## DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXV, NR. 7

## LE SPECTRE DES NAINES BLANCHES ET LEUR DÉBIT D'ÉNERGIE

#### PAR

## EVRY SCHATZMAN



KØBENHAVN I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD L'interprétation du spectre des naines blanches est profondé-L'ment liée à la compréhension de leur structure interne. Le triage des éléments dans un champ de pesanteur, phénomène particulièrement important dans les naines blanches, détermine presque totalement à lui seul leur structure et l'aspect de leur spectre. On étudie donc pour commencer le triage des éléments (chapitre I). On montre comment se distribuent les éléments dans un champ de pesanteur. L'évaluation de la hauteur de mélange dans des cas variés montre que cette grandeur est peu sensible à l'état de dégénérescence du gaz d'électrons. La hauteur de mélange est toujours très petite dans les naines blanches. On voit aussi que les éléments lourds doivent avoir en général dans les régions extérieures des naines blanches une concentration extraordinairement faible, ce qui explique l'absence de raies métalliques dans le spectre.

Les densités relativement élevées qui règnent dans l'atmosphère des naines blanches exigent une étude de l'ionisation de pression dans l'hydrogène (chapitre II). On montre en particulier que l'effet Stark moléculaire semble mieux décrit aux fortes densités par les formules de RUSSELL et STEWART que par celles de HOLTSMARK.

On a calculé un modèle d'atmosphère pour deux étoiles correspondant approximativement à 40 Eridani B et Van Maanen 2 (Chapitre III). On a supposé une atmosphère faite d'hydrogène pur, ainsi que l'étude du chapitre I l'a suggéré. Le calcul de l'élargissement des raies par effet Stark moléculaire montre une importante déformation du contour du fond continu sous l'influence de la pression.

Les résultats précédents permettent d'étudier la relation entre la température de couleur et la température effective dans les

Printed in Denmark Bianco Lunos Bogtrykkeri (1.1)

naines blanches (chapitre IV). On trouve que pour une même température de couleur, la température effective est beaucoup plus élevée dans les naines blanches que dans les étoiles de la série principale. Ce fait joint aux résultats de la théorie du débit d'énergie aux grandes densités, indique pour les naines blanches des rayons plus petits et entraîne de très faibles teneurs en hydrogène.

4

Ce résultat est confirmé par la théorie élémentaire du débit d'énergie (Chapitre V). On peut montrer que la réaction proton proton dans l'enveloppe d'hydrogène explique le débit d'énergie des naines blanches. Cette réaction pouvant être permise sans catastrophe astrophysique, on réconcilie ainsi les données de l'astrophysique avec la théorie des réactions nucléaires. Les réactions du cycle de Bethe semblent, en général, ne jouer qu'un rôle secondaire (un pour cent du débit d'énergie total dans 40 Eridani B).

La question de l'évolution des naines blanches reste une question ouverte que les calculs précédents ne résolvent pas De même, la structure de Van Maanen 2, seule naine blanché présentant avec certitude des raies métalliques, présente des difficultés, car elle doit être compatible à la fois avec la théorie du débit d'énergie et la théorie du triage des éléments.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à Monsieur le Professeur Strømgren pour son accueil si chaleureus à Copenhague, et pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec lui. Je remercie également M. Rudkjøbing pour les conver sations que j'ai eues avec lui.

## I. Le triage des éléments.

1. Aspect général du problème. Le problème de l'équilibre statistique dans un champ de gravitation d'un mélange de particules d'espèces différentes est un problème déjà ancient auquel des contributions très nombreuses ont été apportées.

Mentionnons tout d'abord les problèmes relatifs aux mélanges isothermes, nous réservant d'aborder plus loin la question des gaz non uniformes et des cas de dégénérescence.

Pour des éléments soumis au seul champ de pesanteur,

l'exclusion de tout autre champ de force (électrique ou magnétique), on a simplement, en appliquant la loi de distribution de Boltzmann:

## $\varrho = \varrho_0 \, e^{-m(V-V_0)/kT}$

 $\mathbf{5}$ 

qui est la loi de distribution des densités connue sous le nom de loi de Dalton.

Dans le cas d'un équilibre de dissociation produisant ou non dés particules chargées, l'équilibre thermodynamique n'est pas modifié par la présence ou l'absence d'un champ. Ceci a été démontré dans le cas d'un champ de pesanteur par GIBBS (17), dans le cas d'un champ de forces électrostatiques par MILNE (24). Les conséquences de la présence d'un champ de gravitation sur la séparation des charges électriques (les électrons étant plus légers que les protons) ont été données pour la première fois par PANNEKOEK (27), qui a évalué la charge d'origine thermique de la matière. On savait déjà par ce résultat que la charge électrique de la matière était très faible et que le champ électrique présent était assez fort pour empêcher toute séparation des charges. L'analyse de ROSSELAND (29) montre que la séparation des charges dans une atmosphère isotherme ne commence que lorsque le terme

(1:2)

# $\frac{4\,\pi\epsilon^2\,p_{e}}{m_{e}^2\,g^2}$

est petit comparé à l'unité. Dans le cas du soleil, le produit  $4 \pi \varepsilon^2/m^2 g^2$  vaut  $4,85 \cdot 10^{27}$ . Dans le cas des naines blanches connues, g peut être  $10^6$  fois plus fort, et  $4,85 \cdot 10^{15}$  peut être considéré comme une limite inférieure.  $p_e$  doit donc être inférieur à  $10^{-16}$  dynes/cm<sup>2</sup> ou, pour une température moyenne de  $2 \cdot 10^4$  degrés de l'atmosphère des naines blanches, le nombre d'électrons par centimètre cube doit être inférieur à  $10^{-4,4}$ , c-à-d. bien inférieur à la densité de l'espace interstellaire. Par une autre voie que celle de Pannekoek, Rosseland a donc montré la justesse de l'hypothèse de neutralité électrique de la matière stellaire.

Dans le cas des champs de pesanteur intenses, la séparation des éléments peut être assez considérable pour qu'on puisse

définir une hauteur de mélange de deux éléments. Ceci a été fait par l'auteur (34) dans le cas où le gaz d'électrons est dégénéré et étendu (35) au cas où le gaz d'électrons étant par fait, l'ionisation est partielle. La charge électrique lorsque le gaz d'électrons est dégénéré a été calculée également (37). Le problème du gaz isotherme peut être abordé d'une toute autre manière à partir de l'étude des gaz non-uniformes (12). Le phénomène de diffusion de pression, dû à l'existence d'un gradient de pression partielle d'un gaz mêlé à un autre est connu depuis longtemps. Le langage de la théorie des gaz non-uniformes nous amène au cas des gaz non-isothermes, qui est le cas réel des étoiles. Un bref aperçu est donné par Eddington dans I.C.S.(14) qui renvoie pour la diffusion thermique à un travail de CHAP MAN (10). La diffusion thermique qui est de très faible importance devant d'autres phénomènes est traitée par Chapman dans cet article déjà ancien sans tenir compte des phénomènes d'ionisation. EDDINGTON (l. c.) évalue quàlitativement l'influence du modèle atomique utilisé, et conclut, en accord avec une confirmation personnelle de Chapman, que la diffusion thermique joue sans doute dans le même sens que la diffusion de pression BIERMANN (3) étudie le problème de la diffusion et de l'équilibre statistique en donnant une bibliographie du sujet.

Tous ces travaux sur les gaz non-uniformes sont faits en supposant que les atomes ne transportent avec eux aucune énergie autre que cinétique de translation ou de rotation (11) et par conséquent ne tiennent pas compte de l'énergie d'ionisation L'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local permet d'adapter les équations valables pour une atmosphère isotherme à une atmosphère à température non-uniforme, et, par com paraison avec les formules de diffusion, de montrer l'existence d'une diffusion thermique due à l'ionisation.

D'autre part, suivant que le gaz de noyaux se trouve plonge dans un gaz d'électrons dégénéré ou parfait, le triage est déter miné, dans le premier cas par la quantité

(1.3)  $\frac{A_i}{Z_i}$ 

dans le second par la quantité:

$$\frac{A_i}{2}$$

Nr. 7

Nr. 7

(2.1)

Lorsque le gaz d'électrons est dégénéré, tous les éléments se comportent de la même façon devant l'hydrogène  $(A_i/Z_i \cong 2)$ , alors que dans le second cas, tous les éléments subissent en plus les uns par rapport aux autres un triage important.

Lorsque les phénomènes de dégénérescence apparaissent également au sein du gaz de noyaux, particulièrement avec les dégénérescences de Bose-Einstein, differents phénomènes assez curieux apparaissent. Tous ces résultats ont reçu un commencement d'application à la théorie des naines blanches (34).

#### A. Les gaz non-dégénérés.

2. Méthode statistique. Rappelons brièvement comment on traite le problème de l'équilibre de dissociation d'un mélange de particules d'espèces différentes. Cette méthode est inspirée de celle employée par CHANDRASEKHAR (6) à la suite de MILNE (25).

Étant donnés j éléments de charge  $Z_i$  et possédant différents degrés d'ionisation, on peut représenter les réactions d'équilibre par :

 $A_i^n + ne - \sum_n \chi_i^n \rightleftharpoons A_i^0,$ 

dans lequel A est l'atome d'espèce *i* ionisé *n* fois.  $\chi_i^n$  est l'énergie pour ioniser le  $n^e$  électron et  $\sum_n \chi_i^n$  est l'énergie nécessaire pour ioniser *n* fois l'atome.

Nous appelons  $p_{is}^n$  le nombre d'atomes d'espèce *i*, *n* fois ionisés, d'énergie  $E_s^{in} + \sum_n \chi_i^n$  et  $x_{is}^n$  le nombre d'états possibles d'énergie  $E_s^{in} + \sum_n \chi_i^n$ .  $r_s$ ,  $E_s$ ,  $x_s$  représentent des quantités analogues pour les électrons. Pour trouver l'état le plus probable, nous astreignons les quantités  $p_{is}^n$  et  $r_s$  aux conditions suivantes:

 $\sum_{ns} (Z_i - n) p_{is}^n + r_s = r$ 

 $\sum p_{is}^{n} \left( E_{s}^{in} + \sum \chi_{i}^{n} \right) + E_{s} r_{s} = E$ 

 $\sum_{ns} p_{is}^n = p_i$ 

Nr.7

(3.1)

avec

(3.4)

associant ces conditions au nombre de complexions (qu'il est de cette relation pour définir  $\psi$ : inutile d'écrire) et en employant la méthode des multiplicateurs de Lagrange en multipliant les équations de condition par  $\alpha_i \beta \vartheta$ on obtient:

(2.3) 
$$\begin{cases} p_{is}^{n} = x_{is}^{n} e^{-\alpha_{i}(Z_{i}-n)\beta - \vartheta(E_{s}^{in} + \Sigma\chi_{i}^{n})} \\ r_{s} = x_{s} e^{-\beta - \vartheta E_{s}}. \end{cases}$$

Par intégration dans l'espace des moments, et en se rappelant que  $E_s^{in}$  contient l'énergie cinétique et l'énergie potentielle:

(2.4) 
$$E_{s}^{in} = \frac{p_{s}^{2}}{2 m_{i}} + \varphi m_{i} - n e \psi,$$

on obtient:

(2.5) 
$$\begin{cases} p_{i}^{n} = g_{i}^{n} \frac{(2\pi m_{i}^{n} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^{3}} e^{-\alpha_{i} - (Z_{i} - n)\beta - \vartheta \left(\varphi m_{i} - ne\psi + \sum_{n} \chi_{i}^{n}\right)} \\ r = 2 \frac{(2\pi m_{e} kt)^{\frac{3}{2}}}{h^{3}} e^{-\beta - \vartheta (\varphi m + e\psi)}. \end{cases}$$

On retrouve ici le résultat déjà obtenu par GIBBS et MILNE c-à-d l'indépendance de l'équation d'équilibre par rapport aux champs électriques et de pesanteur:

(2.6) 
$$\frac{p_i^n r}{p_i^{n-1}} = \frac{2 g_i^n}{g_i^{n-1}} \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\vartheta \chi_i^n}.$$

Comme nous sommes dans le cas d'un gaz isotherme, les  $\alpha_i$  et  $\beta$  sont des constantes, et l'équation d'équilibre hydrostatique:

(2.7) 
$$\frac{dP}{dz} = -F\varrho$$

est une conséquence des équations écrites ci-dessus.

3. Le triage des éléments. La détermination du potentiel électrique  $\psi$  pourrait se faire en utilisant la relation de Poisson. On obtient alors les résultats bien connus relatifs à la quasi

conditions relatives au nombre de particules et à l'énergie. En mentralité électrique du milieu. Il est donc plus simple de partir

9

$$\sum_{in} n p_i^n = r,$$

ou, après élimination de  $T^{\frac{3}{2}}$ ,

$$\sum_{in} n \frac{g_i^n}{2} \left( \frac{m_i^n}{m_e} \right)^{\frac{\beta}{2}} e^{-\alpha_i - (Z_i - n - 1)\beta - \vartheta \left[ \varphi(m_i^n - m_e) - (n + 1)e \psi \right] - \vartheta \sum_i \chi_i^n} = 1$$

équation de la forme:

(3.3) 
$$\sum_{in} na_{in} u^{A_i^n} v^{n+1} = 1$$
  
avec
$$(3.4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} u = e^{-\vartheta \varphi H} & HA_i^n = m_i - (n+1) m_i \\ v = e^{\vartheta e \psi}, \end{array} \right.$$

mi étant la masse de l'atome non ionisé.

Il est aisé de démontrer, comme nous l'avons déjà fait (34, paragraphe 14), que les maxima de concentration des différents éléments et de leurs ions se succèdent de bas en haut d'un récipient vertical dans l'ordre des  $A_i^n/(n+1)$  décroissants, les atomes les plus ionisés ou les plus légers se trouvant en haut. Remarquons toutefois que la démonstration concerne une concentration particulière :

 $c_{in} = \frac{p_i^n}{r}$ 

qui est le nombre d'atomes i ionisés n fois au nombre total de charges positives (ou négatives) libres, et non pas la masse de particules  $p_i^n$  à la masse totale. Le résultat subsiste cependant avec cette définition de la concentration.

Dans le cas d'un mélange de deux éléments, il est possible de pousser les conclusions beaucoup plus loin. Nous allons donner ici une première définition de la hauteur de mélange, dentique à celle déjà utilisée (34). Nous appelons hauteur de mélange l'intervalle dans lequel les éléments 1 et 2 étant smélangés, le produit des concentration en poids  $c_1$  .  $c_2$  reste supérieur

à une quantité donnée. On est assuré de définir ainsi une région où l'on trouve simultanément les concentrations les plus élevées des deux éléments. Si l'on suppose que pour une densité et une température données, l'élément 1 est essentiellement ionisé  $n_1$ fois et l'élément 2,  $n_2$  fois, l'équation de neutralité électrique se réduit approximativement à:

Nr.4

(3.9)

(3.10)

$$(3.6) n_1 p_1^n + n_2 p_2^n = r.$$

La concentration en poids est alors approximativement:

(3.7) 
$$\begin{cases} c_1 = \frac{m_1 p_1^{n_1}}{m_1 p_1^{n_1} + m_2 p_2^{n_2}} \\ c_2 = \frac{m_2 p_2^{n_2}}{m_1 p_1^{n_1} + m_2 p_2^{n_2}}. \end{cases}$$

Le produit  $c_1 c_2$  est maximum pour  $\frac{m_2 P_2^{n_2}}{m_1 p_1^{n_1}} = 1$  et prend la ment moitié de la valeur au maximum pour  $\frac{m_2 P_2^{n_2}}{m_1 p_1^{n_1}} = 3 \pm \sqrt{8}$ . Le (4.1) système des équations (2.5) nous permet d'éliminer la variation de potentiel électrique  $\psi$  et on obtient ainsi sous une forme De p symétrique:

(3.8) 
$$h = \frac{\Re T}{g} \frac{1}{2} - \frac{\left|\frac{A_1}{n_1+1} - \frac{1}{n_2+1}\right| \log (17 + 12\sqrt{2}) + \left|\frac{A_1}{n_1}\sqrt{3 + \sqrt{8}} + \frac{A_2}{n_2}\sqrt{3}\right|}{\left|\frac{A_1}{n_1}\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \frac{A_2}{n_2}\sqrt{3}\right|} + \left|\frac{A_1}{n_1}\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \frac{A_2}{n_2}\sqrt{3}\right|}{\left|\frac{A_1}{n_1+1} - \frac{A_2}{n_2+1}\right|}$$
(4.2)

On voit ici que la grandeur caractéristique pour le phénomène de triage est la quantité  $A_1/n_1 + 1$ , et que, si l'on trouvait deux éléments portant la même masse par particule libre, ils n seraient soumis à aucun triage.

Lorsque l'élément 1 est l'hydrogène et l'élément 2 un métal et que l'on se trouve dans une région de forte ionisation, on obtient approximativement, en négligeant  $1/n_2 + 1$  devant 1/2:

$$h = \frac{\Re T \frac{1}{g} \frac{\log \frac{(17 + 12\sqrt{2})^{\frac{8}{4}}}{\sqrt{\frac{A_2}{n_2}}}}{\frac{1}{2} - \frac{A_2}{n_2 + 1}}$$

Nous avons supposé l'ionisation presque totale, donc  $A_2/n_2 \simeq 2$  et

 $h \cong 6.4 \cdot 10^7 \frac{T}{g}.$ 

Lorsque l'ionisation est presque totale, tous les éléments se comportent de la même façon devant l'hydrogène. Nous préciserons plus loin (§ 9) ces résultats.

4. L'atmospèhre non isotherme. Dans le cas où l'atmosphère n'est pas isotherme, l'énergie  $m_i \varphi - n_i e \psi$  a une valeur purement locale, si bien qu'il faut remplacer l'expression  $\frac{m_i \varphi - n_i e \psi}{kT}$ par

$$\int \frac{m_i d\varphi - ne d\psi}{kT} = \int \frac{m_i \varphi' - ne \psi'}{kT} dz.$$

De plus, les grandeurs  $\alpha_i$  et  $\beta$ , qui étaient des constantes dans le cas de l'atmosphère isotherme, ne le sont plus maintenant. Le dénombrement des équations et des constantes nous permet de choisir une forme pour  $\alpha_i$  et  $\beta$ ; nous avons les équa-

 $\sum n_i p_i = r$  $\frac{dP}{dr} = -f\varrho$  $\sum_n \int_{\mathcal{Y}} p_i^n dv = P_i.$ 

Nous avons supposé ici que la température est une fonction connue de la cote, ce qui revient au même que de se donner une équation de transfert. On a donc j + 2 relations pour déterminer les j + 2 quantités  $\alpha_i$ ,  $\beta$ ,  $\int \frac{\psi' dz}{T}$ . La première est une relation elgébrique, la deuxième une équation différentielle et les j autres des relations numériques. Nous voyons que nous pouvons déter-

miner au plus par ce système j + 1 constantes, et 2 fonctions, condition que les quantités  $\alpha_i \beta$  dépendent d'une fonction de pendant d'une constante. Nous prendrons, puisque cette fonction est arbitraire:

(4.3) 
$$e^{-a_i} = A_i u \qquad e^{-\beta} = B u.$$

Déterminons dans ces conditions la fonction u. L'équation d'équilibre hydrostatique, compte tenu de l'expression (2.5) de  $p_i^n$  et de r, donne:

$$4.4) \quad \frac{T'}{T}kT\left[\sum p_i^n \frac{\sum \chi_i^n}{kT} \frac{5}{2} \left(r + \sum p_i^n\right)\right] + kT \frac{u'}{u} \left[r + \sum (Z_i - n) p_i^n\right] + kT \frac{u'}{u} \sum p_i^n$$

Cette expression est importante, car, lorsque l'on suppose  $\chi_i^n = 0$ , c-à-d. la matière totalement ionisée, cette équation se simplifie et donne:

(4.5) 
$$\frac{u'}{u} = -\frac{5}{2}\frac{T'}{T}$$

(4.6) 
$$\begin{cases} p_{i} \sim T^{-1} e^{-\int \frac{m_{i} \varphi' - Ze \psi'}{kT} dz} \\ r \sim T^{-1} e^{-\int \frac{m_{e} \varphi' + e \psi'}{kT} dz}, \end{cases}$$

c-à-d. un résultat parfaitement identique à celui que donne les équations de la diffusion lorsque l'on néglige la diffusion thermique.

Dans le cas plus général où l'ionisation joue encore un rôle on a:  $\sum u^n$ 

(4.7) 
$$\frac{u'}{u} = -\frac{T'}{T} \frac{\sum p_i^n \frac{\sum \chi_i}{kT} + (\sum p_i^n + r)}{\sum p_i^n (Z_i - n + 1) + r}.$$

Pour déterminer la fonction  $\psi$ , il est nécéssaire d'intégrer système de deux équations (4.7) et (3.1), cette dernière étail l'équation de neutralité électrique. Evidemment, dans le ca général où (3.1) est une expression polynôme en u et  $\exp \int \frac{e\psi}{kT} dt$ l'intégration de ce système ne pourra pas se faire sans difficultes

5. La diffusion d'ionisation. Considérons l'équation:

$$\frac{dP_i}{dz} = f_i \varrho_i$$

qui exprime l'équilibre des pressions partielles et qui est la seule. équation à satisfaire dans le cas de l'ionisation totale.

Lorsque l'ionisation n'est pas totale, il faut ajouter un terme supplémentaire qui tienne compte de l'existence de collisions avec recombinaison et ionisation. On a immédiatement, d'après (2.5),

5.2) 
$$\frac{dP_i}{dz} = P_i \left[ \frac{5}{2} \frac{T'}{T} + (Z_i - n + 1) \frac{u'}{u} - \frac{\varphi' m_i - ne \, \psi'}{kT} + \frac{1}{kT} \frac{T'}{T} \sum \chi_i^n \right]$$

Nous avons donc un terme supplémentaire

(5.1)

(5.4)

(5.5)

(5.6)

avec:

(5.7)

ou:

(5.3) 
$$\frac{T'}{T} p_i^n kT \left[ \frac{5}{2} + \frac{\sum \chi_i^n}{kT} - (Z_i - n + 1) \frac{\sum p_i^n \frac{\sum \chi_i^n}{kT} + \frac{5}{2} \left( \sum p_i^n + r \right)}{\sum p_i^n (Z_i - n + r) + r} \right]$$

et l'on obtient grâce à (2.5) pour tous les  $p_i$  et pour r une loi en qui bien entendu se réduit à zéro quand  $n = Z_i$ ,  $\chi_i^n = 0$ . Nous pouvons l'évaluer numériquement de la façon approximative suivante: si l'on prend  $n_i = Z_i$ , ce qui revient à considérer le reste atomique, on a:

$$\frac{T'}{T}p_i^n kT \left[\frac{5}{2} + \frac{\sum \chi_i^n}{kT} - \frac{5}{2} - \frac{\sum p_i^n \frac{\chi_i^n}{kT}}{\sum p_i^n + r}\right]$$

$$\frac{T'}{T}p_i^n\left[\sum \chi_i^n - \frac{\sum p_i^n \chi_i^n}{\sum p_i^n + r}\right].$$

Nous arrivons donc à l'équation:

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} - f_i \varrho_i - \delta_i \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = p_i^n \! \left[ \boldsymbol{V}_i^n \! - \! \frac{\sum p_i^n \boldsymbol{V}_i^n}{\sum p_i^n \! + \! \boldsymbol{r}} \right]$$

Dans l'équation de diffusion (M.T. 14.1.1) ce coefficient figurerait avec le coefficient 1/P:

(5.8) 
$$-\frac{1}{P}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}p_i^n \left[V_i^n - \frac{\sum p_i^n V_i^n}{\sum p_i^n + r}\right].$$

Comparons le terme

(5.9) 
$$-\frac{p_i^n}{P} \left[ V_i^n - \frac{\sum p_i^n V_i^n}{\sum p_i^n + r} \right]$$

au coefficient  $k_T$  (M.T. 14.1.1). Si l'on suppose un élément, en équilibre avec ses produits de dissociation, l'expression (5.9) pour l'un des produits de dissociation s'écrit:

(5.10) 
$$-\frac{p_1}{P} \left[ V - \frac{p_1 V}{p_1 + p_2 + p_3} \right]$$

ou:

(5.11) 
$$-\frac{p_1}{P} \frac{V}{p_1 + p_2 + p_3}$$

qui est de l'ordre de grandeur de  $p_1V/P$ . Si l'on prend P éga à la pression atmosphérique,  $p_1 kT = \frac{1}{3}P$ , le terme (5.9) est de l'ordre de grandeur de

(5.12)

 $\frac{1}{3}\frac{V}{kT}$ 

Pour un corps dissocié à moitié, ce terme est de l'ordre de quelqué unités, et par conséquent considérablement plus grand que le coefficient de diffusion thermique  $k_T$ . A l'équilibre, on évidemment un équilibre thermodynamique local, et la mesure de la concentration d'un point à un autre ne serait qu'une mesure de l'énergie de réaction. Cette diffusion ne se manifest que durant le passage à l'équilibre.

