DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXIV, NR. 4

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN EINFLUSS DES AKKOMMODATIONSKOEFFIZIENTEN AUF RADIOMETERERSCHEINUNGEN UND MOLEKULARMANOMETER

VON

SOPHUS WEBER

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1947

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri

§ 1. In einer früheren Arbeit[1] habe ich die theoretische Grundlage, insbesondere im MAXWELL'schen Zustande der Gase, für das absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN und ähnliche Radiometerkonstruktionen untersucht. Unter Vernachlässigung des Einflusses des Akkommodationskoeffizienten a und des hiervon abhängigen Temperatursprunges wurde für die Radiometerkraft K des absoluten Manometers in der rationellen Ausführung gefunden:

$$K_{\mathrm{cm}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{\pi}{18\,k_1}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{\pi}{3\,k_1}\left(k_2 + \frac{m}{6}\right)\left(\frac{d}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{3}\frac{k_2}{k_1}\,m},$$

unter der Voraussetzung, dass die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung[2] folgendermassen geschrieben werden kann:

$$w_0 - k_2\,\lambda\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = \frac{3}{4}\,k_1\,\frac{\eta}{\varrho\,T} \cdot \frac{dT}{dr} \cdot \frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{d}}.$$

Hier ist d der Abstand zwischen den parallelen Platten mit den Temperaturen T_1 und T_2 und p der Gasdruck. λ ist die mittlere freie Weglänge bei dem Druck p. Die Konstanten k_1 und k_2 sind einander gleich, und zwar etwa $\frac{4}{3}$.

Seit dem Erscheinen jener Arbeit sind einige neue Konstruktionen und Messungen veröffentlicht worden, so dass es von Interesse sein dürfte, die theoretischen Untersuchungen unter Berücksichtigung des Einflusses des Temperatursprunges und des Akkommodationskoeffizienten wieder aufzunehmen und mit den Untersuchungen von E. FREDLUND[3] und von H. KLUMB und

[1] SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XIV, 13, 1937.

[2] SOPHUS WEBER: Comm. Kamerlingh Onnes Lab. Leiden, No. 246[b] S. 7. 1936.

[3] E. FREDLUND: Phil. Mag. S. 7, Vol. XXVI, p. 987, 1938. (a)
— : Arkiv. f. Mat. Astr. Fys. **27 A** No. 12, 1940. (b)

H. SCHWARZ[1] zu vergleichen; dies erscheint umso mehr angebracht, als aus den Messungen von E. FREDLUND hervorgeht, dass die mit dem gleichen Apparat gemessenen Radiometerkräfte in den zwei Gasen Wasserstoff und Deuterium, die dieselbe mittlere freie Weglänge λ besitzen, insbesondere bei höherem Druck bedeutend von einander abweichen.

§ 2. Wir wollen erst das absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN in der rationellen Ausführung näher betrachten. In dieser Konstruktion, Fig. 1, hat man die feststehende, zirkulare heisse Platte A mit dem Radius r_0, auf der konstanten Temperatur T_1. Die Platte A ist von einem Schutzring von der Temperatur T_2 umgeben. Die bewegliche Platte B hat, wie auch ihre Umgebung, die konstante Temperatur T_2. Der konstante Abstand zwischen den beiden parallelen Platten A und B wird mit d bezeichnet. Während Präzisionsmessungen muss der Abstand d konstant gehalten werden; die Radiometerkraft auf B muss dann in der einen oder anderen Weise kompensiert werden. Liegt die Drehachse D der kalten Platte hinreichend weit von A entfernt, und ist die kalte Platte B gross genug, so wird die Randkorrektion[2] im Knudsen-Zustand des Gases, d. h. wenn $\frac{d}{\lambda} \geqq 0$, sehr klein, auch wenn die Bedingung $\frac{d}{2r_0} \ll 1$ nicht besonders gut erfüllt ist.

[1] H. KLUMB & H. SCHWARZ: Z. f. Phys. **122**, 418, 1944.

[2] G. SPIWAK: (Z. f. Phys. **77**, 123, 1932) hat die Grösse der Randkorrektion für zwei quadratische Platten ohne Schutzringe mit Kantlänge b und Abstand d berechnet. Er findet im Knudsen-Zustand des Gases für die Radiometerkraft per cm^2 K:

$$K = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \gamma, \text{ wo } \gamma = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2 + \left(\frac{d}{b}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2}^2} - \frac{d}{b} \right] \operatorname{arctg} \frac{b}{d},$$

woraus folgt:

$$\gamma = 1 \text{ für } \frac{d}{b} = 0.$$

Durch Reihenentwicklung für γ, wenn $\frac{d}{b} \to 0$, erhält man hieraus:

$$\lim_{\frac{d}{b} \to 0} \gamma = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{d}{b} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{b} \right)^2 \cdots .$$

Wir ersehen also, dass für die Konstruktion von SPIWAK die Grösse der Randkorrektion nur ca. 1 % beträgt, wenn $\frac{d}{b} = 0{,}01$.

Bei Verwendung dieses Manometers bei höherem Druck ist es der Konvektionsströmungen wegen am zweckmässigsten, dass die Platten A und B horizontal sind und die heisse Platte oben liegt.

Bei dieser Konstruktion liegt das ganze Temperaturgefälle am Rande der Platte A, und die massgebende Temperaturdifferenz für die bei höherem Druck entstehenden thermischen Gleitströme ist $T_1 - T_2$.

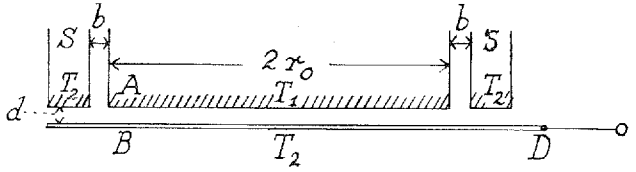

Fig. 1.

In dem Knudsen-Zustand des Gases $\frac{d}{\lambda} = 0$ ist die Theorie dieses Manometers zur Genüge bekannt[1], und man erhält für die Radiometerkraft per cm^2 K:

$$K = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{1-a}{(2-a)^2} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + 1 \right) \right\},$$

wo a den Akkommodationskoeffizienten des Gases den Platten gegenüber bezeichnet, während p der Druck in dem das Radiometersystem umgebenden Raum ist, wo auch die Temperatur T_2 herrscht. Wird nur mit kleinen Temperaturdifferenzen gearbeitet, erhält man hieraus in erster Näherung:

$$K = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \approx \frac{1}{4} p \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

Haben die zwei Platten A und B gegenüber dem Gase verschiedene Akkommodationskoeffizienten, nämlich a_1 und a_2, und betrachten wir nur kleine Werte von $T_1 - T_2$, erhalten wir in erster Näherung:

$$K = \frac{1}{4} p \frac{T_1 - T_2}{T} \left\{ 1 + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \right\}.$$

E. Fredlund hat die Konstruktion von Martin Knudsen etwas abgeändert; er verwendet eine drehbare, sehr dünne Metallscheibe, Radius R, die in der Mitte zwischen zwei grossen

[1] Vgl. J. H. A. ter Heerdt: Dissertation, Utrecht 1923, S. 203.

parallelen Platten A und B auf den Temperaturen T_1 und T_2 aufgehängt ist. Die Scheibe ist in der Gleichgewichtslage parallel zu den grossen Platten. Die Abstände zwischen der Scheibe und den festen Platten sind gleich gross und werden mit d bezeichnet. Aus Konstruktionsgründen liegen die Zentren der grossen Platten und das Zentrum der Scheibe S in der FREDLUND'schen Konstruktion nicht auf einer Gerade. Dies ist im Knudsen-Zu-

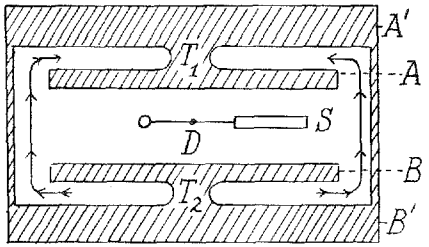

Fig. 2.

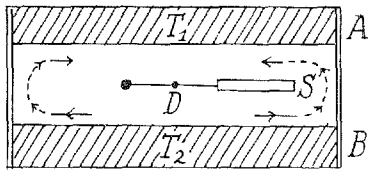

Fig. 3.

stande des Gases ohne Bedeutung; bei höherem Druck wird aber hierdurch der Vergleich zwischen Messungen und Theorie erschwert.

Durch ein magnetisches Kompensationssystem wird die Lage der beweglichen Scheibe während der Messungen unverändert gehalten. In der vorliegenden FREDLUND'schen Ausführung stehen die grossen zirkularen Platten A und B vertikal und haben die Temperaturen T_1 und T_2; die FREDLUND'sche Konstruktion eignet sich jedoch besonders gut für die Arbeit mit horizontaler Plattenaufstellung.

Die praktische Ausführung der FREDLUND'schen Konstruktion bietet zwei Möglichkeiten: die grossen zirkularen Platten A und B können temperaturmässig entweder praktisch unabhängig von einander sein (vgl. Fig. 2) oder in direkter Verbindung mit einander stehen (vgl. Fig. 3). In ersterem Fall, können die am Rande der Platten A' und B' entstehenden thermischen Gleitströme nicht zwischen den Platten A und B und der kleinen Scheibe S eindringen. Diese rationelle Konstruktion ist im Prinzip einer Konstruktion von P. LAZAREFF[1], für die direkte Messung des Temperatursprunges ähnlich. Die vorliegende Konstruktion von FREDLUND entspricht dem zweiten Fall und ist vergleichbar mit der

[1] P. LAZAREFF: Ann. d. Phys. **37**, S. 233, 1912.

von MANDELL und WEST[1] verwendeten Konstruktion für die Wiederholung der LAZAREFF'schen Messungen.

In der FREDLUND'schen Konstruktion (Fig. 3) erhält man bei höherem Druck, unabhängig von dem Verbindungsmaterial, am Rande der grossen Platten thermische Gleitströme, die selbst in einem Apparat mit horizontalen Platten zwischen diesen und der Scheibe eindringen können. Da FREDLUND's Aufstellung ausserdem asymmetrisch ist, wird es ausgeschlossen sein, den Einfluss dieser thermischen Gleitströme auf die Radiometerkraft theoretisch zu berechnen.

Bei höherem Druck wird in dem Falle, wo die Platten A und B keine direkte Verbindung mit einander haben (Fig. 2), die massgebende Temperaturdifferenz hauptsächlich bestimmt durch den Temperaturunterschied der an die Scheibe grenzenden Gasschichten, bezw. durch den Temperatursprung auf beiden Seiten der beweglichen Scheibe; in dem Falle, wo die Platten A und B direkte thermische Verbindung mit einander haben, wird die massgebende Temperaturdifferenz teilweise durch den Temperaturunterschied zwischen den beiden Seiten der Scheibe und teilweise durch die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ am Rande der grossen Platten bestimmt. Bei höherem Druck und geringem Temperaturunterschied werden aber diese thermischen Gleitströme, jedenfalls wenn der Apparat mit hinreichend grossen, horizontalen Platten gebaut ist, wahrscheinlich nicht sehr tief zwischen den Platten und der Scheibe S eindringen; es wäre daher nicht ganz ausgeschlossen, dass die Dimensionen in einer horizontalen Konstruktion so gewählt werden können, dass diese Gleitströme beinahe ohne Einfluss sind.

Wünscht man aber die grösstmögliche Empfindlichkeit des Instrumentes bei höherem Druck zu erreichen, ist die vorliegende FREDLUND'sche Konstruktion am zweckmässigsten.

In der ersten Untersuchung[2] von FREDLUND war für die Scheibe $\pi R^2 = 1{,}80$ cm^2 und $d = 0{,}485$ cm, also $\frac{d}{R} = 0{,}64$. Diese Versuchsreihe kann also bei höherem Druck kaum als ein absolutes Manometer betrachtet werden.

[1] W. MANDELL and S. WEST: Proc. Phys. Soc. London, 37, p. 20, 1925. Vgl. auch SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XVI, 9, 1939 (Seite 5—7).

[2] E. FREDLUND: loc. cit. (a) S. 996.

In der zweiten Untersuchung von FREDLUND[1] waren die Konstanten des Instrumentes: $\pi R^2 = 3{,}161$ cm^2 und $d = 0{,}042$ cm, also $\frac{d}{R} = 0{,}042$, so dass es sich bei höherem Druck tatsächlich um eine dem absoluten Manometer ähnliche Konstruktion handelt.

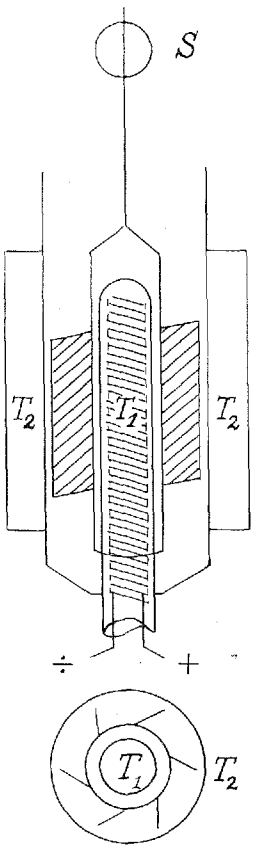

Fig. 4.

In dem Knudsen-Zustand des Gases, d.h. wenn $\frac{d}{\lambda} \gtrsim 0$, sind keine thermischen Gleitströme vorhanden, so dass die beiden Messreihen in diesem Gebiet nebeneinander verwendet werden können.

KLUMB und SCHWARZ[2] haben neuerdings eine interessante Konstruktion eines absoluten Manometers beschrieben und experimentell untersucht; diese hat Ähnlichkeit mit einer Konstruktion von RIEGGER[3], ist aber zweckmässiger und stabiler. Das Manometer von KLUMB und SCHWARZ kann prinzipiell dadurch karakterisiert werden, dass die Grösse der Radiometerkraft auf den beweglichen Radiometerkörper sich durch die Drehung des Radiometerkörpers *nicht* ändert, wodurch eine Kompensation der Radiometerkraft überflüssig wird.

Die Konstruktion ist schematisch in Fig. 4 wiedergegeben. In einer zylindrischen Ringspalte R wird der innere Mantel durch inwendige elektrische Heizung auf einer höheren Temperatur T_1 gehalten, während der äussere Mantel durch Kühlung, z.B. mit Wasser oder flüssiger Luft, auf einer niedrigen Temperatur T_2 gehalten wird. In dem ringförmigen Hohlraum der Ringspalte ist ein leichter und leicht drehbarer zylinderförmiger Radiometerkörper angebracht. Dieser Radiometerkörper besteht aus schiefgestellten Längsschaufeln oder Prallflächen, die unter dem Einfluss der Radiometerkraft ein Drehmoment erfahren.

[1] E. FREDLUND: loc. cit. (b) S. 11.
[2] H. KLUMB und H. SCHWARZ: Z. f. Phys. 122, 418, 1944.
[3] K. RIEGGER: Z. f. techn. Phys. 1, 16, 1920.

Der Radiometerkörper ist an einem Quarzfaden oder Wolframdraht aufgehängt, bezw. nach Art der Spannbandlagerung gelagert, wodurch seine Stabilität sehr gross wird.

Das Manometer dieser Konstruktion zeigt weitgehende Linearität der Ausschläge mit dem Druck und ist in dem Knudsen-Gebiet praktisch gesprochen unabhängig von der Gasart, da es nur aus Glas und blankem Platin gebaut ist.

KLUMB und SCHWARZ[1] fanden experimentell in atm. Luft Linearität zwischen 10^{-6} und 10^{-2} Torr, bezw. 0,001 und 13 Bar. Der Apparat zeigt, wie auch zu erwarten war, bei einem bestimmten Druck p_{max} ein Maximum des Ausschlages.

Für einen Apparat mit einem Abstand von etwa 5 mm zwischen dem heissen Mantel und der Mitte der Prallflächen liegt in atm. Luft der maximale Ausschlag bei p_{max} = ca. $3 \cdot 10^{-2}$ Torr = ca. 40 Bar, woraus sich, da $p\lambda = 6{,}2$, ergibt, dass $\frac{d}{\lambda_{max}} = \frac{0{,}5}{6{,}2} \cdot 40$ = ca. 3, in Übereinstimmung mit meinen früheren theoretischen Resultaten.

