DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXV, NR. 17

ÜBER PROJEKTIVE BÖSCHUNGSLINIEN AUF FLÄCHEN 2. ORDNUNG

VON

FR. FABRICIUS-BJERRE

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1950

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri.

EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden wir die sogenannten projektiven Böschungslinien, d. h. diejenigen Raumkurven, deren Tangenten einen gegebenen Kegelschnitt schneiden, untersuchen. Wir beschränken uns jedoch auf die Betrachtung derjenigen projektiven Böschungslinien, die auf einer eigentlichen Fläche 2. Ordnung liegen.

In § 1 behandeln wir einige allgemeine Sätze über die Lage der projektiven Böschungslinien auf der gegebenen Fläche 2. Ordnung. In § 2 untersuchen wir die Zentralprojektionen der Kurven von beliebigen Punkten des Raumes aus. In einer passend gewählten nichteuklidischen Metrik ist die Projektion einer projektiven Böschungslinie eine orthogonale Trajektorie eines Systems von Kreisen, die mit einer zirkularen Kurve 4. Ordnung doppelte Berührung haben. Es ist der Zweck dieses Paragraphen, von projektiven Standpunkt aus einen Überblick über eine Reihe von Sätzen bezüglich der Projektionen von gewöhnlichen Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung, speziell auf Rotationsflächen, zu geben und die Sätze, die W. Wunderlich[1] vor kurzem publiziert hat, zu verallgemeinern.

§ 3 enthält eine Untersuchung der geometrischen Örter der Berührungspunkte der Tangenten, die man durch einen gegebenen Punkt an die Zentralprojektionen der Böschungslinien legen kann. In § 4 betrachten wir ausschliesslich projektive Böschungslinien auf konvexen Flächen 2. Ordnung; da sich eine solche Fläche durch eine Kollineation in eine Kugel überführen lässt, kann man sich auf sphärische projektive Böschungslinien be-

[1] »Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung«, Sitz. ber. d. Akad. in Wien, Bd. 155 (1947), p. 309—331, und »Über die Schleppkurven des Kreises«, dieselben Sitz. ber. Bd. 156 (1948), p. 155—173. Diese Arbeiten werden im folgenden mit W I und W II zitiert.

schränken. Diese erweisen sich als orthogonale Trajektorien von gewissen Kreissystemen auf der Kugel. Mit Hilfe dieser Kreissysteme ist es möglich, die Form der sphärischen projektiven Böschungslinien in grossen Zügen zu beschreiben; dadurch erhält man gleichzeitig einen Überblick über den Verlauf der gewöhnlichen Böschungslinien auf einem Ellipsoid, einem zweischaligen Hyperboloid und einem elliptischen Paraboloid.

§ 1. Allgemeine Sätze.

1. Unter einer gewöhnlichen Böschungslinie versteht man bekanntlich eine Raumkurve, deren Tangenten mit einer gegebenen Richtung einen festen Winkel bilden. Der Richtungskegel der Kurve ist ein Rotationskegel, und dieser Kegel und somit auch die Tangentenfläche der Kurve schneidet die unendlich ferne Ebene in einem »Kreis« oder in einem Teil eines Kreises. Durch eine affine oder projektive Abbildung einer solchen Kurve erhält man eine Raumkurve, deren Tangenten einen Kegelschnitt schneiden. Eine solche Raumkurve heisst eine p r o j e k t i v e B ö s c h u n g s l i n i e. Sie heisst speziell a f f i n, wenn der Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene liegt[1].

Im folgenden betrachten wir ausschliesslich projektive Böschungslinien, die auf einer nicht ausgearteten Fläche 2. Ordnung liegen, also Kurven, die durch eine Kollineation in gewöhnliche Böschungslinien auf einer Fläche 2. Ordnung übergeführt werden können.

2. Die gegebene Fläche 2. Ordnung werde mit Φ und der gegebene Kegelschnitt mit a bezeichnet. Die Ebene des Kegelschnittes heisse α und ihr Pol in bezug auf Φ sei A. Wir wollen untersuchen, ob durch einen vorgelegten Punkt P von Φ projektive Böschungslinien gehen. Die Tangentialebene π an Φ im Punkte P hat im allgemeinen 0 oder 2 Punkte mit a gemeinsam. Im ersten Fall geht keine Böschungslinie durch P, im zweiten Fall zwei. Die Tangenten an diese Kurven in P sind die Geraden, die P mit den Schnittpunkten Q_1 und Q_2 von π mit a verbinden. Die Böschungslinie mit der Tangente PQ hat in P eine Schmieg-

[1] Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie II, Berlin 1923, p. 87.

ebene, die durch PQ und die Tangente in Q an a bestimmt ist, falls diese Geraden verschieden sind.

Wenn π genau einen Punkt mit a gemeinsam hat, d. h. a berührt, muss P auf der Schnittkurve von Φ mit dem Polarkegel Γ von a in bezug auf Φ liegen. Die Kegelfläche hat ihren Scheitel in A, und ihre Schnittkurve mit Φ ist eine Kurve 4. Ordnung und 1. Art, die wir mit C^4 bezeichnen wollen. Falls sie nicht nullteilig ist, trennt sie auf Φ die Gebiete, in denen es projektive Böschungslinien gibt, von den Gebieten, in denen dies nicht der Fall ist. C^4 wird als die zum System der Böschungslinien gehörige Grenzkurve bezeichnet. Liegt P auf der Grenzkurve, so gehen von P zwei Zweige einer Böschungslinie mit gemeinsamer Tangente aus, die P mit dem zugehörigen Punkt Q auf a verbindet. Die Böschungslinie hat daher eine Spitze in P mit PQ als Spitzentangente und der Tangentialebene π als Schmiegebene.

