskilles — kan allerede skimtes indenfor den klassiske fysik, og, som det saa ofte er tilfældet indenfor videnskabens historie, har ogsaa her de moderne synspunkter bevirket, at man ser paa visse tidligere antydninger i denne retning med større forstaaelse og varmere sympati, end de oprindeligt mødte. Der er her tale om en sympati, som ikke sjældent i fysikkens historie har givet anledning til en noget misforstaaet proklamering af »forløberskaber« for de traditionelt anerkendte banebrydere, hvorved fortolkningen af de gamles udsagn er gaaet langt udover det historisk mulige*. Men trods denne risiko for at se det tidligere med nutidens briller, vil vi alligevel i det følgende forsøge at minde om, hvorledes den moderne fysiks geometriske synspunkter ogsaa kan findes paa et lidt tidligere tidspunkt af fysikkens udvikling, idet vi samtidig vil antyde den pædagogiske hjælp, den moderne formalisme kan yde i beskrivelsen af de klassiske, os helt fortrolige problemstillinger.

* Et velkendt eksempel herpaa er P. DUHEMS overvurdering af en vis — tidligere ganske vist helt overset — middelalderlig tankeverdens paastaaede foregriben af den heftige udvikling i mekanikkens historie, vi sædvanligt — og med megen ret — knytter til GALILEIS navn.

Hvad angaar den *formelle* brug af geometriske udtryksmaader, er det i særdeleshed den *klassiske mekaniks variationsprincipper*, som i denne forbindelse har været af betydning. Klarest træder denne sammenhæng mellem geometri og variationsregning vel frem i en berømt afhandling af P. FINSLER [4], i hvilken der fremsættes en saa almindelig geometri, at et forelagt variationsprincip simpelthen fortolkes som et problem om at finde geodætiske kurver i et rum med en passende metrik, idet man altsaa indretter denne metrik efter variationsprincippet. En tanke, der har mange forløbere, og som f. eks. allerede LIOUVILLE i forbindelse med mekanikkens problemstilling havde været inde paa — som den første spire kan maaske nævnes EULERS paavisning af, at den kraftfri bevægelse af et punkt paa en glat flade foregaar med konstant hastighed langs geodætiske kurver paa fladen. Hos FINSLER og hans mange efterfølgere førte denne indstilling til meget vidtgaaende geometriske generalisationer, hvor det dog var muligt at eftervise mange fra den almindelige geometri fortrolige forhold. I særdeleshed tillader denne »geometrisering« af variationsregningen en smuk fremstilling af de til variationsproblemerne hørende *integrationsteorier* — den Hamilton-Jacobiske teori i mekanikken — og der bestaar her en meget nær overensstemmelse mellem denne geometriske betragtningsmaade og den af HAMILTON indførte *optiske analogi* til behandlingen af saadanne spørgsmaal i mekanikken.

Men det er velkendt (se f. eks. J. L. SYNGE [11]), at den ved relativitetsteorien betingede beskæftigelse med de mere specielle *Riemannske rum* ogsaa viste sig at være af stor betydning for beskrivelsen af den klassiske mekanik, idet man lader den ved den kinetiske energi bestemte kvadratiske form i de generaliserede hastigheder fastlægge metrikken i det til det betragtede mekaniske system hørende konfigurationsrum, hvis koordinater er systemets generaliserede koordinater. Det er dog ikke muligt med denne mere specielle metrik at reducere bevægelseskurverne i dette rum til geodætiske kurver, der gennemløbes med konstant hastighed. Men vi vil i det følgende vise, at det gennem indførelsen af en ekstra koordinat — en saakaldt cyklisk koordinat — er muligt at foretage en saadan reduktion til *inertiens lov* uden at forlade den ved den Riemannske metrik bestemte form for geometri. Det drejer sig her om en ubetydelig drejning af en tanke, som først klart blev formuleret af J. J. THOMSON, og som i særlig grad ligger til grund for H. HERTZ' bestræbelser paa at eliminere kraftbegrebet i mekanikken.

Med hensyn til spørgsmaalet om det *fysiske rums struktur* er der jo her tale om et problem, som rejste sig, *saasnart* de ikke-euklidiske geometrier var erkendt som tankemuligheder. Vi skal her nøjes med at anføre senere udtalelser af RIEMANN og CLIFFORD, som i særlig grad viser en klar forstaaelse af denne problemstilling.

I det berømte habilitationsskrift »*Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*« skriver RIEMANN [8]: *Die Fragen über das Unmessbargrosse sind für die Naturerklärung müssige Fragen. Anders verhält es sich aber mit den Fragen über das Unmessbarkleine. Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen in's Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntnis ihres Causalzusammenhangs. Die Fortschritte der letzten Jahrhunderte in der Erkenntniss der mechanischen Natur sind fast allein bedingt durch die Genauigkeit der Construktion, welche durch die Erfindung der Analysis des Unendlichen und die von* ARCHIMED, GALILÄI *und* NEWTON *aufgefundenen einfachen Grundbegriffe, deren sich die heutige Physik bedient, möglich geworden ist. In den Naturwissenschaften aber, wo die einfachen Grundbegriffe zu solchen Construktionen bis jetzt fehlen, verfolgt man, um den Causalzusammenhang zu erkennen, die Erscheinungen in's räumlich Kleine, so weit es das Mikroskop nur gestattet. Die Fragen über die Massverhältnisse des Raumes im Unmessbarkleinen gehören also nicht zu den müssigen. — Setzt man voraus, dass die Körper unabhängig vom Ort existiren, so ist das Krümmungsmass überall constant, und es folgt dann aus den astronomischen Messungen, dass es nicht von Null verschieden sein kann; jedenfalls müsste sein reciprocer Werth eine Fläche sein, gegen welche das unsern Teleskopen zugängliche Gebiet verschwinden müsste. Wenn aber eine solche Unabhängigkeit der Körper vom Ort nicht stattfindet, so kann man aus den Massverhältnissen im Grossen nicht auf die im Unendlichkleinen schliessen; es kann dann in jedem Punkte das Krümmungsmass in drei Richtungen einen beliebigen Werth haben, wenn nur die ganze Krümmung jedes messbaren Raumtheils nicht merklich von Null verschieden ist; noch complicirtere Verhältnisse können eintreten, wenne die vorausgesetzte Darstellbarkeit eines*

Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades nicht stattfindet. Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen. — Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes zusammen. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden. — Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrungen bewährten Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.«

RIEMANNS habilitationsforelæsning gjorde et stærkt indtryk paa den unge, engelske matematiker W. K. CLIFFORD, som oversatte den til Engelsk og offentliggjorde den i *Nature*. I en lille note fra 1876 skriver han [CLIFFORD 1]:

Riemann has shown that as there are different kinds of lines and surfaces, so there are different kinds of spaces of three dimensions; and that we can only find out by experience to which of these kinds the space in which we live belongs. In particular, the axioms of plane geometry are true within the limits of experience on the surface of a sheet of paper, and yet we know that the sheet *is really covered with a number of small ridges and furrows, upon which (the total curvature not being zero) these axioms are not true. Similarly, he says although the axioms of solid geometry are true within the limits of experiment for finite portions of our space, yet we have no reason to conclude that they are true for very small portions; and if any help can be got thereby for the explanation of physical phenomena, we may have reason to conclude that they are not true for very small portions of space. I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact*

(1) *That small portions of space are in fact of a nature analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely that the ordinary laws of geometry are not valid in them.*

(2) *That this property of being curved or distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.*

(3) *That this variation of the curvature of space is what really happens in that phenomena we call the motion of matter, being ponderable or etherial.*

(4) *That in the physical world nothing else takes place but this variation, subject (possibly) to the laws of continuity.*

I am endeavouring in a general way to explain the laws of double refraction on this hypothesis, but have not yet arrived at any results sufficiently decisive to be communicated.

Og i den velkendte, populære bog *The Common Sense of the Exact Sciences* vender han i et afsnit om *The Bending of Space* tilbage til problemet og skriver her [CLIFFORD 2]:

We may . . . ask . . . whether we may not . . . be treating merely as physical variations effects which are really due to changes in the curvature of our space; whether, in fact, some or all of those causes which we term physical may not be due to the geometrical construction of our space.

Og lidt senere:

We may conceive our space to have everywhere a nearly uniform curvature, but that slight variations of the curvature may occur from point to point, and themselves vary with the time. These variations of the curvature with the time may produce effects which we not unnaturally attribute to physical causes independent of the geometry of our space. We might even go so far as to assign to this *variation of the curvature of space "what really happens in that phenomena which we term the motion of matter"*.

Desværre findes intetsteds antydninger af, hvorledes CLIFFORD har tænkt sig disse tanker udformet til en matematisk teori, men af det citerede fremgaar tydeligt, at han har været helt klar over de muligheder, vi nu betegner med ordene »fysikkens geometrisering«.

Vi vil nu i det følgende gøre rede for, hvorledes det er muligt at give en geometrisk beskrivelse af den klassiske mekanik, idet vi indleder med en kortfattet og til formaalet tillempet fremstilling af de træk af den helt almindelige geometri — den Finslerske geometri — vi vil faa brug for. Der bliver her tale om rent *formelle* og den moderne fysiker i det væsentlige fortrolige forhold. Den her angivne vej tillader en i pædagogisk henseende lejlighedsvis frugtbar anvendelse af geometriske udtryksmaader, men de anstillede betragtninger er uden betydning for forstaaelsen af problemet om det fysiske (3-dimensionale) rums struktur. *Ethvert felt* kan i denne beskrivelse opfattes som en egenskab ved rummets metriske struktur, saaledes at det ikke er muligt ad denne vej at diskriminere geometrisk mellem de forskellige felter — tyngdefeltet og det elektromagnetiske felt — i den forstand, at disse opfattes som udtryk for forskellige geometriske træk.

I. Geometriske forudsætninger.

Et ved koordinaterne x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, bestemt n-dimensionalt rum siges at være *Finslersk*, saafremt der til hvert punkt x^i og hver kontravariant vektor a^i gives et af valget af koordinatsystem uafhængigt tal $M(x^i, a^i)$, som er 0, dersom alle $a^i = 0$, og ellers er positivt, og for hvilket $M(x^i, \alpha a^i) = \alpha M(x^i, a^i)$, $\alpha > 0$, d. v. s. at invarianten M skal være *positiv homogen af første grad* i a^i, saaledes at

$$\frac{\partial M}{\partial a^i} a^i = M.$$

Invarianten

$$L = \frac{1}{2} M^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial a^i} a^i = \frac{1}{2} a_i a^i$$

er da positiv homogen af anden grad i a^i og betegnes som den *metriske fundamentalinvariant*. Størrelserne

$$a_i = \frac{\partial L(x^i, a^i)}{\partial a^i}$$

transformeres som komponenterne af en kovariant vektor: den til a^i hørende kovariante vektor. Til αa^i hører αa_i, men i almindelighed vil den til $a^i + b^i$ hørende kovariante vektor ikke være $a_i + b_i$. Og ligeledes vil i almindelighed det *skalare produkt* $a^i b_i$, der er en invariant, ikke være lig med $a_i b^i$. Man beviser let, at den til $a^i + b^i$ hørende kovariante vektor er $a_i + b_i$, samt at $a^i b_i = a_i b^i$, hvis og kun hvis den metriske fundamentalinvariant er af formen

$$L = \frac{1}{2} g_{ik}\, a^i a^k,$$

hvor g_{ik} er komponenterne af en kovariant tensor af anden orden, kun afhængig af koordinaterne x^i. Rummet siges da, som bekendt, at være *Riemannsk*.