Der Apparat ist konstruktionsmässig einfach und kann z. B. aus Glas und Platin gebaut werden, so dass er durch Erwärmung leicht zu entgasen ist.

M. E. ist dieser Apparat, versehen mit einer angemessenen Dämpfung, für vakuum-technische Arbeiten und Messungen von kleinen Drücken, eventuell nach Eichung, sehr zweckmässig und vielseitig anwendbar.

Bevor wir zu der theoretischen Behandlung der verschiedenen Manometerkonstruktionen übergehen, wollen wir zwei gleichgrosse, parallele, zirkulare Platten A and B auf den konstanten Temperaturen T_1 und t_1 betrachten (vgl. Fig. 5). Die Platten A und B sind mit Schutzringzylindern umgeben; b ist der Abstand zwischen dem Kupferzylinder A bezw. B und den Schutzringzylindern A' und B' mit den Temperaturen T_2 bezw. t_2. Am Rande der Platten A und B liegen also in den an die Platten grenzenden Gasschichten die Temperaturgradienten

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{b} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dr} = \frac{t_1 - t_2}{b},$$

wodurch den Platten entlang thermische Gleitströme entstehen.

[1] KLUMB und SCHWARZ: loc. cit. S. 431.

Haben die Platten die konstanten Temperaturen T_1 und t_1 und liegen die Temperaturgefälle nur am Rande der Platten, können wir annehmen, dass die thermischen Gleitströme am Rande laminar und parallel zu den Platten verlaüfen. Ist der Abstand zwischen den Platten d klein, darf man annehmen, dass die Gleitströmung praktisch gesprochen nicht zwischen den Platten durchdringen wird.

Wenn wir von der Krümmung des Randes absehen, können

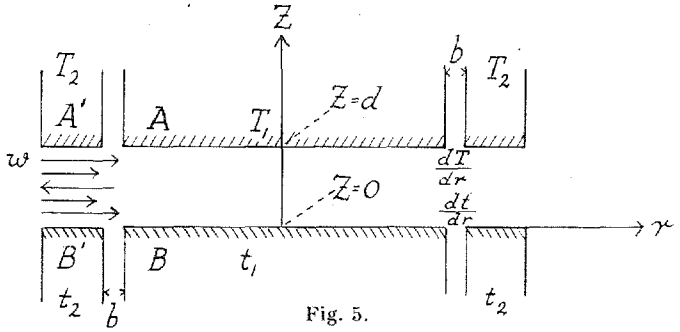

Fig. 5.

wir annehmen, dass der laminare Strömungszustand am Rande der Platten gegeben ist durch:

$$\eta \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{dp}{dr}, \tag{1}$$

wo w die Strömungsgeschwindigkeit, p der Druck, und η die innere Reibung des Gases bezeichnet. Diese Formel gilt für den stationären Zustand, in welchem auch die gesamte durch den Rand strömende Gasmenge gleich Null sein muss. Da $\frac{dp}{dr}$ für diese laminare Strömung als unabhängig von z angesehen werden kann, erhält man nach Integration für den stationären Zustand:

$$w = A_0 + B_0 z + c_0 z^2, \quad \text{wo} \quad c_0 = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dr}. \tag{2}$$

Die Grenzbedingungen an den Oberflächen der Platten A und B sind durch die erweiterte MAXWELL'sche Grenzbedingung

$$w - k_2 \gamma_M \cdot \left(\frac{dw}{dz}\right) = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + m \frac{\lambda}{d}} \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \left(\frac{dT}{dr}\right)$$

gegeben.

γ_M ist der MAXWELL'sche Gleitungskoefficient und, wenn λ die mittlere freie Weglänge des Gases nach CHAPMAN bezeichnet, wird:

$$\gamma_M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{p\sqrt{{}_1\varrho}} = \lambda, \quad \text{weil} \quad p\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{{}_1\varrho}} = {}_1\lambda.$$

Die Temperatur T in der MAXWELL'schen Grenzbedingung ist die Temperatur der an die Platte grenzenden Gasschicht, und $\frac{dT}{dr}$ ist der Temperaturgradient in dieser Gasschicht.

Es hat sich aus den Messungen der thermomolekularen Druckdifferenzen in Röhren ergeben, dass die beiden Zahlenfaktoren k_2 und k_1 einander ungefähr gleich sind; annäherungsweise kann $k_1 = k_2 = \frac{4}{3}$ gesetzt werden. m ist, wie früher gezeigt, ein Zahlenfaktor, und wenn der Faktor $\frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{d}}$ als eine Gleitungskorrektion auf η aufgefasst werden kann, muss für zwei parallele Platten und den Zustand $\frac{\lambda}{d} \to 0$, $m = 2\,k_2 =$ ca. 2,67 sein.

Für die Randbedingung an den Platten A und B erhalten wir für $z = 0$ und $z = d$ hieraus:

$$w_0 - k_2\gamma_M\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho\,T} \cdot \frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{d}}\left(\frac{dt}{dr}\right) = c_1$$

und

$$w_d + k_2\gamma_M\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=d} = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho\,T} \cdot \frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{d}}\left(\frac{dT}{dr}\right) = c_2,$$

weil $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0}$ und $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=d}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Abgekürzt können wir die Randbedingungen schreiben:

$$w_0 - \varepsilon\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = c_1 \tag{3}$$

und

$$w_d + \varepsilon\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=d} = c_2. \tag{4}$$

Ausserdem gilt in dem stationären Zustand am Rande der Platten:

$$\int_{\varepsilon}^{d} w dz = 0. \tag{5}$$

Hieraus bekommt man nach Einsetzung des Wertes $w = A_0 + B_0 z + c_0 z^2$:

Aus (3) $\quad A_0 = \varepsilon B_0 + c_1$

» (4) $\quad A_0 + B_0 d + c_0 d^2 + \varepsilon (B_0 + 2 c_0 d) = c_2$

» (5) $\quad A_0 + \frac{1}{2} B_0 d + \frac{1}{3} c_0 d^2 = 0.$

Nach Elimination von A_0 und B_0 wird hieraus erhalten:

$$\frac{1}{3} c_0 d^2 \left(1 + 6 \frac{\varepsilon}{d}\right) = c_1 + c_2$$

oder

$$\frac{dp}{dr} = \frac{9}{2} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + m \frac{\lambda}{d}\right)} \frac{1}{\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} \left(\frac{dT}{dr} + \frac{dt}{dr}\right). \tag{6}$$

Da $p\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{{}_1\varrho}}$, und also $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\eta^2}{{}_1\varrho \cdot p} = p\lambda^2$, wird erhalten:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{9}{\pi} k_1 \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d}{\lambda} + m\right)\left(\frac{d}{\lambda} + 6 k_2\right)} \sum \frac{dT}{dr}$$

oder

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \frac{1}{\frac{\pi}{18 k_1} \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 p^2 + \frac{\pi}{3 k_1} \left(k_2 + \frac{m}{6}\right) \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) p + \frac{\pi}{3} \frac{k_2}{k_1} m} \sum \frac{dT}{dr}. \tag{7}$$

Aus dieser Formel erhellt, dass der Druck zwischen den Platten grösser ist als in dem sie umgebenden Gasraum, so dass sich die Platten mit einer senkrecht zu den Platten verlaufenden Kraft abstossen, während sich die Tangentialkräfte auf die Platten infolge der Symmetrie gegenseitig aufheben.

Aus der Formel ist weiter ersichtlich, dass sich die am Rande der Platten liegenden Temperaturgefälle einfach addieren, so

dass die Radiometerkraft grösser wird, wenn mehrere Temperaturgefälle in derselben Richtung vorliegen. Macht also die Platte B — entweder infolge gleichzeitiger Bestrahlung beider Platten oder infolge Wärmeleitung durch das Gas — das Temperaturgefälle der Platte A ganz oder teilweise mit, addieren sich die Kräfte. Dies kann von Bedeutung sein bei der Konstruktion eines hochempfindlichen Zweiplattenradiometers, eines Instrumentes, das in der Strahlungsmessung von RUBENS und NICHOLS[1] verwendet worden ist. —

Wenn wir nur kleine Temperaturdifferenzen haben und folglich nur kleine Druckunterschiede erhalten, ergibt sich aus den Formeln (6) und (7), dass die auf die Platten wirkende Radiometerkraft K folgendermassen geschrieben werden kann:

$$K = \pi R^2 (p_1 - p_2) = \frac{9}{2} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{d^2} \frac{\pi R^2}{\left(1 + m \frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} \sum \Delta T \qquad (8)$$

oder

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{\pi R^2}{\frac{\pi}{18 k_1}\left(\frac{d}{\lambda}\right) p^2 + \frac{\pi}{3 k_1}\left(k_2 + \frac{m}{6}\right)\left(\frac{d}{\lambda}\right) p + \frac{\pi}{3} \frac{k_2}{k_1} m} \sum \Delta T. \qquad (9)$$

p_1 und p_2 ist der Druck zwischen den Platten und in dem sie umgebenden Gasraum; ausserdem ist vorausgesetzt, dass die thermische Gleitströmung praktisch gesprochen nicht zwischen den Platten durchdringt, so dass p_1 zwischen A und B überall konstant ist.

Ist $\frac{dT}{dr} = \frac{dt}{dr}$, wird $\Sigma \Delta T = 2 (T_1 - T_2)$. Wird $\frac{dt}{dr} = 0$ und $t_2 = T_2$ wie im Falle des absoluten Manometers, wird $\Sigma \Delta T = T_1 - T_2$, und wir erhalten dann die früher von mir abgeleitete Formel für K.

Auf Grund der Messungen von MARTIN KNUDSEN über den Verlauf der Radiometerkraft in dem absoluten Manometer für das ganze Druckgebiet $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$ ist es wahrscheinlich, dass der Wert von $\mu = \frac{\pi}{3} \frac{k_2}{k_1} m$ in dem Zustande $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ ungefähr 2,70 ist.

[1] H. RUBENS und E. F. NICHOLS: Wied. Ann. **60**, 418, 1897. Vgl. auch: G. HETTNER: Z. f. Phys. **47**, 499, 1928.

Dies ist in Übereinstimmung mit den Resultaten der umfassenden experimentellen Untersuchungen über die thermomolekularen Druckdifferenzen in Röhren[1], für welche eine analoge Formel gilt. Bei diesen Untersuchungen wurde für den Zustand $\frac{r}{\lambda} \to \infty$ gefunden, dass $\frac{\pi}{6}\frac{k_2}{k_1} m = \frac{1}{2}\mu =$ ca. 1.30, so dass die Übereinstimmung befriedigend ist.

Wenn $\frac{d}{\lambda} = 0$, wird der Grenzwert der Formel (9) für das absolute Manometer

$$K_0 = \frac{1}{2}\frac{p}{T}(T_1 - T_2)\cdot\frac{1}{\mu};$$

demnach muss für $\frac{d}{\lambda} = 0$, $\mu = 2$ gesetzt werden, um mit dem richtigen Grenzwert für $\frac{d}{\lambda} = 0$,

$$K_0 = \frac{1}{2}p\left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) \backsimeq \frac{1}{4}\cdot p\,\frac{T_1 - T_2}{T}$$

übereinzustimmen.

§ 4. Es ist nicht ohne Interesse zu untersuchen, wie die laminare Strömung am Rande der Platten verläuft. Aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$w = A_0 + B_0 z + c_0 z^2$$

erhält man für $z = 0$ und $z = d$:

$$w_{z=0} = A_0 \text{ und } w_{z=d} = A_0 + B_0 d + c_0 d^2,$$

worin

$$c_0 = \frac{3}{d^2}\cdot\frac{c_1 + c_2}{1 + 6\frac{\varepsilon}{d}}$$

$$B_0 = -\frac{2}{d}\cdot\frac{1}{\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{d}\right)\left(1 + 6\frac{\varepsilon}{d}\right)}\left\{c_2 + 2c_1\left(1 + 3\frac{\varepsilon}{d}\right)\right\}$$

und

[1] Sophus Weber: Comm. Kamerlingh Onnes Lab. Leiden, No. 246, 1936.

$$A_0 = \frac{c_1\left(1+4\frac{\varepsilon}{d}\right)-c_2\cdot 2\frac{\varepsilon}{d}}{\left(1+2\frac{\varepsilon}{d}\right)\left(1+6\frac{\varepsilon}{d}\right)}.$$

Für das rationelle, absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN ist $c_2 = 0$, so dass wir erhalten:

$$w = \frac{c_1}{\left(1+2\frac{\varepsilon}{d}\right)\left(1+6\frac{\varepsilon}{d}\right)}\left\{1+4\frac{\varepsilon}{d}-4\left(1+3\frac{\varepsilon}{d}\right)\frac{z}{d}+3\left(1+2\frac{\varepsilon}{d}\right)\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}.$$

Ist das Gleitungsglied $\frac{\varepsilon}{d} \ll 1$, erhält man hieraus:

$$w_0 = A_0 = \frac{c_1}{1+4\frac{\varepsilon}{d}} \quad \text{und} \quad w_d = -2\frac{\varepsilon}{d}\cdot\frac{c_1}{1+8\frac{\varepsilon}{d}},$$

während $w = 0$, wenn $\frac{z}{d} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{\varepsilon}{d}\right)$.

Für $\frac{z}{d} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{\varepsilon}{d}\right)$ wird $\frac{dw}{dz} = 0$ und $w = -\frac{1}{3}\cdot\frac{c_1}{1+4\frac{\varepsilon}{d}}$.

Der Strömungszustand am Rande wird in diesem Falle wie in Fig. 6 b angegeben, während die Geschwindigkeitsverteilung aus Fig. 6 a zu ersehen ist.

Betrachten wir den einfachen Fall, in dem das Temperatur-

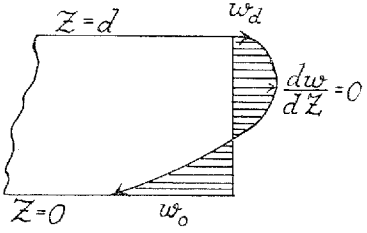

Fig. 6 a.

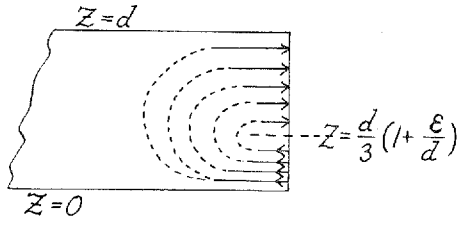

Fig. 6 b.

gefälle in derselben Richtung am Rande der beiden Platten gleich gross ist, erhält man $c_1 = c_2$, und also

$$w_0' = A_0 = \frac{c_1}{1+6\frac{\varepsilon}{d}}, \quad w_d' = w_0' = \frac{c_1}{1+6\frac{\varepsilon}{d}}$$

und

$$w' = \frac{c_1}{1+6\frac{\varepsilon}{d}}\left(1-6\frac{z}{d}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right).$$

Für $\frac{z}{d} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ wird $w' = 0$, während für $\frac{z}{d} = \frac{1}{2}$, $\frac{dw'}{dz} = 0$ und $w' = -\frac{1}{2}\frac{c_1}{1+6\frac{\varepsilon}{d}} = -\frac{1}{2}w_0'$.

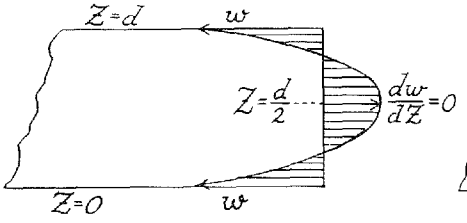

Fig. 7 a.

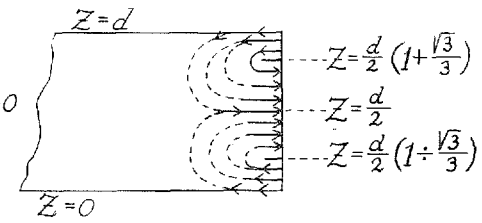

Fig. 7 b.