Falls P ein gemeinsamer Punkt von Φ und a ist, können durch P unendlich viele Böschungslinien gehen; dies kann auch eintreffen, wenn die Ebene α die Fläche Φ berührt und P der Berührungspunkt ist.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt Q auf a und wollen untersuchen, ob es auf Φ Böschungslinien gibt, die Tangenten durch Q schicken. Die Polarebene von Q in bezug auf Φ ist Tangentialebene von Γ und schneidet Φ in einem Kegelschnitt q. Falls q reel ist, geht durch jeden Punkt von q eine Böschungslinie der gewünschten Art. Der Kegelschnitt q hat doppelte Berührung mit C^4, und die Berührungspunkte liegen auf der Erzeugenden, in der die Ebene von q den Kegel Γ berührt. Die Tangente an q in einem beliebigen Punkt P dieses Kegelschnittes und die Gerade QP sind konjugierte Geraden in bezug auf Φ. Daher gilt[1]

Satz 1,1. *Die projektiven Böschungslinien auf Φ, die zu dem Kegelschnitt a gehören, und die Kegelschnitte, die von den Polarebenen der Punkte von a ausgeschnitten werden, bilden konjugierte Kurvensysteme auf der Fläche.*

Mit Hilfe dieses Satzes werden wir im nächsten Paragraphen die Zentralprojektion der projektiven Böschungslinien auf Φ untersuchen und im letzten Paragraphen die projektiven Böschungslinien auf einer konvexen Fläche 2. Ordnung bestimmen.

[1] Vgl. zu diesem Paragraphen W I, p. 310.

§ 2. Die Zentralprojektionen von projektiven Böschungslinien.

3. Wir betrachten nun die Zentralprojektion der in § 1 beschriebenen Figur, die aus der Fläche Φ, dem Kegelschnitte a, der Grenzkurve C^4, dem Kegelschnitt q auf Φ sowie aus der projektiven Böschungslinie σ durch einen Punkt P auf q besteht. Als Projektionszentrum wählen wir einen beliebigen, zunächst nicht auf Φ liegenden Punkt O im Raum und als Projektionsebene eine willkürliche Ebene, die nicht durch O geht.

Die Projektion der Fläche Φ ist ein Gebiet in ω, das von der Kontur φ der Fläche begrenzt wird. Ist ω speziell die Polarebene von O, so ist φ zugleich die Schnittkurve von Φ und ω. Diesen Kegelschnitt wählen wir als absoluten Kegelschnitt einer nichteuklidischen Metrik in der Ebene ω. Ist Φ konvex, so ist die Metrik elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem O innerhalb oder ausserhalb Φ liegt; ist dagegen Φ nicht konvex, so ist φ stets ein reeller Kegelschnitt, aber die Projektion der Fläche liegt dann ausserhalb der von φ begrenzten nichteuklidischen Ebene.

Die Projektion $C^{4\prime}$ der Grenzkurve C^4 ist im allgemeinen eine ebene Kurve 4. Ordnung, die φ in vier Punkten berührt und zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte besitzt. Sie wird als nichteuklidische zirkulare Kurve bezeichnet[1].

Die Projektion q' des Kegelschnittes q ist im allgemeinen ein nichteuklidischer Kreis, dessen Mittelpunkt Q' die Projektion von Q ist. Der Kreis q' hat mit $C^{4\prime}$ doppelte Berührung. Der zu dem System der Kreise q' gehörende Deferent, d. h. der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte Q', ist die Projektion a' des Kegelschnittes a; und der zugehörige Leitkreis, der sämtliche Kreise q' orthogonal schneidet, ist die Projektion desjenigen Kegelschnittes, in dem die Ebene α die Fläche Φ schneidet[2].

Konjugierte Richtungen durch einen Punkt P auf Φ sind mit den Erzeugenden durch P harmonisch verbunden. Die Erzeugenden gehen bei der Zentralprojektion in Tangenten durch P' an φ über, mithin die konjugierten Richtungen durch P in

[1] Siehe F. Hohenberg, Über zirkulare Kurven in der nichteuklidischen Geometrie. Monatshefte f. Math. u. Phys. Bd. 45 (1937), p. 134.

[2] Hohenberg, l. c. p. 146.

konjugierte Geraden in bezug auf φ d. h. in **orthogonale** Richtungen in bezug auf die nichteuklidische Metrik. Hieraus folgt, dass die Projektion σ' der Böschungslinie σ den Kreis q' im Punkte P' orthogonal schneidet, also gilt

Satz 2,1. *Die Zentralprojektion einer projektiven Böschungslinie auf einer Fläche 2. Ordnung ist in einer passende nichteuklidischen Metrik im allgemeinen orthogonale Trajektorie eines Systems von Kreisen, die eine zirkulare Kurve 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten doppelt berühren.*

Zu dem durch die Flächen Φ und Γ bestimmten Flächenbüschel mit der Grundkurve C^4 gehören ausser Γ im allgemeinen noch drei Kegel, von denen mindestens einer reell ist. Wählt man das Projektionszentrum O in einem der Scheitelpunkte dieser Kegel, so erhält man als Projektion von C^4 einen Kegelschnitt C^2 statt einer zirkularen Kurve 4. Ordnung; ferner ist in diesem Fall die Projektion σ' von σ orthogonale Trajektorie eines Systems von Kreisen, die den genannten Kegelschnitt doppelt berühren. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf der Spur der Ebene α in ω, da die erwähnten Scheitel in der Ebene α liegen. Es gilt also

Satz 2,2. *Die Zentralprojektion einer projektiven Böschungslinie auf einer Fläche 2. Ordnung ist bei passende Wahl des Projektionszentrums orthogonale Trajektorie eines Systems von Kreisen, die einen Kegelschnitt doppelt berühren.*

Wählt man insbesondere O im Scheitel A des Kegels Γ, so bleibt die Projektion von C^4 ein Kegelschnitt, aber die Projektionen der Kegelschnitte q werden nun Tangenten an diesen Kegelschnitt. Da eine orthogonale Trajektorie dieser Tangenten Evolvente des Kegelschnittes ist, gilt

Satz 2,3. *Wird eine, auf einer Fläche 2. Ordnung gelegene projektive Böschungslinie, die zu dem Kegelschnitt a gehört, von dem Pol der Ebene dieses Kegelschnittes aus projiziert, so erhält man eine nichteuklidische Kegelschnittevolvente*[1].