Ved den *numeriske værdi* eller *længden* af den kontravariante vektor a^i forstaas invarianten

$$|a^i| = \sqrt{a^i a_i} = \sqrt{2L} = M(x^i, a^i).$$

Er $|a^i| = 1$, siges a^i at være en kontravariant *enhedsvektor*. Vi forudsætter, at der til hver kovariant vektor findes en entydig bestemt kontravariant vektor, hvortil den svarer, og ved den numeriske værdi af en kovariant vektor forstaas da den numeriske værdi af den kontravariante vektor, hvortil den svarer. Altsaa $|a_i| = |a^i|$.

Er $a^i b_i = 0$, siges den kontravariante vektor a^i at *staa vinkelret* paa den kovariante vektor b_i. Kun for Riemannske rum vil da den kontravariante vektor b^i staa vinkelret paa den kovariante a_i.

Invarianten M tillader nu umiddelbart indførelsen af *buelængder:* er $x^i = x^i(t)$ en differentiabel kurve, hvor t er en parameter, vil vi ved buelængden fra det ved t_1 til det ved t_2 bestemte punkt forstaa integralet

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} M(x^i, \dot{x}^i)\, dt, \quad \text{hvor} \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt},$$

og man ser straks, at et parameterskifte ikke ændrer buelængden, da M er homogen af første grad i $\dot{x}^i$. Iøvrigt er $\dot{x}^i$ en kontravariant vektor: den til parameteren t hørende *hastighed*. Specielt er for den naturlige parameterfremstilling (hvor buelængden til et variabelt punkt er parameteren) hastighedsvektoren

$$r_i = \mathring{x}^i = \frac{dx^i}{ds}$$

en enhedsvektor:

$$M(x^i, \mathring{x}^i) = 1,$$

kaldet *retningsvektoren*. Af

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = r_i \frac{ds}{dt}$$

ses da straks, at $|\dot{x}| = \frac{ds}{dt}$.

Størrelserne $\ddot{x}^i$ er ikke vektorkomponenter. Derimod ses let, at de »Lagrangeske afledede«

$$a_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i}, \; L = L(x^i, \dot{x}^i)$$

er komponenterne af en kovariant vektor, kaldet den til t hørende *akceleration*. Akcelerationen hørende til det naturlige parametervalg betegnes som *krumningsvektoren:*

$$k_i = \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \mathring{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i}, \; L = L(x^i, \mathring{x}^i).$$

Det ses let, at $r^i k_i = 0$. Den reciproke værdi af $|k_i|$ kaldes for *krumningsradius*. For en vilkaarlig parameter t kan k_i ogsaa bestemmes som

$$k_i = \frac{ds}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial M}{\partial x^i}\right\}, \; M = M(x^i, \dot{x}^i).$$

Ved elementære regninger under hensyntagen til, at L er homogen af anden orden i $\dot{x}^i$, paavises umiddelbart den fortrolige kinematiske relation:

$$a_i = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k_i + \frac{d^2 s}{dt^2} r_i,$$

hvor r_i er den til retningsvektoren hørende kovariante vektor. Af $r^i k_i = 0$ fremgaar, at $a_i = 0$ medfører:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \quad \text{og} \quad k_i = 0.$$

I det Riemannske rum er da ogsaa

$$a^i = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k^i + \frac{d^2 s}{dt^2} r^i,$$

hvor a^i og k^i er de til akceleration og krumningsvektor hørende kontravariante vektorer. I eksistensen af denne kendte kinematiske relation kan vi søge berettigelsen af ovennævnte definitioner paa akceleration og krumning.

Rette linjer er nu kurver, der overalt har krumningen 0. Og af det ovennævnte fremgaar da, at disse kurver er ekstremaler til variationsproblemet:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}^i)\, dt = 0$$

og til problemet:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} M(x^i, \dot{x}^i)\, dt = 0, \text{ d.v.s. } \delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0.$$

II. Potentialfrie, tidsuafhængige systemer.

Vi begynder med at erindre om det velkendte forhold, at et dynamisk system, der er underkastet holonome, tidsuafhængige baand, og hvori ikke virker andre kræfter end de fra baandene hidrørende reaktioner, kan beskrives ved hjælp af et variationsprincip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_0 \, dt = 0,$$

hvor t er tiden, og hvor den Lagrangske funktion er af formen

$$L_0 = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k,$$

saaledes at størrelserne g_{ik} udelukkende er funktioner af de generaliserede koordinater x^i. Af de til variationsprincippet hørende differentialligninger

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L_0}{\partial x^i} = 0$$

følger straks

$$\text{Energien } H = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L_0 = L_0 = \text{konst.},$$

og L_0 betegnes som systemets kinetiske energi = totalenergien H. L_0 er positiv-definit i $\dot{x}$'erne.