6. Hydrogène presque pur. L'hypothèse que les naines blan ches ont une atmosphère d'hydrogène presque pur, entraîn la nécessité de traiter le cas de l'hydrogène, et de déterminer potentiel  $\psi$  et la fonction u, afin de pouvoir les reporter dans le expressions  $p_i^n$  du nombre des autres éléments, supposé peu comparé à l'hydrogène. On a alors:

$$rac{u'}{u} = -rac{T'}{T} rac{p_1 rac{\chi}{kT} + rac{5}{2} (p_0 + p_1 + r)}{2 \, p_0 + p_1 + r}.$$

A l'intérieur de la région d'hydrogène,  $\chi/kT$  est très petit,  $p_0$  est très petit, et par conséquent:

 $u = \operatorname{cte}\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{5}{2}},$ 

d'où les nombres des différentes particules:

(6.1)

(6.6)

6.7)

$$p_0 = A_0 T^{-\frac{\gamma}{2}} e^{-\int \vartheta q' m_i dz}.$$

$$p_1 = A_1 T^{-1} e^{-\int \vartheta (q' m_i^1 - e \psi') dz - \frac{\chi}{kT}}.$$

$$r = B T^{-1} e^{-\int \vartheta (q' m_i - e \psi') dz}.$$

La condition de neutralité électrique nous détermine  $\psi'$ :

 $A_1 e^{-\int \vartheta(\varphi' m_i - e\psi') dz} = B e^{-\int \vartheta(\varphi' m_e + e\psi') dz}$ 

$$\frac{A_1}{B}e^{-\int \vartheta \, \varphi'(m_i^1-m_e)\,dz} = e^{-\int \vartheta \, e \, \psi'\,dz}$$

tou, par dérivation logarithmique:

$$arphi'\left(m_i^1-m_e
ight)=2\,e\,\,arphi'$$
 $arphi'=rac{m_i^1-m_e}{2\,e}\,arphi'.$ 

On en déduit la concentration d'un élément quelconque de charge Z, ionisé n fois:

$$p_{i}^{n} = A_{i} T^{\frac{p}{2}} T^{-\frac{5}{2}(Z-n+1)} e^{-\int \vartheta \left(m_{i} - \frac{nm_{i}}{2}\right) d\varphi} e^{-\chi/kT}$$

Dans cette région, on a (34):

$$T = -\frac{\varphi' \frac{m_1}{2}}{\frac{17}{4}k}.$$

en prenant la surface de l'étoile pour origine, ou:

(6.11) 
$$\frac{m_1}{2}\frac{1}{kT} = -\frac{17}{4}\frac{1}{\varphi' z}.$$

L'intégrale en exponentielle vaut:

(6.12) 
$$\int \vartheta \left( m_i - \frac{nm_1}{2} \right) \varphi' dz = -\left( 2 \frac{m_i}{m_1} - n \right) \frac{17}{4} \log |z|$$

et puisque T est proportionnel à z:

(6.13) 
$$p_i^n \sim T^{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}(Z - n + 1) + \frac{1}{4} \binom{2A_i}{A_i} - n} e^{-\sum_n \frac{\chi_i^n}{kT}}.$$

Nous avons donc un terme exponentiel qui contient l'énergie d'ionisation et un terme en  $T^{\alpha}$ . Si nous supposons pour commence que T est assez élevé pour que l'on puisse négliger les varia tions de  $e^{-\chi/kT}$ , nous n'avons à tenir compte que du terme en  $T^{\alpha}$ . On a:

$$a = -1 - \frac{7}{4}n - \frac{5}{2}Z + \frac{17}{2}\frac{A_i}{A_1}.$$

Ici,  $A_1 = 1$  (hydrogène). On a donc:

$$\alpha = -1 - \frac{7}{4}n - \frac{5}{2}Z + \frac{17}{2}A_i.$$

Nous donnons dans le tableau I les valeurs de  $\alpha$  pour quelque éléments.

Tableau I.								
Élément	A		r	n				
	i	0	2	4	6	8.		
						3		
Hélium	4	28	24,5	• •	• •	Ś		
Carbone	12	86	82,5	79	. 75,5	1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 -		
Azote	14	100,5	97	93,5	90	• •		
Oxygène	16	115	111,5	108	104,5	101		
Sodium	23	167	163,5	160	156,5	153		
Magnésium	24	173	169,5	166	162,5	159		
Silicium	28	202	198,5	195	191,5	188		
Potassium	39	283	279,5	276	272,5	.269		
Calcium	40	289	285,5	282	278,5	275		
Fer	56	376	372,5	369	365,5	362		

Tableen I

On ne peut manquer d'être frappé par les très grandes valeurs de cet exposant, et l'on conclut immédiatement que si aucun autre phénomène n'intervient, la concentration en éléments lourds à la surface des naines blanches doit être imperceptible.

En fait, nous savons qu'il existe dans le soleil une couche convective près de la surface. Son existence a été démontrée par Unsöld (49). Elle a été étudiée en particulier par BIER-MANN (4), RUDKJØBING (30, 32). Il est possible que cette couche atteigne des profondeurs relativement grandes. Si une telle couche existe dans les naines blanches, elle peut être susceptible d'aller chercher les éléments lourds à une grande profondeur pour les ramener à la surface de l'étoile où ils peuvent apparaître dans le spectre. Cela semble être le cas de Van Maanen 2, comme une étude à paraître prochainement le montrera.

7. Couche de mélange. Nous avions introduit pour les couches profondes un élément moyen (34). Au voisinage de la couche de mélange, il est nécessaire d'introduire une autre approximation.

Supposant toujours que les variations dues aux termes exponentiels  $exp(-\chi/kT)$  sont faibles en raison de la haute température de la couche de mélange, nous posons:

u =	$e^{-\int \vartheta \varphi' H dz}$ .
	$\int \vartheta e \psi' dz$

et l'équation de neutralité électrique prend la forme:

(7.1)

7.2)

$$\sum \frac{a_i}{b} Z_i u^{A_i - A_e} v^{Z_i + 1} = 1.$$

Nous déterminons les constantes  $a_i$ , b par un choix convenable de l'origine des coordonnées. A l'origine, nous avons u = v = 1. Si l'on suppose que l'hydrogène et les autres éléments pris ensemble ont une concentration respectivement égale à 1/2 en ce point, on a à un facteur près, le même pour  $a_i$  et b: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XXV, 7. 2

(7.4) 
$$\begin{cases} a_i = \frac{1}{2} \frac{c_i}{m_i} \\ a_n = \frac{1}{2} \frac{1}{m_n} \\ \text{(hydrogène)} \end{cases}$$

et on en déduit b:

(7.5) 
$$b = \frac{1}{2} \frac{Z_n}{m_n} + \frac{1}{2} \sum \frac{Z_i c_i}{m_i}.$$

L'équation de neutralité électrique s'écrit alors:

(7.6) 
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i}}{A_{i}} Z_{i} u^{A_{i}} v^{Z_{i}+1} + \frac{1}{A_{n}} u^{A_{n}} v^{Z_{n}+1}}{\sum_{i=1}^{n} c_{i} \frac{Z_{i}}{A_{i}} + \frac{Z_{n}}{A_{n}}} = 1.$$

Nous allons supposer maintenant que pour les éléments lourds

$$\frac{A_i}{Z_i+1} - \frac{A_j}{Z_j+1}$$

est si petit que nous pouvons le négliger. En prenant comme nouvelle variable  $u^{A_1}v^{Z_1} = t$  on obtient ainsi, avec  $Z_i/A_i = 1/2$ et en confondant  $Z_i$  et  $Z_i + 1$ 

$$\frac{1}{2}\sum c_{i}t^{Z_{i}/Z_{i}}+u(t^{1/Z_{i}}u^{-2})^{2}=\frac{3}{2}$$

ou:

(7.7) 
$$\frac{1}{2}\sum c_{i}t^{Z_{i}/Z_{1}}+u^{-\vartheta}t^{\vartheta/Z_{1}}=\frac{3}{2},$$

d'où u:

7.8) 
$$u^{3} = \frac{t^{2/2_{1}}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sum c_{i} t^{\mathbf{Z}_{i}/\mathbf{Z}_{i}}}.$$

On en déduit la concentration en hydrogène  $x_H$  représentée paramétriquement en fonction de t par (7, 8) et  $x_{H} = \frac{u^{-1} t^{1/Z_{1}}}{u^{-1} t^{1/Z_{1}} + \sum_{i} c_{i} t^{Z_{i}/Z_{1}}}.$ 

$$-\int_0^z \partial \varphi' \, H dz \,=\, \log_e u$$

qui donne la variation de u avec la cote.

🖉 On a de plus:

(7.10)

La solution ainsi trouvée se raccorde aisément du côté de l'hydrogène à la solution (6.13) et du côté des éléments lourds à la solution approchée de non triage.

Nous avons calculé une table des variations de  $x_H$  avec la hauteur en admettant pour les éléments lourds un mélange de Russell simplifié, dont la composition est donnée dans le tableau II.

Tableau I	I.
-----------	----

Élément	Concentration		
0	0,5		
Mg	0,25		
Si	0,0625		
Ca	0,0625		
Fe	0,125		

On obtient ainsi les résultats donnés dans le tableau III. Les hauteurs ont été calculées pour un gaz isotherme à  $T = 10^7$  degrés et dans un champ de pesanteur  $g = 10^9$  c. g. s. On remarquera combien ces hauteurs sont faibles dans un si grand champ de pesanteur.

On remarquera que nous n'avons pas introduit d'hélium. La raison essentielle est que pour l'hélium, l'hypothèse  $A_i/Z_i + 1 = Cte$  n'est plus valable, ou n'est plus en tout cas qu'une grossière approximation. L'introduction d'hélium compliquerait considéiablement la solution, sauf si toutefois on supposait l'étoile composée d'hydrogène et d'hélium presque exclusivement.

On trouvera fig. 1, p. 20, la courbe représentative de  $x_H$  en fonction de log u. Ce résultat peut être utilisé pour le calcul de la distribution de la température et du débit d'énergie, car la fonction x(t) ainsi obtenue est indépendante de la température

2\*

Tableau III.  $Z_{
m km}$  $x_0$  $x_{Mg}$  $x_{Si}$ xFe.  $f^{1/Z_1}$  $\left| \sum c_i t^{Z_i/Z_1} \right| = \log_{10} u$  $(T=10^{7^{\circ}})$  $x_{\mu}$  $1-x_H$  $1-x_H$  $1-x_H$  $1-x_H$  $q = 10^9 \, \text{cgs}$  $+\infty$ 1 + ∞ 0 0 . . . . . . 0.079 0,3230,9840,98 0,013 6,20,40,90 0,1120,035 0,2580,963 0,5.. . . 0,078 0,2020,925 3,70,83 0,150 0.0210,6 0,187 0,033 0,7 0,1570,1540,8640,7640,008 • • 0,108 0,776 2.10,688 0,2210,044 0.023 0,8 0,2970,2240,055 0.059 0,655 0,603 0.90,5450,060 . . 0,500 0 0,500 0,250 $0,062_{5}$ 0.125 1,000 0,000 1,0 0,4780,2480,0634 0.143 1,021,133 -0,0170,465. . 1,287 - 0,034 0,431----0,6 0,4540,2460,064, 1,04 0,3870,2340,064, 1,10 1,888 -0,1120,315-2,10.2280,333 0,2180,063, 2,628-0,2970,188---- 5,7 0.2911,15 0 3 - ∞ — ∞ ۰. . . . . . .

et de la densité. Pour obtenir x(z) il faut en plus tenir compt de l'équation de transfert d'énergie. Les courbes de la figure 2 p. 21, représentatives de la variation de composition du mélange des éléments lourds avec la cote, montrent qu'il n'est pa légitime de remplacer le mélange des éléments lourds par un élément moyen. Nous pouvons remarquer de plus que, dès que







Rig. 2. Variations des concentrations [O] [Fe] [Mg] [Si] au sein du mélange d'éléments lourds. On remarquera que la concentration en oxygène croit considérablement à l'extérieur de la couche de mélange, c'est-à-dire là où la concentration en hydrogène est déjà grande.

 $\log u > 0,2$  par exemple, seul l'oxygène est pratiquement présent, comme élément lourd. Dans le calcul du coefficient d'absorbtion et de la température il pourra être considéré comme légitime de supposer avoir affaire à un mélange d'hydrogène et d'oxygène seulement.

Ces conclusions seront appliquées plus tard à l'étude de certains modèles de naines blanches.

### B. Phénomènes dûs aux dégénérescences.

8. Phénomènes dûs à la dégénérescence du gaz d'électrons. Nous allons étudier le mélange de deux espèces atomiques au voisinage de la couche de mélange, lorsque le gaz d'électrons est plus ou moins dégénéré. L'hypothèse supplémentaire d'un champ de pesanteur intense, et par conséquent d'une faible hauteur de mélange permet alors l'emploi d'un développement réduit au premier terme pour décrire l'état du gaz d'électrons. Nous supposerons le mélange isotherme.

En posant

$$U_{\nu}(\Lambda) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_{0}^{\infty} \frac{U^{\nu} du}{\frac{1}{\Lambda} e^{u} + 1},$$

 $\mathbf{22}$ 

le nombre r d'électrons est donné par:

(8.2) 
$$r = \frac{2}{h^3} (2 \pi m_e kT)^{\frac{8}{2}} U_{\frac{1}{2}}(\Lambda).$$

Nous prenons comme origine des ordonnées le point où les concentrations en poids des 2 espèces de particules sont égales. Si l'on désigne par  $\varrho_0$  la densité totale de noyaux en ce point, on a

(8.3) 
$$(n_1)_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_1 H}$$

(8.4) 
$$(n_2)_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_2 H}$$

avec

 $m_i$  masse d'un noyau d'espèce *i*. Dans ces conditions

(8.6) 
$$r_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{H} \left( \frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2} \right)$$

et l'on a, pour le quotient  $r/r_0$ , en utilisant les notations (7,1) et (7,2) pour u et v qui valent 1 pour z = 0:

(8.7) 
$$\frac{r}{r_0} = \frac{U_{\frac{1}{2}}(A)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} = \frac{\frac{Z_1}{A_1}u^{A_1}v^{Z_1} + \frac{Z_2}{A_2}u^{A_2}v^{Z_2}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}};$$

 $A_0$  est défini par (8,2) et (8,6) et on a:

$$(8.8) \Lambda = \Lambda_0 u^{A_e} v^{-1}.$$

En supposant que  $\Lambda$  ne varie pas de façon considérable, on a

$$(8.9) \quad \log \frac{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda)}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})} = \log \frac{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0}) + \frac{\delta\Lambda}{\Lambda} U_{-\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})} \boxtimes \frac{\delta\Lambda}{\Lambda} \frac{U_{-\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})}$$

$$(8.10) \qquad \log \frac{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda)}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})} \boxtimes \frac{U_{-\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda)} \left(\frac{A_{e}}{u} - \frac{1}{v}\right).$$

En posant

Nr: 7

(8.11)

(8.12)

(8.13)

(9.1)

(9.2)

9.3)

Nr.4

$$\frac{U_{-\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})} = \xi$$

qui pour nous sera une grandeur caractérisant l'état de dégénérescence (gaz D.  $\xi = 0$ , gaz N. D.  $\xi = 1$ ), on peut écrire

$$\frac{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda)}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_{0})} = u^{A_{e}\xi}v^{-1}$$

et l'équation (8.7) peut s'écrire:

$$\frac{\frac{Z_1}{A_1}u^{A_1-A_e\xi}v^{Z_1+\xi}+\frac{Z_2}{A_2}u^{A_2-A_e\xi}v^{Z_2+\xi}}{\frac{Z_1}{A_1}+\frac{Z_2}{A_2}} = 1$$

9. Hauteur de mélange. Nous allons donner une définition plus logique et plus précise de la hauteur de mélange de la façon suivante. Dans un mélange, le nombre de particules d'espèce 1 et d'espèce 2 est:

$$n_1 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_1 H} u^{A_1} v^{Z_1}$$
$$n_2 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_2 H} u^{A_2} v^{Z_2}.$$

Nous avons à utiliser pour le calcul du débit d'énergie dans une région isotherme l'expression:

## $\int n_1 n_2 dz$

ét nous appelons hauteur de mélange h la quantité

$$h = \frac{\int n_1 n_2 dz}{\frac{1}{4} \frac{\varrho_0^2}{A_1 A_2 H^2}} = \int u^{A_1 + A_2} v^{Z_1 + Z_2} dz.$$

Nous allons transformer cette expression afin de la calculer à l'aide de (8,13), (7,1) et (7,2).  $\mathbf{24}$ 

En vertu de (7,1) nous avons

(9.5) 
$$\frac{du}{u} = -\vartheta Hgdz$$

et par conséquent:

(9.6) 
$$h = \frac{1}{\vartheta Hg} \int u^{A_1 + A_2} v^{Z_1 + Z_2} \frac{du}{u}.$$

Nous posons, dans (8.13):

(9.7) 
$$t = \frac{\frac{Z_1}{A_1}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}} u^{A_1 - A_e^{\xi}} v^{Z_1 + \xi}.$$

En posant

(9.8) 
$$\zeta = \frac{Z_2 + \xi}{Z_1 + \xi},$$

on a:

(9.9) 
$$u^{A_2-A_e\xi-\zeta(A_1-A_e\xi)} = \frac{1-t}{t^{\zeta}} \frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2} \left(\frac{Z_1}{A_1}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}}\right)^{\zeta}.$$

Posons:

(9.10) 
$$\alpha = \frac{\frac{Z_1}{A_1}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}} \qquad 1 - \alpha = \frac{\frac{Z_2}{A_2}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}}.$$

L'intégrale que nous avons à calculer s'écrit alors, en raiser de (9.7):

(9.11) 
$$\int u^{A_1+A_2} \left(\frac{t}{\alpha} u^{-A_1+A_2} \xi\right)^{\frac{Z_1+Z_2}{Z_1+\xi}} \frac{du}{u},$$

En posant encore:

(9.12) 
$$A = A_2 - A_e \xi - \zeta (A_1 - A_e \xi),$$

on tire de (9.9):

(9.13) 
$$A\frac{du}{u} = \left(-\frac{1}{1-t} - \frac{\zeta}{t}\right) dt.$$

L'intégrale (9.11) s'écrit donc:

Nr. 7

(9.14) 
$$\frac{1}{A} \int u^{A_1 + A_2 - (A_1 - A_e \xi)} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + \xi} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + \xi}} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{\zeta}{t}\right) dt.$$

En portant l'expression (9.9) pour u(t) dans (9.14), on obtient:

$$(9.15) \frac{1}{A} \int_{0}^{1} \left( \frac{1-t}{t^{\zeta}} \frac{\alpha^{\zeta}}{1-\alpha} \right)_{r}^{A_{1}+A_{2}-(A_{1}-A_{e}\xi)\frac{Z_{1}+Z_{2}}{Z_{1}+\xi}}{A} \left( \frac{t}{\alpha} \right)^{\frac{Z_{1}+Z_{2}}{Z_{1}+\xi}} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{\zeta}{t} \right) dt$$

En vertu de (8.13) et de (9.7), t est compris entre 0 et 1. On a donc une intégrale Eulérienne de première espèce. Le coefficient numérique dans l'intégrale (9.15) est

(9.16) 
$$\frac{1}{A}(1-\alpha)^{-1-\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}}\alpha^{-1+\frac{2Z_1A_e\xi}{(Z_1+\xi)A}}$$

et l'intégrale s'écrit :

9.17) 
$$\begin{cases} \int_{0}^{1} = B\left(1 + 2\frac{\xi\left(A_{1} + Z_{1}A_{e}\right)}{(Z_{1} + \xi)A}, 2 - \frac{2Z_{2}A_{e}\xi}{(Z_{1} + \xi)A}\right) + \\ + \zeta B\left(2 + \frac{2\xi\left(A_{1} + Z_{1}A_{e}\right)}{(Z_{1} + \xi)A}, 1 - \frac{2Z_{2}A_{e}\xi}{(Z_{1} + \xi)A}\right). \end{cases}$$

En vertu de la relation

(9.18) 
$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

et en négligeant  $A_e/A$ , ce qui n'est incorrect que lorsque A est du même ordre de grandeur que  $A_e$ , l'expression (9.18) se simplifie beaucoup et devient:

9) 
$$\frac{1}{2 + \frac{2\xi(A_1 + Z_1A_e)}{(Z_1 + \xi)A}} \left(\frac{1}{1 + \frac{2\xi(A_1 + Z_1A_e)}{(Z_1 + \xi)A}} + \zeta\right).$$

On obtient alors pour la hauteur de mélange:

$$(9.20) \begin{cases} h = \frac{kT}{Hg} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1+\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{1}{A + \frac{\xi(A_1+Z_1A_e)}{Z_1+\xi}} \\ \left(\zeta + \frac{1}{1+\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}}\right). \end{cases}$$

Dans le cas où  $\xi = 0$  (gaz D.), (9.20) se réduit à

(9.21) 
$$h = \frac{kT}{Hg} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{\zeta+1}{A_2-\zeta A_1}$$

qui est à une petite différence numérique près l'expression déjà trouvée (34). La différence provient d'une meilleure évaluation de la hauteur de mélange. Pour donner une idée de l'influence de la dégénérescence sur la hauteur de mélange, nous allons calculer pour  $A_2 = 24$ ,  $A_1 = 1$ ,  $Z_2 = 12$ ,  $Z_1 = 1$  les variations de h avec  $\xi$ . Dans ce cas, on a:

(9.22) 
$$\alpha = \frac{2}{3}$$
  $1-\alpha = \frac{1}{3}$   $A = 24-\zeta$ .

On obtient le tableau IV donnant  $h/h_D$  en fonction de  $\xi$  et les valeurs correspondantes de  $kT/\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$ , énergie maximum au zéro absolu) et de  $\varrho/\mu$  pour  $T = 10^7$  degrés. Les tables de E. C. Stoner (46) des fonctions  $U_{-1/2}$ ,  $U_{1/2}$  et  $U_{3/2}$  ont servi à dresser le tableau.

ξ	$h/h_D$	$kT/arepsilon_0$	$\frac{\log \varrho/\mu}{(T=10^7 \text{ degres})}$
1	0,406	Š	80
0,8	0,466	1,06	2,246
0,6	0,522	0,55	2,67
0,4	0,617	0,294	3,08
0,2	0,745	0,151	3,51
0	1	0	~ ~ ~

Tableau IV.

On voit que la dégénérescence ne modifie pas considérablement la valeur de la hauteur de mélange et que cette hauteur est plus faible dans le cas de non dégénérescence.