[1] Für gewöhnliche Böschungslinien ist dieser Satz in W I, p. 310 bewiesen worden.

4. Wir gehen nunmehr zur Untersuchung des Falles über, wo das Projektionszentrum O auf der Fläche Φ liegt. Als Projektionsebene ω wählen wir hier eine beliebige Ebene, die O nicht enthält. Der Kegelschnitt φ artet in zwei Punkte aus, und die Metrik in ω wird parabolisch. Insbesondere kann die Metrik euklidisch werden, nämlich wenn Φ eine konvexe Fläche ist und wir stereographisch von einem der Nabelpunkte der Fläche aus projizieren. In diesem Fall wird $C^{4\prime}$ eine bizirkulare Kurve, q' ein gewöhnlicher Kreis, der mit $C^{4\prime}$ doppelte Berührung hat, und σ' wird eine (im gewöhnlichen Sinne) orthogonale Trajektorie des Systems von Kreisen q'. Wir haben also

Satz 2,4. *Die stereographische Projektion einer projektiven Böschungslinie auf einer konvexen Fläche 2. Ordnung von einem der Nabelpunkte der Fläche aus ist eine gewöhnliche orthogonale Trajektorie eines Systems von Kreisen, die eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung doppelt berühren.*

Wir wollen nun die Sätze 2,3 und 2,4 kombinieren; zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass A auf Φ liegt, d. h. dass die Ebene α Tangentialebene von Φ in A ist, und zugleich, dass A in einen Nabelpunkt fällt. Projiziert man eine zum Kegelschnitt a gehörige, auf Φ gelegene Böschungslinie von A aus, so erhält man in diesem Fall eine gewöhnliche Evolvente eines Kegelschnittes. Es gilt also

Satz 2,5 a. *Falls die Ebene des Kegelschnittes a die Fläche Φ in einem Nabelpunkt A berührt, so wird eine projektive Böschungslinie bezüglich a von A aus stereographisch in eine gewöhnliche Kegelschnittevolvente projiziert.*

Es seien speziell Φ ein elliptisches Paraboloid, die Ebene von a die unendlich ferne Ebene, also A der unendlich ferne Punkt von Φ. Die zu a gehörenden Böschungslinien werden affine Böschungslinien, und die stereographische Projektion wird zu einer Parallelprojektion in der Richtung der Achse auf eine der Kreisschnittebenen der Fläche. Dann erhält man

Satz 2,5 b. *Projiziert man eine auf einem elliptischen Paraboloid liegende affine Böschungslinie parallel in der Richtung der Achse* *auf eine der Kreisschnittebenen, so erhält man eine Kegelschnittevolvente*[1].

5. Schliesslich betrachten wir den Fall, dass der Kegelschnitt a die Fläche Φ doppelt berührt. Wir bezeichnen die (reellen oder imaginären) Berührungspunkte mit R_1 und R_2, ihre Verbindungslinie mit r. Der zu a polare Kegel Γ schneidet Φ in zwei Kegelschnitten durch R_1 und R_2; die Kurve C^4 zerfällt somit in diese beiden Kegelschnitte.

Projizieren wir von einem beliebigen Punkt O im Raum auf die Ebene ω, so besteht die Kurve $C^{4'}$ aus zwei nichteuklidischen Kreisen C^2 und D^2, und q' ist ein nichteuklidischer Kreis, der die Kreise C^2 und D^2 berührt. Wir sehen, dass in diesem Fall die Brennpunkte des zum Kreissystem q' gehörenden Deferenten die Mittelpunkte von C^2 und D^2 sind.

Projizieren wir speziell von einem Punkt O der Polaren s der Geraden r in bezug auf Φ, so ist die Situation besonders einfach, da die Kreise C^2 und D^2 konzentrisch werden. Der Kegelschnitt a' wird gleichfalls ein nichteuklidischer Kreis und konzentrisch mit C^2 und D^2, da alle drei Kurven den absoluten Kegelschnitt φ in den Projektionen der Punkte R_1 und R_2 berühren. Das Kreissystem q' wird daher im nichteuklidischen Sinne rotationssymmetrisch, d. h. alle Kreise q' werden einander kongruent. Eine orthogonale Trajektorie eines Systems von kongruenten Kreisen ist aber eine Traktrix, die zu der von den Mittelpunkten der Kreise durchlaufenen Kurve gehört. Es ergibt sich also

Satz 2,6. *Hat der Kegelschnitt a doppelt Berührung mit Φ, so ist die Projektion einer zu a gehörigen projektiven Böschungslinie auf Φ von einem Punkt der Polaren der Geraden durch die Berührungspunkte aus eine nichteuklidische Kreistraktrix.*

Bei besonderer Wahl von O auf der Polaren s ergeben sich verschiedene Spezialfälle dieses Satzes. Wählt man etwa O im Schnittpunkt mit der Ebene α, so wird a' eine Gerade, und die Projektion σ' einer projektiven Böschungslinie σ wird eine nichteuklidische Traktrix in bezug auf eine Gerade (Spezialfall von Satz 2,2). Wählt man O im Punkte A, so wird σ' eine nichteuklidische Kreisevolvente (Spezialfall von Satz 2,3).

[1] Für gewöhnliche, nicht affine Böschungslinien auf einem elliptischen Paraboloid ist dieser Satz in W I, p. 312 bewiesen.