Ved g_{ik} er fastlagt en Riemannsk metrik i det ved koordinaterne x^i bestemte *konfigurationsrum:*

$$ds^2 = \frac{1}{2} g_{ik} \, dx^i \, dx^k,$$

hvor ds er bueelementet, og man har da for det dynamiske systems baner i dette rum

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = L_0,$$

saaledes at systempunktets hastighed altsaa er *konstant.*

Endvidere har vi for akcelerationen

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = a_i = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k_i + \frac{d^2 s}{dt^2} r_i = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k_i,$$

eller

$$k_i = 0,$$

hvoraf ses, at banekurverne er *rette linjer.*

Vi har hermed bevist, at det systemet beskrivende systempunkt i konfigurationsrummet bevæger sig langs rette linjer med konstant hastighed. Hvilken velkendte lov kan karakteriseres som en *generalisation af inertiens lov.*

III. Tidsuafhængige systemer med skalart potential.

Dersom et dynamisk system udover reaktionskræfterne fra de holonome, tidsuafhængige baand er underkastet kræfter, der kan afledes af et tidsuafhængigt, skalart potential, er dets adfærd bestemt ved et variationsprincip som før, men med en Lagrangefunktion af formen

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + \frac{1}{2} g(x^i) = L_0 + \frac{1}{2} g.$$

Energien er her

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L = L_0 - \frac{1}{2} g,$$

og den er ligeledes konstant. Størrelsen $-\frac{1}{2} g$ er systemets potentielle energi og L_0 den kinetiske energi, der er positiv definit i $\dot{x}$'erne.

De til variationsprincippet hørende Lagrangeske ligninger kan skrives paa formen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L_0}{\partial x^i} = \frac{\partial \frac{1}{2} g}{\partial x^i},$$

og lader vi som før den kinetiske energi $L_0(x^i, \dot{x}^i)$ fastlægge den metriske fundamentalinvariant, har vi da

$$akcelerationen = a_i = \frac{\partial \frac{1}{2} g}{\partial x^i} = kraften.$$

Vi indfører nu en ved

$$L' = \psi^2 L_0, \; M' = \psi M_0, \; \psi = \psi(x^i)$$

bestemt ny metrik og benytter som parameter ikke buelængden u i den nye metrik, men buelængden s i den oprindelige metrik.

Af

$$u = \int_{s_0}^{s} M'(x^i, \mathring{x}^i)\, ds, \quad \mathring{x}^i = \frac{dx^i}{ds}$$

følger da

$$\frac{du}{ds} = M'(x^i, \mathring{x}^i) = \psi M_0(x^i, \mathring{x}^i) = \psi,$$

idet

$M_0(x^i, \mathring{x}^i) = |\mathring{x}^i| = 1$ (nummerisk værdi i den oprindelige metrik).

Ifølge det foregaaende er krumningsvektoren k_i' i den nye metrik givet ved

$$k_i' = \frac{du}{ds}\left\{\frac{d}{ds}\frac{\partial M_i'(x^i, \mathring{x}^i)}{\partial \mathring{x}^i} - \frac{\partial M'}{\partial x^i}\right\} = \psi\left\{\frac{d}{ds}\frac{\partial (M_0\psi)}{\partial \mathring{x}^i} - \frac{\partial (M_0\psi)}{\partial x^i}\right\} =$$

$$\psi^2\left\{\frac{d}{ds}\frac{\partial M_0}{\partial \mathring{x}^i} - \frac{\partial M_0}{\partial x^i}\right\} + \psi\frac{\partial M_0}{\partial \mathring{x}^i}\frac{d\psi}{ds} - \psi M_0\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \psi^2 k_i + \psi\frac{d\psi}{ds}r_i - \psi\frac{\partial \psi}{\partial x^i},$$

idet

$$r_i = \frac{\partial L}{\partial \mathring{x}^i} = M_0\frac{\partial M}{\partial \mathring{x}^i} = \frac{\partial M}{\partial \mathring{x}^i}, \quad \text{da} \quad M(x^i, \mathring{x}^i) = |\mathring{x}^i| = 1.$$

Sammenholdes dette udtryk for k_i' med

$$a_i = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k_i + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) r_i = \frac{\partial \frac{1}{2} g}{\partial x^i}$$

faas

$$k_i' = \left\{\psi^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\} k_i + \left\{\psi\frac{d\psi}{ds} - \frac{d^2 s}{dt^2}\right\} r_i - \left\{\psi\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \frac{1}{2} g}{\partial x^i}\right\}.$$

Tager vi kun saadanne banekurver i betragtning, der hører til samme værdi E af energien, altsaa saadanne for hvilke

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L_0 = E + \frac{1}{2} g,$$

og sættes

$$\psi^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \text{ dvs. } \psi = \sqrt{E + \frac{1}{2}g} = \frac{ds}{dt},$$

faas da

$$k_i' = 0.$$

I den nye metrik vil altsaa *de til samme energi hørende banekurver være rette linjer.* Men den hastighed

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \psi^2 = E + \frac{1}{2}g,$$

hvormed disse banekurver gennemløbes, vil *ikke* være konstant. Det er altsaa ikke lykkedes at redde hele inertiens lov paa denne maade.

Det her fremførte er selvfølgelig ikke andet end det velkendte *Maupertuiske princip*

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{E + \frac{1}{2}g}\, ds = 0,$$

der først blev helt korrekt formuleret af Jacobi.