10. Dégénérescence dans le gaz de noyaux.

a) Statistique de Bose. Si l'on se place au zéro absolu, tous les atomes se répartissent dans un état d'énergie minimum, donc d'énergie potentielle nulle. Ceci implique pour chaque espèce

 $m_i \varphi - Z_i e \psi = 0.$ 

(10.1)

(10.2)

(10.3)

(10.4)

avec

Nr

Cette condition ne peut être satisfaite simultanément pour toutes les espèces atomiques à spin entier. Il y a donc séparation complète des éléments obéissant à la statistique de Bose et ces éléments sont superposés dans l'ordre  $m_i/Z_i$  décroissant.

b) Statistique de Bose et statistique de Fermi. La condition (10.1) détermine le potentiel électrique. Les particules obéissant à la statistique de Fermi sont alors en nombre:

 $n_{1} = \frac{8 \pi}{3 h^{3}} (p_{0}^{2} - 2 m_{1} W_{1})^{\frac{3}{2}}$ 

et le nombre d'électrons est:

$$n_{e} = \frac{8\pi}{3h^{3}} (p_{e}^{2} - 2m_{e}W_{e})^{\frac{3}{2}}$$

$$W_{1} = m_{1}\varphi - Z_{1}e\varphi$$

$$= \left(m_{1} - Z_{1}\frac{m_{i}}{Z_{i}}\right)\varphi$$

$$W_{e} = \left(m_{e} + \frac{m_{i}}{Z_{i}}\right)\varphi.$$

Le nombre  $n_i$  des particules obéissant à la statistique de Bose est donné par la condition de neutralité électrique (une seule espèce à la fois):

(10.5) 
$$\begin{cases} Z_{i}n_{i} + Z_{1}\frac{8\pi}{3h^{3}}\left(p_{0}^{2} - 2m_{1}\left(m_{1} - Z_{1}\frac{m_{i}}{Z_{i}}\right)\varphi\right)^{\frac{8}{2}} = \\ = \frac{8\pi}{3h^{3}}\left(p_{e}^{2} - 2m_{e}\left(m_{e} + \frac{m_{i}}{Z_{i}}\right)\varphi\right)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Les constantes po et pe sont déterminées par les conditions relatives au nombre total de particules i et 1 en présence. Le nombre de particules d'espèce 1 subit une discontinuité chaque fois que l'on passe d'une espèce i à une autre, en raison du changement de potentiel électrique. Il peut enfin y avoir une région de pur hydrogène et dans ce cas la relation entre les potentiels est donnée par:

(10.6) 
$$Z_1 \frac{8\pi}{3h^3} \left( p_0^2 - 2m_1 \left( m_1 \varphi - Z_1 e \psi \right) \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi}{3h^3} \left( p_e^2 - 2m_e \left( m_e \varphi + e \psi \right) \right)^{\frac{3}{2}}$$

A travers chaque surface de discontinuité de la densité on doit avoir continuité de la pression. Cette condition peut être satisfaite en supposant que les potentiels  $\varphi$  et  $\psi$  subissent une discontinuité Si l'on a p éléments obéissant à la statistique de Bose, de l'hydrogène et des électrons, on a p équations de continuité pour la pression, p + 1 conditions pour le nombre de particules dé terminant les p+1 constantes présentes dans les potentiels et les positions des p surfaces de discontinuité.

Traitons plus simplement le cas d'un seul élément. L'équa tion (10.5) est la seule à être satisfaite, tant que  $n_i \neq 0$ . Lorsque n s'annule, seule l'équation (10.6) est satisfaite. Nous supposerons que  $p_e^2$  étant très grand devant  $m_e W_e$ , le nombre d'électrons est sensiblement constant:

(10.7) 
$$Z_i n_i + Z_1 \frac{8 \pi}{3 h^3} \left( p_0^2 - 2 m_1 \left( m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \right)^{\frac{3}{2}} = r.$$

Calculons sur quelle hauteur  $Z_i n_i$  varie de 0 à  $r/Z_i$ . L'équation

(10.8) 
$$Z_1 \frac{8\pi}{3h^3} \left( p_0^2 - 2m_1 \left( m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \right)^{\frac{3}{2}} = r - Z_i n_i$$

donne les deux équations suivantes

(10.9) 
$$\begin{cases} p_0^2 - 2 m_1 \left( m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi = \left( \frac{r h^3}{8 \pi Z_i} \right)^{\frac{3}{4}} \\ p_0^2 = 0 \end{cases}$$

en prenant pour origine  $\varphi = 0$  quand  $p_0 = 0$  (pas de protons). On a ainsi:

(10.10) 
$$hg = \frac{1}{2 \, \dot{m}_i \left( Z_1 \frac{m_i}{Z_i} - m_1 \right)} \left( \frac{3 \, r \, h^3}{8 \, \pi Z_i} \right)^{\frac{3}{8}}$$

ou numériquement:

Nr#

(10.11) 
$$h = [9.814] \frac{\varrho^{-\frac{2}{3}}}{g\left(\frac{A_i}{Z_i} - 1\right)}.$$

Nous avons déjà donné (44) l'expression de la hauteur de mélange pour un gaz dégénéré de protons et un gaz parfait de novaux. On avait trouvé:  $h = \left[ 9.923 
ight] rac{arrho^{-rac{2}{3}}}{g\left( rac{A_i}{Z} - 1 
ight)}.$ 

(10.12)

On voit, que lorsque l'un des gaz de noyaux est un gaz de Fermi, la hauteur de mélange est déterminée par lui, en raison de la grande énergie d'agitation des novaux du gaz de Fermi.

## II. L'ionisation de l'hydrogène.

### I. Introduction.

1. L'étude de l'état de l'hydrogène aux densités relativement elevées est absolument essentielle pour les naines blanches. D'abord parce que l'atmosphère des naines blanches est constituée d'hydrogène pur. Ensuite parce que l'on atteint très rapidement, our de faibles profondeurs optiques, des densités considérables. Alors que d'ordinaire, à des températures de 30.000 degrés, in a seulement des densités de 10<sup>14</sup> ou 10<sup>15</sup> ions positifs hydrogène

par unité de volume, dans le cas des naines blanches ce son facilement des densités de  $10^{18}$  ou  $10^{20}$ . Il n'est pas possible alors de tenir compte d'une manière arbitrairement simple de l'ionisation de pression, par exemple en coupant la somme d'états en un point convenable. D'autre part, la méthode des volumes exclus (15) (16) ne donne que des résultats extrême ment grossiers, et a le tort de ne donner aucune indication su l'état des atomes neutres.

Une méthode parfaitement correcte, tant du point de vue de l'ionisation que du calcul du coefficient d'absorption et de la conductibilité serait la suivante: placer les protons en des points déterminés distribués au hasard dans une enceinte close, dé terminer tous les niveaux d'énergie possibles pour les électrons distribuer ces électrons parmi les niveaux d'énergie en accord avec la température du gaz, à l'aide des fonctions d'onde obtenues, calculer l'énergie potentielle des protons en fonction de leurs coordonnées et l'utiliser pour trouver à l'aide de l'équation de Schrödinger leur mouvement. Cette méthode est en fait celle qui est utilisée dans les théories du corps solide, mais elle est essentiellement simplifiée par le fait que les atomes ne sont pas distribués parfaitement au hasard, mais au voisinage des nœuds d'un réseau. Il est donc nécessaire d'employer ici une théorie statistique pour arriver à un résultat.

Le principe de la théorie statistique est le suivant: étant donne un atome supposé à l'état neutre, il est soumis à un certain champ électrique, et l'on a à déterminer la probabilité W(F) dF qu ce champ soit compris entre les valeurs F et F + dF. Sous l'in fluence de ce champ, les niveaux sont perturbés, et pour les grandes valeurs du nombre quantique principal n, cette per turbation peut être assez forte pour empêcher les états d'exister On a donc un nombre moyen NW(F) dF d'atomes soumis au champ F et dont l'énergie d'ionisation est plus faible que celle des atomes en l'absence de champ. Il est alors possible de de nombrer les états d'énergie E des électrons, en prenant pou origine des énergies celle des électrons libres de vitesse nulle En conséquence, les électrons libres ont des énergies positives les électrons liés des énergies négatives.

Cette théorie est linéaire, car elle ne tient compte que de la valeur du champ électrique F au point considéré, et non pa

des valeurs grad F, grad grad F etc. ... En d'autres termes, les dimensions de l'atome sont supposées négligeables devant l'hétérogénéité du champ. Mise à part l'extrême complication qu'implique l'introduction de ces grandeurs, nous serons amenés, pour dégager les faits essentiels, à d'autres simplifications plus importantes que celle du champ uniforme.

31

Cette théorie a un caractère de première approximation, car nous supposerons que le champ F ne modifie que d'une quantité négligeable les niveaux d'énergie et les probabilités de transition, bien que nous tenions compte de la destruction des états par les champs intenses. Il serait évidemment plus correct de tenir compte individuellement des états séparés par le champ, mais il ne semble pas que l'introduction de cette complication soit justifiée.

MROWKA (26) a essayé de traiter le problème de l'élargissement des raies spectrales par la mécanique ondulatoire. Mais sa théorie suppose que seule l'action des atomes neutres est à considérer et que la température est assez basse pour que tous les atomes d'hydrogène soient dans l'état fondamental. Il s'agit donc d'un cas extrêmement différent de celui que nous nous proposons d'étudier.

### II. État de l'hydrogène.

2. Dénombrement des états. Ionisation. Nous supposerons un volume où se trouvent  $N_1$  ions positifs  $N_e$  électrons et  $N_0$  atomes neutres par cm<sup>3</sup>.

Un atome neutre, de nombre quantique principal n, placé dans un champ F est susceptible d'avoir 2n-1 niveaux d'énergie. Soit x le nombre quantique «électrique», nous avons 2n-1niveaux d'énergie  $-E_{nx}(F)$  avec -(n-1) < x < n-1. Le poids statistique de chacun de ces états est  $g_{nx}$ . Soit W(F) la probabilité pour que le champ soit compris entre F et F + dF. Rour les fortes valeurs de F les niveaux sont détruits, alors  $g_{nx} = 0$ . Comme nous avons fait choix pour origine des énergies des électrons de vitesse nulle, nous dénombrons les états de la facon suivante.

Il y a  $N_1$  protons et  $N_1 g_{nx} W(F) dF$  états possibles d'énergie  $E_{nx}$  Le nombre d'électrons liés dans ces niveaux est:

(2.1) 
$$dn_1 = N_1 g_{nx} W(F) dF \frac{1}{1 + e^{-\vartheta E_{nx} - \alpha}}$$

où  $\vartheta = 1/kT$  et  $\alpha$  est une constante déterminée de la façon suivante.

Le nombre total d'électrons est:

(2.2) 
$$N_e + N_0 = \int dn_0 + \int_0^{\frac{8\pi p^2 dp}{h^3}} \frac{1}{1 + e^{\frac{p^2}{2mkT} - \alpha}}.$$

Le nombre total d'électrons libres est donné par la secondé intégrale et le nombre total d'électrons liés par la première:

(2.3) 
$$N_0 = N_1 \sum_{n,x} \int_0^\infty \frac{g_{nx} W(F) dF}{1 + e^{-\vartheta E_{nx} - \alpha}}$$

(2.4) 
$$N_e = \int \frac{8 \pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{1 + e^{\vartheta \frac{p^2}{2m} - \alpha}}.$$

Lorsqu'on est loin des conditions de dégénérescence, on a plus simplement:

(2.5) 
$$N_e = 2 \frac{(2 \pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{\alpha}$$

(2.6) 
$$N_0 = N_1 \sum_{n,x} \int_0^\infty g_{nx} W(F) e^{g \cdot E_{nx}} dF \cdot e^{\alpha};$$

par élimination de  $e^{\alpha}$ , on obtient une expression analogue à celle de Saha:

(2.7) 
$$\frac{N_e N_1}{N_0} = \frac{2 \cdot (2 \pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{1}{\sum_{nx} \sqrt[7]{g_{nx}} W(F) e^{\vartheta \cdot E_{nx}} dF}$$

où la somme au dénominateur du second membre est l'équivalent de l'habituelle somme d'états et se ramène à celle-ci lorsqué la densité tendant vers zéro, le champ F devient extrêmement faible et sans influence sur les niveaux. 3. En réalité, pour un niveau nx donné, l'intégrale n'est pas prise jusqu'à l'infini, mais seulement jusqu'à la valeur du champ F qui détruit l'état nx. On doit donc écrire pour la somme  $\Sigma$ :

$$\sum = \sum_{nx} \int_{0}^{F_{nx}} W(F) \, dF e^{9E_{nx}}$$

Nr. 7

(3.1)

Nr. 7

La détermination de  $F_{nx}$  est donc essentielle à la poursuite du calcul. Nous suivrons pour cela une méthode très analogue à celle de PANNEKOEK (28). Cette méthode est la suivante. Dans le champ F, l'atome d'hydrogène subit une destruction spontanée analogue à la radioactivité  $\alpha$ , l'électron franchissant la barrière de potentiel à l'intérieur de laquelle il se trouve enfermé. Cette destruction s'opère avec une durée de vie  $\delta$  donnée par Lanczos (23)

(3.2) 
$$\delta = \frac{\pi e^2}{ha_0} \frac{e^{-2I_*}}{2I_1} = 2,066 \cdot 10^{16} \frac{e^{-2I_*}}{2I_1}$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont reliés aux intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce. Lorsque cette durée de vie  $\delta$  est plus courte qu'un temps  $\alpha$  lié à la durée de vie de l'atome effectuant des transitions spontanées (de l'ordre de  $10^{-8}$  sec.), nous dirons avec Pannekoek que l'état a cessé d'exister. La valeur de  $\alpha$  peut être choisie arbitrairement sans changer considérablement les résultats en raison de la présence dans  $\delta$ d'une exponentielle variant très rapidement. Nous avons pris ici  $\alpha = 10^{-8}$  sec.

Le système de Lanczos, reproduit par Pannekeok est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{2 \, a_0^2}{e} F n^3 & \tau = 8 \, \gamma_2 n \varepsilon = \sin^2 \varphi \\ k = \mathrm{tg} \frac{1}{2} \varphi & k' = \sqrt{1 - k^2} \\ z = 3 \, \varepsilon I_2 = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot E' - 2 \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cdot K' \\ \frac{2 \, I_1}{n^2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (K - E) \end{array} \right.$$

dans lequel K et E sont les fonctions elliptiques complètes de première et seconde espèce de module k et K', E' les mêmes de D. Kgl. Danske Vidensk, Selskab, Mat-fys. Medd. XXV, 7.

 $\mathbf{34}$ 

module k'.  $\gamma_2$  représente la fraction rouge du réseau de raies Stark détruite par le champ F.

Les fonctions  $z = 3 \varepsilon I_2$  et  $y = \log \frac{\varepsilon I_1}{n^2}$  ont été tabulées par PANNEKOEK (28). Comme nous supposons la différence  $E_{nx} - E_n$  petite devant  $E_n$ , nous pouvons définir la disparition des états.

dans le champ F par la condition  $\gamma_2 = 1/2$ .

La relation  $\delta = \alpha$  qui peut s'écrire:

(3.4) 
$$16,01 - 2 \cdot 0,4343 \frac{z}{3 \varepsilon} - y + \log \frac{\varepsilon}{n^2} = \log \alpha$$

(3.5) 16,01 
$$-\log \alpha - y + \log \tau - \log 4 n - \log n^2 = \frac{z}{3,454} \frac{4 n}{\tau}$$

nous détermine complètement  $\tau_n$ . On en déduit ensuite:

(3.6) 
$$\tau_n = 4 n \frac{2 a_0^2}{c} F n^3,$$

d'où:

(3.7) 
$$F = \frac{t_n}{4,68 \ 10^{-7} n^4} = 2,14 \cdot 10^6 \frac{t_n}{n^4}.$$

Le résultat est donné dans le tableau I.

Tableau I.

n	$\log \tau_n$	$\log F_n$	$\log N_1^{s/_3} \frac{F_n}{F_0}$	Destruction des états pour log $N_1$	Recouvre- ment des raies pour log N <sub>1</sub>
1	1,356	5,686	14,588	21,873	23,257
2	1,583	4,709	13,611	20,417	21,000
3	1,695	4,117	13,019	19,529	19,678
4	1,764	3,686	12,588	18,883	18,742
5	1,810	3,344	12,246	18,370	18,014
6	1,842	3,059	11,961	17,943	17,421
7	1,866	2,815	11,717	17,577	16,919
8	1,883	2,601	11,503	17,254	16,483
9	1,899	2,411	11,313	16,972	16,103
10	1,911	2,241	11,143	16,715	15,757
11	1,920	2,085	10,987	16,480	15,447
12	1,927	1,941	10,843	16,268	15,164
13	1,935	1,810	10,712	16,069	14,904

 $\tau$  est une fonction lentement variable de *n* alors que le dénominateur contenant  $n^4$  croît très rapidement. Lorsque *k* tend vers 1, *k'* tend vers zéro,  $z \cong \frac{5\sqrt{2}}{3\pi}k'^4$  et on a

 $4 n^3 \equiv [7,86] \log_e \frac{4}{k'},$ 

ce qui entraîne de très grandes valeurs de n (n de l'ordre de 300).

4. Il est nécessaire maintenant de préciser la fonction de distribution W(F) dF. Cette fonction est évidemment donnée — en principe — par une méthode de champ self-consistent. Chaque proton est entouré d'électrons libres qui font plus ou moins écran à sa charge. En d'autres termes, la théorie de Holts-MARK (18) qui ne considère que des ions et des électrons ponctuels n'est sans doute pas correcte et cette conclusion a déjà été tirée par VERWEJ (51) de ses résultats relatifs aux contours de raies. Il semble bien que pour la théorie de l'ionisation, la théorie de Holtsmark ne convienne absolument pas et par contre que la théorie de RUSSELL et STEWART (33) donne simplement des résultats conformes à la théorie des volumes exclus et d'ailleurs de façon plus simple.

La loi de probabilité W(F) dF — que nous écrivons ici  $W(\beta) d\beta$ en utilisant le champ normal

 $F_0 = 2,61 \ e \ N_1^{2/3}$ 

et la notation

(4.1)

(4.3)

Nr. 73

(3.8)

 $\beta = \frac{F}{F_0}$ 

est une fonction transcendante nouvelle de  $\beta$ 

$$W(eta) = rac{2}{\pieta} \int_{0}^{\infty} v \sin v e^{-\left(rac{v}{eta}
ight)^{3/2}} dv$$

qui, pour les faibles valeurs de  $\beta$ , admet un développement dont le premier terme nous suffit:

 $W(eta) = rac{4}{3 \, \pi} eta^2.$ 

3\*

N

(4.10)

(4.11)

Nr.

Si nous supposons la densité d'ions  $N_1$  très élevée (par exemple 10<sup>22</sup>), le champ normal  $F_0$  est très intense et la destruction des états a lieu même pour de très faibles valeurs de  $\beta$ . Si de plus, et uniquement pour la commodité de notre argumentation, nous supposons la température assez élevée pour que les exponentielles

(4.5) 
$$e^{\vartheta E_{nx}}$$

se réduisent à l'unité, la somme  $\Sigma$  devient:

(4.6) 
$$\sum_{n} = \sum_{n} 2 n^2 \int_0^{\beta_n} \frac{4}{3\pi} \beta^2 d\beta$$

ou, en tenant compte des équations (3.7) (4.2) (4.4):

(4.7) 
$$\sum = \sum_{n}^{7} \frac{1}{2 \pi (4,68 \cdot 10^{-7} F_0)^3} \frac{\tau_n^3}{n^{10}}.$$

Cette somme est évidemment convergente et même très rapide ment, mais nous remarquerons en raison de la valeur (4.1) du champ normal qu'elle est inversement proportionnelle à  $N_1^3$ ,  $N_1$  nombre d'ions positifs. On conclut de la relation (2.7) avec  $N_e = N_1$  que:

(4.8) 
$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_n^i}{n^{10}}}{(4,68 \cdot 10^{-7} \cdot 2,61 \ e)^3} \cdot \frac{h^3}{2(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}}$$

c. à. d. que, à température constante,  $N_0$  serait constant pour les grandes densités. Ce résultat n'aurait en soi rien d'absurde, mais le calcul numérique de  $N_0$  nous donne:

(4.9) 
$$N_0 = \frac{[28,566]}{T^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur exagérément élevée de  $N_0$  ainsi obtenue est en con tradiction absolue avec toutes les indications de la théorie des volumes exclus qui indique une décroissance extrêmement rapidé du nombre d'atomes neutres avec les densité croissantes.

Il a paru que ce résultat provenait de l'emploi de la théorie de Holtsmark, de préférence à une autre. Nous avons donc essayé la théorie de RUSSELL et STEWART (33). Russell et Stewart

exprimant que dans la sphère de rayon x, x + dx se trouve un ion positif, et que cet ion, le plus proche de l'atome considéré, est aussi le seul à agir, obtiennent la fonction de distribution:

$$W(eta) \, deta = rac{1,50}{eta^{rac{5}{2}}} e^{-eta^{-rac{3}{2}}} deta$$

qui est identique à la fonction de Holtsmark pour les grandes valeurs de  $\beta$  ( $\beta > 50$  par exemple) mais qui en diffère très considérablement (en puissances de 10) quand  $\beta$  est très petit. Si nous supposons comme précédemment que la densité  $N_1$  est élevée, et la température aussi, nous avons à utiliser l'intégrale

$$\int_0^{\beta_n} W(\beta) \, d\beta = e^{-\beta_n}$$

ce qui donne pour la somme  $\Sigma$ :

(4.12) 
$$\sum = \sum_{n} 2n^{2} \exp \left(-(4,68 \cdot 10^{-7} F_{0})^{\frac{3}{2}} \frac{n^{6}}{r_{n}^{\frac{9}{2}}}\right)$$

Elle contient ainsi des exponentielles dont la valeur numérique est:

(4.13)

exp – [23,151]  $N_1 \frac{n^6}{r_n^{\frac{3}{2}}}$ .

Le terme qui figure ici en exponentielle est tout à fait analogue au terme élémentaire que l'on obtient par la méthode des volumes exclus sous la forme donnée par FERMI (15). Une différence très importante est que le coefficient numérique est beaucoup plus grand. Pour donner un ordre de grandeur, l'exposant vaut 1 pour n = 2 lorsque  $N_1 = [20,43]$ , alors que la méthode des volumes exclus introduit pour le même résultat une valeur  $N_1 = [23,1]$ . Autrement dit l'effet Stark linéaire détruit les états stationnaires bien avant que se produisent des collisions au sens classique du terme. On trouvera dans le tableau I les densités pour lesquelles se produit la destruction des états quantiques (colonne 5). Ces valeurs correspondent aux densités pour lesquelles le champ normal (équation 4.1) est égal au champ  $F_n$ (colonne 4). On les comparera aux densités déduites de la for-

mule d'Inglis et Teller (équation 12.1) pour lesquelles se produit le recouvrement des raies (colonne 6).

Nr.7

(5.4)

(5.5)

C'est cet accord entre le résultat de la théorie des volumes exclus et l'emploi de la théorie statistique de Russell Steward qui nous fait conclure à une impossibilité très réelle d'obtenn des résultats complètement corrects par la théorie de Holtsmark. Il serait en particulier intéressant de voir comment l'emploi de la fonction (4.10) modifierait les résultats de VERWEJ (51), particulièrement dans la partie centrale de ses profils de raies

5. On pourrait chercher à améliorer la théorie de Holtsmark, mais les difficultés qui se présentent sont très grandes. Dans le but de montrer de quelle nature sont ces difficultés, nous allons tout d'abord rappeler de quelle nature est la méthode de Holtsmark.