In dem Fall, wo R_1 und R_2 (konjugiert) imaginäre Punkte sind, werden die Verhältnisse besonders übersichtlich, wenn man die Fläche durch eine Kollineation derart in eine Rotationsfläche überführt, dass der Kegelschnitt a ein unendlich ferner Kreis wird. Die Gerade r ist dann unendlich fern und die Polare s die Achse der Fläche. Die projektiven Böschungslinien werden gewöhnliche Böschungslinien, deren Tangenten mit der Achse s einen konstanten Winkel bilden. Wählt man zu einem auf s gelegenen Projektionszentrum O eine Projektionsebene ω durch r, d. h. senkrecht auf s, so wird der absolute Kegelschnitt φ ein euklidischer Kreis mit dem Mittelpunkt im Schnittpunkt S von s und ω. Die Kurven C^2, D^2 und a' werden konzentrische euklidische Kreise mit dem Mittelpunkt S, und die oben erwähnte Rotationssymmetrie wird zugleich eine Rotationssymmetrie um S im euklidischen Sinn.

Aus Satz 2,6 und den daraus folgenden speziellen Sätzen erhält man für gewöhnliche Böschungslinien auf Rotationsflächen 2. Ordnung eine Reihe von Sätzen, die sich bei W. Wunderlich[1] finden.

Wir heben besonders hervor, dass die Projektion einer Böschungslinie in bezug auf die unendlich ferne Gerade a' eine nichteuklidische Traktrix wird, wenn es sich um rechtwinklige Projektion in der Richtung der Achse handelt (O ist der unendlich ferne Punkt). Nun ergibt bekanntlich die rechtwinklige Projektion von Böschungslinien einer Rotationsfläche 2. Ordnung auf eine auf der Achse senkrechte Ebene zykloidale Kurven; diese Kurven müssen daher mit nichteuklidischen Traktrizen identisch sein, wenn der absolute Kegelschnitt φ ein Kreis und die entsprechende Linie a' die unendlich ferne Gerade ist.

§ 3. Verallgemeinerungen eines Satzes von C. Juel.

6. In einer Aufgabe im Interméd. math.[2] hat C. Juel auf folgenden Satz aufmerksam gemacht:

Die Berührungspunkte der Tangenten, die von einem Punkt M an eine Epi- oder Hypozykloide gehen, liegen auf der Fusspunkt-

[1] Siehe W II, Satz 3—6.
[2] Interméd. math. I (1894), p. 243.

kurve von M in bezug auf einen Kegelschnitt, also auf einer bizirkularen Kurve 4. Ordnung mit M als Doppelpunkt.

Dreht man die betreffende Zykloide um das zugehörige Zentrum, so zeigt sich, dass die Berührungspunkte der Tangenten von M an die so entstandene Rotationsschar von Zykloiden sämtlich auf derselben bizirkularen Kurve J liegen. Ferner kann die Gültigkeit des Satzes auch für Pseudozykloiden nachgewiesen werden[1].

Auf S. 10 erwähnten wir, dass man durch passende Orthogonalprojektion der Böschungslinien auf einer Rotationsfläche 2. Ordnung zykloidale Kurven erhält. Es liegt daher nahe zu untersuchen, ob der Juelsche Satz auch auf andere Projektionen von Böschungslinien einer Fläche 2. Ordnung übertragen werden kann. Wir wollen damit beginnen, im allgemeinen, dem Satz 2,1 entsprechenden Fall die Kurven zu untersuchen, die aus den Berührungspunkten der Tangenten von einem Punkt M der Ebene an die orthogonalen Trajektorien des in Satz 2,1 genannten Systems von nichteuklidischen Kreisen besteht.

Wir lösen die Aufgabe zunächst durch eine räumliche Betrachtung. Die Tangenten an sämtliche durch den Kegelschnitt a bestimmten projektiven Böschungslinien auf der Fläche Φ, d. h. sämtliche Tangenten von Φ, die a schneiden, bilden eine Geradenkongruenz 4. Ordnung, und die Geraden dieser Kongruenz, die eine beliebig gegebene Gerade m im Raume schneiden, bilden eine geradlinige algebraische Fläche 8. Grades. Diese Fläche berührt Φ längs einer Raumkurve 8. Grades, die wir mit J_1 bezeichnen wollen. Diese Kurve ist offenbar der geometrische Ort derjenigen Punkte auf Φ, für die eine Tangente an Φ sowohl a als auch m schneidet. Die Kurve J_1 muss durch die Schnittpunkte von a und Φ gehen und Doppelpunkte in den Schnittpunkten von m und Φ haben. In einer beliebigen Ebene μ durch m liegen vier Punkt von J_1, nämlich die Berührungspunkt der vier Tangenten, die man von den beiden Schnittpunkten von μ und a an den Kegelschnitt legen kann, in dem μ die Fläche Φ schneidet. Wenn Φ speziell von μ berührt wird, so fallen die vier genannten Punkte alle in den Berührungspunkt, der also

[1] Siehe WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908, p. 210 und 218.

ein weiterer Doppelpunkt von J_1 ist. Diese Kurve hat daher nicht nur Doppelpunkt in den Schnittpunkten von Φ und m, sondern zugleich in den Schnittpunkten von Φ und der Polaren m_1 von m in bezug auf Φ.

Ist nun m speziell die Gerade, die das Projektionszentrum O mit dem Punkt M der Ebene ω verbindet, so ist die Projektion von J_1 auf ω von O aus gerade die gesuchte Kurve J. Es gilt also folgender

Satz 3,1. *Der geometrische Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die man von dem Punkt M an das System von Kurven legen kann, die durch Zentralprojektion aus den zu einem Kegelschnitt gehörigen projektiven Böschungslinien einer Fläche 2. Ordnung entstehen, ist eine algebraische Kurve 8. Ordnung mit vierfachem Punkt in M. Diese Kurve kann als eine nichteuklidische zirkulare Kurve aufgefasst werden; sie berührt sich selbst (und den absoluten Kegelschnitt φ) in den Berührungspunkten der Tangenten von M an φ (der absoluten Tangenten).*

Ohne Übergang zum Raum kann die Kurve J in der folgenden Weise bestimmt werden. Es sei P der Berührungspunkt einer Tangente vom Punkt M an die Projektion σ' einer projektiven Böschungslinie σ. Da σ' nach Satz 2,1 orthogonale Trajektorie eines Systems von Kreisen ist, muss MP Normale des durch P gehenden nichteuklidischen Kreises sein und daher seinen Mittelpunkt enthalten. Man kann also die vier Punkte der Kurve J konstruieren, die auf einer beliebigen Geraden l durch M liegen, indem man l mit der zum Kreissystem gehörigen Deferente a' schneidet. Diese beiden Schnittpunkte sind die Mittelpunkt zweier zum Kreissysteme gehörenden nichteuklidischen Kreise, deren Schnittpunkte mit l die vier gesuchten Punkte ergeben.