Der Strömungszustand am Rande ist für diesen Fall in Fig. 7 b, die Geschwindigkeitsverteilung ist in Fig. 7 a wiedergegeben.

§ 5. Wir können nun untersuchen, wie sich die Formel für die Radiometerkraft K ändert, wenn das Temperaturgefälle nicht allein am Rande der Platten, sondern z. B. in den Platten selbst liegt.

Wird z. B. eine dünne, gutleitende Kreisscheibe mit dem Radius R durch einseitige, gleichmässige Bestrahlung der Intensität I erwärmt, so wird die Temperaturverteilung in der Scheibe in erster Näherung bestimmt durch

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}-2\frac{s+\sigma}{\varkappa\cdot d_1}(T-T_0)+\frac{I}{\varkappa d_1}=0, \qquad (10)$$

wo d_1 die Dicke der Platte und $\varkappa$ die Wärmeleitfähigkeit des Plattenmaterials bezeichnet. s ist die äussere Wärmeleitfähigkeit und σ die Strahlungskonstante, wenn die Ausstrahlung proportional mit der Temperaturdifferenz $T-T_0$ angenommen wird.

Wird in dieser Gleichung

$$\frac{I}{2(s+\sigma)} = P, \quad a^2 = \frac{2(s+\sigma)}{\varkappa\cdot d_1}, \quad \text{und} \quad T' = T-T_0-P$$

gesetzt, erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2T'}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT'}{dr}-a^2T'=0.$$

Die Lösung hierfür ist, wie bekannt, die Zylinderfunktion $I_0(iar)$ mit komplexem Argument.

Wir finden hieraus: $T'=A\cdot I_0(iar)$, und also, weil für $r=0$, $I_0(iar)=1$:

$$A=\frac{T_1-T_0}{1-I_0(iaR)}$$

und

$$T=T_1-(T_1-T_0)\cdot\frac{1-I_0(iar)}{1-I_0(iaR)}. \tag{11}$$

In dieser Formel sind T_1 und T_0 die Temperaturen im Zentrum und am Rande der Kreisscheibe.

Wird nur die erste Näherung der Reihenentwicklung für $I_0(iar)$ verwendet, erhält man, da

$$I_0(ix)=1+\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!^2}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2n}}{n!^2}+\cdots,$$

$$T=T_1-\frac{r^2}{R^2}(T_1-T_0). \tag{12}$$

Die Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Temperaturverteilung, die »parabolisch« genannt werden kann, ist:

$$\frac{1}{16}x^2=\frac{1}{8}\frac{s+\sigma}{\varkappa d_1}R^2\ll 1.$$

Diese Bedingung wird im allgemeinen für alle Gase und eine nicht allzugrosse metallische Scheibe hinreichend erfüllt sein.

Bei einer parabolischen Temperaturverteilung auf der heissen Platte

$$T=T_1-\frac{r^2}{R^2}(T_1-T_0)$$

und für die konstante Temperatur T_0 der kalten Platte und

des Schutzringzylinders habe ich[1] früher nachgewiesen, dass man, unter der Voraussetzung, dass $\frac{dp}{dr}$ auch in diesem Falle als unabhängig von z angesehen werden kann, für die totale Radiometerkraft K' zwischen den Platten den folgenden Ausdruck erhält:

$$K' = \frac{9}{4} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\pi R^2}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6\,k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} (T_1 - T_0), \qquad (13)$$

während man für denselben Apparat, wenn der Temperaturunterschied $(T_1 - T_0)$ nur am Rande der heissen Platte liegt, folgenden Ausdruck erhält:

$$K = \frac{9}{2} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\pi R^2}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6\,k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} (T_1 - T_0), \qquad (14)$$

so dass $K' = \frac{1}{2} K$. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung damit, dass die mittlere Temperaturdifferenz zwischen den Platten in diesem Falle

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R (T - T_0)\, 2\pi r dr = \frac{1}{2} (T_1 - T_0)$$

ist.

Mit einer parabolischen Temperaturverteilung der heissen Platte werden die thermischen Gleitströme nicht allein am Rande der Platten liegen, sondern bis zum Mittelpunkt der Platten durchdringen; in diesem Punkte ist nämlich $\frac{dT}{dr} = 0$.

Die in diesem Falle enstehende, rotationssymmetrische Strömung hat G. Fanselau[2] in seiner Berliner Dissertation behandelt. Ausgehend von den hydrodynamischen Gleichungen für eine nicht zusammendrückbare, zähe Flüssigkeit findet er für den stationären Zustand, dass die Stromlinien für diese Strömung bestimmt sind durch:

$$\psi = r^2 f(z) = r^2 (C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4) = \text{konst.}, \qquad (15)$$

[1] Sophus Weber: loc. cit. S. 37, 1937.
[2] G. Fanselau: Dissertation, Berlin, 1927.

wo $r^2 = x^2 + y^2$, während die Werte von C_1, C_2, C_3 und C_4 in der Weise bestimmt werden müssen, dass die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt sind, (vgl. Fig. 8).

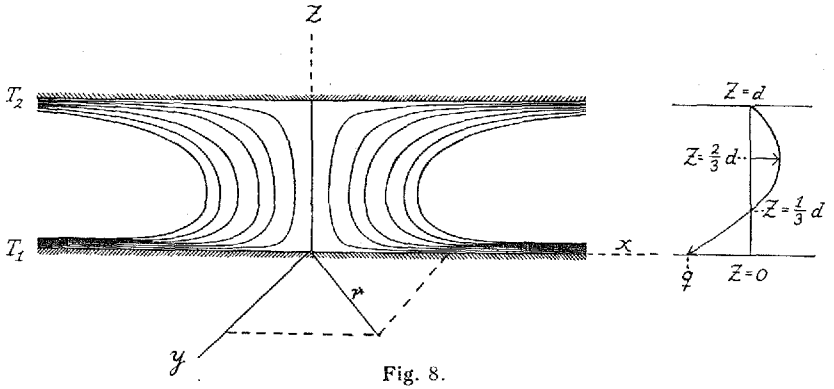

Fig. 8.

Für die Strömungsgeschwindigkeiten in den drei Achsenrichtungen erhält FANSELAU:

$$w = 2f(z), \qquad u = -xf'(z) \quad \text{und} \quad v = -yf'(z) \tag{16}$$

in Übereinstimmung mit der Kontinuitätsbedingung für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0.$$

Vernachlässigt man den Einfluss der Schwere, erhält man aus den hydrodynamischen Gleichungen für den stationären Zustand:

$$\eta \Delta^2 u - \frac{\delta p}{\delta x} = 0$$

$$\eta \Delta^2 v - \frac{\delta p}{\delta y} = 0$$

$$\eta \Delta^2 w - \frac{\delta p}{\delta z} = 0,$$

$$\frac{\delta p}{\delta x}\delta x + \frac{\delta p}{\delta y}\delta y + \frac{\delta p}{\delta z}\delta z = \eta\,[2f''(z)\,\delta z - y f'''(z)\,\delta y - x f'''(z)\,\delta x],$$

woraus:

$$p - p_\infty = -\eta\left[\frac{1}{2} r^2 f'''(z) - 2f'(z)\right], \tag{17}$$

und also:

$$\frac{\delta p}{\delta r} = -r \cdot \eta \, f'''(z) = -6 \, C_1 \cdot \eta \cdot r. \tag{18}$$

Die auf die Platten ausgeübte Kraft K wird

$$K = \int_0^R (Z_n - p_\infty) \, 2 \pi \, r dr,$$

wo

$$Z_n = Z_z.$$

Nun ist

$$Z_z = p - 2 \eta \left[\frac{\delta w}{\delta z} - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) \right]$$

oder, weil die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist,

$$Z_z = p - 2 \eta \frac{\delta w}{\delta z} = p_\infty - \eta \left[\frac{1}{2} r^2 f'''(z) + 2 f'(z) \right],$$

woraus

$$K = -2 \eta \left[f'(z) + \frac{1}{8} R^2 f'''(z) \right] \cdot \pi R^2. \tag{19}$$

Ausgehend von dieser allgemeinen Behandlung einer rotationssymmetrischen Strömung zwischen zwei parallelen Platten können wir nun annehmen, dass die zwei parallelen Platten Kreisscheiben mit Radius R sind, und dass beide eine parabolische Temperaturverteilung,

$$T = T_1 - \frac{r^2}{R^2}(T_1 - T_2)$$

bezw.

$$t = t_1 - \frac{r^2}{R^2}(t_1 - t_2),$$

besitzen.

Wir erhalten dann:

$$w = 2 f(z), \qquad u = -x f'(z), \qquad v = -y f'(z),$$

wo

$$f(z) = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4.$$

Da $w = 2 f(z) = 0$ für $z = 0$ und $z = d$, wo d den Abstand der parallelen Platten bezeichnet, erhalten wir die folgenden Bedingungen:

$$\text{für } z = 0, \qquad f(0) = 0, \quad \text{woraus} \quad C_4 = 0,$$
$$\text{und für } z = d, \qquad f(d) = 0, \quad \text{woraus} \quad C_1 d^2 + C_2 d + C_3 = 0.$$

Aus der MAXWELL'schen erweiterten Grenzbedingung bekommen wir, da die radiale Geschwindigkeit

$$q = -\sqrt{u^2 + v^2} = -r f'(z) \text{ und } \frac{dq}{dz} = -r f''(z),$$

$$\text{für } z = 0, \qquad q_0 - k_2 \gamma \cdot \frac{dq_0}{dz} = M_1 \cdot \frac{dT}{dr} \text{ und}$$

$$\text{für } z = d \qquad q_d + k_2 \gamma \cdot \frac{dq_d}{dz} = M_1 \cdot \frac{dt}{dr},$$

$$\text{wo } M_1 = \frac{3}{4} k_1 \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{1 + m \frac{\lambda}{d}} \text{ und } \gamma = \gamma_M.$$

Hieraus wird erhalten:

$$r\left[C_3 - k_2 \gamma\, 2\, C_2\right] = -M_1 \cdot \frac{dT}{dr}$$

und

$$r\left[3\, C_1 d^2 + 2\, C_2 d + C_3 + k_2 \gamma\, (6\, C_1 d + 2\, C_2)\right] = -M_1 \frac{dt}{dr}.$$

Addieren wir diese Ausdrücke, erhalten wir:

$$r\left[3\, C_1 d^2 + 2\, C_2 d + 2\, C_3 + 6\, C_1 k_2 \gamma\, d\right] = -M_1 \sum \frac{dT}{dr},$$

und weil

$$2\, C_1 d^2 + 2\, C_2 d + 2\, C_3 = 0,$$

$$r C_1 d^2 \left[1 + 6\, k_2 \frac{\gamma}{d}\right] = -M_1 \cdot \sum \frac{dT}{dr}.$$

Setzen wir $\alpha = C_1 d^2$, erhalten wir:

$$\alpha = -\frac{1}{r} \cdot \frac{M_1}{1 + 6\, k_2 \frac{\lambda}{d}} \sum \frac{dT}{dr}, \tag{20}$$

weil $\gamma = \lambda$.

Aus der parabolischen Temperaturverteilung erhält man:

$$\frac{dT}{dr} = -2 \frac{r}{R^2}(T_1 - T_2) \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dr} = -2 \frac{r}{R^2}(t_1 - t_2),$$

woraus

$$\sum \frac{dT}{dr} = -2\frac{r}{R^2}[(T_1 - T_2) + (t_1 - t_2)] = -2\frac{r}{R^2}\sum \Delta T,$$

und also:

$$\alpha = C_1 d^2 = \frac{3}{2} k_1 \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6\,k_2\frac{\lambda}{d}\right)} \cdot \frac{1}{R^2}\sum \Delta T,$$

woraus erhellt, dass C_1, ebenso wie C_2 und C_3, für die parabolische Temperaturverteilung der Scheiben unabhängig von r ist, so dass der von FANSELAU angegebene Wert für ψ eine befriedigende Lösung des hydrodynamischen Problems ist. — Es ist nun weiter einfach die Werte von C_2 und C_3, in α ausgedrückt, zu berechnen und hieraus mit Hilfe der Formel für K die auf die Platten ausgeübte Kraft zu bestimmen. Wir werden nur die beiden einfachsten Fälle behandeln.

1°. $$\frac{dT}{dr} = \frac{dt}{dr} = -2\frac{r}{R^2}(T_1 - T_2).$$

Der Symmetrie wegen finden wir leicht die Werte von C_2 und C_3. Setzen wir z. B. $q_0 = q_d$, wo $q = -\sqrt{u^2 + v^2} = -rf'(z)$, erhalten wir $C_2 = -\frac{3}{2} C_1 d$ und $C_3 = \frac{1}{2} C_1 d^2$, wodurch

$$f(z) = \alpha\left[\frac{z^3}{d^2} - \frac{3}{2}\frac{z^2}{d} + \frac{1}{2} z\right],$$

und also, weil

$$\sum \frac{dT}{dr} = 2\frac{dT}{dr}:$$

$$\alpha = -\frac{1}{r}\frac{M_1}{1 + 6\,k_2\frac{\lambda}{d}} \cdot 2\frac{dT}{dr} = 3\,k_1\frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6\,k_2\frac{\lambda}{d}\right)} \frac{T_1 - T_2}{R^2}.$$

Aus der Formel für K erhalten wir für $z = 0$ und $z = d$ denselben Wert, nämlich:

$$K = -2\eta\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{R^2}{d^2}\right]\alpha \cdot \pi R^2$$

oder:

$$K_0 = K_d = -\left[3\pi k_1 \frac{\eta^2}{\varrho T} + \frac{9}{2} k_1 \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\pi R^2}{d^2}\right] \cdot \frac{T_1 - T_2}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)}. \qquad (21)$$

Berechnen wir den Strömungszustand am Rande der Platten, erhalten wir in diesem Falle:

$$q = -rf'(z) = -\alpha R\left[3\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 3\left(\frac{z}{d}\right) + \frac{1}{2}\right], \text{ woraus}$$

$$q_0 = q_d = -\frac{1}{2}\alpha R, \text{ während } \frac{dq}{dz} = 0 \text{ für } \frac{z}{d} = \frac{1}{2} \text{ mit}$$

$$q_{\max} = \frac{1}{4}\alpha R = -\frac{1}{2} q_0.$$

Weiter finden wir $q = 0$ für $\frac{z}{d} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, in Übereinstimmung mit der früheren Ableitung S. 16 (vgl. Fig. 7 a und b).

Der Ausdruck für die Kraft K ist aus zwei Gliedern zusammengesetzt. Setzen wir $d = \infty$, und also $\frac{\lambda}{d} = 0$, bleibt nur das erste Glied übrig. Dieses Glied,

$$K_{d=\infty} = -3\pi k_1 \frac{\eta_2}{\varrho T}(T_1 - T_2),$$

ist die Radiometerkraft auf eine Kreisscheibe ohne Gegenplatte, wenn ein Temperaturunterschied $T_1 - T_2$ zwischen Zentrum und Rand der Scheibe besteht. Der Wert für $K_{d=\infty}$ ist in Übereinstimmung mit den Formeln, die P. Epstein[1] und Th. Sexl[2] auf andere Weise hierfür abgeleitet haben.

Ist die Temperaturverteilung auf beiden Seiten der Scheibe dieselbe, wird die Kraft $K_{d=\infty}$ in entgegengesetzter Richtung auf die andere Seite der Scheibe auch ausgeübt, so dass die totale Radiometerkraft für die Scheibe mit Gegenplatte, jedenfalls für $\frac{\lambda}{d} \to 0$,

$$K = -\frac{9}{2} \cdot k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} \cdot \pi R^2 \qquad (22)$$

wird.

[1] P. Epstein: Z. f. Phys. **54**, 537, 1929.
[2] Th. Sexl: Z. f. Phys. **52**, 249, 1928.

2°. Für das absolute Manometer mit parabolischer Temperaturverteilung hat man

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dr} \quad \text{und} \quad \frac{dl}{dr} = 0.$$

Wir finden in diesem Falle leicht, wenn wir die Gleitung bei der kalten Platte vernachlässigen, wodurch also $f'(d) = 0$,

Fussnote.