Fortolker vi i den geometriske optiks aand $\sqrt{E + \frac{1}{2}g}$ som *brydningsforhold n* i det ved den oprindelige metrik bestemte rum, er dette variationsprincip analogt med det Fermatske princip for isotrope legemer:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} n ds = 0.$$

For dynamiske systemer, hvori ogsaa optræder *vektorpotentialer*, altsaa hvis Lagrangefunktion er af formen

$$L = \frac{1}{2} g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k + g_i\, \dot{x}^i + \frac{1}{2} g,$$

er det da muligt at udvide den her anførte optiske analogi, idet saadanne systemer svarer til *anisotrope*, optiske medier. Imidlertid kan man — som vi nu skal se — ogsaa gaa en anden vej, idet man indfører en ny generaliseret koordinat, altsaa udvider systemets dimension med 1.

IV. Konservative systemers geometrisering gennem indførelsen af en ny koordinat.

Det drejer sig her om anveldelsen af en oprindeligt af MAXWELL og LORD KELVIN [W.THOMSON 14] antydet tanke, ifølge hvilken former for potentiel energi skulle kunne fortolkes som hidrørende fra kinetisk energi af »skjulte« legemers bevægelse. Senere er denne tanke i almindelig form fremsat af J.J.THOMSON [13] i dennes inspirerende bog *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry.* Vi gengiver her J. J. THOMSONS betragtninger med den trivielle tilføjelse, at vi ogsaa tager sigte paa problemer med *vektorpotential.*

Udgangspunktet er den velkendte *Routhske transformation:* hvis de generaliserede koordinater deles i to grupper x^i, $i = 1, 2, \ldots l$, og y^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, og hastighederne $\dot{y}^\alpha$ udtrykkes som funktioner af x^i, y^α, $\dot{x}^i$ og de ved ligningerne

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\alpha}$$

definerede *impulser* p_α, vil systemets bevægelse være bestemt ved differentialligningerne

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{(»Lagrangeligningerne«)}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}^\alpha &= -\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha &= \frac{\partial R}{\partial y^\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \text{(»Hamiltonligningerne«)},$$

hvor den Routhske funktion

$$R = L - p_\alpha \dot{y}^\alpha$$

skal opfattes som funktion af x^i, y^α, $\dot{x}^i$ og p_α.

Er nu systemet saaledes beskaffent, at dets potentielle energi er nul, kan dets Lagrangefunktion skrives som

$$L = \frac{1}{2} g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k + g_{i\alpha}\, \dot{x}^i \dot{y}^\alpha + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta$$

med de til $\dot{y}^\alpha$ hørende impulser

$$p_\alpha = g_{i\alpha}\,\dot{x}^i + g_{\alpha\beta}\,\dot{y}^\beta$$

og den Routhske funktion

$$R = L - p_\alpha\,\dot{y}^\alpha = \frac{1}{2}\,g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,\dot{y}^\alpha\,\dot{y}^\beta .$$

Og antager vi yderligere, at koordinaterne y^α er *cykliske* (ogsaa kaldet *ignorable*), altsaa at L kun er afhængig af x'erne, $\dot{x}$'erne og $\dot{y}$'erne, men uafhængig af y'erne, vil ifølge de ovennævnte ligninger impulserne p_α være konstante. Da $\dot{y}^\alpha$ kan skrives paa formen

$$\dot{y}^\alpha = g_i^\alpha\,\dot{x}^i + g^\alpha,\ [g_i^\alpha \text{ og } g^\alpha \text{ funktioner af } x^\alpha \text{ og } p_\alpha],$$

bliver R af typen

$$R = \frac{1}{2}\,\gamma_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k + \gamma_i\,\dot{x}^i + \frac{1}{2}\,\gamma,$$

hvor alle γ'erne er funktioner af x'erne og de konstante p'er. For fastlagte værdier af p'erne kan det ved de generaliserede koordinater x^i bestemte delsystem da udelukkende beskrives ved de Lagrangeske ligninger

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial R}{\partial x^i} = 0,\ R = R\,(x^i,\,\dot{x}^i,\,p_\alpha = \text{konst.})$$

og altsaa karakteriseres som et dynamisk system med Lagrange-funktionen R, altsaa et system med skalart og vektoriel potential.

Der gives saaledes former for potentiel energi, som kan fortolkes som hidrørende fra bevægelser i mere omfattende potentialfrie systemer, hvor legemerne kun er bundet af *geometriske baand*.

Det var H. Hertz' [5] grundlæggende tanke, at *alle* i naturen forekommende bevægelser skulle kunne fortolkes paa denne maade. Hans udgangspunkt er et univers af elementarpartikler, der bevæger sig i det sædvanlige, 3-dimensionale, euklidiske rum, og som kun er bundet til hinanden med rent geometriske baand. Den samlede bevægelse af dette univers beskriver Hertz ved indførelsen af et flerdimensionalt euklidisk konfigurationsrum og under anvendelsen af det grundlæggende princip, at bevægelsen i dette foregaar med konstant hastighed langs baner, hvis krumning i hvert punkt er den mindst mulige, som er forenelig med de geometriske baand — et princip, der er identisk med Gauss' sætning om den mindste tvang. Hvad vi iagttager i virkeligheden er kun delsystemer af dette univers, og for disses bevægelser kan dette grundlæggende princip ikke opretholdes, og det kan her være praktisk at indføre en potentiel energi. Hermed er da kraftbegrebet reduceret til en rent matematisk hjælpestørrelse, og det grundlæggende begreb er de geometriske mekanismer, hvis fravær føltes som et saa stort savn, da Newton indførte fjernkræfterne i mekanikken. En smuk fremstilling af væsentlige grundtræk af den Hertzske mekanik er givet af H. A. Lorentz [7].