Dass M vierfacher Punkt von J ist, kann man folgendermassen einsehen. Sämtliche Kreise durch M, die zu dem zum Kreissystem gehörigen Leitkreis (siehe S. 6) orthogonal sind, bilden zwei Kreisbüschel[1]. Die vier Schnittpunkte der Zentralen dieser beiden Büschel mit dem Deferent sind die Mittelpunkte von vier nichteuklidischen Kreisen, die zu dem betrachteten System gehören und durch M gehen. M ist also vierfacher Punkt von J.

[1] Siehe z. B. Hohenberg, l. c. p. 137.

Wir betrachten nun die Satz 2,2 entsprechenden Zentralprojektion der projektiven Böschungslinien von Φ. Das Projektionszentrum O ist hier ein von dem Scheitel A von Γ verschiedener Scheitel eines der Kegel, die zu dem durch Φ und Γ bestimmten Flächenbüschel gehören. Durch eine harmonische Homologie mit dem Zentrum O und der Homologieebene ω werden die Fläche Φ, der Kegelschnitt a und die Gerade OM in sich übergeführt, was daher auch für die zugehörige Raumkurve J_1 gilt. Die Projektion J von J_1 von O aus ist also in diesem Fall eine Kurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in M, die φ in den Berührungspunkten der durch M gehenden absoluten Tangenten berührt. Auch dieses Ergebnis kann man ohne Übergang zum Raum erhalten, da hier von Tangenten an die in Satz 2,2 genannten speziellen orthogonalen Trajektorien die Rede ist. Man verfährt genau wie oben. Wir haben also

Satz 3,2. *Der geometrische Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die von einem Punkt M an ein System von projizierten Böschungslinien gehen, ist eine algebraische Kurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in M, wenn das Projektionszentrum ein von A verschiedener Hauptpunkt ist. Diese Kurve berührt den absoluten Kegelschnitt in den Berührungspunkten der durch M gehenden absoluten Tangenten.*

In dem Satz 2,3 entsprechenden Fall, wo das Projektionszentrum der Punkt A selbst ist, sind die Projektionen der projektiven Böschungslinien, wie aus dem Satz hervorgeht, nichteuklidische Kegelschnittevolventen. Die Kurve J muss also in diesem Fall die nichteuklidische Fusspunktkurve von M in bezug auf den abgewickelten Kegelschnitt sein. Solche nichteuklidischen Fusspunktkurven für Kegelschnitte sind rationale Kurven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in M[1]. Wir formulieren dieses Resultat in

Satz 3,3. *Falls die projizierten Böschungslinien nichteuklidische Kegelschnittevolventen sind, liegen die Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkt M an diese Kurven auf einer rationalen Kurve 4. Ordnung J mit einem Doppelpunkt in M. Die Kurve J*

[1] Siehe meine Note, Nichteuklidische Fusspunktkurven, Monatshefte f. Math. Bd. 53 (1949), p. 298.

hat ausserdem Doppelpunkte in den Berührungspunkten der absoluten Tangenten durch M.

Wie man sieht, geben die Sätze 3,3, 3,2 und 3,1 schrittweise Verallgemeinerungen des angeführten Juelschen Satzes.

7. Schliesslich betrachten wir den dem Satz 2,4 entsprechenden Fall, wo es sich um die stereographische Projektion der projektiven Böschungslinien auf einer konvexen Fläche 2. Ordnung von einem ihrer Nabelpunkte aus handelt, und wo die projektiven Böschungslinien orthogonale Trajektorien eines Systems von euklidischen Kreisen sind, die eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung doppelt berühren.

Es handelt sich hier darum die Raumkurve J_1 von einem ihrer Doppelpunkt aus, nämlich einem der Schnittpunkte der Geraden m mit der Fläche Φ, zu projizieren. Die Projektion J wird daher eine Kurve 6. Ordnung. Die Kurve erhält offenbar Doppelpunkte in M und in den Kreispunkten der Projektionsebene. Wir formulieren das Resultat als einen Satz über ebene Kurven:

Satz 3,4. *Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkt M an die orthogonalen Trajektorien eines Systems von Kreisen legen kann, die eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung doppelt berühren, liegen auf einer bizirkularen Kurve 6. Ordnung mit einem Doppelpunkt in M.*

Wie oben findet man auch dieses Resultat leicht ohne Übergang zum Raume, indem man die im Anschluss an Satz 3,1 besprochene Konstruktion überträgt. Dass der Punkt M hier Doppelpunkt wird, während er oben vierfacher Punkt war, beruht darauf, dass die Kreise eine euklidischen Kreisnetzes, die durch einen gegebenen Punkt gehen, nur ein Kreisbüschel bilden.

Aus Satz 3,4 erhält man spezielle Sätze, wenn die bizirkulare Kurve 4. Ordnung degeneriert. Beispielsweise soll erwähnt werden, dass die Kurve J eine Konkoide ist, wenn das Kreissystem aus kongruenten Kreisen besteht, deren Mittelpunkt eine Gerade durchlaufen, so dass die orthogonalen Trajektorien gewöhnliche Traktrizen sind.

§ 4. Böschungslinien auf konvexen Flächen 2. Ordnung.