Etant donnée à l'origine des coordonnées une particule, on veut mesurer le champ dans lequel elle est placée. Si l'on appelle  $1, 2, \dots n \dots$  les différentes particules agissantes, chacune pro duisant un champ de composantes  $X_i Y_i Z_i$ , le champ à l'origine a pour composantes

(5.1) 
$$\begin{cases} X_0 = \Sigma X_i \\ Y_0 = \Sigma Y_i \\ Z_0 = \Sigma Z_i. \end{cases}$$

Si l'on appelle  $dx_{1i} \cdots dx_{\nu i}$  la probabilité d'avoir une particule au point de coordonnées  $x_{1i} \cdots x_{\nu i}$ , la probabilité d'avoir un champ compris entre  $X_0$ ,  $X_0 + dX_0$ ,  $Y_0$ ,  $Y_0 + dY_0$ ,  $Z_0$ ,  $Z_0 + dZ_0$ est donnée par

(5.2) 
$$W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{V_N} \int \cdots \int \sigma_1 \cdots \sigma_N dx_{11} \cdots dx_{\nu N},$$

l'intégrale multiple portant sur le volume où les conditions

$$(5.3) \begin{cases} X_0 < X < X_0 + dX_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

sont satisfaites et  $V_N$  étant obtenu par intégration sur le volume total:

$$V_N = \int \cdots \int \sigma_1 \cdots \sigma_N \, dx_{11} \cdots dx_{\nu N}.$$

Afin d'étendre l'intégrale (5.2) à tout l'espace, Holtsmark introduit des facteurs de Dirichlet:

$$H(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha \xi}{\xi} e^{i d\xi} d\xi$$
$$H(Y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \beta \eta}{\eta} e^{i \xi \eta} d\eta$$
$$H(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \gamma \zeta}{\zeta} e^{i \chi \zeta} d\zeta$$

avec les valeurs suivantes de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\chi$ :

(5.6)  $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} dX_0 & \delta = \sum_{1}^{N} X_n - X_0 \\ \beta = \frac{1}{2} dY_0 & \varepsilon = \sum_{1}^{N} Y_n - Y_0 \\ \gamma = \frac{1}{2} dZ_0 & \chi = \sum_{1}^{N} Z_n - Z_0 . \end{cases}$ 

Les intégrales (5.5) valent 1 ou 0 suivant que les inégalités suivantes sont satisfaites ou non:

Comme  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont des infiniments petits, Holtsmark écrit:

$$H(X) = \frac{dX_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\Sigma X_n - X_0)} d\xi$$

d'où, pour W:

(5.8)

$$W(X_0Y_0Z_0)dX_0dY_0dZ_0 = \frac{1}{8\pi^3}dX_0dY_0dZ_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta e^{-i(\xi X_0 + \eta Y_0 + \zeta Z_0)}$$
$$\frac{1}{V_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{W_n} \sigma_1 \cdots \sigma_N e^{i(\xi \Sigma X_n + \eta \Sigma Y_n + \zeta \Sigma Z_n)} dx_{11} \cdots dx_{\nu N}.$$

Nous introduirons ici une hypothèse différente de celle de Holts mark: nous supposerons que les particules  $1, 2, \dots N$  ne son identiques qu'en moyenne, et nous conserverons jusqu'à nouvel ordre l'indice *i*.

Nous avons en tout cas, comme Holtsmark:

$$(5.10) V_N = V^N,$$

ce qui implique l'identité et l'indépendance des probabilités  $\sigma_1 \cdots \sigma_N$ . Nous avons à calculer l'intégrale type:

(5.11) 
$$J_i = \frac{1}{V} \int \cdots \int e^{i(\xi X_i + \eta Y_i + \zeta Z_i)} \sigma_i dx_{i1} \cdots dx_{i\nu}$$

Si l'on suppose que la force  $X_i Y_i Z_i$  agit suivant le rayon vecteur  $r_i$ , on peut écrire, en prenant pour  $\xi \eta \zeta$  les composantes d'un vecteur  $\vec{s}$  faisant un angle  $\theta$  avec le rayon vecteur  $r_i$ :

(5.12) 
$$J_{i} = \frac{1}{V} \underbrace{\int \cdots \int}_{V} e^{i \left(\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{f}_{i}\right)} \sigma_{i} dx_{1i} \cdots dx_{\nu i}.$$

Nous avons évidemment

(5.13) 
$$\sigma_i dx_{1i} \cdots dx_{\nu i} = r_i^2 dr_i \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$$

et l'on a en limitant l'intégration à une sphère de rayon R

(5.14) 
$$J_{i} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^{3}} \int_{0}^{R} r_{i}^{2} dr_{i} \int_{0}^{\pi} d\theta_{i} \int_{0}^{2\pi} d\varphi_{i} e^{i\left(\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{f}_{i}\right)}.$$
Posons  $f_{i} = \frac{e}{r^{2}} g_{i}(r)$  avec  $\dot{g}_{i} = 1$  quand  $r \rightarrow 0$ .
On a:

(5.15) 
$$\vec{s} \cdot \vec{f}_i = -\frac{cg_i}{r_i^2} \rho \cos \theta;$$

posons

(5.16) 
$$e \rho \cos \theta \frac{g_i}{r_i^2} = \rho w_2 \frac{g_i}{r_i^2}$$

et prenons comme nouvelle variable

$$\frac{\varrho w}{r^2}$$

on a alors:

(5.17)

(5.18) 
$$J_{i} = \frac{3}{4 \pi R^{3}} \iint \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \frac{(\varrho \, w_{2})^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\alpha}^{\varphi} \int_{\alpha}^{\omega_{i} u g_{i}(u)} u^{-\frac{5}{2}} \, du$$
  
avec  $\alpha = \frac{\varrho \, w_{2}}{R^{2}}.$ 

On a donc:

5.19) 
$$J_i = \frac{3}{4\pi} \iint \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{iug_i(u)} u^{-\frac{\kappa}{2}} du.$$

La deuxième intégrale peut s'intégrer par parties:

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{iug_i(u)} u^{-\frac{5}{2}} du = \frac{2}{3} \alpha^{-\frac{3}{2}} e^{i\alpha g_i(\alpha)} + \frac{4}{3} i\alpha^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha g_i(\alpha)} (g_i(\alpha) + \alpha g'_i(\alpha)) + \frac{4}{3} \int_{0}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} (2 ig'_i + iug''_i - (g_i + ug'_i)^2) du$$

comme  $\alpha$  est très petit (R grand) on peut développer les exponentielles et on obtient:

$$\frac{2}{3}\alpha^{-\frac{3}{2}} + i\alpha^{-\frac{1}{2}} \left( 2g_i + \frac{4}{3}\alpha g'_i \right) + \frac{4}{3} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} \left( 2ig'_i + iug''_i - (g_i + ug'_i)^2 \right) du.$$

On obtient alors pour  $J_i$ :

 $g_i$  étant une fonction paire par sa définition même,  $\alpha g'_i$  est aussi une fonction paire et la première intégrale disparaît. La deuxième intégrale nous fournit une fonction compliquée de  $\varrho$ :

$$(5.23) \begin{cases} J_{i} = 1 + \frac{2\pi}{4\pi} 2 \cdot \frac{\varrho^{\frac{3}{2}}}{R^{3}} e^{\frac{3}{2}} \int_{0}^{\pi} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{0}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_{i}(u)} \\ (2 \, ig'_{i} + iug''_{i} - (g_{i} + ug'_{i})^{2}) \, du \, . \end{cases}$$

En raison du fait que  $\frac{4}{3}\pi R^3 n = N$ , nombre de particules actives dans le volume considéré, on a pour le produit  $\pi J_i$ :

(5.24) 
$$\pi J_i = \exp\left\{\frac{8\pi n}{3}e^{\frac{3}{2}}\varrho^{\frac{3}{2}}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\int_{0}^{\pi}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_{0}^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{iug_i(u)}H_i(u)e^{iug_i(u)}\right\}$$

la somme  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N}$  a la signification d'une moyenne étendue à toutes les fonctions possibles  $q_i(r)$ .

Holtsmark suppose toutes ces fonctions  $g_i$  identiques à 1 e obtient ainsi le champ dû aux ions:

(5.25) 
$$J^{N} = \exp\left[-4,21 n \varrho^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}\right]$$

et par conséquent la fonction W:

(5.26) 
$$W = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \varrho^2 d\varrho \, e^{-4(21\eta \varrho^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}})} \frac{2}{\varrho F_0} \sin(\varrho F_0)$$

où  $F_0$  est l'intensité du champ de composantes  $X_0 Y_0 Z_0$ .

6. Nous voyons donc par l'expression (5.24) que si un moyenne peut se définir, elle ne s'obtient pas sans calculs d'un extrême complication, comportant 4 intégrales successives potant respectivement sur u,  $\theta$ , (i), et enfin  $\varrho$ . Il semble donc indis pensable de faire une première simplification en supposant toutes les fonctions  $g_i$  identiques. On a alors:

(6.1) 
$$W dX_0 dY_0 dZ_0 = dX_0 dY_0 dZ_0 \iiint \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \varrho^2 d\varrho \, e^{-iF_0 \varrho \cos \theta} \exp |\theta|$$

ce qui donne:

(6.5)

Nr.7

(6.2) 
$$W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\varrho \frac{2\sin \varrho F_0}{\varrho F_0} \exp \left[ K(\varrho) \right],$$
avec pour  $K(\varrho)$ :

(6.3) 
$$K(\varrho) = \frac{8 \pi n}{3} e^{\frac{3}{2}} \varrho^{\frac{3}{2}} \int_{0}^{\pi} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{0}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug(u)} H(u) \, du,$$
  
avec  
(6.4)  $H(u) = 2 i q' + i u q'' - (q + u q')^{2}$ 

43

$$H(u) = 2 ig' + iug'' - (g + ug')^{2}$$
$$g(u) = g\left(\sqrt{\frac{\varrho w_{2}}{u}}\right).$$

On voit, par la nature des fonctions écrites que même les fonctions g les plus simples conduisent tout de même — en général — à des fonctions  $K(\varrho)$  d'une extrême complication. En particulier, nous voyons qu'il serait possible, au moins en principe, de résoudre le système de deux équations intégrales successives (6.2) et (6.3) et d'obtenir la fonction g(r) donnant la loi de probabilité de RUSSELL STEWART.

Les équations (5.24) et (6.2) en particulier nous montrent de quelle nature sont les difficultés d'une méthode statistique de champ self-consistent pour des atomes distribués au hasard.

Il serait possible d'adjoindre aux conditions (5.1) une condition exprimant que l'intégration se fait le long d'une surface d'énergie constante. Mais alors la séparation (5.11) des différentes variables est impossible, ce qui rend le calcul impraticable. Nous voyons donc de quelle nature sont les difficultés d'amélioration de la théorie de Holtsmark. Il paraît ainsi plus sage de s'en tenir à une théorie au sens physique évident, analytiquement simple et donnant des résultats, pour les faibles densités contormes à la théorie de Holtsmark et pour les grandes densités conformes à la théorie des volumes exclus, autrement dit, la théorie de Russell et Stewart.

7. Tables d'ionisation. Calculons tout d'abord la contribution à la somme  $\Sigma$  des termes pour *n* grand. On a à calculer:

 $\sigma_n = \sum_n^\infty n^2 e^{-\beta_n^{-\frac{3}{2}}}$ 

 $\mathbf{44}$ 

car, en raison de la valeur élevée de n, le terme  $e^{\vartheta E}$  peut être pris égal à l'unité.

Nr.7

(8.1)

(8.3) On a:

(8.4)

On a:

(7.2)  $\beta = 2,14 \cdot 10^6 \frac{\tau}{n^4} \frac{1}{F_0}$ 

et en vertu de (3.7) et (3.8) nous supposerons  $\tau$  sensiblement constant. On a alors

(7.3)  $n^{2} = \left(\frac{2,14 \cdot 10^{6} \tau}{F_{0}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ 

et nous remplacerons la somme (7.1) par une intégrale:

(7.4) 
$$\sigma_n = \int_n^\infty n^2 dn \, e^{-\beta_n^-}$$

On a:

(7.5) 
$$n^2 dn = \frac{1}{3} d(n^3)$$

(7.6) 
$$= -\left(\frac{2,14\cdot 10^6\,\tau}{F_0}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4}\,\beta^{-\frac{7}{4}}\,d\beta.$$

La somme (7,1) devient alors:

(7.7) 
$$\sigma_n = \left(\frac{2.14 \cdot 10^6 \tau}{F_0}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \int_0^{\beta_n} \beta^{-\frac{7}{4}} d\beta e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}$$

(7.8) 
$$= \left(\frac{2.14 \cdot 10^6 \tau}{F_0}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \frac{4}{3} \int_0^{\beta_n} d\left(\beta^{-\frac{3}{4}}\right) e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}.$$

Pour  $\beta$  petit, on peut réduire l'intégrale dans (7.8) au premier terme du développement asymptotique. On a alors:

(7.9) 
$$\sigma_n = \left(\frac{2,14 \cdot 10^6 \tau}{F_0}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3} \frac{e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}}{2 \beta^{-\frac{3}{4}}}$$

et, en vertu de (7.3), on obtient:

(7.10) 
$$\sigma_n = \frac{n^3}{6} \frac{e^{-\beta_n^{-\frac{2}{3}}}}{\beta_n^{-\frac{8}{3}}}.$$

La table suivante nous montre la contribution  $\sigma_n$  pour n = 13en fonction de la densité. On voit que pour des densités même relativement faibles, la contribution à la somme  $\Sigma$  des termes pour n > 13 devient tout à fait négligeable.

T	ablea	u 1	[].	
*	3		1	

<u> </u>	
15 0,00	357 4217,1
16 0,88	57 181,59
17 8,5	7 0,0085

8. Méthode de calcul. Pour calculer les intégrales

$$\int_0^{\beta_n} e^{\mathcal{G} W_n} W(\beta) \, d\beta$$

on procède de la façon suivante. On a:

 $E_n$  étant l'énergie d'ionisation en l'absence de champ de l'état n,  $E_F$  étant l'énergie d'ionisation en l'absence de champ de l'état détruit par le champ F. On a donc à calculer:

$$2\sum_{n}n^{2}e^{artheta E_{n}}\int_{0}^{eta_{n}}W\left(eta
ight)deta\,e^{-artheta E_{F}}.$$
 $W\left(eta
ight)deta=d\left(e^{-eta^{-rac{3}{2}}}
ight)$ 

et l'on construit la courbe  $e^{-\vartheta E_F}$  en fonction de  $e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}$ . On a seulement à déterminer l'aire de cette courbe. On trouvera sur la figure 3, p. 46, les formes de cette courbe pour différentes dénsités et pour  $\theta = 0,2$ . On obtient ainsi pour chaque valeur de la densité  $N_1$  et de la température  $\theta = \frac{5040}{T}$  la valeur de la somme. En fait, on calcule

(8.5) 
$$2\sum_{n} n^2 e^{-\vartheta (E_n - E_n)} \int_0^{\beta_n} W(\beta) \, d\beta \, e^{-\vartheta E_n}$$

qui est l'équivalent de la somme d'états. On en déduit, à l'aide



Fig. 3. Courbes pour l'intégration numérique de la formule (II 8,1).

de (2.7)  $N_0$  en fonction de  $N_1$  et de  $\theta$ , et ensuite  $N = N_1 + N_0$ donc  $\rho = NH$  en fonction de  $N_1$  et  $\theta$ , ainsi que l'ionisation:

(8.6) 
$$x = \frac{N_1}{N_0 + N_1}$$

en fonction de  $N_1$  et  $\theta$ . A l'aide de la table  $(N_1, \theta)$  on peut finale ment construire une table  $x(\varrho, \theta)$  (Des tables complètes sont en cours de préparation. Les tableaux III et IV en sont extraits)

	Tabl	eau	111.
x	(degré	d'ion	isation)

$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $										
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	$\log N_1$	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	0,2 0,1 0,05 0,02 0,01	0,999 1,000 1,000 1,000 1,000	0,999 1,000 1,000 1,000 1,000	0,993 0,999 1,000 1,000 1,000	0,953 0,997 0,999 1,000 1,000	0,754 0,987 0,998 0,999 1,000	0,387 0,946 0,991 0,998 0,999	0,226 0,848 0,974 0,996 0,999	0,393 0,828 0,954 0,990 0,997	1,000 1,000 1,000 1,000 1,000

		Tableau IV. $\overline{\chi}_{volts}^{(1)}$ (potentiel moyen d'io				onisation)			
log N <sub>1</sub> θ	15	16	17	18	19	21	21	22	23
0,2	1,326	5,113	8,432	10,996	11,423	10,442	8,017	2,077	0,000
0,1	0,449	0,625	1,481	3,237	6,223	8,137	7,355	1,511	0,000
0,05	0,239	0,267	0,578	1,402	3,336	5,449	6,673	1,209	0,000
0,02	0,192	0,196	0,383	0,892	1,838	3,809	6,143	1.025	0.000
<b>0,01</b>	0,182	0,181	0,343	0,744	1,579	3,343	5,931	0,956	0,000
é.			•			1	I.	L .	

(i) On remarquera que  $\chi$  décroît quand la densité décroît. Cela est dù à la possibilité lu peuplement des niveaux excités aux faibles densités.

9. Compressibilité adiabatique. Le calcul de la couche convective est important, comme nous l'avons vu à propos de la théorie du triage. Il est nécessaire, pour en établir les limites, de calculer le coefficient de compressibilité adiabatique. On peut remarquer que l'influence de l'ionisation sur le coefficient  $d \log T/d \log P$ ) est la même, que l'ionisation ait pour origine une élévation de température ou une augmentation de pression. En effet, si on se trouve dans une région de demi-ionisation le température, une compression adiabatique élève la température, donc le nombre d'atomes présents et l'élévation de temperature est moindre que celle qui se produit en l'absence d'ionisation. L'effet est le même si on se trouve dans une région d'ionisauon de pression. Il faut donc s'attendre à trouver une vaste égion de températures et de densités où  $(d \log T/d \log P)$  est nférieur à 0,4, valeur maximum pour un gaz monoatomique. Une transformation adiabatique est définie par

$$lE + P \, dV = 0.$$

La pression P est:

(9.1)

 $PV = N\left(1+x\right)kT$ 

l'énergie est:

$$E = \frac{3}{2}N(1+x)kT - \sum n_i \chi_i$$

 $n_i$  étant le nombre de particules d'énergie —  $\chi_i$ . Si  $E_{p_i}$  est l'énergie de l'état de nombre quantique  $p_i$ ,  $E_F$  l'énergie du niveau détruit dans le champ F, on a:

(9.4) 
$$dn_{i} = \frac{N_{0} g_{i} W(\beta) d\beta e^{\vartheta \chi_{i}}}{\sum_{i} \int_{0}^{\beta_{i}} W(\beta) d\beta e^{\vartheta \chi_{i}}}$$

et l'équation (9.3) devient

(9.5) 
$$E = \frac{3}{2}N(1+x)kT - N(1-x)\frac{\sum_{i}\int g_{i}W(\beta) d\beta e^{9\chi_{i}}(E_{i}-E_{p})}{\sum_{i}\int g_{i}W(\beta) d\beta e^{9\chi_{i}}}$$

Nous poserons de façon abrégée:

(9.6) 
$$\overline{\chi} = \frac{\sum_{i} \int g_{i} (E_{i} - E_{F}) W(\beta) d\beta e^{\vartheta \chi_{i}}}{\sum_{i} \int g_{i} W(\beta) d\beta e^{\vartheta \chi_{i}}}$$

et de même:

(9.7) 
$$\overline{\chi^2} = \frac{\sum_i \int g_i (E_i - E_F)^2 W(\beta) d\beta e^{\vartheta \chi_i}}{\sum_i \int g_i W(\beta) d\beta e^{\vartheta \chi_i}}$$

Afin de pouvoir effectuer les dérivations par rapport à x, V et dans  $\overline{\chi}$ , nous explicitons la fonction  $W(\beta)$  en mettant en évidence comme variable le champ électrique F. On écrit alors:

$$(9.8) \ \, \overline{\chi} = \frac{\sum_{i} \int_{0}^{F_{i}} (E_{i} - E_{F}) \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{-F^{-\frac{5}{2}} (2,61 \cdot e)^{\frac{5}{2}} \frac{Nx}{V} e^{-\frac{5}{2}}}{\sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}{\frac{1}{2} \sum_{i} \int_{0}^{F} g_{i} \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\vartheta (E_{i} - E_{F})}}$$

Nous posons:

 $E = \chi N (1-x).$ (9.9)

En posant également:

$$(9.10) \qquad \overline{\chi} = \frac{S}{\Sigma}$$

$$(9.11) \qquad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{N} \int_{0}^{\beta_{i}} (E_{i} - E_{F}) d\left(\beta^{-\frac{3}{2}} e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}\right) e^{\vartheta(E_{i} - E_{F})}$$

$$(9.12) \qquad \Theta = \sum_{i=1}^{N} \int_{0}^{\beta_{i}} d\left(\beta^{-\frac{3}{2}} e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}\right) e^{\vartheta(E_{i} - E_{F})},$$
on obtient:
$$(9.13) \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = -\frac{dx}{1 - x} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x}.$$
On a:
$$(9.14) \qquad \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\mathbf{T}}{x} \qquad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\mathbf{T}}{V}$$

$$(9.15) \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial x} = -\frac{\Theta}{x} \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial V} = \frac{\Theta}{V} \qquad \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} = \frac{\Theta}{\Sigma}.$$
On obtient donc
$$(9.16) \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = -N\overline{\chi} + \frac{\mathfrak{E}}{x} \left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\mathbf{T}}{S}\right).$$
On a de même:
$$(9.17) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} = \frac{\mathfrak{E}}{V} \left(\frac{\mathbf{T}}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right) \qquad \frac{1}{P} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} = \frac{1 - x}{1 + x} \frac{\overline{\chi}}{kT} \left(\frac{\mathbf{T}}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right).$$
On a enfin:
$$(9.18) \qquad \frac{1}{\overline{\chi}} \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial T} = -\frac{1}{kT^{2}} \frac{\overline{\chi}^{2}}{\overline{\chi}} + \frac{1}{kT^{2}} \overline{\chi}$$
on
$$(9.19) \qquad \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial T} = -\frac{1}{kT^{2}} (\overline{\chi}^{3} - \overline{\chi}^{3}).$$

49

Nr. 7

(9.1

(9.1

9.1

on (9.1

On

(9.1

On

(9.1

On

(9.1

On

0u

9.