Denken wir uns zwei Räume I und II mit den Temperaturen T_1 und T_2, die durch eine Ringspalte $A-B$ (vgl. Fig. 9) mit einander in Ver-

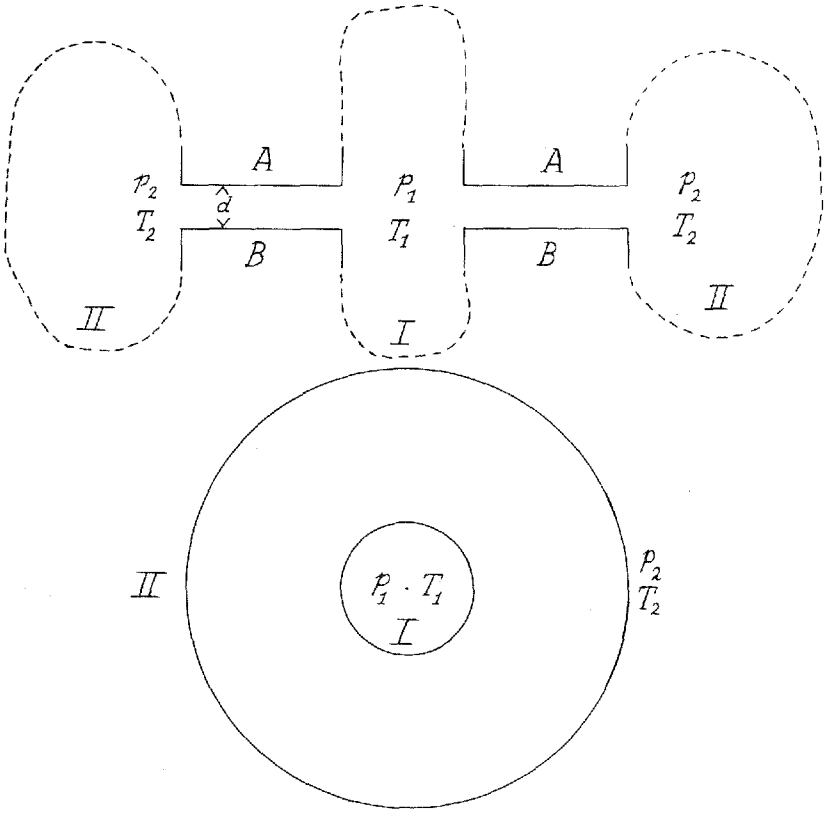

Fig. 9.

bindung stehen, dann wird in den Wänden der Ringspalte ein Temperaturgradient $\frac{dT}{dr}$ liegen.

$$f(z) = \alpha\left[\frac{z^3}{d^2} - 2\frac{z^2}{d} + z\right],$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{3}{2} k_1 \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} \frac{T_1 - T_2}{R^2}$$

und

$$K_{z=d} = -\frac{9}{4} k_1 \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\frac{T_1 - T_2}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)} \cdot \pi R^2}, \qquad (24)$$

in Übereinstimmung mit dem früher abgeleiteten Ausdruck (13). Für die warme Platte erhält man aus der Formel für K:

$$K_{z=0} = -\left[3\pi k_1 \frac{\eta^2}{\varrho T} + \frac{9}{4} k_1 \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\pi R^2}{d^2}\right] \cdot \frac{T_1 - T_2}{\left(1 + m\frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)},$$

Fortsetzung Fussnote:

Die Gleichgewichtsbedingung wird dann, weil die Temperaturverteilung über die Wände der Ringspalte parabolisch wird

$$\frac{dp}{dr} = -6 C_1 \cdot \eta \cdot r = -6 \frac{\alpha}{d^2} \cdot \eta \cdot r.$$

In diesem Falle wird $\sum \frac{dT}{dr} = 2 \frac{dT}{dr}$, und also:

$$\alpha = -\frac{1}{r} \cdot \frac{M_1}{1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}} \cdot 2 \frac{dT}{dr}$$

oder

$$\frac{dp}{dr} = 6 \cdot \frac{\eta}{d^2} \cdot \frac{3}{4} k_1 \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{d}} \cdot \frac{1}{1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}} \cdot 2 \frac{dT}{dr},$$

woraus:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{2} \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{36 k_1}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{\pi}{6 k_1}\left(k_2 + \frac{m}{6}\right)\left(\frac{d}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{k_2}{k_1} m} \cdot \frac{dT}{dr}. \qquad (23)$$

Wird für $\frac{d}{\lambda} = 0$, $\mu = \frac{\pi}{6} \frac{k_2}{k_1} \cdot m = 1$, und also $m =$ ca. 2 gesetzt, erhält man für $\frac{d}{\lambda} = 0$: $\frac{dp}{dr} = \frac{1}{2} \frac{p}{T} \cdot \frac{dT}{dr}$ oder $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ in Übereinstimmung mit der Quadratwurzelformel für die thermomolekulare Druckdifferenz. Für $\frac{\lambda}{d} \to 0$ wird $\mu =$ ca. 2,70. Wünscht man die thermomolekularen Druckdifferenzen für Pumpzwecke zu verwenden, kann eine Ringspalte von angemessenen Dimensionen eine zweckmässige Lösung sein.

weil in dieser Platte die Temperaturdifferenz $(T_1 - T_2)$ zwischen Mittelpunkt und Rand der Scheibe besteht.

Hat die warme Scheibe dieselbe Temperaturverteilung auf der anderen Seite, wird auch die Kraft $-3\pi k_1 \frac{\eta^2}{\varrho T}(T_1 - T_2)$ auf diese Seite ausgeübt, so dass auch in diesem Falle nur das zweite Glied übrigbleibt.

Für den Strömungszustand am Rande der Platten finden wir in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen:
$q = 0$ für $z = d$ und $z = \frac{1}{3}d$; weiter erhalten wir für $z = \frac{2}{3}d$, $\frac{dq}{dz} = 0$ und $q_{\max} = \frac{1}{3}\alpha R$, während für $z = 0$, $q = -\alpha R$ (vgl. Fig. 8 und 6 a, b) wird.

§ 6. Um auch den Einfluss des Akkommodationskoeffizienten zu bestimmen, werden wir nun dazu übergehen, die vorliegenden Konstruktionen des absoluten Manometers laut der hier auseinandergesetzten Theorie näher zu untersuchen. Wir wollen mit dem absoluten Manometer von MARTIN KNUDSEN anfangen.

Für ein Manometer dieser Konstruktion in der rationellen Ausführung liegt die massgebende Temperaturdifferenz am Rande der heissen Platte in der an die warme Platte grenzenden Gasschicht. Für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \gg 0$ folgt nach dieser Theorie:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{9}{2} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{{}_1\varrho \cdot p \cdot d^2 \left(1 + 6 k_2 \frac{\lambda}{d}\right)\left(1 + m \frac{\lambda}{d}\right)} \cdot \frac{1}{T} \sum \frac{dT}{dr},$$

oder wenn $\frac{T_1 - T_2}{T} \ll 1$, $k_1 = k_2 = \frac{4}{3}$ und $\frac{\pi}{3}\frac{k_2}{k_1} m = \mu$,

$$\frac{p_1 - p_2}{\Delta r} = \frac{1}{2T} \cdot \frac{p}{\frac{\pi}{24}\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2 + \frac{\pi}{4}\left(k_2 + \frac{m}{6}\right)\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) p + \mu} \sum \frac{dT}{dr}. \qquad (25)$$

Laut der Theorie für den Temperatursprung wird für den Temperaturgradient $\frac{dT}{dr} = \frac{\Delta T}{\Delta r}$ in der an die warme Platte grenzende Luftschicht gefunden (vgl. Fig. 10):

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{T_1' - T_2}{\Delta r}, \quad \text{wo} \quad T_1' = T_1 - k \frac{2 - a_1}{2 a_1} \cdot \lambda \frac{dT}{dz}.$$

a_1 ist hier der Akkommodationskoeffizient der warmen Platte dem Gase gegenüber, λ die mittlere freie Weglänge und $k = \frac{15}{4}$. Laut einer meiner früheren Untersuchungen[1] ist

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} k \left[\frac{2 - a_1}{a_1} + \frac{2 - a_2}{a_2}\right] \frac{\lambda}{d}}, \text{ wo}$$

a_2 den Akkommodationskoeffizienten der kalten Platte bezeichnet. Hieraus wird erhalten:

$$\frac{T_1' - T_2}{\Delta r} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta r} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} k \cdot \frac{2 - a_2}{a_2} \cdot \frac{\lambda}{d}}{1 + \frac{1}{2} k \left[\frac{2 - a_1}{a_1} + \frac{2 - a_2}{a_2}\right] \frac{\lambda}{d}}. \qquad (26)$$

Ausser diesem massgebenden Temperaturgradient bei der warmen Platte liegt aber auch noch ein Temperaturgradient in

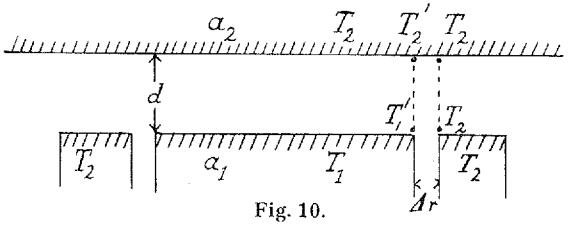

Fig. 10.

der an die kalte Platte grenzenden Gasschicht gegenüber dem Rande der warmen Platte, weil:

$$T_2' - T_2 = k \cdot \frac{2 - a_2}{2\, a_2} \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dz},$$

woraus:

$$\frac{T_2' - T_2}{\Delta r} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta r} \cdot \frac{\frac{1}{2} k \cdot \frac{2 - a_2}{a_2} \cdot \frac{\lambda}{d}}{1 + \frac{1}{2} k \left[\frac{2 - a_1}{a_1} + \frac{2 - a_2}{a_2}\right] \frac{\lambda}{d}}.$$

[1] Sophus Weber: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XVI, 9, 1939. In Formel (7), S. 31 dieser Abhandlung, ist leider ein Druckfehler, wodurch ein Faktor $\frac{1}{2}$ im Nenner der Formel für $\frac{dT}{dz}$ zuviel steht.

Die Zahlen in Tabelle V, S. 33, sind aber auf Grund der obenstehenden, richtigen Formel berechnet.

Also wird

$$\sum \frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta r} \cdot \frac{1 + k \cdot \frac{2 - a_2}{a_2} \cdot \frac{\lambda}{d}}{1 + \frac{1}{2} k \left[\frac{2 - a_1}{a_1} + \frac{2 - a_2}{a_2} \right] \frac{\lambda}{d}}. \qquad (27)$$

Für die Radiometerkraft K_1 wird hierdurch erhalten:

$$K_1 = (p_1 - p_2)\pi R^2 =$$

$$\frac{1}{2T} \cdot \frac{1 + k \frac{2 - a_2}{a_2} \cdot \frac{\lambda}{d}}{1 + \frac{1}{2} k \left[\frac{2 - a_1}{a_1} + \frac{2 - a_2}{a_2} \right] \frac{\lambda}{d}} \cdot \frac{\pi}{24} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 p^2 + \frac{\pi}{4} \left(k_2 + \frac{m}{6} \right) \left(\frac{d}{\lambda} \right) p + \mu \cdot (T_1 - T_2). \qquad (28)$$

Für $a_1 = a_2$ geht diese Formel über in die früher von mir abgeleitete Formel:

$$K_1 = (p_1 - p_2)\pi R^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{T} \cdot \frac{\pi R^2}{\frac{\pi}{24} \left(\frac{d}{\lambda} \right) p^2 + \frac{\pi}{4} \left(k_2 + \frac{m}{6} \right) \left(\frac{d}{\lambda} \right) p + \mu} (T_1 - T_2)$$

und wird also unabhängig von dem Akkommodationskoeffizienten a.

Wenn $\frac{d}{\lambda} = 0$, gibt die Formel (28) für $K_{1,0}$

$$K_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{a_1 (2 - a_2)}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\mu} \cdot \pi R^2,$$

während die von Smoluchowski direkt abgeleitete Formel

$$K'_{1,0} = (p_1 - p_2)\pi R^2 = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \cdot \frac{a_1 (2 - a_2)}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \pi R^2,$$

für $\frac{T_1 - T_2}{T_2} \ll 1$ wird:

$$K'_{1,0} = (p_1 - p_2)\pi R^2 = \frac{1}{4} \cdot p \frac{T_1 - T_2}{T} \cdot \frac{a_1 (2 - a_2)}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \pi R^2. \qquad (29)$$

Hieraus ist zu ersehen, dass man für das ganze Gebiet $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$ annäherungsweise die Formel für K_1 verwenden kann, wenn für $\frac{d}{\lambda} \geqq 0$, $\mu_0 = \left(\frac{\pi}{3} \frac{k_2}{k_1} m \right)_{\frac{d}{\lambda} = 0} = 2$ gesetzt wird. Für

grössere Werte von $\frac{d}{\lambda}$, d. h. für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$, habe ich früher auf Grund der vorliegenden Messungen von MARTIN KNUDSEN den Wert von $\mu_{\frac{d}{\lambda} \to \infty} = \frac{\pi}{3} \frac{k_2}{k_1} m$ ca. 2,70 gefunden, oder:

$$\mu_\infty = \left(\frac{\pi}{3} \frac{k_2}{k_1} m \right)_{\frac{d}{\lambda} \to \infty} = 2{,}70.$$

Die einfachste Interpolationsformel für μ ist

$$\mu = 2 \cdot \frac{1 + p \cdot \frac{d}{\lambda}}{1 + q \cdot \frac{d}{\lambda}}, \quad \text{wo} \quad \frac{p}{q} = \text{ca. } 1{,}35,$$

wodurch die Formel (28) für K_1 dem ganzen Gebiet $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$ angepasst ist.

Ist $a_1 = a_2$, findet man hieraus die früher von mir abgeleitete Formel:

$$P = \frac{K_1}{\pi R^2 (T_1 - T_2)} = \frac{1}{2} \frac{p}{T} \frac{1}{\alpha \left(\frac{d}{{}_1\lambda} \right)^2 p^2 + p \left(\frac{d}{{}_1\lambda} \right) p + \mu},$$

woraus

$$P_{\max} = 2 \cdot \frac{{}_1\lambda}{d} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha \mu} + \beta}, \quad p_{\max} = \frac{{}_1\lambda}{d} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$$

und

$$\frac{d}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} = \text{ca. } 4{,}54, \quad \text{für} \quad \mu = 2{,}70.$$

Wird λ gross gegenüber d, also $\frac{d}{\lambda} \to 0$, erhält man aus der Formel für P mit $\mu_0 = 2$:

$$P_{\frac{d}{\lambda} \to 0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5\pi}{24} \left(\frac{d}{{}_1\lambda} \right) p}. \tag{30}$$

Auf diese Formel werde ich in § 7 zurückkommen.

Einige neue Messreihen mit einem horizontalen absoluten Manometer in der rationellen KNUDSEN'schen Ausführung, in dem der Abstand d während der Messungen durch ein Kompensationsverfahren konstant gehalten wurde, waren für die Theorie von grossem Interesse.

Wir wollen zunächst die FREDLUND'sche Konstruktion näher betrachten, und dann erst die von mir genannte rationelle Konstruktion besprechen, in der die zwei grossen Platten A und B auf den Temperaturen T_1 und T_2 keine direkte thermische oder mechanische Verbindung mit einander haben.

Die Platten A und B können wir dann als unendlich gross annehmen im Vergleich zu den Dimensionen der sehr dünnen, metallischen Scheibe C, die in der Mitte zwischen A und B aufgehängt ist.

Angenommen wird, dass die Platten A und B horizontal liegen, wobei die warme Platte oben ist. Während der Messungen bleibt durch ein Kompensationssystem die Scheibe C auf ihrem Platz. Den Durchmesser der Scheibe C nennen wir $2R_0$ und den Abstand zwischen der Scheibe C und den Platten A und B bezeichnen wir mit d.