8. Bei einer näheren Untersuchung der projektiven Böschungslinien auf einer konvexen Fläche 2. Ordnung ist es bequem, sich diese als Kugelfläche zu denken. Durch eine Homologie kann eine beliebige konvexe Fläche 2. Ordnung in eine Kugelfläche übergeführt werden, wenn man als Homologiezentrum einen der Nabelpunkte der Fläche und als Homologieebene eine Ebene wählt, die die Fläche in einem Kreis schneidet, und, vom Fall einer Rotationsfläche abgesehen, der Tangentialebene im Nabelpunkt nicht parallel ist. Die konvexe Fläche kann dann in die Kugel übergeführt werden, die die gegebene Fläche in dem Nabelpunkt berührt und durch den oben genannten Kreis geht. Durch Zentralprojektion gehen die Böschungslinien der einen Fläche in die der anderen über.

Da konjugierte Kurven auf einer Kugelfläche orthogonal sind, erhält man aus Satz 1,1 unmittelbar

Satz 4,1. *Das System der projektiven Böschungslinien auf einer Kugel Φ, die zu einem gegebenen Kegelschnitt a gehören, besteht aus den orthogonalen Trajektorien des Systems derjenigen Kreise auf Φ, die von den Polarebenen der Punkte von a ausgeschnitten werden*[1].

Die Polarebenen berühren den polaren Kegel Γ von a, der Φ in der von den Kreisen q doppelberührten Grenzkurve C^4 schneidet.

Durch stereographische Projektion von einem Nabelpunkt aus erhält man wieder Satz 2,4. Man sieht somit, dass die Bestimmung der projektiven Böschungslinien auf einer Kugelfläche (oder der gewöhnlichen Böschungslinien auf einer konvexen Fläche 2. Ordnung) mit der Bestimmung der orthogonalen Trajektorien eines Systems von Kreisen, die eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung doppelt berühren, gleichbedeutend ist. Nach Belieben kann man dann die Aufgabe in der Ebene oder, mit Hilfe von Satz 4,1, auf der Kugel lösen. Im folgenden wollen wir die Verhältnisse auf der Kugel beschreiben.

[1] Solche Kreissysteme wurden von E. Czuber untersucht in der Arbeit: Die sphärische Kurve 4. Ordnung als Einhüllende von Kreisscharen, Arch. f. Math. u. Phys. (1889), p. 143.

9. Für die genauere Untersuchung ist es bequem, nicht die verschiedenen Lagen der Kegelschnitte a in bezug auf die Kugel zu betrachten, sondern von der Kurve C^4 auszugehen und die verschiedenen Möglichkeiten der Realität und der Lage dieser Kurve auf Φ durchzugehen. Diese Verhältnisse sind bekannt und sollen im folgenden kurz angegeben werden.

Die Kurve C^4 kann elliptisch sein und zwei, einen oder keinen reellen Zweig 4. Ordnung haben, oder sie kann rational sein und einen Doppelpunkt mit reellen oder imaginären Tangenten oder eine Spitze haben.

A. Die Kurve C^4 ist elliptisch.

In dem durch C^4 bestimmten Büschel von Flächen 2. Ordnung gibt es vier Kegelflächen Γ_i mit den Scheiteln A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Die Scheitel bilden die Ecken eines gemeinsamen Polartetraeders der Flächen des Büschels. Die Seitenflächen dieses Tetraeders sollen entsprechend mit α_i bezeichnet werden. Die Punkt A_i und die Seitenflächen α_i heissen die zum Büschel gehörigen Hauptpunkte und Hauptebenen.

Hat die C^4 zwei reelle Zweige, so sind alle Hauptpunkte und alle vier Kegel reell; hat die C^4 einen reellen Zweig, so sind nur zwei der Hauptpunkte und die beiden zugehörigen Kegel reell, und ist endlich C^4 nullteilig, so sind alle Hauptpunkte, aber nur zwei der Kegel reell.

I. Die Kurve C^4 hat zwei reelle Zweige.

Dann ist sie gemeinsame Grenzkurve von vier Systemen von projektiven Böschungslinien auf Φ, die zu den vier polaren Kegelschnitten α_i der Kegel Γ_i gehören. Der Kegelschnitt α_i liegt in der Ebene α_i. Einer der vier Hauptpunkte, z. B. A_1 liegt innerhalb der Kugel, während die drei anderen ausserhalb liegen. Durch eine Homologie, bei der die Kugel in sich übergeht, kann man A_1 in den Mittelpunkt der Kugel überführen; C^4 wird dann ein sphärischer Kegelschnitt. Die Ebene α_1 wird die unendlich ferne Ebene, und das Polartetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ wird eine dreiseitige Ecke mit dem Scheitel A_1 und drei rechten Winkeln, so dass die Ebenen α_2, α_3 und α_4 die Symmetrieebenen des Büschels werden. Die Kegel Γ_2, Γ_3 und Γ_4 werden Zylinderflächen, deren Erzeugende zu den von A_1 ausgehenden Kanten der Ecke parallel sind.

Wir wollen die in den Ebenen α_2, α_3 und α_4 liegenden Grosskreise mit φ_2, φ_3 und φ_4 und die Kegelschnitte, in denen Γ_2, Γ_3 und Γ_4 die genannten Ebenen schneiden, mit c_2, c_3 und c_4 bezeichnen. Eine ganz elementare Betrachtung zeigt dann, dass z. B. c_2 eine Ellipse ist, die ganz innerhalb von φ_2 liegt, c_3 eine Hyperbel, die vier Punkte, aber keine Tangente mit φ_3 gemeinsam hat, und c_4 eine Ellipse, die vier Punkte und vier Tangenten mit φ_4 gemeinsam hat. Hieraus erhält man durch Übergang zu den polaren Kegelschnitten, dass a_2 eine Ellipse ist, die φ_2 umschliesst, a_3 eine Hyperbel, die vier Tangenten, aber keinen Punkt mit φ_3 gemeinsam hat, und a_4 eine Ellipse, die vier Punkte und vier Tangenten mit φ_4 gemeinsam hat.