Différentions (9.5), (9.2) et l'équation d'équilibre (2.7). On obtient ainsi le système d'équations différentielles:

$$dE = N(1+x)\frac{3}{2}kT\frac{dT}{T} + N \cdot \frac{3}{2}kTdx - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}dx - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V}dV - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T}dT$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dx}{1+x} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$
<sup>D. Kgl. Danske Vidensk, Selskab, Mat.-fys. Medd. XXV, 7.</sup>

$$(9.22) \quad -\frac{dV}{V} + \frac{2}{x} \frac{dx}{1-x} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial T} dT - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} dV$$
  
auquel il faut adjoindre (9.1) qui permet d'éliminer  $dE$ . On  
obtient alors le système:  

$$(9.23) \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} - P\right) dV = \left(\frac{3}{2} \frac{PV}{T} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{3}{2} \frac{PV}{1+x} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}\right) dx$$
  

$$(9.24) \qquad \frac{dP}{P} = \frac{dx}{1+x} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$
  

$$(9.25) \quad \left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right) dV + dx \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right) = \frac{dT}{T} \left(\frac{3}{2} - \frac{T}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial T}\right).$$

On tire dV de l'équation (9.24) et on obtient:

$$(9.26) \begin{cases} -\left(\frac{\partial}{\partial}\frac{\mathfrak{G}}{V}-P\right)V\frac{dP}{P} = dT\left(\frac{3}{2}\frac{PV}{T}-\frac{\partial}{\partial}\frac{\mathfrak{G}}{T}-\frac{V}{T}\left(\frac{\partial}{\partial}\frac{\mathfrak{G}}{V}-P\right)\right)+ \\ + dx\left(\frac{3}{2}\frac{PV}{1+x}-\frac{\partial}{\partial}\frac{\mathfrak{G}}{x}\left(\frac{V}{1+x}\frac{\partial}{\partial}\frac{E}{V}-P\right)\right) \\ (9.27) \begin{cases} -\left(-\frac{1}{V}+\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial}\frac{\Sigma}{V}\right)V\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}\left(\frac{3}{2}-\frac{T}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial}\frac{\Sigma}{T}-V\left(-\frac{1}{V}+\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial}\frac{\Sigma}{V}\right)\right)- \\ - dx\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial}\frac{\Sigma}{x}+V\left(-\frac{1}{V}+\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial}\frac{\Sigma}{V}\right)\frac{1}{1+x}\right). \end{cases}$$

On élimine maintenant dx entre ces deux équations. Groupons auparavant les termes identiques

 $(9.28) \begin{cases} -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} - P\right) V \frac{dP}{P} = dT \left(\frac{5}{2} \frac{PV}{T} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} - \frac{V}{T} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V}\right) + \\ + dx \left(\frac{5}{2} \frac{PV}{1 + x} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} - \frac{V}{1 + x} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V}\right) \\ -\left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right) V \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \left(\frac{5}{2} - \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} - \frac{T \partial \Sigma}{\Sigma \partial T}\right) - \\ - dx \left(\frac{2}{x (1 - x^2)} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \frac{V}{1 + x} \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right). \end{cases}$ 

9.30) 
$$\frac{d\log T}{d\log P} = \frac{V\left[-\frac{\left(\partial \mathfrak{C}}{\partial V} - P\right)\left(\frac{2}{x\left(1-x^{2}\right)} + \frac{1}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \frac{V}{1+x}\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right) + \left(\frac{1}{V} - \frac{D}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right)\left(\frac{5}{2}\frac{PV}{1+x} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{V}{1+x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{5}{2} - \frac{V}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial V} - \frac{T}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial T}\right)\left(\frac{5}{2}\frac{PV}{1+x} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{V}{1+x}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial V}\right) + \left(\frac{5}{2}PV - T\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial T} - V\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial V}\right)\left(\frac{2}{x\left(1-x^{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \frac{V}{1+x}\frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right)}{E^{1} + x^{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X}}$$
En divisant haut et has var  $PV(x\left(1-x^{2}\right)$ , on obtient l'expression suivante:

$$9.31) \quad \frac{d\log T}{d\log P} = \frac{\left(1 - \frac{1}{P}\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial V}\right) \left(2 + x\left(1 - x^3\right) \frac{1}{Z} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + x\left(1 - x\right) \frac{V}{Z} \frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right) + \left(1 - \frac{V}{Z} \frac{\partial \Sigma}{\partial V}\right) x\left(1 - x\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{1 + x}{PV} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial x} - \frac{1}{P} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial V}\right)}{\left(2 + x\left(1 - x\right) \frac{V}{Z} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} + x\left(1 - x^3\right) \frac{1}{Z} \frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{T}{PV} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial T} - \frac{1}{P} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial V}\right) + x\left(1 - x\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{V\partial \Sigma}{Z\partial V} - \frac{T}{Z} \frac{\partial \Sigma}{\partial T}\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{1 + x}{P\partial V} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial x} - \frac{1}{P} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial V}\right)$$

à l'aide des notations (9.9) et suivantes on obtient:

 $d \log T$ 

$$(9.32) \begin{cases} \frac{d\log P}{\left(1 - \frac{1 - x}{1 + x}\frac{\tilde{\chi}}{kT}\left(\frac{T}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right)\right)\left(2 - (1 - x^2)\frac{\Theta}{\Sigma} + x(1 - x)\frac{\Theta}{\Sigma}\right) + \left(1 - \frac{\Theta}{\Sigma}\right)(1 - x)x\left(\frac{5}{2} + \frac{\tilde{\chi}}{kT} - \frac{\tilde{\chi}}{kT}\frac{1 - x}{x(1 + x)}\left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{T}{S}\right)\right)}{\left(2 + x(1 - x)\frac{\Theta}{\Sigma} - (1 - x^2)\frac{\Theta}{\Sigma}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{T}{1 + x}\frac{1 - x}{kT}\left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{T}{S}\right)\right)} \\ \stackrel{\bullet}{\overset{\bullet}{\overset{\bullet}{\overset{\bullet}}}} \end{cases}$$

obtient: uo Après de petites réductions,

$$\frac{g\,T}{gP} = \frac{\left(1 - \frac{1 - x}{1 + x}\frac{\bar{\chi}}{kT}\left(\frac{\overline{T}}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right)\right)\left(2 - (1 - x)\frac{\Theta}{\Sigma}\right) + \left(1 - \frac{\Theta}{\Sigma}\right)x\left(1 - x\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT} - \frac{\bar{\chi}}{kT}\frac{1 - x}{kT}\left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\overline{T}}{S}\right)\right)}{\left(\frac{5}{2} + \frac{1 - x}{kT}\frac{\bar{\chi}}{\Sigma}\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{\overline{T}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{\overline{T}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\overline{T}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\overline{T}}{N}\right)\right)};$$

forme habituelle rapprocher de la se cherchant à en ou.

$$\frac{2}{98}T = \frac{2+x\left(1-x\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(1-\frac{\Theta}{\Sigma}\right)+\left(1-x\right)\left(\frac{\overline{\chi}}{kT}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(1-\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)+\left(1-x\right)\left(\frac{\overline{\chi}}{kT}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(1-x\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(1-x\right)\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\overline{\chi}}{kT}\right)\left(\frac{\Theta}{kT}\right)\left$$

ດ|ດາ  $\widehat{s}$ +x(1)20  $\frac{d\log T}{d\log P}$ (9.35)

ທ່າ

 $\widehat{s}$ 

+x(1)

3

par Unsöld (50)

T et  $\overline{\chi^3}$ . On obtient ainsi finalement le tableau de  $d\log T/d\log P$ : p. 98). calculé en fonction de  $N_1$  et  $T, \tilde{\chi}, \Theta, J$ metion de P et T (Voir l'appendice fonction ದ чÖ en

Nr.

### C. Coefficient d'absorption.

10. Méthode de calcul. Représentons l'énergie de l'électron en nous servant de la variable parabolique  $\eta$ . Pour un certain état initial en l'absence de champ, l'énergie potentielle a la forme représentée sur la figure 4, p. 53. Pour produire l'ionisation, il faut effectivement une énergie supérieure à  $\varepsilon$ .





Fig. 5. Energie de l'électron en présence d'un champ électrique en fonction de la variable parabolique  $\eta$ .

Dans le cas où il y a un champ (fig. 5, p. 53) l'électron a à franchir la barrière de potentiel hachurée et, en toute rigueur, le potentiel d'ionisation est égal à la hauteur de la barrière de potentiel, hauteur inférieure à ɛ. Nous supposerons que le champ est assez faible pour que les fonctions d'onde diffèrent de quantités négligeables des fonctions d'onde en l'absence de champ, et par conséquent la force de l'oscillateur est la même qu'en l'absence de champ. Mais en raison de l'abaissement de la barrière de potentiel, nous supposerons que l'ionisation se produit pour une énergie plus faible et par conséquent que l'atome a un spectre continu s'étendant plus loin dans le rouge qu'en l'absence de champ. Cette simplification est légitime puisque nous utilisons la première approximation pour décrire l'atome perturbé par le champ, et bien entendu elle ne peut s'appliquer qu'à l'hydrogène qui seul présente l'effet Stark linéaire.

11. Calcul du coefficient d'absorption. Le coefficient d'absorpuon dans le spectre continu d'un atome dans l'état p est:

52

(11.1) 
$$\kappa_{\nu} = \frac{1}{p^2} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h^6 p^3} \frac{1}{r^3}.$$

Nous supposons ici le facteur de Gaunt égal à l'unité. Nous nous reportons au nombre d'atomes dans l'état fondamental:

(11.2) 
$$\frac{dn_p}{n_1} = \frac{p^2 W(F) e^{\vartheta W_p} dF}{\int_0^{F_1} W(F) e^{\vartheta W_1} dF}.$$

Nous nous rappelons que:

$$(11.3) W_p = E_p - E_F$$

(11.4) 
$$W_1 = E_1 - E_F.$$

Nous posons:

(11.5) 
$$\gamma_p = \int_0^{F_p} W(F) e^{-\vartheta E_F} dF.$$

Nous posons comme UNSÖLD (50)  $\vartheta E_p = u_p$ . On a alors la contribution des atomes dans l'état p en sommant pour tous les niveaux qui sont susceptibles d'absorber la fréquence  $v_1$ , soit de  $F_{\nu}$ ,  $F_p$ ,  $F_{\nu}$  pouvant être nul si  $h\nu > E_p$ . On a donc:

(11.6) 
$$\kappa_{\nu} = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h^3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{e^{-u_1}}{\gamma_1} \frac{1}{u^3} \int_{F_{\nu}}^{F_{\rho}} \frac{e^{u_{\rho}}}{p^3} W(F) e^{-u_F} dF.$$

On trouve de même pour la contribution des électrons libres

(11.7) 
$$\varkappa_{\nu} = \frac{1}{H} \frac{64 \,\pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h_3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{e^{-\nu_1}}{\gamma_1} \frac{1}{u^3} \frac{1}{2 u_1},$$

d'où pour le coefficient d'absorption:

(11.8) 
$$\kappa_{\nu} = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{me^{10}}{ch^3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{e^{-u_1}}{\gamma_1} \frac{1}{u^3} \left\{ \frac{1}{2 u_1} + \sum_p \frac{e^{u_p}}{p^3} \int_{F_{\nu}}^{F_p} W(F) e^{-u_F} dF \right\}$$

Le coefficient d'absorption par gramme de matière s'obtient en mu tipliant (11.8) par la concentration en atomes neutres par gramme d'hydrogène. En vertu de l'équation (2.7) que nous écrivons

$$\frac{N_e N_1}{N_0} = 2 \, \frac{\left(2 \, \pi \, m k T\right)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{e^{-\vartheta E_1}}{\sum 2 \, p^2 \, \gamma_p \, e^{-\vartheta E_p}}$$

 $N_e = N_1$ ,

(11.9)

et de

(11.10)

on obtient  $N_1$  en fonction de  $N_0$  et T. Nous avons donc à multiplier le coefficient obtenu (11,8) par:

(11.11) 
$$\frac{N_0}{N_1 + N_0} = \frac{\frac{N_0}{N_1}}{1 + \frac{N_0}{N_1}}$$

Pour calculer la moyenne de Rosseland

(11.12) 
$$\frac{1}{\bar{\varkappa}} = \frac{15}{4\pi^3} \int_{0}^{\infty} \frac{u^4 e^{-u} du}{(1-e^{-u})^3}.$$

on a à faire intervenir l'intégrale:

(1.13) 
$$\int_{0}^{\infty} \frac{u^{7} e^{-u} du}{(1-e^{-u})^{3} \left(\frac{1}{2 u_{1}} + \sum_{p} \frac{e^{u_{p}}}{p^{3}} \int_{F_{\nu}}^{F_{p}} (F) e^{-u_{F}} dF\right)}$$

En utilisant la notation (11.5), on peut écrire:

(11.14) 
$$\int_{0}^{\infty} \frac{u^{7} e^{-u} du}{(1 - e^{-u})^{3} \left(\frac{1}{2 u_{1}} + \sum_{p} \frac{e^{u_{p}}}{p^{3}} (\gamma_{p} - \gamma_{\nu})\right)}$$
  
et l'on a:  
$$(11.15) \begin{cases} h\nu < E_{p} & \gamma_{\nu} = \int_{0}^{(Wp = h\nu)} e^{-u_{F}} dF \\ h\nu > E_{p} & \gamma_{\nu} = 0; \end{cases}$$

pour les très faibles densités, le coefficient d'absorption se réduit à sa valeur usuelle, et pour les grandes densités au coefficient d'absorption des électrons libres en présence des protons.

Nr.7 NI

La diffusion de J. J. Thomson pour de l'hydrogène pur donne un coefficient d'absorption

 $(11.16) \qquad \qquad \varkappa_e = 0,38$ 

qui est petit devant le coefficient d'absorption de l'hydrogène en raison des grandes densités considérées, mais ceci n'est vrai que pour les naines blanches.

12. Influence de l'élargissement des raies. Sous l'influence de l'effet Stark linéaire, les raies s'élargissent au point de se recouvrir complètement. Le coefficient d'absorption se raccorde alors de façon continue au fond continu d'au-delà de la discontinuité de Balmer. Nous verrons dans le chapitre III comment calculer, alors le coefficient moyen d'absorption. Nous allons seulement comparer ici les deux effets: ionisation de pression et recouvrement des raies.

a) Recouvrement des raies. Le coefficient de  $1/\nu^3$  dans le coefficient d'absorption est pris constant jusqu'à une fréquence définie par le nombre quantique m de la dernière raie visible (INGLIS et TELLER (19)):

(12.1) 
$$m = \frac{[3,101]}{N_1^{2715}}$$

b) Ionisation de pression. Le coefficient de  $1/v^3$  est pris constant jusqu'à une fréquence définie par le nombre quantique n de la première raie ionisée par effet Stark moléculaire:

(12.2) 
$$n = \frac{[3,808]\,\tau^{\frac{1}{4}}}{N_1^{1/6}}$$

qui est pratiquement toujours plus grand que m, l'égalité ne se produisant que pour log  $N_1 = 19,2$  n = 3,5, mais alors la formule simplifiée (12.1) d'Inglis et Teller, obtenue pour des nombres quantiques élevés, n'est certainement plus valable (voir tableau I, p. 34).

# III. Un modèle d'atmosphère pour les naines blanches.

57

### A. Introduction.

1. Nous avons étudié dans la première partie le triage des éléments dans un champ de gravitation. Dans le champ de pesanteur extrêmement intense des naines blanches la séparation de l'hydrogène est quasi-totale. Il semble donc possible de constituer un modèle de naine blanche d'une couche d'hydrogène pur entourant un noyau d'éléments lourds (34). Un tel modèle semble bien expliquer le débit d'énergie des naines blanches et paraît s'accorder avec les traits principaux qui se manifestent dans leur spectre (41), si bien que la théorie de la structure interne doit rester à la base d'une théorie du spectre.

2. Rappelons ce résultat essentiel de l'observation des naines blanches que toutes sauf deux — Van Maanen 2 et Sirius B n'ont pas de raies métalliques dans leur spectre. Le spectre très difficile à prendre de Sirius B ne m'est pas connu, mais Kuiper a publié (22) des enregistrements du spectre de Van Maanen 2. On ne peut manquer d'être frappé par la largeur considérable des raies H et K de Ca II, due sans doute à l'élargissement par chocs, et en même temps par l'absence des raies de l'hydrogène. Cette absence de raies métalliques dans le spectre des naines blanches est manifestement une conséquence du triage des éléments et à nos yeux constitue une preuve suffisante de ce phénomène.

3. Pour une même profondeur optique, la densité d'une atmosphère est, très approximativement proportionnelle à l'intensité du champ de pesanteur, si bien que l'on atteint, très près de la surface, des densités déjà élevées. A ces densités tous es effets de pression deviennent considérables. Nous avons mentionné plus haut la grande largeur des raies métalliques dans la seule naine blanche où on les observe. L'élargissement des raies de l'hydrogène est bien connu et semble relié à l'effet stark moléculaire.

4. VERWEJ (51) a fait la théorie de l'élargissement des raies de l'hydrogène par effet Stark moléculaire, en s'appuyant sur la théorie de HOLTSMARK (18) et il semble bien, comme l'a monte KUIPER (22), qu'elle n'est valable que pour les ailes des raies Notons que Verwej n'a pas tenu compte de l'élargissement par choc des raies du réseau Stark. Il n'est pas impossible que l'introduction de l'élargissement par chocs modifie assez forte ment au voisinage du centre les profils calculés par Verwej.

Nr.7

5. Mentionnons les idées de BLACKETT (5) sur le champ magnétique des corps en rotation et leurs conséquences pou la théorie du spectre des naines blanches. Il semble bien (4) qu'il n'est pas nécessaire d'introduire de champ magnétiqu intense pour expliquer le spectre des naines blanches. Nou considérons ce résultat comme n'étant pas dirigé contre la théorie de Blackett mais comme une preuve supplémentair (39) d'une origine distincte pour les naines blanches et pour le étoiles de la série principale.

6. Il ressort des critiques de CHANDRASEKHAR (8) et de Koun GANOFF (20) que non seulement la moyenne de Rosseland n'es pas adaptée au traitement des problèmes d'atmosphère, mar qu'il n'existe aucune moyenne permettant de traiter rigoureus ment les problèmes d'atmosphères. C'est seulement en raison d la complication des méthodes à employer pour le calcul d'un atmosphère que nous nous sommes trouvés réduits à employe la moyenne de Rosseland. L'expérience des autres étoiles mon trant qu'elle donnait à bien des égards des résultats satisfaisant il a semblé que pour le premier calcul d'atmosphère de nain blanche on ne pouvait exiger plus.

### B. Le modèle d'atmosphère.

7. Stabilité de l'ion négatif hydrogène. Deux méthodes differentes donnent des résultats cohérents pour la stabilité de l'ionégatif hydrogène à l'égard des collisions. Il est ainsi possible de déterminer le «volume» de l'ion négatif à introduire dans théorie des volumes exclus ou de tout autre analogue. On pa

déterminer les conditions d'utilisation des formules usuelles et des tables déjà connues et leurs limites d'application aux atmosphères de naines blanches.

Nous devons en effet nous attendre à une très grande fragilité de  $H^-$  en raison à la fois de son gros volume et de son bas potentiel d'ionisation. Nous pouvons décrire la destruction de  $H^-$  au cours d'une collision soit comme une ionisation par choc, soit comme un effet Stark moléculaire. Si l'effet Stark, dans le cas des systèmes à plusieurs électrons ne produit pas d'effet du premier ordre, il est néammoins capable d'amener la destruction des effets stationnaires par abaissement de la barrière de potentiel. Il s'agit là de deux phénomènes indépendants, l'un faisant intervenir la symétrie des fonctions d'onde, l'autre la transparence d'une barrière de potentiel. On peut alors faire soit un calcul de section de choc par la méthode de J. J. Thomson ou tout autre plus éprouvée, soit un calcul d'effet Stark. Les deux résultats concordent. En effet, la première méthode nous montre que  $H^-$  a la même fragilité dans une collision que l'état  $n \cong 5$  de l'hydrogène neutre. L'autre également très approchée est basée sur l'idée que l'ionisation se produit lorsque la variation de potentiel électrique à travers le domaine de l'atome est du même ordre de grandeur que le potentiel d'ionisation. Dans ce cas, la difficulté est de choisir le rayon de l'atome, ce qui est particulièrement délicat, puisque dans  $H^-$  la densité électronique  $(vv^*)$  varie très lentement. Un calcul précis est difficile à mener en raison de la difficulté de transposer la méthode de champ self-consistent de Hartree en coordonnées paraboliques. Une évaluation grossière légitime l'assimilation de la fragilité de l'ion négatif hydrogène à celle de l'état  $n \cong 5$  de l'hydrogène neutre.

8. Un tel calcul approché n'a de sens que parce qu'il permet d'évaluer grossièrement le maximum de concentration de l'ion négatif et de déterminer les conditions dans lesquelles l'absorption due à l'ion négatif est négligeable comparée à celle de l'hydrogene. Le principe du calcul est le suivant: nous modifions légérement l'équation de Saha pour l'ion négatif afin de tenir compte de l'ionisation de pression de l'ion négatif. Nous avons les deux équations d'equilibre pour  $H^+$  et  $H^-$ :

(8.1) 
$$\frac{N_e N_1}{N_0} = \frac{(2 \pi \ mkT)^{\frac{8}{3}}}{h^3} e^{-\vartheta E_0}$$

(8.2) 
$$\frac{N_e N_0}{N^-} = 2 \frac{(2 \pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} 2 e^{-\vartheta J} e^{\alpha N_o};$$

avec la valeur de  $\alpha$  obtenue au § 7:

$$\log_{10}\alpha = \overline{19},65.$$

Nous devons ajouter à ces deux équations la relation:

(8.4) 
$$N_1 = N_e + N^-$$

qui exprime que les électrons ne proviennent que de l'hydrogène. Si l'on prend  $N_1$  comme paramètre, on trouve que, pour une température donnée, le nombre d'ions négatifs  $N^-$  passe par un maximum pour

Nr

(8.5)

 $\alpha N_1 = 3 + \varepsilon$ ,

 $\varepsilon$  étant une quantité très petite dont la première approximation est

(8.6) 
$$\varepsilon = \frac{18 e^{-3}}{a^2 a + 6 e^{-3}}$$

où g représente

(8.7) 
$$g = 2 \frac{(2 \pi \ mkT)^3}{h^6} e^{-\vartheta (E_0 + J)}.$$

En posant  $\theta = \frac{5040}{T}$  on obtient la valeur approximative suivant pour  $N_{\text{max}}^-$ :

(8.8) 
$$N_{\max}^{-} = \frac{[24,113]}{T^3} 10^{14,31 \, \theta}.$$

On peut alors aisément calculer le rapport de l'absorption due à l'ion négatif à celle due à l'hydrogène lorsque  $N^-$  es maximum. On trouve les résultats contenus dans le tableau

Ce rapport est très grand, mais il correspond à des valeus si élevées de la pression qu'elles ne se rencontrent pas dan l'atmosphère des naines blanches connues. Nous voyons qu

Tabl	Tableau I.					
θ	$\log (\chi_H - \chi_H)_{\max}$					
0.3	3.90					
0.4	3.65					
0.5	3.59					
0.6	4.13					
0.7	4.53					

faut reprendre les tables de STRÖMGREN (48) pour le coefficient d'absorption, mais en supposant l'absorption due à l'hydrogène pur et en tenant compte à la fois de l'ion négatif et de l'hydrogène neutre.

9. Absorption par l'hydrogène moléculaire. Lorsque la densité croît et devient un peu élevée, la probabilité qu'une absorption ait lieu par collision triple d'un photon et de deux atomes devient appréciable.

CRITCHFIELD (13) donne une évaluation grossière de la section de choc:

$$\sigma = 10^{-17} (4 \cdot 10^{-24} n)^2,$$

le coefficient d'absorption par gramme étant

$$\varkappa = \frac{n}{\varrho}$$

n étant le nombre d'atomes neutres par gramme. Dans les conditions où n devient notable, n est pratiquement égal au nombre d'atomes d'hydrogène présent et on a:

$$\varkappa_{\mathrm{coll.\ triples}} = 16 \cdot 10^{-65} \frac{n_{H}^{3}}{
ho}$$

On en déduit la relation suivante qui donne  $p_e(\theta)$  le long de la courbe

$$\varkappa_{\text{coll. triples}} = \overline{\varkappa}_{H},$$
 $p_{e} \theta \frac{1-x}{x} = \overline{\chi}_{H} [7,85],$ 

d'où le tableau II.