Det rum, hvormed Hertz arbejder, er det sædvanlige 3-dimensionale, euklidiske rum, og det konfigurationsrum, han af matematiske hensyn indfører, er ligeledes euklidisk (i det væsentlige er koordinaterne i dette samlingen af elementarpartiklernes cartesiske koordinater i det sædvanlige rum). Der er her altsaa endnu ingenlunde tale om en geometrisering i den forstand, at selve rummets struktur tages op til revision i forbindelse med fysikkens problemstilling — og det samme gælder J. J. Thomsons betragtninger, der iøvrigt slet ikke er knyttet til geometriske overvejelser. Derimod foreligger der med Hertz' betydelige værk for første gang en gennemarbejdet anvendelse af den flerdimensionale, euklidiske geometris udtryksmaade til brug i mekanikken.

En væsentlig mangel ved den Hertzske mekanik er det, at han slet ikke paaviser, at det virkeligt er muligt paa rimelig vis at realisere de kendte naturkræfter ved hjælp af geometriske baand i det sædvanlige rum.

En geometrisering i mere moderne forstand af den klassiske fysik kan nu opnaas paa følgende maade:

Lad det betragtede konservative system være beskrevet ved Lagrangefunktionen

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_i \dot{x}^i + \frac{1}{2} g, \quad i, k = 1,2, \ldots, n,$$

hvor g'erne er tidsuafhængige funktioner af x'erne. Ser vi paa det ved Lagrangefunktionen

$$L' = \frac{1}{2} g'_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + g'_{0i} \dot{x}^0 \dot{x}^i + \frac{1}{2} g'_{00} \dot{x}^{02} = \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta ,$$

$$\alpha, \beta = 0,1,\ 2, \ldots,\ n$$

bestemte dynamiske problem, er hermed givet et $(n+1)$-dimensionalt rum med den Riemannske metrik

$$ds^2 = \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta .$$

Vi forudsætter nu, at x^0 er cyklisk, altsaa at

$$p_0 = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^0} = g'_{0i} \dot{x}^i + g'_{00} \dot{x}^0 = \text{konst.}, \qquad \dot{x}^0 = \frac{p_0 - g'_{0i} \dot{x}^i}{g'_{00}} ,$$

og betragter kun saadanne baner i rummet, langs hvilke p_0 til et givet tidspunkt og hermed til alle tidspunkter er *1*. Den Routhske funktion hørende til det ved koordinaterne x^i beskrevne undersystem er da

$$R(x^i, \dot{x}^i, p_0) = L' - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^0} \dot{x}^0 = \frac{1}{2} g'_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{1}{2} g'_{00} \frac{(1 - g'_{0i} \dot{x}^i)^2}{2 g'^2_{00}} =$$

$$\frac{1}{2} \left(g'_{ik} - \frac{g'_{0i} g'_{0k}}{g'_{00}} \right) \dot{x}^i \dot{x}^k + \frac{g'_{0i}}{g'_{00}} \dot{x}^i - \frac{1}{2 g'_{00}} ,$$

og vælges nu størrelserne g'_{ik}, g'_{0i} og g'_{00} saaledes, at

$$g'_{ik} - \frac{g'_{0i} g'_{0k}}{g'_{00}} = g_{ik}, \ \frac{g'_{0i}}{g'_{00}} = g_i, \ -\frac{1}{2 g'_{00}} = \frac{1}{2} g, \ \text{d.v.s.}\ g'_{ik} =$$

$$g_{ik} - \frac{g_i g_k}{g}, \ g'_{0i} = -\frac{g_i}{g}, \ g'_{00} = -\frac{1}{g},$$

er

$$R = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_i \dot{x} + \frac{1}{2} g = L,$$

saaledes *at det oprindelige system kan opfattes som et delsystem af et potentialfrit system, hvis dimension er 1 større, og hvis konfiguratonsrums metrik* $g'_{\alpha\beta}$ *er bestemt ved det oprindelige systems metrik* g_{ik} *og potentialerne* g_i *og* g.

Fastholdes denne metrik, men vælges værdien p_0 for det til x^0 hørende moment, vil det ved x^i beskrevne delsystem have Lagrangefunktionen (Routhfunktionen):

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + p_0 g_i \dot{x}^i + \frac{1}{2} p_0^2 g,$$

d.v.s., der foreligger et system af *samme natur* som det oprindelige, men i hvilket der optræder andre konstanter i potentialerne.

V. Tidsafhængige systemers geometrisering.

Selv for iagttagere, der ikke — som vi hidtil stiltiende har forudsat — er i hvile i forhold til et inertialsystem, gælder, at de mest almindelige tidsafhængige systemer, vi er stødt paa i den klassiske fysik, kan beskrives ved et variationsprincip af formen

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0$$

med en Lagrangefunktion af typen

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_i \dot{x}^i + \frac{1}{2} g, \; i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

hvor g'erne er funktioner af de generaliserede koordinater *og af tiden* t.