Wir betrachten nun die vier Fälle.

1) Die zu a_1 gehörigen Böschungslinien auf Φ sind affine Böschungslinien, da a_1 ein unendlich ferner Kegelschnitt ist. Da A_1 der Mittelpunkt der Kugel ist, schneiden die Tangentialebenen an Γ_1 die Kugel in Grosskreisen, und die zugehörigen orthogonalen Trajektorien sind dann sphärische Kegelschnittevolventen. Hiermit ist die Form der Kurven bestimmt. Jede Böschungslinie besteht aus einer Reihe von Bögen, die abwechselnd auf dem einen und auf dem anderen der beiden zu der C^4 gehörigen Zweige zusammenstossen. Da die Tangentenfläche der Böschungslinien die Ebene α_1 im Kegelschnitt a_1 schneidet (der Richtungskegel ist konvex), müssen die Bögen zwischen den Spitzen monoton sein.

Da eine gewöhnliche Böschungslinie auf einem Ellipsoid durch eine Affinität in eine affine Böschungslinie auf einer Kugelfläche übergeführt wird, haben wir hiermit auch die Form der gewöhnlichen Böschungslinien auf einem Ellipsoid bestimmt und gleichzeitig gezeigt, dass sie affine Bilder von sphärischen Kegelschnittevolventen sind[1].

Die orthogonalen Projektionen der Böschungslinien (von A_2 aus) auf die Ebene α_2 liegen in einem ringförmigen Gebiet, das von φ_2 und c_2 begrenzt wird. Die monotonen Bögen werden wieder in monotone Bögen projiziert, da keine Schmiegebene einer Böschungslinie durch A_2 geht. Jede Böschungslinie wird

[1] Siehe W. I., p. 316.

also in eine Kurve projiziert, die aus endlich oder unendlich vielen monotonen Bögen besteht, die den Kreis φ_2 berühren und auf c_2 in Spitzen zusammenstossen. Ist Γ_1 speziell ein Rotationskegel, so geht das Gebiet in einen Kreisring über, und die Projektion der Böschungslinie ist bekanntlich eine Epizykloide, die diesem Ring einbeschrieben ist.

2) Die a_2 entsprechenden Böschungslinien auf der Kugel liegen wieder in dem Gebiet, das von den beiden Zweigen des sphärischen Kegelschnitts begrenzt wird, aber sie sind jetzt orthogonale Trajektorien des Systems der Kreise, die von den Tangentialebenen des elliptischen Zylinders Γ_2 durch C_4 ausgeschnitten werden. Von einem Punkt P der C_4 gehen zwei Zweige einer Böschungslinie aus; jeder dieser Zweige verläuft monoton auf derjenigen von φ_2 begrenzten Halbkugel, die P enthält, windet sich unendlich oft um die Kugel und nähert sich φ_2 asymptotisch.

3) Die zu a_3 gehörigen Böschungslinien auf Φ liegen in demselben Gebiet wie die vorigen. Wie erwähnt hat die Spur c_3 des Zylinders Γ_3 in α_3 vier Punkte mit dem Grosskreis φ_3 gemeinsam; diese sind paarweise diametrale Punkte und sollen mit $M, \overline{M}$ und $N, \overline{N}$ bezeichnet werden. Jede Böschungslinie verläuft dann in einem sphärischen »Rechteck« $MN\overline{M}\overline{N}$, das von den beiden Bögen MN und $\overline{M}\overline{N}$ des Kreises φ_3 und den beiden Bögen $M\overline{N}$ und $\overline{M}N$ des sphärischen Kegelschnittes C^4 begrenzt wird. Betrachtung des Kreissystems, das von den Tangentialebenen an Γ_3 erzeugt wird, lehrt, dass jede Böschungslinie aus monotonen Bögen besteht, die abwechselnd auf den Bögen $M\overline{N}$ und $\overline{M}N$ der C^4 zusammenstossen und sich asymptotisch den Bögen MN und $\overline{M}\overline{N}$ von φ_3 nähern.

4) Die zu a_4 gehörenden Böschungslinien liegen im Gegensatz zu den drei anderen Systemen in den beiden Gebieten der Kugel, die von einem einzelnen Zweig der C^4 begrenzt werden. In jedem dieser Gebiete gibt es zwei »singuläre« Punkte, nämlich die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kugel mit dem Kegelschnitt a_4. Betrachtung des Systems der Tangentialebenen an Γ_4 lehrt, dass jede Böschungslinie von einem Punkt P auf einem der Zweige des sphärischen Kegelschnittes ausgeht und aus zwei monotonen Bögen besteht, von denen der eine P mit S_1 und andere P mit S_2 verbindet. Beide Bögen verlaufen ganz auf einer Seite des Grosskreises φ_4.

II. Die Kurve C^4 hat einen reellen Zweig.

Wie oben erwähnt, gehen durch C^4 zwei reelle Kegel Γ_1 und Γ_2 deren Scheitel A_1 und A_2 ausserhalb der Kugel liegen. C^4 ist also Grenzkurve von zwei Systemen von projektiven Böschungslinien, die zu den Kegelschnitten a_1 und a_2 gehören. Durch eine Kollineation, die die Kugel festlässt, können A_1 und A_2 in unendlich ferne Punkte übergeführt werden, die zwei zu einander orthogonalen Richtungen entsprechen. Die Ebenen α_1 und α_2 werden dann Symmetrieebenen des durch C^4 bestimmten Flächenbüschels, und Γ_1 und Γ_2 werden Zylinderflächen.

Die Zylinderfläche Γ_1 schneide die Ebene α_1 im Kegelschnitte c_1. Man kann dann zeigen, dass c_1 und der in α_1 gelegene Grosskreis φ_1 zwei Punkte und zwei Tangenten gemeinsam haben. Folglich haben auch a_1 und φ_1 zwei Punkte und zwei Tangenten gemeinsam. Die Verhältnisse sind dann genau wie wir sie in 4) beschrieben haben: Man hat ein von dem »Raumoval« C^4 begrenztes Kugelgebiet, in dem es zwei singuläre Punkt gibt, nämlich die genannten Schnittpunkte von φ_1 und a_1. Jede Böschungslinie verläuft dann wie in 4) beschrieben wurde.