(9.1)

(9.2)

(9.3)

(9.4)

(9:5)

Table	au II.
θ	log p <sub>e</sub>
0.4	8.7
$\begin{array}{c} 0.5 \\ 0.6 \end{array}$	7.2 4.68
0.7	4.25

On trouvera sur la figure 6, p. 63, différentes courbes, montrant dans le diagramme  $\theta$ , log  $p_e$  les régions de différents coefficients d'absorption. Une courbe limite indique pour quelle valeur de  $p_e$  la pression totale

(9.6) 
$$P = \frac{p_e \left(1 + \frac{2N_{H^+}}{N_H}\right)}{\frac{N_{H^+}}{N_H} - \frac{N_{H^-}}{N_H}}$$

devient infinie (car  $N_{H^+} = N_{H^-}$  lorsque tous les électrons ont été absorbés par l'ion négatif). Bien entendu, il n'est pas question de dresser des tables si loin, l'ionisation de pression (§ 8) intervenant bien avant.

10. Formation des molécules<sup>(1)</sup>. L'énergie de formation de la molécule  $H^2$  est 4.46 électron-volts. Elle peut donc certaine ment se former assez facilement quand la presson augmente En appliquant la relation de Saha

(10.1) 
$$\frac{[H]^2}{[H_2]} = \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{(2\pi HkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-10,26\theta}$$

et en tenant compte de la relation

(10.2) 
$$\log \frac{[H^+]}{[H]} = -0.48 - 13.56 \cdot \theta + \frac{5}{2} \log T - \log p_e,$$

on obtient aisément log  $\frac{[H_2]}{[H]}$  en fonction de la pression électro

nique et de la température:

(1) M. R. Wildt a bien voulu faire remarquer à l'auteur que ces résultais doivent être sensiblement modifiés, en raison de la valeur élevée de la somm d'états de la molécule d'hydrogène. Le nombre de molécules d'hydrogène n'es sans doute pas négligeable, mais leur effet ne peut pas encore être calculé raison de notre ignorance des coefficients d'absorption. (Note ajoutée à la co rection des épreures).



g 6. Domaine d'application des différentes approximations relatives au coefient d'absorption. On remarquera que dans le domaine des températures étudiées les collisions triples ne contribuent pas de façon sensible à l'absorption.

3) 
$$\log \frac{|H_2|}{|H|} = -22,31 + 18,0 \ \theta + 5 \log \theta + 2 \log p_e;$$

e logarithme est égal à zéro (nombre égal) pour des valeurs  $e^0$  et de  $p_e$  données dans le tableau III.

m -	ւլ		-	Υ	Υ	т	
1 8	ъı	eа	. <b>u</b>	L	1	L.	

θ	log p <sub>e</sub>
0.3	9.77
0.4	8.55
0.5	7.41
0.6	6.31
1	2.15
	ł

On voit d'après l'ensemble des courbes de la figure 6, p. 65 que, tant que  $\theta < 0.7$  et log  $p_e > 4$ , les collisions triples sont pra faitement négligeables comparées à l'absorption de l'ion négatif Nous n'aurons donc à tenir compte que de l'hydrogène atomique neutre et de l'ion négatif.

11. Détermination du eoefficient d'absorption. Pour le calch du coefficient moyen d'absorption (moyenne de Rosseland nous avons à tenir compte des effets de pression. Nous avons calculé (II) le coefficient d'absorption pour le fond con tinu en tenant compte de l'élargissement des raies par effet Stark moléculaire en utilisant la théorie élémentaire de INGLIS et TEL LER (19). Inglis et Teller cherchent quelle est la première rai invisible de la série de Balmer en raison du recouvrement de raies. Ils supposent que la disparition se produit lorsque cett raie a une largeur égale à l'intervalle compris entre deux raie consécutives. Ils calculent l'élargissement des raies en le sup posant produit par un champ égal au champ normal de Horrs MARK (18). Ils obtiennent ainsi pour le rang m de la dernièr raie visible:

(11.1) 
$$m^{7,5} = \frac{0.027}{a_0^8 N_1},$$

où  $a_0$  est le rayon de Bohr de l'hydrogène et  $N_1$  le nombr d'ions par cm<sup>3</sup>. En pratique, nous prendrons pour  $N_1$  seulement le nombre de protons par cm<sup>3</sup>, l'élargissement dû aux électron étant négligeable. Numériquement, la formule (11.1) donne:

(11.2) 
$$m = \frac{[3,101]}{N_1^{2/15}}$$

et le tableau p. 34 donne les valeurs de  $N_1$  correspondant au 10 premières valeurs de m.

Les valeurs de  $N_1$  sont de l'ordre de ce que l'on observ dans l'atmosphère des naines blanches.

Dans le domaine où les raies de Balmer se recouvrent, toi se passe comme si l'on avait un coefficient d'absorption contri inversement proportionnel au cube de la fréquence et prolonger de façon continue le coefficient d'au-delà la limite de Balmé En effet, si l'on suppose l'absorption uniforme dans l'intervalle entre deux raies, cet intervalle étant inversement proportionnel à  $n^3$  et la force de l'oscillateur inversement proportionnelle à  $n^3$ également, *n* disparait dans le coefficient d'absorption. Le calcul montre qu'il est alors le même de part et d'autre de la limite de Balmer.

12. A une densité et une température données, on substitue aux limites  $u_p$  pour le calcul du coefficient d'absorption par la fórmule

(12.1) 
$$\varkappa_{H} = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^{4}}{3 \sqrt{3}} \frac{m_{e} e^{10}}{c h^{3}} \frac{1}{k^{3} T^{3}} \frac{e^{-u_{1}}}{\gamma_{1}} \frac{1}{u^{3}} \left\{ \frac{1}{2 u_{1}} + \frac{\sum e^{u_{p}}}{p^{3}} \right\},$$

des limites  $u_p - u_m$  où  $u_m = \frac{hv_m}{kT}$ ,  $hv_m$  étant l'énergie d'ionisation du niveau correspondant à la dernière raie visible de la série de Balmer. Cela revient en quelque sorte à supposer une nouvelle valeur à l'énergie d'ionisation sans que cela change en quoi que ce soit la formule du coefficient d'absorption. Le calcul du coefficient moyen d'absorption fait intervenir l'intégrale S(u) de B. STRÖMGREN (47) et dans la somme

$$\sum = \sum_{i} \frac{S(u_{i}) - S(u_{i+1})}{D(u_{i}, u_{i+1})}$$

les quantités  $D(u_i, u_{i+1})$  gardent les mêmes valeurs, mais les limites  $u_i$  sont modifiées de quantités  $u_m$ . Calculons la modification qui est apportée à la somme (12.2) en supposant les  $u_m$ petits devant  $u_i$ . On a:

$$S(u) = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{u^7 e^{2u}}{(e^u - 1)^3}$$
$$S(u+h) = S(u) + hS'(u)$$

et par conséquent

(12.2)

(12.3)

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h(S'(u_i) - S'(u_{i+1}))}{D(u_i, u_{i+1})}$$

avec  $h = \frac{h v_m}{kT}$  et

D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XXV, 7.

65

0. 0, 0, 0, 0,

	1 abreau 1V (10g %)							
Log P	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0
0,30	1,79	1,98	2,18	2,37	2.54	2.71	2.88	3.03
0,32	1,96	2,15	2,33	2,51	2.67	2.82	2.96	3.08
0,34	2,12	2,29	2,46	2,61	2,74	2,87	2.98	3.08
0,36	2,23	2,37	2,52	2,66	2,77	2,86	2.94	3.00
0,38	2,30	2,42	2,52	2,64	2,73	2,79	2,86	2.92
						ļ .		
0,40	2,31	2,41	2,50	2,58	2,65	2,70	2.74	2.80
0,42		2,35	2,40	2,46	2,52	2,57	2.61	2.66
0,44	1		2,29	2,35	2,40	2,44	2.48	2.53
0,46				2,21	2.26	2,31	2.35	2.40
0,48					2,09	2,14	2.19	2.25
							,	_,
0,50							2.04	2.10
0,52								
0,54	l							
0,56	l							
0,58	Í							
0,60								

Tabless IV (las D)

(12.4)

$$S'(u) = \frac{15}{4 \pi^4} \frac{u^7 e^{2u}}{(e^u - 1)^3}$$

La quantité  $u_m$  est égale à  $u_1/m^2$ . *m* étant dans 40 Eridani B de l'ordre de 8 à 10,  $u_m$  est de l'ordre de  $u_1/50$  à  $u_1/100$ .  $u_1$  étant de l'ordre de 10,  $u_m$  est de l'ordre de 0,2 à 0,1. S'(u) atteint son maximum au voisinage de u = 7 et ce maximum vaut 29.6 Calculons effectivement la variation  $\Delta\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$  pour  $\theta = 0.4$ . On trouve

(12.5) 
$$\Delta(\Sigma) = 0,12 \cdot 24 = 2,9,$$

alors que  $\Sigma = 73,5$ . L'erreur relative  $\frac{\Delta \Sigma}{\Sigma} = 0,04$  est très petite. et nous voyons que malgré le déplacement des limites d'absorp tion il est cependant encore légitime (38) de se servir des tables déjà existantes de la moyenne de Rosseland pour l'hydro gène pur.

	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	Log P
	2 50	9 50	2.67	2 75	9.09	2 00	2.08		0.30
	3,50	0,00 250	3,07	3,75	3,03 9.79	3,30	3,86	3.94	0,30
	3,43	3,04	3,00	3,07	3.64	3,00	3.76	3.82	0.34
ş[-	2.98	9,99 9,95	3,02	3,50	3,55	3.62	3.68	374	0.36
	3 15	3.01	3.28	3 35	3,00	3 49	3.57	3.63	0.38
	0,10		0,20	0,00	0,12	0,10	0,01	0,00	
	3.01	3.07	3.13	3,20	3,27	3,35	3,43	3,50	
	2.89	2.95	3.01	3,07	3,13	3,20	3,28	3,36	
*.	2,75	2.82	2,88	2,95	3,02	3,10	3,18	3,26	
	2,63	2,69	2,77	2,84	2,92	2,99	3,07	3,15	
	2,50	2,59	2,65	2,73	2,80	2,88	2,96	3,04	
									1
1	2,36	2,44	2,52	2,60	2,69	2,77	2,85	2,94	
	•								
	· • • •								
	· •	<b></b> .	1 .:						
								·	
				1					

13. Le calcul du modèle d'atmosphère ne diffère pas dans ces conditions du calcul de BENGT STRÖMGREN (48) si ce n'est dans l'emploi du coefficient d'absorption pour l'hydrogène pur. On emploie simultanément les formules suivantes: equation d'équilibre hydrostatique:

$$\frac{dp}{dz}=-g\varrho;$$

equation de transfert

(13.1)

(13.2)

(13.3)

 $d\tau = -\bar{\varkappa}\varrho \,dh;$ 

équation standard reliant la profondeur optique et la température (approximation de Milne Eddington pour le corps gris)

 $T^4 = T_e^4 \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau \right)$ 

13.4) 
$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$$

En éliminant dh on a ainsi à résoudre:

(13.5) 
$$\frac{d\tau}{d\log p} = \frac{1}{g\log e}\bar{\varkappa}p.$$

L'intégration est faite en utilisant la méthode indiquée par STRÖMGREN (48). Toutefois nous n'avons pas cru utile de faite un calcul aussi précis.

Nous avons calculé  $\log \overline{\varkappa}$  en fonction de  $\theta$  et de  $\log p$  (Ta bleau IV contenant partiellement les tables de STRÖMGREN) pour l'hydrogène pur.

Nous n'avons calculé jusqu'à présent que deux modèles d'atmosphères, correspondant respectivement aux conditions an proximatives de 40 Eri B et de Van Maanen 2 (tableau VI) Nous avons pris:

pour 40 Eridiani B	$\theta_0 = 0,45$	$\log g = 7,69$
pour Van Maanen 2	$\theta_0 = 0,50$	$\log g = 10,00.$

Pour 40 Eridani B les valeurs de  $\bar{\varkappa}$  utilisées étaient déduite d'une table préliminaire et différaient légèrement de celles donnée dans le tableau IV.

14. Couche convective. Nous calculons à l'aide de la formula d'Unsöld (50) pour l'hydrogène pur:

(14.1) 
$$\frac{d\log T}{d\log p} = \frac{2 + x(1 - x)\left(\frac{5}{2} + u_1\right)}{5 + x(1 - x)\left(\frac{5}{2} + u_1\right)^2}$$

la valeur de la compressibilité adiabatique. On trouve dans tableau VI les valeurs de  $(d \log T/d \log P)_{ad}$  et  $(d \log T/d \log P)_{ad}$ La comparaison entre ces deux séries de valeurs permet de trouve la profondeur optique de la limite supérieure de la zone convective On trouve

(14.2)	Pour 40 Eridani B,	$\tau = 0,14$
(14.3)	Pour Van Maanen 2,	$\tau = 0,43.$

Nous n'avons pas encore cherché à déterminer de limite inférieu de la zone convective.

\$/						
r.	θ	log p	$\log \overline{z}$	$\left(\frac{d\log T}{d\log P}\right)_{\rm ad}$	$\left(\frac{d\log T}{d\log P}\right)_{\rm rad}$	log N <sub>1</sub>
	Modèle	 pour sune s	 étoile du ty	pe de 40 E	ridani B	
0	0,45	3,4	1,57	0.092	0	15:10
0,0009	0,4498	3,6	1,69	0,089	0	15.26
0,0027	0,4495	3,8	1,80	0,085	0	15.41
0,0064	0,4489	4	1,89	0,083	0,005	15.55
0,0110	0,4482	4,2	1,96	0,083	0.014	15.66
0,0248	0,4458	4,4	2,04	0,085	0,025	15.79
0,0517	0,4412	4,6	2,11	0,087	0.040	15.93
0,1019	0,4344	4,8	2,19	0,090	0,065	16.09
0,2063	0,421	5,0	2,31	0,094	0,140	16.29
0,473	0,395	5,2	2,51	0,100	0,235	16.51
1,061	0,355	5,4	2,70	0,106		16.80
2,083	0,316	5,6	2,78			16.98
3,559	0,284	5,8				
	Modèle r	our une ét	toile du tvr	i De de Van N	laanen 2	
	0,50	5	1.85	0.11	0	15 771
0,007	0,50	5.2	1,89	0,11	0	15,71
0,0013	0.50	5.4	1.94	0,13	0	15,62
0,0023	0,50	5.6	1.99	0.14	0	16,92
0,0041	0,50	5.8	2.04	0.17	0	16,02
0,0072	0,50	6	2.10	0.19	0.011	16.02
0,013	0,4975	6.2	2.18	0.21	0,011	16.94
0,024	0,4955	6.4	2.25	0.22	0,013	16 45
0;044	0,4915	6.6	2.35	0.24	0,018	16,40
0,085	0,485	6,8	2.47	0.24	0.055	16.74
0,170	0,473	7	2.61	0.25	0,000	16 00
0,356	0,450	7,2	2.83	0.25	0.215	17 18
0,843	0,408	7,4	3,15	0.20	0.395	17.48
2,46	0,340	7,6	3,64	0.17	0,000	18 13

Tableau V

## C. Répartition spectrale de l'énergie.

15. Le fond continu. Le calcul du fond continu ne prénte pas de difficultés spéciales. La répartition spectrale de énergie à la surface est donnée par:

$$\frac{1}{2}\frac{F_{\nu}}{\pi} = \int_{0}^{\infty} B_{\nu}(\tau_{\nu}) K_{2}(\tau_{\nu}) d\tau_{\nu}$$

et l'on emploie une formule d'approximation (quadrature nume rique à trois termes)

(15.2) 
$$\begin{cases} \frac{F_{\nu}}{\pi} = 0,76689 \ B_{\nu} \ (\tau_{\nu} = 0,287) \\ + 0,22652 \ B_{\nu} \ (\tau_{\nu} = 1,81436) \\ + 0,006591 \ B_{\nu} \ (\tau_{\nu} = 5,385). \end{cases}$$

La profondeur optique est donnée par

$$(15.3) d\tau_{\nu} = -\varkappa_{\nu} \rho \, dx$$

à quoi l'on joint

$$(15.4) dx = -\frac{dp}{q\rho},$$

d'où

(15.5) 
$$\tau_{\nu} = \frac{1}{g \log_{10} e} \int_{0}^{p} \varkappa'_{\nu}(\tau, \theta) \frac{d \log_{10} p}{p}.$$

Ici,  $\varkappa'_{\nu}$  est le coefficient d'absorption réduit pour tenir comple de l'émission induite. En fait,  $\varkappa'_{\nu}$  est dans le cas qui nous occupe très peu différent de  $\varkappa_{\nu}$  et nous ne tiendrons pas compte de différence.

Lorsque l'on atteint, pour une longueur d'onde donnée un région où les raies se recouvrent en raison de l'augmentation de pression, le coefficient d'absorption devient plus grand.  $B\nu$  pos sède en ce point une discontinuité de sa dérivée, ce qui ne gen

## Tableau VI. Répartition de l'energie dans le spectre continu d'une étoile du type de 40 Eridani B.

λ	$\log \frac{F_{\nu}}{F_{\rm sooo}}$	λ	$\log \frac{F_{\nu}}{F_{3000}}$
2000	0.0	3897	0.170
3200	0.022	3947	0,199
3400	0,034	3997	0,207
3600	0,047	4200	0,195
3647	0,049	4400	0,185
3747	0,052	4600	0,167
3797	0,064	4800	0,150
3847	0,117	5000	0,138

pas pour l'emploi de la formule d'intégration numérique à 3 termes de Gauss. Afin de tenir compte de la dispersion du prisme, les valeurs trouvées en utilisant les tables de  $B(v, \theta)$  sont multipliées par un terme proportionnel à  $\lambda^2$ . On obtient ainsi le tableau VI donnant le logarithme du flux, exprimé en unités arbitraires en fonction de la longueur d'onde.

16. La superposititon des raies. La distance entre deux raies Stark dans la série de Balmer, séparées par un champ électrique d'intensité  $F_{cgs}$ , est:

$$\Delta \lambda_0 = 0,00256 F_{\rm cgs} \left( \frac{n^2}{n^2 - 4} \right)^5$$

(16.1)

(16.2)

16.4)

et la distance séparant les deux raies extrêmes est, mesurée en cette unité:

 $\Delta \lambda = [n(n-1)+2] \, \Delta \lambda_0,$ 

Par ailleurs, la théorie de RUDKJØBING (31) permet de calculer l'élargissement des raies dû aux collisions. La constante d'amordissement exprimée en unités de  $2 \pi v$  est:

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{h^2}{m^{\frac{3}{2}}} \frac{N_e}{\sqrt{kT}} \int_{0}^{\infty} \sum_{l} (2l+1) \sin^2(\nu_1 - \nu_2)_{l,E} e^{-E/kT} d\left(\frac{E}{kT}\right).$$

Afin de comparer cette expression avec la valeur  $\Delta \lambda$  que nous venons de trouver, nous pouvons remplacer l'intégrale par l'unité. On a alors numériquement:

$$\cong 10^{-4,46} \frac{N_e}{\sqrt{T}}$$

Y

On trouve alors que l'élargissement des raies par collision est plus important que l'effet Stark moléculaire, tant que

## $N_1 < [15,360] T^{\frac{3}{2}}$ .

tant que cette inégalité est satisfaite (ce qui est d'ailleurs le cas de 40 Eridani B) l'hypotèse simplificatrice de Pannekoek que l'énergie de la raie est uniformément répartie sur oute sa largeur est une approximation satisfaisante.

Nous voyons, au seul énoncé de l'importance considérable de cet effet, que le calcul de VERWEJ (51) du profil des raies devrait être repris en tenant compte de l'amortissement par chocs. On devrait s'attendre à voir le profil des raies s'adoucir considérable ment et sans doute verrait- on disparaître le ou les pics centraux que Verwej a obtenu pour les forts champs de pesanteur.

17. Méthode de calcul. Le calcul a été effectué d'après les calculs de PANNEKOEK (28). Pannekoek a étudié l'intensité des raies d'émission. Il ressort de son travail que le phénomène prépondérant est le phénomène de recouvrement des raies, le phénomène de dissolution étant beaucoup moins important.

a) Le coefficient d'absorption en un point situé à une distance  $\Delta \lambda$  du centre de la raie est donné par:

(17.1) 
$$[2,549] \left(\frac{n^2}{n_2-4}\right)^2 f \frac{1}{SF_0} \int_0^\infty \frac{W(\beta)}{\beta} d\beta$$

où S, qui donne l'étendue en ångströms du réseau de raies Stark est donné par

(17.2) 
$$S = 0,00256 \left[ n \left( n - 1 \right) + 2 \right] \left( \frac{n^2}{n^2 - 4} \right)$$

avec

(17.3) 
$$\Delta \lambda_0 = SF_0,$$

 $F_0$  étant le champ moléculaire moyen.

Si  $\Delta\lambda$  est la distance fixe au centre de la raie où l'on mesure l'intensité et  $\Delta\lambda_0$  l'élargissement moyen, on a:

(17.4) 
$$\beta = \frac{d\lambda}{d\lambda_0},$$

 $W(\beta) d\beta$  est ici la fonction de distribution de Holtsmark (18) telle qu'il en a été fait mention au chapitre II;

f est la force de l'oscillateur telle qu'elle est donnée par BETHE (12) et reproduite par UNSÖLD (50).

b) On calcule en un point situé à mi-distance de deux raies voisines la contribution de 2 raies (ou 4) élargies (1 ou 2 de chaque côté). On calcule ainsi le coefficient d'absorption par gramme d'hydrogène dans l'état quantique n = 2 en fonction du nombre  $N_1$  de protons par cm<sup>3</sup>. Pour chaque modèle d'atmosphère envisagé, on calcule le coefficient d'absorption  $k_{\nu}$  par gramme de matière et l'on ajoute  $l_{\nu}$  au coefficient  $k_{\nu}$  déjà trouvé pour le fond continu. Lorsque l'on atteint la région où l'effet de pression fait disparaître les raies dans le continu, on ne tient plus compte que du coefficient d'absorption  $k_{\nu}$  du continu.

Le tableau VIII donne le coefficient d'absorption entre deux raies consécutives en fonction de log  $N_1$  par gramme d'hydrogène dans l'état n = 2.

On a calculé de cette-manière l'intensité pour les longueurs d'onde 3862 3930 4036 pour 40 Eridani B et 3930 4036 4221 4601 pour Van Maanen 2 correspondant respectivement aux points situés à mi-distance des raies  $\zeta \eta$ ,  $\varepsilon \zeta$ ,  $\delta \varepsilon$ , et  $\varepsilon \zeta$ ,  $\delta \varepsilon$ ,  $\gamma \delta$ ,  $\beta \gamma$ .

Le tableau IX donne les valeurs de s, f et  $q = [2,549] \left(\frac{n^2}{n^2-4}\right)^2 \frac{f}{s}$ 

en fonction de *n*. Le tableau X donne les valeurs de l'intensité relative rapportée à  $\lambda = 3000$  Å.

Tableau VIII.

	$\log v_{\nu}$ par	gramme d'ny	ydrogene dans	Tetat $n=2$ .	
og N <sub>1</sub>	$\begin{array}{c c} 4801\\ \log l_{\nu}=8 \end{array} +$	$4221 \\ \log l_{p} = 8 +$	$4036 \\ \log l_{\nu} = 8 +$	$\frac{3930}{\log l_{\nu}} = 8 + $	$3862 \\ \log l_{\nu} = 8$
15,0	5.613	$\bar{4}.19$	4.69	3 22	3.86
15,2	$\overline{5},82$	4,41	4.97	3.44	2.05
15,4	4,03	4,64	3,17	3.64	2,00
15,6	4,23	4,84	3,36	3,87	2,53
15,8	4,43	3,02	3,56	$\overline{2},06$	2,78
16,0 16,2 16,4 16,6 16,8	$     \frac{\overline{4},64}{\overline{4},89} \\     \overline{3},08 \\     \overline{3},26 \\     \overline{3},46     $	$     \overline{3,22} \\     \overline{3,42} \\     \overline{3,66} \\     \overline{3,94} \\     \overline{2,18}   $	$     \overline{3,79}     \overline{2,00}     \overline{2,26}     \overline{2,52}     \overline{2,73}     $		$     \overline{2},99     \overline{1},17     \overline{1},21     \overline{1},23     \overline{1},17     $
17,0 17,2 17,4 17,6 1,78	$     \overline{3,67} \\     \overline{3,90} \\     \overline{2,10} \\     \overline{2,34} \\     \overline{2,60}   $	$     \overline{2,31} \\     \overline{2,57} \\     \overline{2,80} \\     \overline{2,97} \\     \overline{1,08}   $	$     \overline{2},91 \\     \overline{1},02 \\     \overline{1},05 \\     \overline{1},02 \\     \overline{2},97   $	ī,04 ī,00 2,93 	1,11  
48,0 18;2	2,83 1,03	$\frac{\overline{1},08}{\overline{1},04}$		··· .	