For at naa frem til en geometrisering af saadanne systemer, bemærker vi først, at hvis hastigheden $\dot{x}^0$ af en cyklisk koordinat *kun* optræder i kombinationen

$$L = \cdots + \dot{x}^0 \dot{x} + \cdots,$$

hvor x er en af de øvrige koordinater, er

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \dot{x} = \text{konst.},$$

d.v.s. $x = \text{konst. } t. + \text{konst}$, saaledes at x *kan benyttes som tidsmaal.*

Metoden er da følgende: af ovennævnte formel for Lagrangefunktionen følger

$$L\, dt^2 = \frac{1}{2} g_{ik}\, dx^i\, dx^k + g_i\, dx^i\, dt + \frac{1}{2} g\, (dt)^2,$$

hvor g'erne altsaa er funktioner af x^i og t. Erstatter vi her rent formelt t med x^{n+1} og tilføjes leddet $dx^0 dx^{n+1}$ faas et $(n+2)$-dimensionalt problem med den Riemannske metrik

$$ds^2 = \frac{1}{2} \bar{g}_{ik}\, dx^i dx^k + \bar{g}_i dx^i dx^{n+1} + \frac{1}{2} \bar{g}\, (dx^{n+1})^2 + dx^0\, dx^{n+1},$$

hvor $\bar{g}_{ik}$, $\bar{g}_i$ og $\bar{g}$ er de funktioner, der fremkommer ved i g'erne at erstatte t med x^{n+1}. I dette rum vil vi nu undersøge det nye dynamiske problem, hvis Lagrangefunktion er

$$L' = \frac{1}{2} \bar{g}_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + \bar{g}_i \dot{x}^i \dot{x}^{n+1} + \frac{1}{2} g\, (\dot{x}^{n+1})^2 + \dot{x}^0 \dot{x}^{n+1},$$

hvor x^0 altsaa er cyklisk. Her indgaar x^{n+1} — uafhængig af dets forhistorie — som en *rumlig* koordinat paa lige fod med x^i'erne, *og t er stadig parameteren,* saaledes at $\dot{x}$ betyder dx/dt.

Da x^0 kun optræder i kombinationen $\dot{x}^0 \dot{x}^{n+1}$, er $\dot{x}^{n+1}$ konstant = den til x^0 hørende impuls p_0, altsaa

$$x^{n+1} = p_0 t + q.$$

Vi vælger de baner i det $(n+2)$-dimensionale rum, hvor $p_0 = 1$ og $q = 0$, saaledes at tidsafhængigheden af x^{n+1} er givet ved $x^{n+1} = t$. I almindelighed er x^{n+1} ikke cyklisk — dette gælder kun for oprindeligt *tidsuafhængige* systemer.

Det udvidede systems Lagrangefunktion er konstant, da L' er potentialfri og eksplicit tidsuafhængig. Vi har, idet $\dot{x}^{n+1} = p_0 = 1$:

$$\left.\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}\overline{g}_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k + \overline{g}_i\dot{x}^i + \frac{1}{2}\overline{g} + \dot{x}^0 = \text{konst.} = \alpha = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &\text{eller} \\ L' &= L + \dot{x}^0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

hvor L er funktionen

$$\overline{L}(x^i, x^i, x^{n+1}) = \frac{1}{2}\overline{g}_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k + \overline{g}_i\dot{x}^i + \frac{1}{2}\overline{g}.$$

Det ved koordinaterne x^i bestemte undersystem af dimensionen n har den Routhske funktion

$$R = L' - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^{n+1}}\dot{x}^{n+1} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^0}\dot{x}^0 = L' - p_{n+1}\dot{x}^{n+1} - \dot{x}^{n+1}\,\dot{x}^0 =$$

$$\overline{L} - p_{n+1},$$

og disse koordinaters udvikling er da bestemt ved differentialligningerne

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\overline{L} - p_{n+1})}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial(\overline{L} - p_{n+1})}{\partial x^i} = 0,$$

der jo ogsaa gælder, selvom x^{n+1} ikke er cyklisk. Men da den Routhske funktion skal opfattes som funktion af x^i, $\dot{x}^i$, x^{n+1} og p_{n+1} (samt af p_0, men denne størrelse er jo konstant lig med 1), forsvinder leddet p_{n+1} under differentiationerne, og vi faar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial x^i} = 0.$$

Imidlertid er for enhver funktion $\overline{f}(x^i, \dot{x}^i, x^{n+1})$ og $x^{n+1} = t$:

$$\frac{d\overline{f}(x^i, \dot{x}^i, x^{n+1})}{dt} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^{n+1}}\dot{x}^{n+1} =$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(x^i, \dot{x}^i, t)}{dt},$$

saaledes at

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0,$$

d.v.s. bevægelsesligningerne for det oprindelige system. Og hermed er da bevist *at det oprindelige system med Lagrangefunktionen L er det ved koordinaterne x^i bestemte delsystem af det $(n+2)$-dimensionale, eksplicit tidsuafhængige og potentialfrie system.* Forudsat, at vi udvælger de baner i totalsystemet, hvor x^{n+1}'s tidsafhængighed er givet ved $x^{n+1} = t$, altsaa forudsat, at konstanten p_0 gives værdien 1. Dersom p_0 ikke vælges lig med 1, føres vi for det ved x^i beskrevne undersystem til den Routh-Lagrangeske funktion

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_i \dot{x}^i p_0 + \frac{1}{2} g p_0^2,$$

altsaa til et system af samme natur som det oprindelige, men med ændrede værdier for konstanterne i potentialerne.