Weiter ist für die rationelle Konstruktion

$$\frac{d}{2R_0} \ll 1 \quad \text{und} \quad T_1 > T_2. \quad \text{(Fig. 11)}$$

Die gutleitende, sehr dünne Scheibe und die Gasschicht in der Ebene der Scheibe zwischen den Platten A und B haben die konstante Temperatur $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$.

Haben alle Oberflächen in dem Apparat denselben Akkom-

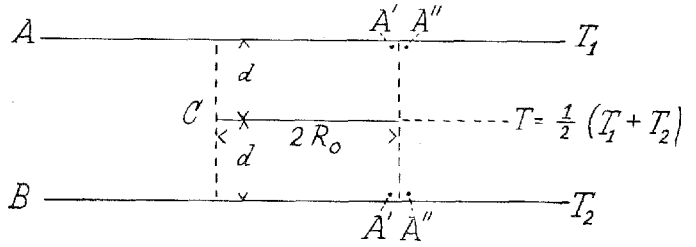

Fig. 11.

modationskoeffizienten a, wird der Temperatursprung an der Oberfläche der Scheibe C:

$$\Delta T_1 = k\frac{2-a}{2a}\lambda\frac{dT}{dz} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{k}\cdot\frac{a}{2-a}\cdot\frac{d}{\lambda}}(T_1-T), \qquad (31)$$

oder

$$\Delta T_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+m_1\cdot\frac{d}{\lambda}}(T_1-T_2), \text{ wo } m_1 = \frac{1}{k}\cdot\frac{a}{2-a} \text{ und } k = \frac{15}{4}.$$

Die Temperatur der an die obere Oberfläche der Scheibe grenzenden Gasschicht wird also:

$$T+\Delta T_1,$$

so dass der horizontale Temperaturgradient am Rande der Scheibe für die obere Seite von C, ΔT_1, und für die untere Seite von C, $-\Delta T_1$ wird.

Ausserdem liegt noch ein Temperaturgradient in den an die grossen Platten A und B grenzenden Gasschichten. Dieser Temperaturgradient rührt von dem Unterschied im Temperatursprung her und liegt gegenüber dem Rande der Scheibe, weil die Temperatur der angrenzenden Gasschicht bei A', $T_1-\Delta T_1$ (Fig. 11) und bei A'', $T_1-\Delta T_2$ ist, wo:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+m_1\cdot\frac{d}{\lambda}}(T_1-T_2)$$

und

$$\Delta T_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+m_1\cdot\frac{2d}{\lambda}}(T_1-T_2).$$

Der Temperaturunterschied zwischen A' und A'' wird

$$T_1-\Delta T_1-(T_1-\Delta T_2) = \Delta T_2-\Delta T_1 = \Delta T_1'$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+m_1\frac{2d}{\lambda}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+m_1\frac{d}{\lambda}}\right](T_1-T_2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{T_1-T_2}{\left(1+m_1\frac{d}{\lambda}\right)\left(1+2m_1\frac{d}{\lambda}\right)}.$$

Wir erhalten hieraus $\Delta T_1 > 0$ und $\Delta T_1' > 0$ für alle Werte von $\frac{d}{\lambda}$. Für die untere Seite der Scheibe wird der Zustand ganz analog, nur wird ΔT_1 und $\Delta T_1' < 0$. Da die Gleitströme von Stellen niedriger nach Stellen höherer Temperatur strömen, wird die Strömung am Rande der Scheibe wie in Fig. 12 *a* angegeben.

Verwenden wir nun die entwickelte Theorie, erhalten wir für jede Seite der Scheibe:

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{1}{2\,T} \cdot \frac{1}{\alpha\left(\frac{d}{\lambda}\right) p^2 + \beta\left(\frac{d}{\lambda}\right) p + \mu} \sum \Delta T, \qquad (32)$$

und also für die totale Radiometerkraft auf Scheibe C:

$$K = (p_1 - p_2)\pi R_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2\,T} \cdot \frac{p}{\alpha\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 p^2 + \beta\left(\frac{d}{\lambda}\right) p + \mu} \cdot \pi R_0^2 \sum \Delta T,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \sum \Delta T &= \frac{1}{4} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\left(1 + m_1 \frac{d}{\lambda}\right)\left(1 + 2\,m_1 \frac{d}{\lambda}\right)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{T_1 - T_2}{1 + m_1 \frac{d}{\lambda}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2\,m_1 \frac{d}{\lambda}} (T_1 - T_2). \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Hieraus entsteht

$$K = \frac{1}{2\,T} \cdot \frac{p}{\alpha\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 p^2 + \beta\left(\frac{d}{\lambda}\right) p + \mu} \cdot \pi R_0^2 \cdot \frac{T_1 - T_2}{1 + 2\,m_1 \left(\frac{d}{\lambda}\right) p}, \qquad (34)$$

wo

$$\alpha = \frac{\pi}{24}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}\left(k_2 + \frac{m}{6}\right) = \frac{5\,\pi}{12} \quad (\text{für } m = 2),$$

$$2\,m_1 = \frac{2}{k} \cdot \frac{a}{2 - a} = \frac{8}{15} \cdot \frac{a}{2 - a} \quad \text{und} \quad 2 \leqq \mu \leq 2{,}70.$$

Aus der Formel für K erhellt, dass die Radiometerkraft für die FREDLUND'sche Konstruktion, jedenfalls in der rationellen Ausführung, durch die Formel

$$K = \frac{1}{2\,T} \cdot \pi R_0^2 \cdot \frac{1}{d}\lambda \cdot \frac{\dfrac{d}{\lambda}}{2\,\alpha m_1 \left(\dfrac{d}{\lambda}\right)^3 + (\alpha + 2\,\beta m_1)\left(\dfrac{d}{\lambda}\right)^2 + (\beta + 2\,\mu m_1)\left(\dfrac{d}{\lambda}\right) + \mu} (T_1 - T_2)$$

oder

$$K = A \cdot \frac{p}{\alpha_1 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4} (T_1 - T_2) \qquad (35)$$

dargestellt werden kann, was auch FREDLUND selbst aus seinen Messungen gefunden hat. —

Wir ersehen aus diesem Ausdruck, dass K bei einem bestimmten Wert von $\frac{d}{\lambda}$ ein Maximum K_{max} hat. Der entsprechende Wert für $x = \frac{d}{\lambda}$ wird bestimmt aus der Gleichung

$$4\,\alpha m_1 \left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max}^3 + (\alpha + 2\,\beta m_1)\left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max}^2 = \mu. \qquad (36)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Wert für $\left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max}$ von dem Akkommodationskoeffizienten a abhängig wird, was auch bereits von FREDLUND nachgewiesen wurde. Wir erhalten hieraus:

$$\begin{aligned}
\text{Für } a = 1 \quad , \qquad & x_{ber} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max} = 1{,}60 \\
a = 0{,}70, \qquad & x_{ber} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max} = 2{,}02 \\
a = 0{,}50, \qquad & x_{ber} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max} = 2{,}38 \\
a = 0{,}30, \qquad & x_{ber} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)_{max} = 2{,}88.
\end{aligned}$$

Aus der Formel für K geht hervor, dass die Radiometerkraft K eine Funktion von $\frac{d}{\lambda}$ und von dem Akkommodationskoeffizienten a ist. Dies erklärt, weshalb die Radiometerkraft für denselben Apparat in Deuterium und Wasserstoff bei demselben Wert von $\frac{d}{\lambda}$, bezw. für denselben Druck p, verschieden sein kann, wie FREDLUND experimentell gefunden hat.

Aus dem Ausdruck von K erhalten wir für $\frac{d}{\lambda} \to 0$

$$f_0 = \frac{K_{\text{Deut.}}}{K_{\text{Wass.}}} = 1$$

und für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$

$$f_\infty = \frac{K_{\text{Deut.}}}{K_{\text{Wass.}}} = \frac{m_{1,\,\text{W}}}{m_{1,\,\text{D}}} = \frac{a_\text{W}}{2 - a_\text{W}} \cdot \frac{2 - a_\text{D}}{a_\text{D}}. \qquad (37)$$

Der Akkommodationskoeffizient von Deuterium ist m. W. noch nicht experimentell bestimmt[1]. Man kann aber annehmen, dass die Akkommodationskoeffizienten von Helium und Deuterium für dieselbe Oberfläche der Grössenordnung nach angenähert gleich sind. Setzen wir annäherungsweise $a_\text{W} = 0{,}70$ und $a_\text{D} = 1$ für sehr rauhe Oberflächen, erhalten wir für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$:

$$f_\infty = \frac{m_{1,\,\text{W}}}{m_{1,\,\text{D}}} = \frac{a_\text{W}}{2 - a_\text{W}} \cdot \frac{2 - a_\text{D}}{a_\text{D}} = \text{ca. } 0{,}54,$$

während FREDLUND für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ experimentell

$$f_{\infty,\,\text{obs}} = \text{ca. } 0{,}50 \text{ und } f_{0,\,\text{obs}} = \text{ca. } 1.0$$

gefunden hat.

Um die FREDLUND'schen Messungen mit der Theorie vergleichen zu können, müssen wir überlegen, welchen Einfluss eine direkte mechanische bezw. thermische Verbindung zwischen den grossen Platten A und B haben wird. Durch eine Verbindung werden neue Gleitströme (vgl. Fig. 12 b) von der kalten Platte B entlang der Verbindungswand nach der warmen Platte entstehen. Sind die Platten A und B hinreichend gross verglichen mit den Dimensionen der Scheibe C und liegt der Apparat horizontal, ist es möglich, dass diese Gleitströme, jedenfalls bei höherem Druck, praktisch gesprochen nicht zwischen der Scheibe und den grossen Platten durchdringen, und also nur am Rande des Apparates und ausserhalb der Scheibe Wirbelströme bilden, wie in Fig. 12 b angedeutet. In diesem Falle werden die Gleitströme wahrscheinlich nur geringen Einfluss auf die Radiometerkraft ausüben.

Viel komplizierter wird aber der Zustand, wenn der Apparat, wie bei den FREDLUND'schen Messungen, vertikal steht, und ausserdem die Scheibe C exzentrisch zwischen den grossen

[1] Nach der Beendigung dieser Arbeit hat J. AMDUR (Journal of chem. physics, 14, 339, 1946) neue Bestimmungen der Akkommodationskoefficienten der Gase glattem, blankem Platin gegenüber durchgeführt.

Es wurde gefunden für Wasserstoff $a_\infty = 0{,}316$, für Helium $a_\infty = 0{,}409$ und für Deuterium $a_\infty = 0{,}396$.

Platten angebracht ist in der Weise, dass sie an einigen Stellen dicht an den Verbindungsring zwischen den Platten heranreicht. In dieser Aufstellung werden die Rand-Gleitströme zwischen den Platten und der Scheibe durchdringen und, da sie dieselbe Richtung haben, die bestehenden Gleitströme verstärken. Hierdurch wird die gemessene Radiometerkraft grösser als der auf Grund der Formel (34) berechnete Wert. —

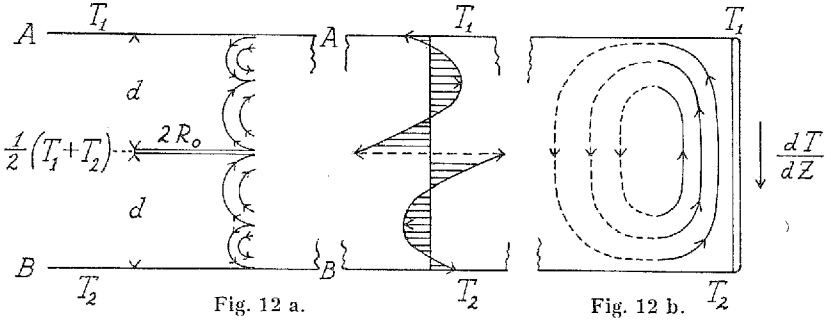

Fig. 12 a. Fig. 12 b.

In diesem Falle muss nämlich in dem Ausdruck für $\sum \Delta T$, Formel (33), noch ein Glied, das aber einer exakten Berechnung nicht zugänglich ist, hinzugefügt werden. Dieses Glied muss jedenfalls proportional mit $(T_1 - T_2)$ sein. Wir können also annäherungsweise schreiben:

$$\sum \Delta T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2\, m_1 \frac{d}{\lambda}} (T_1 - T_2) + \nu \cdot (T_1 - T_2),$$

wo ν von den Dimensionen und wahrscheinlich von $\frac{d}{\lambda}$ abhängen wird.

Wir werden also für $\sum \Delta T$ schreiben:

$$\sum \Delta T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2\, m_1 \frac{d}{\lambda}} (T_1 - T_2) \cdot \varphi;$$

es darf aber nicht erwartet werden, dass φ eine Konstante ist. Aus den FREDLUND'schen Messungen kann also

$$\varphi = \frac{K_{\text{obs}}}{K_{\text{ber}}}$$

bestimmt werden, wenn K_{ber} aus der Formel (34) berechnet wird.

FREDLUND hat durch Präzisionsmessungen mit seinem zweiten Apparat, in dem alle massgebenden Oberflächen mit Platinschwarz rauh gemacht waren, ein grosses Beobachtungsmaterial für verschiedene Gase gewonnen.

Die Apparatkonstanten waren

$$T_1 - T_2 = 20^\circ\,\mathrm{C}, \quad d = 0{,}042\ \mathrm{cm}, \quad \pi R_0^2 = 3{,}161\ \mathrm{cm}^2.$$

Die Akkommodationskoeffizienten der Gase wurden jedoch von FREDLUND nicht gemessen und müssen daher auf Grund der Bestimmungen von MARTIN KNUDSEN geschätzt werden.

In den folgenden Tabellen sind einige FREDLUND'sche Messungen für die verschiedenen Gase und die auf Grund der Formel (34) berechneten Werte wiedergegeben.

p ist der Druck in Bar (1 mm Hg = 1330 Bar), während K_{beob} und K_{ber} in Dyn/cm^2 angegeben sind. —

1. Helium. ${}_1\lambda_{10^\circ} = 18{,}51$ cm, $a = 0{,}90$.

p_{Bar}	K_{obs}	K_{ber} (34)	$\varphi = \frac{K_{\mathrm{obs}}}{K_{\mathrm{ber}}}$
414.1	13.31	8.11	1.65
825.3	17.13	9.04	1.90
1025	Max. 17.43	8.80	1.98
2809	11.36	5.07	2.24
6800	3.93	1.80	2.18
8783	2.62	1.252	2.09
10620	1.94	0.934	2.08
12630	1.44	0.707	2.04
37090	0.20	0.106	1.90

2. Wasserstoff. ${}_1\lambda_{10^\circ} = 11{,}81$, $a = 0{,}75$.

p_{Bar}	K_{obs}	K_{ber} (34)	$\varphi = \frac{K_{\mathrm{obs}}}{K_{\mathrm{ber}}}$
319.9	9.34	6.01	1.55
636.0	11.22	6.51	1.72
690	Max. 11.24	6.44	1.74
1865	7.43	3.89	1.91
5758	1.80	1.01	1.79
8186	1.068	0.584	1.83
8640	0.961	0.534	1.80
28580	0.106	0.064	1.66

3. Deuterium. ${}_1\lambda_{10^\circ} = 11{,}81$, $a = 0{,}90$.

p_{Bar}	K_{obs}	K_{ber} (34)	$\varphi = \frac{K_{\text{obs}}}{K_{\text{ber}}}$
287.8	7.43	5.32	1.40
575	Max. 8.76	5.75	1.53
1947	4.687	3.00	1.56
5637	0.992	0.792	1.25
7156	0.642	0.546	1.17
7569	0.578	0.449	1.16
25710	0.0525	0.0577	0.91

4. Argon. ${}_1\lambda_{10^\circ} = 6{,}57$, $a = 1{,}00$.

p_{Bar}	K_{obs}	K_{ber} (34)	$\varphi = \frac{K_{\text{obs}}}{K_{\text{ber}}}$
143.1	4.01	2.68	1.50
280.0	5.12	2.93	1.75
345.0	Max. 5.22	2.85	1.83
687.3	4.26	2.091	2.04
1209	2.556	1.277	2.00
2531	0.830	0.505	1.64
3291	0.491	0.341	1.44
3598	0.410	0.297	1.38
12560	0.0232	0.0336	0.69

5. Stickstoff. ${}_1\lambda_{10^\circ} = 6{,}18$, $a = 1{,}00$.

p_{Bar}	K_{obs}	K_{ber} (34)	$\varphi = \frac{K_{\text{obs}}}{K_{\text{ber}}}$
113.7	2.490	2.373	1.05
226.6	4.518	3.985	1.13
320.0	Max. 4.690	2.683	1.75
555.5	4.060	2.165	1.88
1080	2.320	1.268	1.84
2402	0.668	0.469	1.43
2908	0.456	0.353	1.29
3069	0.405	0.325	1.25
10150	0.0272	0.0419	0.65

Aus diesen Tabellen erhellt, dass die von FREDLUND gemessenen Werte im allgemeinen anderthalb bis zweimal so gross sind wie die aus der Formel (34) berechneten Werte K_{ber}.