Ŋr. 7

Nr.7

Tableau IX. log s  $\log q$ s log f n 2,804 1.076 0.06369 1,875 4  $\overline{2.902}$ 2.647 0,07980 1.348 5 1.0156 2.327 0,979 0.10376 2,087 1,1257 0,810 7 0,13368 0,1690  $\overline{1.2279}$ 3.903 0,509 9 0,2095 1,3211 3,681 0,274

Tableau X.

2	Van Maanen 2			40 Eridani B					
$\log \frac{F}{F_{3000}}$	λ	raies n n+1	$\log \frac{F}{\overline{F}_{3000}}$	λ	raies n n+1				
	3862	8	0,081	3862	9				
0,131	3930	7	0,103	3930	8				
0,152	4036	6	0,147	4036	7				
0,171	4221	5	• •	4221	6				
0,184	4601	4	••	4601	5				
	] ]				4				

18. Comparaison avec l'observation. Nous limitons les comparaisons au fond continu pour les raisons suivantes. Nous avons défini le fond continu au milieu de deux raies consécutives de la série de Balmer (§ 17 b), le coefficient d'absorption étan lui-même défini par l'approximation de Pannekoek (Equation 17.1), suffisante ici. Mais comme nous l'avons brièvement indiqué à la fin du paragraphe 16, le calcul du contour des raies de l'hydrogène exigerait que l'on reprenne le travail de Verwej en le modifiant pour tenir compte de l'amortissement par chocs. Il faudrait en particulier évaluer l'intégrale de Rudkjøbing (second membre de 16.3) pour chacune des raies du réseau Stark de raies de l'hydrogène, calcul qui se trouve au-delà des limite que nous nous sommes fixées.

KUIPER (22) a donné le contour du fond continu pour 40 Eridani B et Van Maanen 2. Il ne s'agit que d'un micropholo gramme, et par conséquent on n'a que les densités photographiques. On trouve fig. 7, p. 75, les contours théoriques pour des étoiles de température et de gravité voisines. On voit que la ressemblance est frappante. Il ne fait aucun doute pour nous que la disparition des raies de Balmer dans les naines blanches

75



Fig. 7. Courbes représentatives du flux sortant pour 40 Eridani B et pour Van Maanen 2.

est effectivement due à l'élargissement des raies par effet Stark moléculaire.

On a tracé le fond continu pour 40 Eridani B dans les deux cas 1°) on néglige, et, 2°) on tient compte du recouvrement des raies par élargissement au-delà de leur largeur moyenne. On notera l'influence considérable du recouvrement même très loin des raies mélangées (par exemple entre  $H_{\beta}$  et  $H_{\gamma}$ ). Il apparaît dès lors contestable que l'intensité mesurée par Kuiper entre  $H_{\beta}$  et  $H_{\gamma}$  pour 40 EriB soit celle du fond continu. Il ne semble donc pas possible de relier de façon simple la grandeur de la discontinuité de Balmer au nombre d'atomes d'hydrogène présents dans l'état n = 2.

# IV. Température effective et rayon des naines blanches.

Nr. 7

1. L'étude de la répartition spectrale de l'énergie faite en troisième partie nous amène à une analyse détaillée, à la lumière des résultats connu maintenant, de la détermination par Kur-PER (22) de la correction bolométrique et du rayon des naines blanches. Nous commençons par reproduire le texte de Kuiper sur les résultats relatifs à Van Maanen 2.

2. Résultats de Kuiper relatifs à Van Maanen 2. «La température de cette étoile est encore incertaine. Nous trouvons 8200° comme valeur la plus probable. Nous ferons les calculs pour 7500° et 9000° qui peuvent sans doute être considérés comme des valeurs limites.

Cas 1.  $T_e = 7500^\circ$ ,  $M_{pv} = 14,35$ , C.B. = -0,12, log L = -3,84, log R = -2,16, vitesse radiale mesurée + 238 km/sec. Si cette vitesse radiale est entièrement attribuée au déplacement gravitationnel des raies spectrales vers le rouge, alors log M = 0,41. Si la vitesse maximum de 65 km/sec est soustraite (pour tenir compte de la limite supérieure de la vitesse radiale dans cette direction) nous avons log M = 0,27. Les valeurs correspondantes de  $\mu_e$  sont 1,41 et 1,61, de X, 0,42<sub>5</sub> et 0,25; de log  $\bar{\varrho} = 7,04$ et 6,90.

Cas 2.  $T_e = 9000^\circ$ . B.C. = -0.40; Log L = -3.73, log R = -2.26. Les deux hypothèses sur la vitesse radiale donnent log M = 0.31, ou 0.17;  $\mu_e = 1.60$  ou 1.85; X = 0.26 ou  $0.09_5$ , log  $\overline{\varrho} = 7.24$  ou 7.10. On voit sur la figure 8, p. 77, l'emplace ment des 4 solutions discutées. Dans la direction verticale, elles peuvent représenter les cas limites; la ligne de gauche correspondant à  $V_{\rm rad} = +65$  km est très probablement une ligne limite

Mais la vitesse radiale véritable pourrait être négative et de 200 à 300 km/sec, doublant par conséquent le déplacement gravitationnel vers le rouge, entraînant ainsi une augmentation de 0,3 du logarithme de M. Mais même dans ce cas extrême, il semble difficile d'amener l'étoile entre les deux lignes pointillées de la figure 1<sup>(1)</sup>, comme il serait nécessaire si l'équation d'état  $P = K \varrho^{\frac{5}{2}}$  était applicable. Il semble plus important de poser (1) du texte de Kniper. la question de la température effective qui définit la position en ordonnées. La coordonnée horizontale pourra à la longue être déterminée par la variation séculaire du mouvement propre qui permettra de connaître la vitesse radiale exacte.».

On remarquera que la principale question abordée dans ce texte est celle de la position de Van Maanen 2 dans le diagramme



Fig. 8. Diagramme log  $M^*$  log  $R^*$ . La position de Van Maanen 2 telle qu'elle a été donnée par KUIPER est indiquée par le parallélogramme. Les lignes pointillées, courbes à vitesse radiale constante, indiquent les positions extrêmes de Van Maanen 2. Le cercle sur la courbe inférieure indique la position qui a été choisie pour Vann Maanen 2 en conclusion de la discussion de la discussion du chapitre IV.

de la fig. 1 par rapport aux deux lignes pointillées. Cette question était particulièrement importante en 1939 au moment du «Colloque des Astrophysiciens» en raison de la controverse sur l'équation d'état de la matière dégénérée. En fait, nous verrons que les nouveaux résultats que nous indiquons sont nettement favorables à la théorie de Chandrasekhar.

Nous ne nous attarderons pas sur la question de la vitesse ràdiale de Van Maanen 2, qui ne prête pas à de longues discussions, mais nous examinerons de très près la question de la fempérature effective de Van Maanen 2.

3. Température effective de Van Maanen 2 et correction bole métrique. Ces deux grandeurs sont déterminées par le type spectral. Faisons tout d'abord quelques remarques préliminaires:

a) La correction bolométrique C.B., dans ce domaine de températures n'est pas sujette à des erreurs considérables. Bien qu'il soit douteux qu'on puisse appliquer directement les tables de correction bolométrique de KUIPER (21) aux naines blanches il est vraisemblable que cette correction bolométrique n'est pas très mauvaise. La correction bolométrique étant petite, une erreur relative forte est néanmoins petite absolument et n'entraîne pas de changement important de rayon.

b) Type spectral. Le rapport des intensités des raies du fer fait classer Van Maanen 2, G 5, et l'aspect du continu la fait classer a6. En fait, le classement par l'aspect du continu repose sur la détermination de la température de couleur.

c) Température de couleur. A l'époque où Kuiper publiait ses résultats (22), l'absorption due à l'ion négatif était encore mal connue. Cependant, il était possible de tracer dans le plan du diagramme de Russell une ligne séparant la région où l'ion  $H^-$  absorbe de façon prépondérante dans les atmosphères stellaires, de celle où l'atome H joue un rôle prépondérant. Cette ligne coupait la région occupée par les naines blanches au voi sinage de 10.000° et la série principale au voisinage de 7.000° Il était donc possible de comparer directement les étoiles de la série principale aux naines blanches en supposant pour  $T_{\rm eff} < 7.000°$  l'absorption due uniquement à  $H^-$  et pour  $T_{\rm eff} > 10.000$  l'absorption due uniquement à H. Cette hypothèse d'un absorbant unique permettait d'espérer l'absence de tout phénomène dû à la magnitude absolue. De plus l'estimation de la discontinuité de Balmer devait corroborer ce premier résultat.

Deux circonstances permettent de douter du résultat. La première soulignée par Kuiper est que Van Maanen 2 se trouve justement dans la région A—F où la méthode de comparaison employée n'est pas applicable. La deuxième est que Kuiper na pas tenu compte de la déformation du spectre par le recouve ment des raies de l'hydrogène. Cette déformation se manifeste de deux façons, d'une part par une diminution de la discontinuité de Balmer, d'autre part, par une diminution de la températur de couleur. En effet, l'abaissement du fond continu par recouvrement des raies est d'autant plus marqué que l'on se rapproche de la discontinuité de Balmer, ce qui correspond à un abaissement de la température de couleur et à un affaiblissement de la discontinuité de Balmer. La discontinuité de Balmer et la température de couleur sont donc plus petites que celles que l'on observerait dans une étoile de la série principale de même température effective. L'affaiblissement de la discontinuité de Balmer se produirait de toutes façons, en raison de l'accroissement de la pression électronique.

La relation  $T_e(T_c)$  peut se noter:

entraîne

Nr

 $T_{e_1} > T_{e_2}$ 

 $T_{c_1} > T_{c_2}$ 

Sous l'influence de la pression, la relation se déforme. On avait la fonction

 $T_c(T_e),$ 

on a maintenant

 $T_c^{\prime}(T_e) < T_c(T_e).$ 

 ${}^{\circ}T_{e}'(T_{e}') = T_{e}(T_{e}).$ 

 $T_c'(T_e') = T_c'(T_e),$ 

 $T'_e > T_e$ 

Comme on a alors

on en déduit

La déformation du fond continu par recouvrement les raies fait qu'à une même température de couleur correspond une température effective plus levée dans les naines blanches que dans les étoiles le la série principale, et cet effet est d'autant plus stand que la gravité (donc la pression) est plus forte. Nous voyons donc que même sans mettre en doute la relation entre la correction bolométrique et la température effective, il si nécessaire de se méfier de la valeur de la correction bolométrique adoptée par Kuiper, car il est hors de doute que la température effective adoptée est trop faible. Nous counons ici les valeurs de log R pour différentes valeurs de  $T_{eff}$ .

:79

On a:

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_c$$

ou numériquement:

 $L^* = [18,536] R^{*2} T_e^4$ 

Le tableau I donne la relation entre la température effective et les différentes grandeurs relatives à l'étoile.

	.432	·	Tabioaa xi					
On a dor	log R*	$\log L^*$	$M_{ m Bol}$	B.C.	T <sub>e</sub>			
	- 2,15	3,84	14,25	0,10	7.500			
Dans le c		— 3,80	14,14	-0,20	8.000			
		3,75	14,03	0,32	8.500			
		— 3,71	13,93	-0,42	9.000			
			13,83	-0,52	9.500			
on déduit	2,30	3,63	13,73	-0,62	10.000			
	— 2,32	3,59	13,63	-0,72	10.500			
d'où		3,55	13,53	0,82	11.000			
- ou		- 3,48	13,35	—1	12.000			
			13,15		13.000			
ou	2,47	— 3,27	12,83	-1,52	15.000			
	- 1988 P			1				

Tableau I

On a noté ici  $L^*$  et  $R^*$  pour la luminosité et le rayon exprime en unités de soleil afin de les distinguer de L et R en C.G. Sans attacher une trop grande valeur à l'exactitude de la cor-

V = 65 km et V = 0 avec la courbe limite log  $M^*$ ; log  $R^*$ , som

 $\log R^* = -2,33$  et  $\log R^* = -2,45$ 

correspondant respectivement aux températures effectives

$$T_e = 10.700^\circ$$
 et  $T_e = 14.200$ .

Le modèle d'atmosphère que nous avons calculé pour Maanen 2 nous permet une estimation du rôle de l'élargissement des raies. On a approximativement:

$$\log_{10} \frac{F_{4000}}{F_{4600}} = 0,10 \pm 0,03$$

d'où, d'après les définitions données dans (9)

$$\Phi = 1.47 \pm 0.2$$
  
 $heta_c' = 0.49 \pm 0.07$ 

La température de couleur  $heta_c$ , définie de la même façon, correspondant à  $heta_0=0,50$ , et  $heta_e=0,42$  pour une étoile de la série principale, est approximativement (9)

 $\theta_c = 0.22$ 

n a donc

$$\theta_c = \theta_c = 0.27 \pm 0.07$$
.

ans le cas de Van Maanen 2, classée avec

$$\begin{split} \theta_c' &= 0,46, \\ \theta_{c_{\text{VM}2}} &= 0,19 \pm 0,07, \\ \theta_{e_{\text{VM}2}}' &= 0,40 \pm 0,05, \\ T_{e_{\text{VM}2}}' &= 12 \cdot 500^\circ \pm 1000^\circ = T_{e_{\text{VM}2}} + 4300^\circ. \end{split}$$

Les valeurs limites de log  $R^*$ , point de rencontre des droit rection apportée à la détermination de  $T'_e$ , on voit toutefois qu'elle est certainement considérable et a le signe indiqué. I est donc parfaitement possible que Van Maanen 2 se trouve beaucoup plus près de la courbe  $\mu_e=2$  qu'il n'avait été supposé (34).

> 4. Le rayon des naines blanches et la théorie du débit d'énergie aux grandes densités. L'énormité du facteur d'accélération (44) nécessite une révision des résultats antérieurement donnés (34) oncernant Van Maanen 2 et conduit à des conclusions analogues celles du paragraphe précédent.

On trouvera dans le tableau II pour différentes densités et our la température de 4,7. 10<sup>6</sup> degrés les facteurs d'accélération orrespondant à la réaction  ${}^{12}C + {}^{1}H$ .

D Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XXV, 7.

81

6

\_

Tableau II.					
$\log (\varrho/\mu_e)$	log A				
5,102	5,06				
6,102	9,87				
7,102 8,102	16,01				

Nr.7

(1.1)

En supposant la hauteur de mélange donnée par la forzamule (34)

$$h = 1,5 \cdot 10^8 \frac{T}{g},$$

on obtient pour la luminosité

$$L = [25,815] A \eta^2 \frac{(\Phi^2 y_0^2 - 1)'}{-\Phi' y_0^4}$$

en supposant la concentration en  ${}^{12}C$  approximativement égale à 1  ${}^{0}/_{0}$  au sein du mélange d'éléments lourds.

Différentes valeurs de la luminosité ont été calculées pour  $1/y_0^2 = 0,01$  qui correspond approximativement au rayon de Van Maanen 2, et pour différentes valeurs de  $\eta$ , rayon réduit (7). Les calculs ont été faits également pour d'autres valeurs de T (tableau III).

Т	η	log A	$\log L/L_{VM2}$	
4.7.106	4	13	7	
4,7.106	4,5	11,6	5,3	
3 .106	4,5	16	5,3	

Tableau III.

Les valeurs de la densité sont donc encore assez élevées pour entraîner des facteurs d'accélération énormes. Il est donc néces saire de supposer que Van Maanen 2 est entourée d'une très mince couche d'hydrogène, si l'on veut éviter de telles diffcultés.

5. Influence du triage des éléments. Il pourrait sembler pos sible que le triage des éléments dans Van Maanen 2 réduise la concentration de  ${}^{12}C$  et  ${}^{14}N$  dans la couche de mélange dans de telles proportions que le débit d'énergie s'en trouve fortement réduit. Une formule approximative, déjà utilisée par ailleurs (36) donne un facteur:

## $C_{\rm N}$ moyen / $C_{\rm N}$ dû au triage = 500.

Bien que déjà élevé, ce facteur est néanmoins trop petit pour combler l'écart observé. La conclusion s'impose: Van Maanen 2, semblable en cela à la plupart des autres naines blanches connues, a une très petite teneur en hydrogène.

## V. Théorie élémentaire du débit d'énergie des naines blanches.

1. Généralités. Nous avons longuement insisté dans la première partie sur la définition de la couche de mélange. Nous avons montré que sa hauteur variait légèrement suivant la dégénérescence du gaz d'électrons. En moyenne, on peut prendre (34):

 $h = 1,5 \cdot 10^8 rac{T}{g}.$ 

Elle varie, suivant les naines blanches, de quelques centièmes à quelques millièmes du rayon. Nous basons la théorie simplifiée que nous présentons ici sur l'hypothèse que la couche de mélange est infiniment mince et se réduit à une surface S de séparation entre l'hydrogène et les noyaux lourds. Il n'est pas inutile de préciser que si nous négligeons l'épaisseur de la couche de mélange dans notre description de la structure des naines blanches, c'est à ce seul point de vue que nous la négligeons, car nous tenons compte exactement des sources d'énergie qui s'y trouvent accumulées (réactions du cycle de Bethe) comme on peut le voir plus loin.

La réaction proton-proton est supposée jouer un rôle essentiel ét la vitesse de réaction est donnée par la formule calculée par BETHE et CRITCHFIELD (2). La production d'énergie dans la couche de mélange est donnée par:

$$L_B = \left[ \, 40,286 
ight] \, T^{rac{1}{8}} \quad \exp \left( - rac{15250}{T^{rac{1}{8}}} 
ight) rac{r^2 \, arrho^2}{g} \, (c_N)_R$$

6\*

Nr. 7 Nr.

avec

(4.1)

(4.2)

(4.3)

(4.4)

où  $\varrho$  est la densité à l'intérieur de la surface S,  $(c_N)_R$  la concentration en azote au sein du mélange d'éléments lourds, Tla température en degrés,  $L_B$  le débit d'énergie en ergs.

Le coefficient d'absorption du gaz non dégénéré de protons , et d'électrons est

(1.3)  $\chi = [22,870] \varrho T^{-3,5}$ 

car, aux densités considérées, l'absorption par les électrons libres est négligeable (diffusion Thomson).

2. Les limites de la théorie élémentaire. Lorsque l'épaisseur de la couche de mélange n'est plus négligeable, la théorie n'est certainement plus applicable. La théorie qui est donnée ici n'est pas valable en toute généralité pour toutes les naines blanches. Elle ne peut sans doute être appliquée qu'aux naines blanches né présentant pas de raies métalliques dans leur spectre, les autres ayant une structure légérement différente.

Certains résultats antérieurs (34) (39) deviennent entièrement différents.

Une partie des résultats présentés ici ont déjà été annoncés (40), (41), (42), (43), (45). Nous allons les exposer ici avec quel ques détails.

3. La réaction proton-proton. Cette réaction avait été supposée interdite (39) dans le but d'expliquer l'épaisse couche d'hydrogène de Van Maanen 2. L'étude théorique du spectre et des réactions nucléaires conduisent au même résultat et permet tent de conclure qu'il est impossible que Van Maanen 2<sup>2</sup> ait une couche d'hydrogène épaisse.

Ceci nous montre en particulier que Van Maanen 2 a un très petit rayon et se place donc très loin de la ligne correspondant dans la figure 8 à l'équation d'état  $P = K \rho^{\frac{5}{2}}$ . On confirme ainsi la théorie de la dégénérescence de Stoner et Anderson et les résultats de Chandrasekhar.

Il n'y a donc plus aucune raison de supposer la réaction

 $^{1}H + ^{1}H = ^{2}D + \varepsilon^{+}$ 

interdite (au sens des règles de sélection) et il est possible d'utiliser la formule de Bethe et Critchfield (2):

 $\varepsilon = 410 \ \varrho \ X^2 \ \tau^2 \ e^{-\tau},$ 

 $au=rac{33.8}{T^{rac{1}{8}}}$  T en millions de degrés

et tout calcul du débit d'énergie doit se faire en utilisant ces valeurs numériques.

4. Les bases de la théorie simplifiée. Nous devons rappeler certaines formules qui ont été déjà données (34).

On calcule le modèle pour la couche extérieure mince d'hydrogène en supposant la gravité et le rayon pratiquement constants dans toute cette couche. On obtient ainsi les relations suivantes entre la température et la densité d'une part et la profondeur géométrique comptée à partir de la surface d'autre part:

$$T = [6,434] \frac{M^*}{R^*} \frac{\Delta R}{R},$$
$$\varrho = [0,116] R^* \frac{-18}{4} L^* \frac{-1}{2} M^* \frac{15}{4} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{13}{4}}.$$

Ces formules supposent la dégénérescence négligeable. La condition de la dégénérescence:

$$\frac{R\varrho T}{\overline{\mu}} = K \varrho^{\frac{5}{8}} \mu_e^{-\frac{5}{8}}$$

conduit à une limite différente pour  $\frac{\Delta R}{R}$  suivant que l'on admet que la dégénérescence apparaît dans l'hydrogène ( $\mu_e = 1$ ,  $\overline{\mu} = \frac{1}{2}$ ) ou dans le noyau d'éléments lourds ( $\mu_e = 2$ ). L'épaisseur non dégénérée maximum de l'hydrogène est donnée par

$$\frac{4R}{R} < [1,351] R^* L^{*\frac{9}{7}} M^{*-\frac{9}{7}}.$$

Tous les calculs faits en supposant la couche d'hydrogène non dégénérée doivent conduire à une valeur de  $\frac{\Delta R}{R}$  inférieure à cette quantité.

5. Les éléments de la théorie du débit d'énérgie. La réaction proton-proton a lieu évidemment dans un domaine d'une certaine épaisseur. Comme nous supposons la couche de mélange infiniment mince, nous calculons la réaction (a) en supposant l'hydrogène pur, (b) en supposant que la température décroît si rapidement dans la couche d'hydrogène que la production d'énergie a lieu dans une couche infiniment mince.