Af (I) følger

$$\dot{x}^0 = \alpha - \overline{L} = \alpha - \overline{L}\,(x^i(t), \dot{x}^i(t), x^{n+1}(t))$$

eller, idet $x^{n+1} = t$:

$$x^0 = \alpha t - \int_0^t L\, dt + \beta,$$

hvor α og β er konstanter. I x^0's tidsafhængighed indgaar altsaa *virkningsintegralet*

$$\int_0^t L\, dt.$$

Den her opstillede metrik er i en anden sammenhæng angivet af L. P. Eisenhart [3], som i tilknytning til ovennævnte bestemmelse af x^0 som funktion af tiden har vist, at den tillader en overmaade smuk og forenklet fremstilling af den *Hamilton-Jacobiske integrationsteori.*

Det skal tilslut bemærkes, at ved de ovennævnte udvidelser ophører metrikken i almindelighed med at være positiv-definit i x'erne, hvilket medfører nødvendigheden af i overvejelserne at udelukke de saakaldte *nullinjer,* d.v.s. linjer langs hvilke den metriske fundamentalinvariant forsvinder.

I stedet for at indføre baade $t = x^{n+1}$ og x^0 som nye koordinater kunne man have gaaet følgende vej, idet man giver afkald paa ønsket om, at det betragtede rum skal være Riemannsk:

Indfører vi i Lagrangefunktionen

$$L\,(\dot{x}^i,\, \dot{x}^i,\, t)$$

en ny parameter u i stedet for t, kræver variationsprincippet

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \delta \int_{u_1}^{u_2} L \frac{dt}{du}\, du = 0,$$

at L transformeres til

$$L' = L \frac{dt}{du},$$

og opfattes nu t som en variabel x^{n+1} paa lige fod med de øvrige koordinater, kan L' skrives paa formen

$$L' = L\,(x^i,\, \overset{*}{x}{}^i / \overset{*}{x}{}^{n+1},\, x^{n+1})\, \overset{*}{x}{}^{n+1},$$

hvor * betyder differentiation med hensyn til u, saaledes at

$$\overset{*}{x}{}^i = \dot{x}^i\, \overset{*}{x}{}^{n+1}.$$

Som man ser er L' homogen af første grad i samtlige »hastigheder«

$$\overset{*}{x}{}^1,\, \overset{*}{x}{}^2,\, \cdots,\, \overset{*}{x}{}^n,\, \overset{*}{x}{}^{n+1},$$

og man kan da benytte $\frac{1}{2}\,(L')^2$ som *metrisk fundamentalinvariant* i en *Finslersk geometri*, saaledes at banekurverne i det herved bestemte $(n+1)$-dimensionale rum bliver *rette linjer*. For nærmere orientering vedrørende geometrisering i denne forstand — hvor man altsaa opgiver ønsket om at arbejde i det mere anskuelige Riemannske rum — henvises til to afhandlinger af H. Rund [9 og 10] samt til nogle mere overfladiske betragtninger af C. Lanczos [6]. J. L. Synge [12] har fornylig vist det nære slægtskab, som består mellem denne metode og den Hamiltonske optiske analogi i dynamikkens integrationsteori.

Summary.

The possibilities of giving a geometrical description of classical mechanics are discussed, starting from a short historical review. A geometrization of this kind requires the general so-called Finsler-geometry, a short account of whose main features, adapted to the purpose, is given. It is then shown that the introduction of an extra coordinate, a so-called cyclic coordinate, allows a reduction to the more specialized Riemann geometry. We are here concerned with a slight change in an idea, originally formulated by J. J. Thomson, which in particular forms the basis of H. Hertz' endeavours to eliminate the concept of force in mechanics. It is finally shown that this geometrization also can be applied to time-dependent, holonomic dynamical systems, leading to a geometrical description which already has been studied by L. P. Eisenhart.

Litteratur.

1) W. K. CLIFFORD (1882), On the Space-Theory of Matter. Math. Papers, London, p. 71.
2) W. K. CLIFFORD (1891), The Common Sense of the Exact Sciences. New York (1946), Chapter IV, p. 202.
3) L. P. EISENHART (1928—29), Dynamical Trajectories and Geodesics. Ann. of Math. **30**, p. 591.
4) P. FINSLER (1918), Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Disp., Göttingen. Genoptrykt (1951) Basel.
5) H. HERTZ (1910), Die Prinzipien der Mechanik. Ges. Werke III, 2. Aufl., Leipzig.
6) C. LANCZOS (1949), The Variational Principles of Mechanics. Toronto, p. 280.
7) H. A. LORENTZ (1907), Some Considerations on the Prinziples of Dynamics, in Connexion with Hertz' "Prinzipien der Mechanik". Abh. üb. theor. Physik, Leipzig. p. 1.
8) B. Riemann (1854), Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Ges. Math. Werke, 2. Aufl., Leipzig, p. 272.
9) H. Rund (1952), Die Hamiltonsche Funktion bei allgemeinen dynamischen Systemen. Arch. d. Math. **3**, p. 207.
10) H. RUND (1955). Application des méthodes de la géometrie généralisé à la dynamique théorique. Colloques Internationaux du Centre Nationale, nr. 52.
11) J. L. SYNGE (1926), On the Geometry of Dynamics. Phil. Trans. *A* **226**, p. 31.
12) J. L. SYNGE (1954), Geometrical Mechanics and de Broglie Waves. Cambridge, p. 142.
13) J. J. THOMSON (1888), Applications of Dynamics to Physics and Chemistry. London, Chapter II.
14) W. THOMSON (Lord Kelvin) (1884), Steps towards Kinetic Theory of Matter. Math. and Phys. Papers, III, p. 366.

Indleveret til selskabet den 14. juni 1955.
Færdig fra trykkeriet den 24. september 1955.