Das Verhältnis $\frac{K_{obs}}{K_{ber}} = \varphi$ ist, in Übereinstimmung mit der Erwartung, keine Konstante und ändert sich in dem ganzen Bereich von ca. 1 auf ca. 2. Mit Ausnahme der Werte bei dem höchstem Druck, die nach FREDLUND ziemlich unsicher sind, sind die beobachteten Werte grösser als die nach Formel (34) berechneten, wie auch erwarten werden sollte, da $1 \leqq \varphi$.

Die beobachteten Werte K_{obs} können annäherungsweise durch die empirische FREDLUND'sche Formel

$$K_{obs} = A \frac{p}{1 + b \cdot p + c \cdot p^2 + d \cdot p^3}$$

dargestellt werden.

Die Werte der Konstanten sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	$1^{\lambda}{}_{283°,1}$	A (mA)	$b \cdot 10^3$	$c \cdot 10^6$	$d \cdot 10^9$
Helium	18.51	26.83	1.645	0.511	0.215
Wasserstoff	11.54	26.47	2.615	1.104	0.722
Deuterium	11.54	25.88	3.476	1.369	1.440
Argon	6.57	25.21	5.741	2.914	7.95
Stickstoff	6.18	25.00	6.600	2.424	11.47

Die Einheit für A ist mA, d. h. die in dem Kompensationssystem gemessene Stromstärke in Milliampère. Um A in Dyn/cm^2 anzugeben, muss

$$1\, mA = 2{,}19 \cdot 10^{-3} \text{ Dyn/cm}^2$$

gesetzt werden. Es wäre wahrscheinlich möglich, die Werte von A, b, c und d durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate etwas zu verbessern. Eine weitere Diskussion dieser FREDLUND'schen Messungen, jedenfalls bei höherem Druck, hat m. E. kein Interesse, weil die vertikale Aufstellung des Apparates und die exzentrische Lage der Scheibe eine genauere theoretische Behandlung ausschliessen; ich werde deshalb vorläufig hierauf nicht eingehen.

Aus den obigen Tabellen geht weiter hervor, dass der von FREDLUND gefundene Unterschied zwischen Wasserstoff und Deuterium insbesondere bei höherem Druck einwandfrei durch den Unterschied im Akkommodationskoeffizienten der beiden Gase erklärt werden kann. Für $\frac{d}{\lambda} \geqq 0$ ist der Unterschied in der Radiometerkraft sehr gering, um allmählich für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ bis auf 100 % anzuwachsen, so dass

$$f_\infty = \frac{K_{D,\infty}}{K_{W,\infty}} = \text{ca. } 0{,}5$$

wird, in Übereinstimmung damit dass die Akkommodationskoeffizienten von Wasserstoff und Deuterium für sehr rauhe Oberflächen ca. 0,70 und ca. 1,0 sein werden. Zur Erklärung dieses Unterschieds ist es also nicht nötig, anzunehmen, dass die mittlere freie Weglänge in Wasserstoff und Deuterium verschieden ist. —

Abgesehen von den Verwendungsmöglichkeiten des FREDLUND'schen Manometers in der vorliegenden Ausführung wäre es für die Theorie und für den Einfluss des Akkommodationskoeffizienten auf die Radiometerkraft von Bedeutung, die FREDLUND'sche Konstruktion in der von mir genannten rationellen Ausführung experimentell zu untersuchen und mit der oben angegebenen Theorie zu vergleichen. —

§ 6. Die Theorie der KLUMB-SCHWARZ'schen Manometerausführung wird von den Temperaturen T_1 und T_2, und ausserdem von Anzahl, Lage, Grösse und Form der Prallflächen abhängen; insbesondere wird die gegenseitige Lage der Prallflächen bei niedrigen Drücken von Bedeutung sein, weil hierdurch gegenseitige Schirmwirkungen der Prallflächen entstehen können. Bei dem von KLUMB and SCHWARZ verwendeten, ringförmigen Spalt kann aber die Lage und die Anzahl der Prallflächen so gewählt werden, dass die Schirmwirkung praktisch gesprochen vernachlässsigbar ist.

Die Akkommodationskoeffizienten der verschiedenen Oberflächen den Gasen gegenüber werden auch von Einfluss sein; einfachheitshalber werden wir sie vorläufig für alle Oberflächen in dem Instrument gleich eins setzen, also $a = 1$.

Wir werden also im folgenden von etwaigen Schirmwirkungen bei niedrigem Druck und von dem Einfluss des Akkommodationskoeffizienten absehen und nur ganz kurz die beiden Grenzfälle $\frac{d}{\lambda} = 0$ und $\frac{d}{\lambda} \to \infty$, wo $d = R - r$, näher betrachten; ferner werden wir die Radiometerkraft, bezw. das Drehmoment, auf die Drehachse in P_1 bezogen, auf einen schiefgestellten Planstreifen

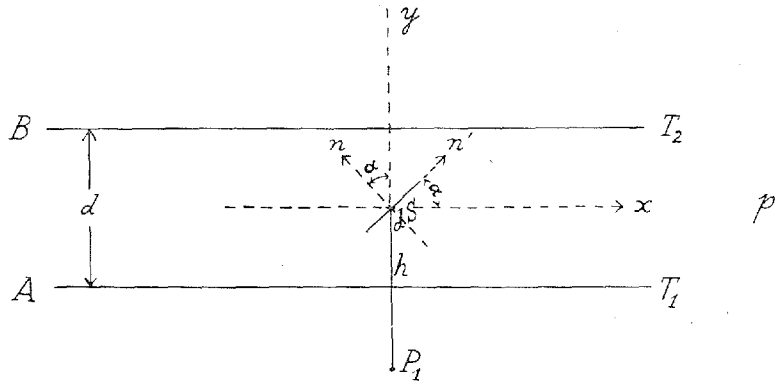

Fig. 13.

zwischen zwei grossen, parallelen Platten auf den Temperaturen T_1 und T_2 berechnen, da eine Ringspalte, für die $\frac{R-r}{r} \ll 1$, in erster Näherung durch zwei parallele Platten ersetzt werden kann.

Wir betrachten erst den Grenzfall $\frac{R-r}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = 0$.

Die beiden grossen, vertikalen Platten A und B stehen parallel und haben die Temperaturen T_1 und T_2, wo $T_1 > T_2$; der Abstand zwischen den Platten ist d. In der Mitte zwischen den Platten steht ein vertikaler Streifen, von dem wir ein Element $dS = 1$ cm^2 betrachten. Den Winkel zwischen der Normale des Streifens und der Y-Achse nennen wir α. Die vertikale Drehachse läuft parallel mit der Z-Achse und schneidet die Y-Achse in dem Punkte P_1 im Abstande h von der Mitte des Elementes dS, Fig. 13.

Wir nehmen an, dass sich in dem Raum des Ringspaltes N_1 Moleküle per cm^3 befinden, die sich mit einer Geschwindigkeit Ω_1 von der Platte A hinweg, und N_2 Moleküle per cm^3, die sich mit der Geschwindigkeit Ω_2 von der Platte B hinweg be-

wegen. Steht der Raum zwischen den Platten A und B mit einem Raum in Verbindung, in dem die Temperatur T_2 und der Druck $p = \frac{1}{3} Nm\overline{\Omega_2^2}$ herrschen, hat man, wie bekannt, in der Gleichgewichtslage

$$\frac{1}{2} N_1 \Omega_1 = \frac{1}{2} N_2 \Omega_2 = \frac{1}{4} N \Omega_2$$

und

$$p = \frac{1}{3} Nm\overline{\Omega_2^2}.$$

Für beide Seiten des Streifens erhält man nach einer einfachen Berechnung für die totale Komponente der Radiometerkraft K_n in der Richtung der Normale n den Ausdruck:

$$K_n = \frac{2}{3\pi} N_2 m \Omega_2 [\Omega_1 - \Omega_2] \cdot \left[\sin\alpha \cos\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]. \qquad (38)$$

Für die Komponente in der n' Richtung des Elementes dS, $K_{n'}$, wo n' in der XY-Ebene liegt, erhält man für beide Seiten zusammen:

$$K_{n'} = \frac{2}{3\pi} N_2 m \Omega_2 (\Omega_1 - \Omega_2) \sin^2\alpha, \qquad (39)$$

während $K_z = 0$.

Das Drehmoment in Bezug auf die Drehachse in P_1 wird gegeben durch $P = K_x \cdot h$, wo

$$K_x = -K_n \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + K_{n'} \cos\alpha,$$

oder

$$K_x = -\frac{1}{2} p \left[\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right]\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\sin\alpha, \qquad (40)$$

woraus hervorgeht, dass $K_x = 0$ für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ein Resultat das auch einleuchtend ist.

Das Drehmoment P erreicht ein Maximum, wenn $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha$ = Max, d. h. α = ca. 41°.

Aus dem Ausdruck für K_x erhellt, dass die Ablenkung des Radiometersystemes für den Zustand $\frac{d}{\lambda} = 0$ in der negativen Richtung der X-Achse geschieht, solange $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist.

Für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$ erhält man weiter in bekannter Weise (vgl. § 7)

$$K_x = -\frac{1}{2} p \left[\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right] \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \sin \alpha \cdot \frac{1}{1 + \beta \frac{d}{\lambda}},$$

wo d durch die Dimensionen des Radiometersystemes gegeben ist, während λ die mittlere freie Weglänge des Gases bei dem Druck p bezeichnet.

Aus dem Ausdruck für K_x erhellt, dass eine zwischen zwei grossen, parallelen Platten mit verschiedenen Temperaturen T_1 und T_2 aufgehängte Platte oder Scheibe nicht nur einer Radiometerkraft in der Richtung der Normale, sondern auch einer Radiometerkraft in der Richtung n' senkrecht zur Normale n, unterliegt. Die Grösse der Kräfte ist von dem Winkel α abhängig.

Steht die Scheibe parallel zu den grossen Platten, d. h. $\alpha = 0$, heben sich die parallel zur Scheibe wirkenden Radiometerkräfte gegenseitig auf, und also $K_{n'} = 0$ und $K_n = \frac{1}{3} N_2 m \Omega_2 (\Omega_1 - \Omega_2)$ $= \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right)$. Steht die Scheibe aber senkrecht zu den grossen Platten, d. h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, erhält man $K_n = 0$ und $K_{n'}$ $= \frac{2}{3\pi} N_2 m \Omega_2 (\Omega_1 - \Omega_2) = \frac{1}{\pi} \cdot p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right)$, was auch durch eine direkte Berechnung leicht zu beweisen ist.

Diese letztere Anordnung ermöglicht es, ein absolutes Manometer zu konstruieren, für welches der Radiometereffekt in dem Gebiet $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$ unabhängig von der Bewegung der Scheibe, bezw. von dem Ausschlag der Scheibe wird, weil sich die Scheibe in diesem Falle in ihrer eigenen Ebene bewegt.

Wir gehen nun dazu über, den anderen Grenzzustand, d. h. $\frac{d}{\lambda} \to \infty$, zu betrachten; hier sind die durch den Temperaturgradienten entstehenden Gleitströme entlang den Prallflächen massgebend für die auf diesen wirksame Radiometerkraft.

Wenn mehrere Prallflächen vorhanden sind, werden die Gleitströme entlang einer Prallfläche $a\ b$ wahrscheinlich wie in Fig. 14 angegeben verlaufen. Das Gas strömt der Prallfläche entlang in der Richtung von Stellen niedriger Temperatur nach Stellen höherer Temperatur. Wird der Abstand der Prallflächen mit l

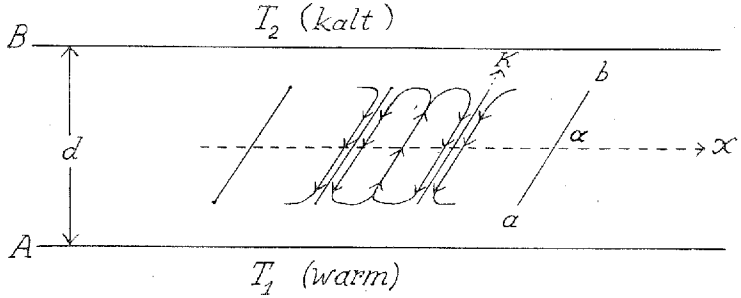

Fig. 14.

bezeichnet, erhalten wir für die Geschwindigkeit w' dieser Gleitströmung (vgl. Seite 16):

$$w' = \frac{c_1}{1 + 6\frac{\varepsilon}{l}}\left(1 - 6\frac{z}{l} + 6\left(\frac{z}{l}\right)^2\right), \text{ wo } c_1 = \frac{3}{4} k_1 \frac{\eta}{\varrho T} \frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{l}} \frac{dT}{ds}.$$

Die hierdurch auf die Prallfläche $a\ b$ wirkende Tangentialkraft K in der Richtung der Fläche ist die totale Radiometerkraft per cm^2. Nach einer einfachen Berechnung erhält man für beide Seiten der Prallfläche

$$K_{\text{cm}^2} = 2\,\eta\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = \frac{12}{l} \cdot \frac{3}{4} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{\lambda}{l}\right)\left(1 + 6\,k_2\frac{\lambda}{l}\right)} \cdot \frac{dT}{ds},$$

oder

$$K_{\text{cm}^2} = \frac{12}{l} \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{\lambda}{l}\right)\left(1 + 6\,k_2\frac{\lambda}{l}\right)} \frac{dT}{ds}, \quad \text{wo} \quad \varrho = {}_1\varrho \cdot p,$$

weil $k_1 = k_2 = \frac{4}{3}$, während $\frac{dT}{ds}$ den Temperaturgradienten in der an die Oberfläche der Prallfläche grenzenden Gasschicht bezeichnet.

Setzen wir $\frac{dT}{ds} = \frac{T_1 - T_2}{d} \sin\alpha$, erhalten wir für das Drehmoment, $P = K_x \cdot h$, wo

$$K_x = \frac{12}{l} \cdot \frac{\eta^2}{{}_1\varrho \cdot pT} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{\lambda}{l}\right)\left(1 + 6k_2\frac{\lambda}{l}\right)} \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} \sin\alpha\cos\alpha. \quad (41)$$

Das Maximum von P wird erreicht, wenn $\alpha = 45°$, während $P = 0$ für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, was auch einleuchtend ist.

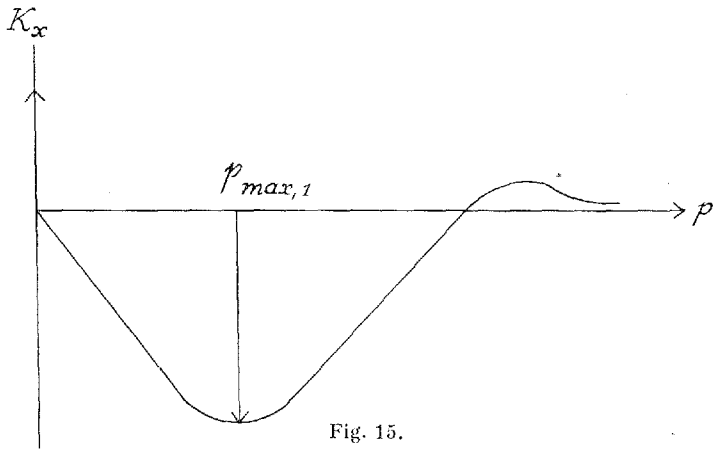

Fig. 15.