La production d'énergie est donnée par:

(5.1) 
$$L^* = \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \int 4 \pi R^{*2} \varrho \varepsilon dr^*$$

(5.2) 
$$L^* = 4 \pi R^{*2} 410 \frac{R_{\odot}^{\circ}}{L_{\odot}} \int \varrho^2 \tau^2 e^{-\tau} dr^*$$

Nous introduisons les expressions (4,1) et (4,2) pour la température et la densité, ce qui correspond à l'hypothèse (b). De plus nous avons:

 $au_0 = \frac{B}{[2,145]} \Big( \frac{M^*}{R^*} \Big)^{-\frac{1}{8}}$ 

(5.3) 
$$\tau = \frac{B}{[2,145]} \left(\frac{M^*}{R^*}\right)^{-\frac{1}{8}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{-\frac{1}{8}}$$

(5,5) 
$$\frac{\varDelta R}{R} = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^3.$$

On obtient ainsi

(5.6) 
$$L^* = 4 \pi R^{*3} 410 \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \varrho_0^2 3 \tau_0^{\frac{4.5}{2}} \int_{\tau}^{\infty} \tau^{-\frac{4.3}{2}} e^{-\tau} d\tau$$

où l'on a

 $arrho = arrho_0 \left( rac{\Delta R}{R} 
ight)^{rac{1.8}{4}}.$ 

On remplace l'intégrale par le premier terme de son développement asymptotique:

$$L^* = 12 \pi R^{*3} \cdot 410 \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \varrho_0^2 \tau_0^{\frac{45}{2}} \frac{e^{-\tau}}{\frac{41}{2} \tau^{\frac{41}{2}}}.$$

On obtient ainsi l'expression numérique <sup>(1)</sup>:

9) 
$$L^{*2} = [4,824] R^{*-\frac{17}{6}} M^{*\frac{41}{6}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{41}{6}} e^{-[1,384]} \left(\frac{E^{*}}{M^{*}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{-\frac{1}{6}}$$
  
10)  $L^{*} = [2,412] R^{*-\frac{17}{12}} M^{*\frac{41}{12}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{41}{12}} c^{-[1,083]} \left(\frac{R^{*}}{M^{*}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{-\frac{1}{8}}.$ 

On peut poser:

(5.11)

(5.7)

(5.8)

$$L^*=\lambda\Big(\!rac{{\it \Delta}\,R}{{\it R}}\!\Big)^{rac{4\,1}{1\,2}}e^{-\mu}\Big(\!rac{{\it \Delta}\,R}{{\it R}}\!\Big)^{\!-rac{1}{3}};$$

les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont donnés dans la table I.

1 able 1.					
$1/y_{0}^{2}$	log λ	μ			
0	••	••			
0,01	6,47	1,56			
0,02	6,25	1,73			
0,05	5,89	2,00			
0,1	5,57	2,27			
0,2	5,11	2,65			
0,3	4,74	2,96			
0,4	4,38	3,29			
0,5	4,02	3,65			
0,6	3,62	4,07			
0,8	2,58	5,44			

(1) On peut faire un calcul analogue en supposant que la réaction se produit ans une région à température constante. On trouve une expression de même orme, avec un facteur numérique très légèrement différent.

Si la concentration en hydrogène est:

(5.12) 
$$X = \frac{\text{masse de la couche extérieure d'hydrogène}}{\text{masse de l'étoile}}$$
,

on a:

(5.13) 
$$X = [\overline{1}, 812] R^{*^{-\frac{1}{4}}} L^{*^{-\frac{1}{2}}} M^{*^{\frac{11}{4}}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{1}{4}}$$

qui devient à l'aide de (10,10)

(5.14) 
$$X = [\overline{2}, 609] R^{\frac{11}{24}} M^{\frac{25}{24}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{61}{24}} e^{\frac{\mu}{2} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{-3}}.$$

6. Eléments de la théorie. Dégénérescences. Lorsque la dégénérescence apparaît dans la couche d'hydrogène, le calcul doit être modifié.

Dans ce cas, on suppose la température centrale égale à:

(6.1) 
$$T = [7,79] \left(\frac{L^*}{M^*}\right)^{\frac{3}{7}}$$

et constante dans toute la région dégénérée. Le débit d'énergie est alors dans la région dégénérée:

(6.2) 
$$L^* = 4 \pi R^{*2} \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} 410 \tau^2 e^{-\tau} \frac{5}{3} \frac{K}{g} \int_D^{\frac{5}{3}} d\varrho$$

où g est la gravité, K = [12,996] et

La teneur en hydrogène est:

(6.4) 
$$\begin{cases} MX = \int 4 \pi r^2 \varrho \, dr \\ = 4 \pi R^2 \int \varrho \, dr, \end{cases}$$
or
(6.5) 
$$\varrho \, dr = -\frac{dP}{r}, \qquad r$$

q

$$MX = 4 \pi R$$

La pression est  $P = K \rho^{\frac{5}{2}}$ . On en déduit:

Nr. i

1 1 2 - 1

Nr. 7

d'où (6.6)

(6.7)

(6,9)

 $1/y_0^2$ .

$$X = [0,043] \frac{R^{*4}}{M^{*2}} \varrho^{\frac{5}{3}},$$

formule valable dans la région de dégénérescence.

La production d'énergie est égale à la somme de l'énergie produite dans la région dégénérée et de l'énergie produite dans la région non dégénérée. On obtient ainsi:

(6.8) 
$$\begin{cases} L^* = [5,157] \ L^{*\frac{4}{27}} R^{*\frac{12}{5}} M^{\frac{251}{105}} e^{-r} (X^{\frac{8}{5}} - X^{\frac{8}{5}}_{0}) \\ + [14,064] \frac{R^{*4}}{M^{\frac{41}{21}}} L^{\frac{20}{21}} e^{-\tau}. \end{cases}$$

Avec la définition que nous avons prise pour l'apparition de la dégénérescence, on a: ia .

(6,9) 
$$L_{ND} = \frac{4\pi K}{G} \frac{102}{164} 410 \frac{R^4}{M} \tau^2 e^{-\tau} \varrho^{\frac{3}{2}}$$
(6.10) 
$$L_0 = \frac{4\pi K}{G} \frac{5}{8} 410 \frac{R^4}{M} \tau^2 e^{-\tau} \varrho^{\frac{3}{2}}$$

où  $L_0$  est l'énergie qui serait produite par la masse d'hydrogène non dégénérée  $MX_0$  si toute cette masse était dégénérée. On a pratiquement  $L_{ND} = L_0$ , d'où:

(6,11) 
$$L^* = [5,157] L^{*-\frac{4}{21}} R^{*-\frac{12}{5}} M^{*\frac{251}{105}} e^{-\tau} X^{\frac{8}{5}}.$$

Cette expression est valable quelle que soit la masse d'hydrogène dégénérée.

On trouvera dans le tableau II les coefficients en fonction de

Nr.7

(7.1)

(7.2)

(7:3)

Tableau II.					
$1/y_{0}^{2}$	$[0,927] M^{*\frac{2}{21}}$	$5,157 + \log R^* - \frac{12}{5} M^* \frac{251}{105}$			
0					
0,01	8,70	11,552			
0,02	8,68	11,266			
0,05	8,61	10,770			
0,1	8,50	10,391			
0,2	8,35	9,900			
0,3	8,20	9,554			
0,4	8,07	9,223			
0,5	7,92	8,907			
0,6	7,76	8,572			
0,8	7,31	7,657			
1					

Ce calcul cesse d'être valable quand la région d'hydrogène dégénéré occupe une épaisseur nulle. Le cas se présente lorsque

(6.12) 
$$\frac{\Delta R}{R} = [1,354] R^* L^{*\frac{2}{7}} M^{*-\frac{2}{7}}$$

On a alors

(6.13) 
$$L^{\frac{1}{42}} = [7,032] R^{*2} M^{*-\frac{41}{42}} e^{-[0,630] \left(\frac{M^{*}}{L^{*}}\right)^{\frac{3}{21}}}.$$

A cette relation correspond une courbe limite dans le plan  $L^*$ , M (fig. 9). D'un côté, les naines blanches ont leur couche d'hydrogène entièrement non-dégénérée, de l'autre, elle est partiellement dégénérée.

lableau III.	
log M* log L*	
$\begin{array}{c ccccc} 0,140 & + 0,25 \\ 0,125 & - 0,50 \\ 0,085 & - 1,30 \\ 0,035 & - 1,80 \\ - 0,053 & - 2,38 \\ - 0,131 & - 2,75 \\ - 0,213 & - 3,10 \end{array}$	
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	

Le tableau III donne les points de la courbe  $L^*(M^*)$  limite. Ges valeurs ont été déterminées en résolvant (6.13) à l'aide d'une abaque à points alignés, et ne sont pas données avec une grande précision.

7. Analyse de 40 Eridani B. Nous prenons pour 40 Eridani B les valeurs suivantes:

 $\log L^* = -2,1$   $\log R^* = -1,8$   $\log M^* = -0,35.$ La formule (5.10) donne:

 $\frac{\varDelta R}{R}=0,15.$ 

La condition (4.4) donne

 $\frac{\Delta R}{R} \leq 0,25.$ 

La condition (4,4) est satisfaite. 40 Eri B s'explique donc entièrement par la réaction proton-proton. La formule (4.1) donne la témpérature qui règne dans la couche de mélange:

 $T = 11,46 \cdot 10^{6}$  degrés.

La hauteur de mélange rapportée au rayon est:

 $\frac{h}{R} = 0,022.$ 

Elle est très petite comparée à l'épaisseur de la couche d'hydroisene.

Calculons à titre de comparaison la production d'énergie par es réactions du cycle de Bethe. La formule (1.2) nous donne e débit d'énergie dans la couche mixte.

La densité est [(34), 199]:

$$\varrho = [1,377] R^{*-2,55} M^{*2,85} L^{*0,3} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{2,55}$$

-----

d'où:

(7.6) 
$$\log \varrho = 3,490.$$

En prenant  $(c_N)_R = 10^{-2}$ , on obtient

(7.7) 
$$\log L_B = 29.4,$$

soit environ

(7.8)  $L_B = 10^{-2} L_H$ 

Le débit d'énergie par les réactions du cycle du carbone es négligeable. La luminosité de 40 Eridani B est entièrement due aux réactions proton-proton et suivantes.

Ce résultat, en parfait accord avec tout ce que la physique nucléaire nous apprend sur la réaction pro ton-proton, est à la fois une preuve de l'exactitude de la théorie de la réaction proton-proton et une explication sans défaut, au moins en principe, de l'origine du débit d'énergie des naines blanches.

8. Influence des réactions du cycle du carbone. Pour le naines blanches les plus chaudes les réactions du cycle di carbone peuvent devenir importantes.

Le débit d'énergie dû aux réactions du cycle du carbone est

(8.1) 
$$L_c^* = [14,778] T^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{15250}{T^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{R^{*4}}{GM^*} \varrho_{\text{core}}^2,$$

avec

 $(8.2) \varrho_c = 2 \ \varrho_H,$ 

où  $\varrho_H$  est donné par  $(4,2)^{(1)}$ . On en déduit:

$$(8.3) \quad L_c^* = \ [22,788] \frac{R^{*4}}{M^*} R^{*-\frac{13}{2}} M^{*\frac{16}{2}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{13}{2}} T^{\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{15250}{T^{\frac{1}{8}}}\right) L^{*-1}$$

comme

$$(8.4) L^* = L^*_c + L^*_H,$$

(1) En fait, il faudrait prendre suivant les cas (4.2) ou (7.5). Le calcul mont que le résultat est insensible à la formule employée.

$$L^{*2} = [24,933] \frac{R^{*4}}{M^{*}} R^{*-\frac{13}{2}} M^{*\frac{15}{2}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{13}{2}} \left(\frac{M^{*}}{R^{*}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{15250}{T^{\frac{1}{3}}}\right) + [4,824] R^{*-\frac{17}{6}} M^{*\frac{41}{6}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{41}{6}} \exp\left(-\frac{3380}{T^{\frac{1}{3}}}\right).$$

L'égalité  $L_{\mathsf{c}} = L_H$  se produit pour

 $T = 16,9 \cdot 10^6$  degrés.

Ceci correspond à

(8.6)

(8.7)

(8.8)

(8.9)

(8.10)

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R^*}{M^*} [0,795].$$

On en déduit  $L^*(M^*)$  le long de la courbe

 $L^* = [2, 69] R^{*2}.$ 

On calcule de même les courbes le long desquelles  $\frac{L_B}{L_H} = \xi$ . Elles sont de la forme  $L^* = Cte R^{*2}$  et le coefficient Cte est donné dans le tableau IV.

Tableau IV.					
ې	log Cte				
$   \begin{array}{r}     10^{-2} \\     10^{-1} \\     1 \\     10 \\     100   \end{array} $	1,54 1,93 2,42 3,15 4,04				

Il faut arrêter cette courbe à la courbe limite déjà calculée, lieu d'apparition de la dégénérescence dans l'hydrogène. On trouve ainsi que pour Sirius B,  $L_C = L_H$ . On a alors

 $T = 16.8 \cdot 10^6$  degrés

$$\frac{\Delta R}{R} = 0.05$$

La condition (9.4) donne

$$(8.11) \qquad \qquad \frac{\Delta R}{R} < 0.064.$$

Cette condition est donc satisfaite par la valeur (8.10). On a de plus h = 0,00667.

Nr. 7

Dans le cas où les réactions proton-proton se produisent dans une région d'hydrogène où le gaz d'électrons est dégénéré, un calcul analogue donne une autre courbe limite. L'égalité entre les deux termes  $L_H$  et  $L_c$  donne

(8.12) 
$$\begin{cases} \frac{L^*}{2} = [5,157] R^{-\frac{12}{5}} M^{\frac{251}{105}} X^{\frac{8}{5}} L^{*-\frac{4}{21}} \exp[0,927] \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{4}{21}} \\ = [24,500] R^{-\frac{4}{5}} M^{\frac{7}{5}} X^{\frac{6}{5}} \left(\frac{L}{M}\right)^{\frac{2}{21}} \exp[1,586] \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{2}{21}}. \end{cases}$$

On en tire X

$$X^{\frac{2}{5}} = [19,343] R^{\frac{6}{5}} M^{\frac{114}{105}} L^{\frac{6}{21}} \exp - [1,478] \left(\frac{M^{*}}{L^{*}}\right)^{\frac{3}{21}}$$

et finalement la relation:

$$\frac{1}{21}\log L^* + 55.8 \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{9}{21}} = 82,530 + 4\log R^* - \frac{205}{105}\log M^*,$$

 $\mathbf{ou}$ 

$$(8.14) \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{1}{21}} = 1,480 + 0,0718 \log R^* - 0,0380 \log M^* - 0,00085 \log L^*$$

Cette relation a été calculée numériquement pour quelques valeurs de  $M^*$ . Les points obtenus se trouvent au-dessus de la courbe d'apparition de la dégénérescence dans l'hydrogène.

On trouve ainsi pour AC 70°8247, avec

que 
$$\begin{array}{ccc} \log \ L^{*}=-1,67 & \log \ M^{*}=0,12 & \log \ R^{*}=-2,41,\\ L^{*}_{c}\cong \frac{1}{2}L^{*}_{H}\cong \frac{1}{3}L^{*}, \end{array}$$

ce qui correspond à la position de AC 70°8247 au voisinage de la courbe qui vient d'être calculée. 9. Les courbes à teneur en hydrogène X = Constante. Ona calculé pour les différentes masses, à l'aide de la représentation paramétrique  $\frac{\Delta R}{R}$ ,  $L^*$  et X. Par interpolations graphiques, on a obtenu les courbes de la figure 9, p. 95. On a également calculé le lieu des-points où  $L_B/L_H = 0.01$ ; 0,1; 1; 10, et on a marqué sur ces courbes les points log  $X = \overline{4}, 6$  à  $\overline{5}, 4$  de 0,2 en 0,2. On a procédé de même dans la région dégénérée (tableaux V, VI et VII).





\_\_1

-0.9

-0.8

 $L_B/L_H$ 

-2.99  $\overline{4.85}$ 

-2,37 4,97

0,01

Tableau V. Région non dégénérée, log X et log  $L^*$ . -0.297-0,213-0.131-0.391 $\log M^*$  $\log \frac{\Delta R}{R}$  $\log L^* \log X$   $\log L^* \log X$ -6.12  $\overline{4}.15$ --- 5,25 5,96 -4,64 5,79 ---- 3.65 5:63  $-7.09 \ \overline{4.34}$ -1.5 -3.61  $\overline{4.73}$  $2.82 \overline{4.62}$ -2.12  $\overline{4}.51$  $-1.45 \ \overline{4}.42$ 

-1.55  $\overline{4.65}$ 

 $|-2,58\ \overline{4},89$   $|-0,99\ \overline{4},80$   $|-0,37\ \overline{4},76$   $|+0,26\ \overline{4},65$ 

-0,91  $\overline{4},57$ 

1

-2.23  $\overline{4}.75$ 

Dans la partie supérieure du diagramme (p. 95), les courbes se raccordent à celles qui avaient déjà été calculées (34). Mais dans sa partie inférieure le diagramme est très différent.

On remarquera

Nr.7

10

que dans la partie supérieure, la luminosité croît quand la teneur en hydrogène décroît,

que dans la partie inférieure, la luminosité croît quand la teneur en hydrogène décroît.

que dans la partie médiane, la luminosité décroît quand la teneur en hydrogène décroît.

On sera particulièrement frappé de ce que pour les masses inférieures à  $\odot$  et les luminosités inférieures à  $-1.7 L \odot$ environ, la courbe d'apparition de la dégénérescence de l'hydrogene semble une limite d'évolution. Il semble y avoir là une contradiction essentielle dans le modèle ainsi décrit, et qui n'est pas encore résolue.

10. Résultats généraux. Le tableau VIII contient l'ensemble des résultats relatifs aux 8 naines blanches marquées sur la figure 9, p. 95. On y trouve  $\Delta R/R$ , profondeur de la couche non dégénérée d'hydrogène, z/R, profondeur totale de la couche d'hydrogène, h/R hauteur de la couche de mélange.

log  $M^*$ ---- 5,88 0,140---- 5,91 --- 5,80 -5.79---- 5,51 --- 5,42 0,125 -5,54-5,43-4,99 -4,91 -5,020.085--- 4,59 -4,50 0,035 -4,62-4,51---- 4,04 -4,03 -4,12 -4,15 -3,72-3,71 ---- 3,80 -0.133-3,83 -3,50 -0,213--3,42-3,41-3,13 -0,297--0,25---- 2,94 --- 2,85 ---- 0,391 -2,97-2,20 -2,11 -2,12 -0,657-2,23

Tableau VI  $(\log L^*)$ .

0.1

Tableau VII  $(\log X)$ .

					1940
log M*	0,140	0,125	0,085	0,035	0,053
-1	-5,02	-4,83	4,56	-4,37	4,08
-2	5,04	-4,85	4,59	4,40	4,15
-3	4,90	-4,71	4,46	4,28	4,05
-5	-4,52		4,09	3,94	3,72
-5	3,88		3,46	3,32	3,13

Tableau VIII.

toile	log L	log M	log R	$\log X$	$\Delta R/R$	T	h/R	z/R
C 70°8247	1,67	0,12	-2,41			18,9		••
irius B	-1,6	0,01	- 2,11	-4,3	0,050	16,8	0,0067	• • •
), Eri B	-2,1	0,35		- 3,05	0,15	11,5	0,022	
Ross 627	- 3,00	0,11	2,34			•••		••
Wolf 219	- 3,28	0,13						
V.M. 2	- 3,4	0,125	-2,41		0,0072	6,02	0,0014	0,031
Wolf 457	3,96	0,13		- 4,4				
Wolf 489	- 4,16	-0,11		3,55				
r I): Kgl. Danske Vid	l . densk, Selsk	ah, Matfys	 5. Međd. XX	 V,7.				7

### Conclusions.

11. II semble bien que la théorie du débit d'énergie de naines blanches puisse se faire sans contradiction avec la phy sique nucléaire. Cependant, d'autres difficultés surgissent inévi tablement.

a) Nous avons déjà signalé une difficulté relativement à l'évolution des naines blanches.

b) La couche d'hydrogène expliquant le débit d'énergie de Van Maanen 2, bien que mince, est cependant 20 fois plu épaisse que la couche de mélange. Il semble indispensable, si on veut expliquer la présence des raies métalliques dans l'al mosphère de Van Maanen 2 de modifier notre conception de la structure des naines blanches. En fait, il ne s'agit pas exacte ment d'une structure différente, mais d'une structure plus com plexe, avec des couches convectives multiples dans les régión extérieures de Van Maanen 2. C'est ce que nous nous proposons d'étudier prochainement.

### Appendice.

21

22

Valeurs de  $d\log T/d\log P$  en fonction de la densité et de la température (Voir p. 47 et suivantes).

log N <sub>e</sub>							
16	17	18	19	20			
0.400	0.400	0.400	0.400	0.400			

0.01	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	i
0.02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.399	0.398	l.
0.05	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.397	0.389	0.388	
0.1	0.4	0.4	0.4	0.399	0.394	0.366	0.325	0.339	
0.2	0.4	0.4	0.392	0.317	0.225	0.169	0.123	0.167	ľ
				-			1	1	1.1

Institut d'Astrophysique de Paris et Observatoire de l'Université de Copenhague.

15

#### Bibliographie.

BETHE, Handbuch der Physik, 24, 2. 2. BETHE and CRIETCHFIELD, Phys. Rev., 54, 248, 1938. 3. BIERMANN, A. N., 263, 185, 1937. 4. — **264**, 361, 1937. 5 BLACKETT, Nature, 159, 658, 1947. 6. CHANDRASEKHAR, M. N., 91, 446, 1931. 7 — Stellar Structures. 8. — Ap. J., 101, 328, 1945. 9. CHANDRASEKHAR and MÜNCH, A. J., 104, 446, 1946. 10. Chapman, M. N., 77, 539, 1917. I CHAPMAN and COWLING, Mathematical Theory and non-uniform Gases, Chapitre 7. — — M.T., Chapitre 14. 3. CRITCHFIELD, Ap. J., 96, 1, 1942. 14. Eddington, Internal Constitution of the Stars. 5, FERMI, Zts. f. Phys., 36, 383, 1926. 16. Fowler, Phil. Mag. 1, 863, 1926. GIBBS, Collected Papers, Thermodynamics, pp. 144, 171. B HOLTSMARK, Ann. d. Phys., 58, 577, 1919. 19. Inglis and Teller, Ap. J., 90, 439, 1939. 20. KOURGANOFF, Communication faite aimablement à l'auteur. 24 KUIPER, Ap. J., 88, 429, 1938. — White Dwarfs, Actualités scientifiques et Industrielles, 903. Hermann, Paris. LANCZOS, Zts. f. Phys., 68, 204, 1931. MILNE, Proc. Camb. Phil. Soc., XXII, 493, 1924. — M. N., 90, 769, 1930. MROWKA, Ann. d. Phys., 16, 756, 1932. PANNEKOEK, B. A. I. N., 19, 1932. — M. N., **98**, 694, 1938. Rosseland, M. N., 84, 729, 1924. RUDKJØBING, Zts. f. Astr., 21, 254, 1942. - Festskrift til N. E. Nørlund, 1, 161, Kbh. 1945. - Annales d'Astrophysique, 9, 17, 1946. RUSSELL and STEWART, Ap. J., 59, 197, 1924.

7\*

- 34. SCHATZMAN, Annales d'Astrophysique, 8, 143, 1945.
- 35. C. R., **222**, 479, 1946<sup>1</sup>.
- 36. Ann. d'Astr., 9, 199, 1946.
- 37. C. R., **224**, 31, 1947.
- 38. C. R., 225, 1060, 1474.
- 39. Ann. d. Astr., 10, 93, 1947.
- 40. C. R., 225, 867, 1947.
- 41. Nature, 161, 61, 1948.
- 42. C. R., 226, 67, 1948.
- 43. Ap. J., 107, 110, 1948<sup>2</sup>.
- 44. Journal de Physique et le Radium IX, 46, 1948.
- 45. Ann. d'Astr. 10, 341, 1947.
- 46. STONER, Phil. Trans. Roy. Sos. A., 237, 67, 1938.
- 47. STRÖMGREN, Zs. f. Astr., 4, 118, 1932.
- 48. Publ. Kbhv. Observatorium. Nr. 138.
- 49. UNSÖLD, Zts. f. Astr., 1, 138, 1931; 2, 209, 1931.
- 50. Phys. d. Sternatmosphären.
- 51. VERWEJ, Proc. K. Akad. Wetens. Amsterdam, 38, 1935, No. 5.

<sup>1</sup> Cette note comporte à la fin des conclusions inexactes.

<sup>2</sup> Cette note comporte une petite erreur numérique qui ne change aucune des conclusions. Dans l'équation 7 p. 111, au lieu du coefficient 10<sup>2-91</sup>, lire 10<sup>8-41</sup>