Die Zylinderfläche Γ_2 hat in bezug auf die Kugel dieselbe Lage wie Γ_1. Der Kegelschnitt a_2 gibt daher nicht Anlass zu neuen Typen von projektiven Böschungslinien. Es werde jedoch bemerkt, dass die zu a_1 und a_2 gehörenden Böschungslinien in je einem der beiden von C^4 begrenzten Kugelgebiete liegen.

III. Die Kurve C^4 ist nullteilig.

Es gibt vier reelle Hauptpunkte, zwei reelle Kegel Γ_1 und Γ_2 und zwei imaginäre. Wie oben kann man erreichen, dass die Kegel Γ_1 und Γ_2 zu Zylinderflächen mit auf einander senkrechten Erzeugenden werden. Man kann zeigen, dass die Spur c_1 von Γ_1 in der Ebene α_1 eine Hyperbel ist, die vier Tangenten, aber keinen Punkt mit dem Grosskreis φ_1 gemeinsam hat. Daraus folgt, dass der Kegelschnitt a_1 eine Hyperbel ist, die vier Punkte, aber keine Tangente mit φ_1 gemeinsam hat. Die vier Schnittpunkte, die paarweise diametrale Punkte sind, werden wieder mit $M, \overline{M}$ und $N, \overline{N}$ bezeichnet. Man sieht dann, dass durch jeden Punkt P der Kugelfläche zwei projektive Böschungslinien gehen, die zum Kegelschnitt a gehören; sie sind monotone Bögen, die M und $\overline{M}$ bzw. $\overline{N}$ und N verbinden. Die Böschungslinien verlaufen ganz auf derjenigen von φ_1 begrenzten Halbkugel, die den Punkt P enthält. In gleicher Weise verlaufen die zu dem Kegelschnitt a_2 gehörenden Böschungslinien.

In den letzten fünf Fällen war von sphärischen projektiven Böschungslinien die Rede, für die die Ebene des bestimmenden Kegelschnitts die Kugel schneidet. Denken wir uns die Ebene durch eine Kollineation in die unendlich ferne Ebene transformiert, wobei gleichzeitig der Kegelschnitt a in einen Kreise dieser Ebene übergeht, so sieht man, dass man durch die obige Untersuchung zugleich in groben Zügen die Formen der Haupttypen der gewöhnlichen Böschungslinien auf einem zweischaligen Hyperboloid bestimmt hat.

Nehmen wir an, dass der Asymptotenkegel des Hyperboloids und der zu den Böschungslinien gehörende Rotationskegel denselben Scheitel haben, so entsprechen die beschriebenen fünf Typen $\mathrm{I}_{2), 3), 4)}$, II und III folgenden Lagen der genannten Kegel: Der Rotationskegel umschliesst den Asymptotenkegel, die Kegel haben vier Tangentialebenen und keine Erzeugende, vier Tangentialebenen und vier Erzeugende, zwei Tangentialebenen und zwei Erzeugenden und keine Tangentialebene und vier Erzeugende gemeinsam.

Wir gehen nun über zu

B. Die Kurve C^4 ist rational.

In diesem Fall berührt die Ebene α die Kugel im Punkt A, so dass der zu dem Kegelschnitt a gehörige Kegel Γ seinen Scheitel A auf der Kugel hat. Die Bestimmung der zu a gehörigen projektiven Böschungslinien ist im wesentlichen durch Satz 2,5a, S. 8 gegeben.

Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, je nachdem der Kegelschnitt a den Punkt A umschliesst, nicht umschliesst oder durch A geht.

Umschliesst a den Punkt A, so hat der Kegel Γ keine Erzeugende in α, und C^4 hat in A einen isolierten Doppelpunkt. Der Kegel Γ schneidet die Kugel in einem Raumoval und die zu a parallele Projektionsebene ω in einer Ellipse. Die Böschungslinien ergeben sich durch Zentralprojektion der Ellipsenevolventen auf die Kugel. Jede Böschungslinie hat eine Spitze auf C^4, und jeder der beiden Zweige windet sich unendlich oft um die Kugel und nähert sich A asymptotisch.

Liegt A ausserhalb a, so hat Γ zwei Erzeugende in der Ebene die zu den Tangenten von A an a orthogonal sind. Der Kegel Γ schneidet die Kugel in einer 8-förmigen C^4 und die Ebene ω in einer Hyperbel. Die zu a gehörenden Böschungslinien liegen auf dem ausserhalb der C^4 liegenden Gebiet der Kugel, und jede dieser Kurven entsteht durch Projektion einer Hyperbelevolvente. Jede Böschungslinie besteht also aus einer Reihe monotoner Bögen, die abwechselnd auf jedem der beiden Pseudozweige der C^4 in Spitzen zusammenstossen. Die Bögen nähern sich A asymptotisch.

Geht a durch A, so berührt Γ die Ebene α in einer Erzeugenden, die auf der Tangente von A an a senkrecht steht. Der Kegel Γ schneidet die Kugel in einer C^4 mit einer Spitze in A und die Ebene ω in einer Parabel. Die zu a gehörenden Böschungslinien liegen in demjenigen von C^4 begrenzten Kugelgebiet, das in A den Winkel 360° enthält. Jede Böschungslinie ist die Projektion einer Parabelevolvente auf die Kugel, sie hat eine Spitze auf C^4 und besteht aus zwei monotonen Bögen, die in A enden und a berühren.

Hiermit hat man gleichzeitig einen Überblick über den Verlauf der gewöhnlichen Böschungslinien auf einem elliptischen Paraboloid.

Indleveret til selskabet den 24. november 1949.
Færdig fra trykkeriet den 15. marts 1950.