Es erhellt hieraus, dass die Ablenkung des Radiometerkörpers in der positiven Richtung der X-Achse erfolgt, solange $\alpha < \frac{\pi}{2}$, d. h. in der entgegengesetzten Richtung wie die Ablenkung im Zustande $\frac{d}{\lambda} \geqq 0$.

Für das Manometer von KLUMB und SCHWARZ wird der Verlauf der Radiometerkraft, bezw. des Drehmomentes P, also in dem ganzen Druckgebiet $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$ ungefähr so wie in Fig. 15 angegeben, woraus hervorgeht, dass sich der Apparat am besten für die Messung von niedrigen Drucken eignet.

Die Kurve für K_x in Fig. 15 ist in Übereinstimmung mit den Messungen und Mitteilungen von KLUMB und SCHWARZ.

§ 7. Aus der allgemeinen Formel für das absolute Manometer wird mit $\mu = 2$ für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$ gefunden:

$$K_{\text{cm}^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \frac{T_1 - T_2}{1 + \frac{5\pi}{24}\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)p} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \frac{T_1 - T_2}{1 + 0{,}625\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)p},$$

in Übereinstimmung mit dem wahren Grenzwert für $\frac{d}{\lambda} = 0$:

$$K_{\text{cm}^2} = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T}(T_1 - T_2),$$

wenn

$$\frac{T_1 - T_2}{T} \ll 1.$$

Bei der Verwendung des absoluten Manometers in dem Druckgebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$ kann es von Interesse sein, diesen Ausdruck mit der Formel zu vergleichen, die man annäherungsweise theoretisch ableiten kann.

In einer früheren Arbeit[1] habe ich untersucht, wie die Grenzformel

$$K_{\text{cm}^2} = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right)$$

von vereinzelten, gegenseitigen Zusammenstössen der Moleküle zwischen den Platten A und B beeinflusst wird. Einfachheitshalber wurde bei der Ableitung der Akkommodationskoeffizienten des Gases $\alpha = 1$ gesetzt, und ausserdem $\frac{T_1 - T_2}{T} \ll 1$. Für den Wert von K_{cm^2} wurde

$$K_{\text{cm}^2} = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \alpha\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)p}, \qquad (42)$$

gefunden, wo $\alpha = \frac{3}{4}$.

$\lambda = \frac{{}_1\lambda}{p}$ ist die nach der CHAPMAN'schen Formel berechnete

[1] SOPHUS WEBER, loc. cit. S. 25. 1937.

freie Weglänge in dem Gase zwischen den Platten, wenn die Gasmasse als einheitliches Gas aufgefasst wird, und also

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, N \pi \sigma^2},$$

wo $\pi\sigma^2$ den mittleren effektiven Stossquerschnitt der Moleküle bezeichnet. N ist bestimmt durch $p = \frac{1}{3} N m \overline{\Omega_2^2}$, wo p der Druck ausserhalb der Platten ist, während zwischen und am Rande der Platten die folgende Bedingung gilt:

$$\frac{1}{2} N_1 \Omega_1 = \frac{1}{2} N_2 \Omega_2 = \frac{1}{4} N \Omega_2.$$

Bei Berechnung der von den Molekülen übertragenen Bewegungsmenge wurde vorausgesetzt, dass alle gegenseitigen Zusammenstösse gleichwertig sind und dass die direkt von Zusammenstössen in einem Volumenelement kommenden Moleküle gleichmässig verteilt in allen Richtungen ausgestrahlt werden; dies ist der Fall, wenn die Moleküle als harte, elastische Kugeln aufgefasst werden können. Ausserdem ist angenommen, dass ein Molekül höchstens an einem Zusammenstoss zwischen zwei auf einander folgenden Stössen gegen die Wände teilnimmt. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, werden die Moleküle, welche infolge von Zusammenstössen die Platten nicht erreichen, durch direkt von Zusammenstössen kommende Moleküle ersetzt.

Die in die Ableitung eingehende Voraussetzung, dass alle gegenseitigen Zusammenstösse der Moleküle gleichwertig sind, verlangt aber eine nähere Überprüfung. Betrachten wir zwei grosse Platten 1 und 2, bezw. das absolute Manometer von KNUDSEN, mit den Temperaturen T_1 und T_2, die nur wenig von einander abweichen, sieht man, dass man es in dem Raum zwischen den Platten 1 und 2 mit zwei Molekülgruppen 1 und 2 zu tun hat, in welchen sich die Moleküle in entgegengesetzten Richtungen bewegen; für $T_1 = T_2$ bilden die zwei Molekülgruppen zusammen eine homogene Gasmasse im MAXWELL'schen Zustand. In dem Zustande $\frac{d}{\lambda} \to 0$ werden vereinzelte Zusammenstösse der Moleküle beider Gruppen einsetzen. Von Platte 1 bezw. 2 geht die Molekülgruppe 1 bezw. 2 aus; die Anzahl der ausgestrahlten Moleküle per Sek. und per cm^2 ist

$$\frac{1}{2} N_1 \Omega_1 \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{2} N_2 \Omega_2.$$

Die von der Platte 1 bezw. 2 ausgestrahlten Moleküle sind gegen die Platte 2, bezw. 1, gerichtet und nach dem Cosinusgesetz

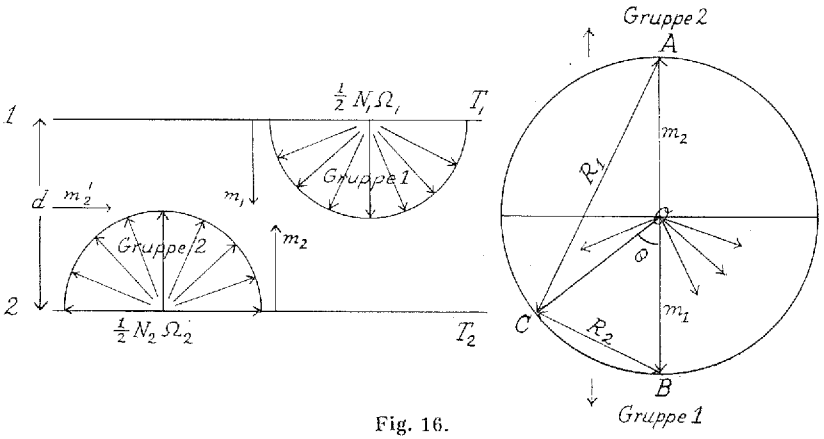

Fig. 16.

verteilt. Die Geschwindigkeitsverteilung für jede Gruppe ist die MAXWELL'sche.

In dem Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$ wird von den von der Platte 1 bezw. 2 ausgestrahlten Molekülen $\frac{1}{2} N_1 \Omega_1$ bezw. $\frac{1}{2} N_2 \Omega_2$ ein Teil $N_1 \Omega_1 \frac{d}{\lambda}$ bezw. $N_2 \Omega_2 \frac{d}{\lambda}$ die Platte 2 bezw. 1 nicht erreichen, weil die Moleküle in dem Raum zwischen den Platten einen Zusammenstoss erlitten haben. Die Anzahl von Molekülen, die per Sek. und per cm^3 zwischen den Platten gegenseitige Zusammenstösse erlitten haben, ist also

$$\frac{N_1 \Omega_1}{\lambda} + \frac{N_2 \Omega_2}{\lambda},$$

wenn ein Molekül höchstens an einem Zusammenstoss teilnimmt. Dies wird der Fall sein für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$, wenn dieser Zustand dem Zustande $\frac{d}{\lambda} = 0$ sehr nahe kommt. In diesem Falle kann auch annäherungsweise für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$, in der obenstehende Summe $N_1 \Omega_1 = N_2 \Omega_2$ gesetzt werden, so

dass die totale Anzahl von Zusammenstössen per Sek. und per cm^3 $\frac{N\Omega_2}{\lambda}$ wird. Die Hälfte dieser Moleküle ist nach den gegenseitigen Zusammenstössen gegen die Platte 1 bezw. 2 gerichtet.

Die gegenseitigen Zusammenstösse der Moleküle der Gruppen 1 und 2 können, sofern ein Molekül nur an einem Zusammenstoss teilnimmt, in drei Arten aufgeteilt werden, nämlich:

a) Zusammenstoss von 2 Molekülen der Gruppe 1,

b) Zusammenstoss von 2 Molekülen der Gruppe 2,

c) Zusammenstoss von einem Molekül der Gruppe 1 bezw. 2 mit einem Molekül der Gruppe 2 bezw. 1.

Betrachten wir nun die Zusammenstösse unter a) und b), ersehen wir leicht, dass diese Zusammenstösse — genau wie in der Theorie der Diffusion der Gase — keinen Einfluss auf die übertragene Bewegungsmenge oder Energie haben können. Von Bedeutung für den Transport von Bewegungsmenge und Energie sind also nur Zusammenstösse zwischen den Molekülen 1 und 2, und wir müssen daher für die verschiedenen Apparate und Konstruktionen die Anzahl der unter c) aufgeführten Zusammenstösse berechnen, da diese Anzahl im allgemeinen von der geometrischen Form des Messapparates abhängig sein wird.

Ist die Temperaturdifferenz zwischen den Molekülgruppen 1 und 2 sehr klein, ist es einleuchtend, dass ein Molekül m_2' (Fig. 16), das sich parallel zu den Platten 1 und 2 bewegt, dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt gegen ein Molekül der Gruppe 1 bezw. 2 zu stossen. — Nennen wir die Anzahl der Stösse gegen Moleküle der Gruppe 1, n_1 und gegen Moleküle der Gruppe 2, n_2, erhalten wir für Moleküle, die sich parallel zu den Platten bewegen

$$\frac{n_1}{n_2} = 1 \text{ oder } \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1}{2}.$$

Anders liegen die Verhältnisse für ein Molekül, das sich in der Richtung senkrecht zu den Platten bewegt. Betrachten wir ein Molekül m_2, das sich in der Richtung von der Platte 2 nach der Platte 1 und senkrecht zu diesen bewegt, ist es einleuchtend, dass das Molekül m_2 eine grössere Wahrscheinlichkeit besitzt gegen ein Molekül der Gruppe 1 als gegen ein Mole-

kül der Gruppe 2 zu stossen, weil die relative Geschwindigkeit des Moleküls m_2 und der sämtlichen Moleküle der Gruppe 1 grösser ist als die relative Geschwindigkeit des Moleküls m_2 und der sämtlichen Moleküle der Gruppe 2. In diesem Falle wird

$$\frac{n_1}{n_1+n_2} > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{n_2}{n_1+n_2} < \frac{1}{2}.$$

Bei der weiteren Berechnung werden wir einfachheitshalber annehmen, dass alle Moleküle der Gruppen 1 und 2 dieselbe Geschwindigkeit C_1 bezw. C_2 besitzen, und dass C_1 und C_2 nur wenig von einander abweichen, so dass wir annäherungsweise mit dem mittleren Wert $C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$ rechnen dürfen.

Der mittlere Wert der relativen Geschwindigkeit eines Moleküls m_2, das sich mit der Geschwindigkeit C senkrecht zu den Platten bewegt, gegenüber allen Molekülen der Gruppe 1, wird in diesem Falle (Fig. 16):

$$R_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} C\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)\,C \qquad (43)$$

und gegenüber den Molekülen der Gruppe 2:

$$R_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} C\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,C. \qquad (44)$$

Betrachten wir die beiden Gruppen 1 und 2 zusammen, bilden diese ein homogenes Gas, worin sich die Moleküle gleichmässig in allen Richtungen mit der Geschwindigkeit C bewegen (Clausius-Gas); hierfür erhalten wir in derselben Weise den bekannten Ausdruck:

$$R_3 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} C\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\,C. \qquad (45)$$

Wird das MAXWELL'sche Verteilungsgesetz für die Molekulargeschwindigkeiten eingeführt, muss, wie bekannt, der Faktor $\frac{4}{3}$ in R_3 durch $\sqrt{2}$ ersetzt werden.

Bezeichnet in einem homogenen Gas N die Zahl der Moleküle per cm^3, sind die Stosszahlen n_1, n_2 und $(n_1 + n_2)$ in den Gruppen 1, 2 und in dem homogenen Gas durch die relativen Geschwindigkeiten bestimmt. Wir haben hierfür:

$$n_1 = \frac{N}{2} \cdot \pi\sigma^2 \cdot R_1 = N \cdot \pi\sigma^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1) \cdot C$$

$$n_2 = \frac{N}{2} \cdot \pi\sigma^2 \cdot R_2 = N\pi\sigma^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot C \text{ und}$$

$$n_1 + n_2 = N \cdot \pi\sigma^2 \cdot R_3 = N\pi\sigma^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot C.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 - \sqrt{2}}{4} = 0{,}645 = \beta$$

und

$$\frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}355 = 1 - \beta,$$

während für ein Molekül, das sich parallel zu den Platten bewegt,

$$\frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

gilt.

Wird der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des stossenden Moleküls m_2 und der Normale der grossen Platten 1 und 2 mit φ bezeichnet, können wir mit hinreichender Genauigkeit die folgende Interpolationsformel anwenden:

$$\frac{n_1}{n_1 + n_2} = \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \cos\varphi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cos\varphi = S_1;$$

wir finden hieraus im Mittel für den Raum zwischen den beiden Platten:

$$\left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right)_{\text{mitt}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{8} = 0{,}573 = S_1.$$

In meiner früheren Ableitung der Manometerformel in dem

Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$ wurde mit $(n_1 + n_2)$ bezw. $\frac{N\Omega_2}{\lambda}$ effektiven Zusammenstössen per cm³ zwischen den beiden Platten gerechnet, und es wurde die folgende Formel abgeleitet:

$$K_{cm^2} = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{d}{\lambda}}.$$

Aus dem Vorhergehenden erhellt aber, dass man bei zwei grossen, parallelen Platten nur mit n_1 effektiven gegenseitigen Zusammenstössen zu rechnen hat; hieraus folgt, wie leicht zu sehen ist, dass die Formel geschrieben werden muss:

$$K_{cm^2} = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4} S_1 \left(\frac{d}{\lambda} \right)},$$

oder

$$K_{cm^2} = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 + 0{,}43 \left(\frac{d}{\lambda} \right)}. \qquad (46)$$

Sind die Akkommodationskoeffizienten für die beiden grossen Platten 1 und 2 dieselben, kann man den Einfluss des Akkommodationskoeffizienten auf den Wert von S_1 vernachlässigen. —

Ist $\frac{T_1 - T_2}{T_2} \ll 1$, kann die Formel (46) auch folgendermassen geschrieben werden:

$$K_{cm^2} = \frac{1}{4} \cdot p \cdot \frac{1}{1 + \alpha \left(\frac{d}{\lambda} \right) p} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

wo $\alpha = 0{,}43$.

Wir können nun diese Formel mit den Messungen von FREDLUND vergleichen und wählen hierfür die mit dem zweiten FREDLUND'schen Apparat gewonnenen Messreihen mit den Konstanten

$$d = 0{,}042 \text{ cm}, \quad 2R = \text{ca. } 2 \text{ cm} \quad \text{und} \quad T_1 - T_2 = 20° C.$$

Hieraus erhellt, dass $\frac{2R}{d} = \text{ca. } 50$, so dass dieses Instrument als ein absolutes Manometer aufgefasst werden darf, jedenfalls

für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$, wo keine Gleitströme vorhanden sind. —

Um den Einfluss des Akkommodationskoeffizienten weitgehendst zu eliminieren, waren alle massgebenden Oberflächen in diesem Radiometersystem mit Platinschwarz rauh gemacht; ausserdem wurde der Abstand d während der Messungen durch eine elektromagnetische Kompensation der Radiometerkraft konstant gehalten.

FREDLUND hat das umfangreiche Beobachtungsmaterial für die Gase Helium, Wasserstoff, Deuterium, Argon und Stickstoff in fünf Tabellen[1] wiedergegeben. Für die in diesen Tabellen aufgeführten Messungen gilt ungefähr:

$$\text{Für Tabelle V:} \quad 0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \text{ca. } 85$$

$$\text{» » IV:} \quad 0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \text{» } 3{,}7$$

$$\text{» » III:} \quad 0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \text{» } 0{,}95$$

$$\text{» » II:} \quad 0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \text{» } 0{,}15$$

$$\text{» » I:} \quad 0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \text{» } 0{,}03$$

Verwenden wir für jede Messreihe und für jedes Gas die Formel

$$\frac{K}{T_1 - T_2} = A \cdot \frac{p}{1 + bp + cp^2 + d \cdot p^3},$$

können wir den Wert von b bestimmen und hieraus den Faktor α berechnen, weil $\alpha = b \cdot \frac{1}{4} \frac{\lambda}{d}$.

	α_V	α_{III}	α_{II}	α_I
	Tabelle V	Tabelle III	Tabelle II	Tabelle I
Helium: He	0.725	0.732	1.08	1.20
Wasserstoff: H_2	0.719	0.779	1.30	1.39
Deuterium: D_2	0.955	0.800	1.32	1.42
Argon: Ar	0.898	0.789	1.33	1.52
Stickstoff: N_2	0.972	0.850	1.37	1.52

[1] E. FREDLUND: loc. cit. (b) S. 4—9.

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass der beobachtete Wert von α in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$ etwas zunimmt und dass der experimentelle Wert von α bedeutend grösser ist als der nach der klassischen kinetischen Theorie berechnete Wert $\alpha = 0{,}43$. Der gefundenen Variation von α, bezw. dem Anwachsen von α für $\frac{d}{\lambda} \to 0$, braucht wahrscheinlich keine grosse Bedeutung zugemessen zu werden, zumal hierfür verschiedene Erklärungen möglich sind, wie z. B. ein minimales Loch in dem Apparat, bezw. bei niedrigen Drucken Anwesenheit oder Abgabe einiger schwerer Dämpfe usw.

Der Unterschied zwischen dem berechneten Wert $\alpha = 0{,}43$ und dem beobachteten, mittleren Wert $\alpha =$ ca. 0,85 ist aber so gross, dass er wahrscheinlich nicht durch den Einfluss eventueller Verunreinigungen der Gase durch schwere Dämpfe, selbst in einem komplizierten Apparat, erklärt werden kann.

Unter der Annahme, dass die entwickelte Theorie für die gegenseitigen Zusammenstösse der Moleküle in den beiden Gruppen annäherend richtig ist, würde sich aus dem Wert $\alpha =$ ca. 0,85 ein Wert von λ ergeben, der nur gleich der Hälfte des klassischen CHAPMAN'schen Wertes ist, d. h. ein Stossquerschnitt der Moleküle von ca. $2\pi\sigma^2$, wo $\pi\sigma^2$ den CHAPMAN'schen Stossquerschnitt bezeichnet.

Die Erklärung von diesem Unterschied kann daher vielleicht darin gesucht werden, dass es in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$, wo nur vereinzelte Zusammenstösse zwischen den Molekülen stattfinden, nicht erlaubt ist, die Moleküle als harte, elastische Kugeln anzusehen.

Es wird dann in diesem Gebiet, in Übereinstimmung mit den Resultaten der Untersuchungen über Zusammenstösse von nicht-identischen Molekülen in Molekularstrahlen, notwendig, das wellenmechanische Modell der Moleküle zu gebrauchen. — In diesem Falle wird, wie u. a. MASSEY und MOHR[1] gezeigt haben, der effektive Stossquerschnitt grösser und also der Wert von λ in demselben Verhältnis kleiner.

Laut den aus den Untersuchungen mit Molekularstrahlen

[1] H. S. W. MASSEY und C. B. O. MOHR: Proc. Roy. Soc. A 141, 434, 1933.
» » » » A 144, 188, 1934.

für den effektiven Stossquerschnitt gewonnenen Resultaten muss angenommen werden, dass der einzelne Zusammenstoss zwischen zwei Molekülen nach den Gesetzen der Wellenmechanik zu behandeln ist, während es laut der kinetischen Gastheorie erlaubt ist, die klassische Mechanik anzuwenden, wenn es sich um den mittleren Wert von vielen gegenseitigen Zusammenstössen handelt.

Der effektive Stossquerschnitt wird nämlich laut der Wellenmechanik u. a. abhängig von dem Wert der zugeordneten de BROGLIE'schen Wellenlänge λ', und man findet hieraus für den effektiven Stossquerschnitt s_{11} für *identische* Moleküle[1]

$$\text{für } \lambda' = 0, \quad s_{11} = 2\pi\sigma^2 \text{ und}$$
$$\text{für } \lambda' = \infty, \; s_{11} = 8\pi\sigma^2,$$

wo $\pi\sigma^2$ den klassischen CHAPMAN'schen Stossquerschnitt bezeichnet. Hieraus würde folgen, dass der Wert der Hilfsgrösse λ, die mittlere freie Weglänge im Gase, der für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$ in Betracht kommt, bedeutend kleiner ist als der klassische CHAPMAN'sche Wert.

Vollständigkeitshalber muss aber noch erwähnt werden, dass E. FREDLUND mit seiner ersten Manometerkonstruktion, für welche die Konstanten

$$d = 0{,}485 \text{ cm} \quad 2R = \text{ca. } 1{,}50 \text{ cm} \quad \text{und} \quad T_1 - T_2 = 20^\circ \text{C}$$

waren, einen Wert von α für die Gase H_2, N_2 und Ar von im Mittel ca. 0,40 gefunden hat. Das Beobachtungsmaterial in diesen Messreihen ist aber für das Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$ nicht sehr gross, und ausserdem muss diese Untersuchung als eine Bestimmung der Radiometerkraft auf eine gut wärmeleitende, kleine Scheibe in einem Temperaturfeld karakterisiert werden. — Es wäre aus theoretischen Gründen von erheblichem Interesse, einige Reihen von neuen Präzisionsmessungen zur Bestimmung des Wertes von α in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$ durchzuführen; hierfür würden Unter-

[1] Vgl. EARLE H. KENNARD: Kin. Theory of Gases, 1938, S. 133 und, HARALD WERGELAND: D. Kgl. Danske Vid. Selskab, Mat.-fys. Medd. XXIII, 14, 1945.

suchungen über die molekulare Reibung und die molekulare Wärmeleitfähigkeit in Betracht kommen. Insbesondere ist die molekulare Wärmeleitfähigkeit hierfür geeignet, weil der Einfluss der unbekannten molekularen Streuung der Moleküle nach den gegenseitigen Zusammenstössen bei dem Energietransport in dem Zustande $\frac{d}{\lambda} \to 0$ nur von geringer Bedeutung sein wird, jedenfalls dann, wenn mit parallelen Platten oder grossen coaxialen Zylinderflächen, wofür die Bedingung $\frac{R-r}{r} \ll 1$ erfüllt ist, gearbeitet wird und sehr kleine Temperaturdifferenzen verwendet werden.

Zusammenfassung.

1. In einer früheren Arbeit wurde für die Radiometerkraft per cm^2 in dem absoluten Manometer von MARTIN KNUDSEN die folgende Formel abgeleitet:

$$K_{cm^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{\pi}{24}\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 p^2 + \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{m}{8}\right)\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) p + \frac{\pi}{3} m},$$

unter der Voraussetzung, dass $\frac{d}{\lambda}$ nicht zu klein ist und $\frac{T_1 - T_2}{T_2} \ll 1$. Ausserdem wurde angenommen, dass die Oberflächen des Radiometersystems absolut rauh waren, d. h. dass für alle Gase $a = 1$, wenn a den Akkommodationskoeffizienten des Gases bezeichnet.

d ist die massgebende Abmessung des Radiometersystems; für das absolute Manometer ist d der konstante Abstand der grossen, parallelen Platten mit den Temperaturen T_1 und T_2. ${}_1\lambda = p\lambda$ ist die mittlere freie Weglänge des Gases bei dem Druck 1 Bar. λ wird auf Grund der CHAPMAN'schen Formel berechnet.

Die Formel ist gültig, wenn $\frac{d}{\lambda}$ nicht zu klein ist, und der experimentelle Wert von $\mu = \frac{\pi}{3} \cdot m$ in dem Bereich $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ ist $\mu =$ ca. 2,70.

Soll die Formel auch den Grenzwert für $\frac{d}{\lambda} = 0$ befriedigen, muss in diesem Gebiet $\mu = 2$ gesetzt werden. — Laut dieser

Formel muss für zwei Gase mit demselben Wert von λ, z. B. Helium und Deuterium, die Radiometerkraft K für denselben Apparat und bei demselben Druck p die gleiche sein. —

2. E. FREDLUND hat aber mit seinem Molekularmanometer experimentell nachgewiesen, dass die Radiometerkräfte in Wasserstoff und Deuterium für denselben Messapparat und bei demselben Druck p verschieden sind.

Für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \geqq 0$ ist die Radiometerkraft in beiden Gasen, wie auch erwartet werden sollte, praktisch gesprochen die gleiche, während in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ die Radiometerkraft in Wasserstoff ca. zweimal so gross wird als in Deuterium.

Bei diesen Untersuchungen von FREDLUND waren die Oberflächen des Radiometersystems mit Platinschwarz rauh gemacht.

3. Der Einfluss des Akkommodationskoeffizienten a wird für das absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN und für das Molekularmanometer von FREDLUND in der rationellen Ausführung theoretisch untersucht, und die Manometerformeln werden berechnet. Haben alle Oberflächen des Manometersystems denselben Akkommodationskoeffizienten a, wird für das absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN gefunden, dass der Einfluss des Akkommodationskoeffizienten auch in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ vernachlässigt werden kann.

Für das FREDLUND'sche Manometer in der rationellen Ausführung, d. h. eine kleine metallische Kreisscheibe, aufgehängt parallel zu und in der Mitte zwischen zwei grossen, parallelen Platten, die *keine* direkte Verbindung mit einander haben, wurde die folgende Formel gefunden:

$$K_{\mathrm{cm}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{24}\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)p^2 + \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{m}{8}\right)\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)p + \frac{\pi}{3}m} \cdot \frac{1}{1 + 2\,m_1\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)p}(T_1 - T_2).$$

In dieser Formel ist $2\,m_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{a}{2-a}$ und $2 \leqq \mu = \frac{\pi}{3}\,m \leqq$ ca. 2,70.

Hieraus erhellt, dass man für zwei Gase mit demselben Wert von ${}_1\lambda$ und mit verschiedenen Akkommodationskoeffizienten a_{W} und a_{D} erhält:

$$\text{für } \frac{d}{\lambda} \to 0, \quad f_0 = \left(\frac{K_D}{K_W}\right)_0 = 1 \text{ und}$$

$$\text{für } \frac{d}{\lambda} \to \infty, \quad f_\infty = \left(\frac{K_D}{K_W}\right)_\infty = \frac{a_W}{2 - a_W} \cdot \frac{2 - a_D}{a_D}.$$

Der von FREDLUND gefundene Unterschied in der Radiometerkraft von H_2 und D_2 wird hierdurch einwandfrei erklärt. Wird z. B. für die stark platinierten Oberflächen seines Manometers angenommen, dass a_W = ca. 0,70 und a_D = ca. 1, wird hieraus für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ gefunden, dass $\left(\frac{K_D}{K_W}\right)_\infty$ = ca. $\frac{1}{2}$, in Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten.

Soweit bekannt, ist der Akkommodationskoeffizient für Deuterium noch nicht gemessen[1]. Es darf aber angenommen werden, dass die Akkommodationskoeffizienten für Deuterium und Helium, weil beide Gase dasselbe Molekulargewicht haben, annäherungsweise gleich sind. Auf Grund der Messungen von MARTIN KNUDSEN ist es bekannt, dass für eine stark platinierte Oberfläche, für welche a_W = ca. 0,70, der Akkommodationskoeffizient für Helium ca. 0,95 ist; es ist nicht wahrscheinlich, dass der Akkommodationskoeffizient für reines Deuterium kleiner ist. —

Aus der obenstehenden Formel für die Radiometerkraft K in dem FREDLUND'schen Molekularmanometer geht hervor, dass die Abhängigkeit zwischen K und dem Druck p durch

$$K_{\text{cm}^3} = A \cdot \frac{p}{\alpha_1 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4} (T_1 - T_2)$$

gegeben ist.

Diese Druckabhängigkeit zwischen K und p hat FREDLUND auch aus seinen Messungen für alle untersuchten Gase gefunden.

4. Grösse und Verlauf der Radiometerkraft in dem Molekularmanometer von KLUMB und SCHWARZ werden theoretisch untersucht, und die Radiometerkraft auf einer Oberfläche oder Scheibe, die zwischen zwei grossen, parallelen Platten mit verschiedenen Temperaturen T_1 und T_2 aufgehängt ist, wird berechnet. Ist die kleine Scheibe, in der FREDLUND'chen oder die Prallfläche in der KLUMB-SCHWARZ'chen Konstruktion, parallel zu den grossen Platten, wird für den Zustand $\frac{d}{\lambda} = 0$

[1] Vgl. Fussnote S. 34.

die Radiometerkraft in der Richtung der Normale der Scheibe $K_n = \frac{1}{2} p \left[\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right]$, während sich die in der Scheibe liegenden Radiometerkräfte gegenseitig aufheben.

Steht die Prallfläche oder kleine Scheibe aber senkrecht zu den grossen Platten mit verschiedenen Temperaturen, wird für den Zustand $\frac{d}{\lambda} = 0$, $K_n = 0$, während die Resultante der in der Scheibe liegenden Radiometerkräfte $K_{n'}$ unter Berücksichtigung beider Seiten der Scheibe

$$K_{n'} = \frac{1}{\pi} \cdot p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right)$$

wird.

Hierdurch wird es möglich ein absolutes Manometer zu konstruieren, in dem der Radiometereffekt von dem Ausschlag unabhängig ist.

5. Für das absolute Manometer von MARTIN KNUDSEN wird der Bereich $\frac{d}{\lambda} \to 0$ theoretisch näher untersucht, und zwar von der Voraussetzung ausgehend, dass ein Molekül zwischen zwei auf einander folgenden Stössen gegen die Wände höchstens an einem Zusammenstoss mit anderen Molekülen teilnimmt, und dass die vereinzelten, gegenseitigen Zusammenstösse der Moleküle nicht alle in Bezug auf den Transport von Bewegungsmenge und Energie gleichwertig sind.

Von den grossen Platten 1 und 2 mit den Temperaturen T_1 und T_2 werden die Molekülgruppen 1 bezw. 2 ausgesandt; ein Molekül aus der Gruppe 1 kann nun entweder gegen ein Molekül der Gruppe 1 oder gegen ein Molekül der Gruppe 2 stossen; dasselbe gilt für ein Molekül aus der Gruppe 2. —

Für den Transport von Bewegungsmenge und Energie von der einen Platte nach der anderen sind nur Zusammenstösse zwischen Molekülen aus verschiedenen Gruppen von Bedeutung, während der Zusammenstoss zwischen Molekülen aus derselben Gruppe den Transport von Bewegungsmenge und Energie nicht beeinflusst.

Ausgehend von diesen Betrachtungen wird für den Zustand $\frac{d}{\lambda} \to 0$, und wenn $\frac{T_1 - T_2}{T} \ll 1$, die folgende Formel für die

Radiometerkraft abgeleitet:

$$K_{cm^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{T_1 - T_2}{1 + \alpha\left(\frac{d}{\lambda}\right)_1 \cdot p}, \quad \text{wo} \quad \alpha = \text{ca. } 0{,}43.$$

Aus dem grossen Beobachtungsmaterial von FREDLUND für das Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to 0$ wird aber ein Wert von α gefunden, der ungefähr doppelt so gross ist wie der berechnete Wert $\alpha = 0{,}43$.

Wenn dieser Unterschied reell ist, kann man annehmen, dass der effektive Stossquerschnitt identischer Moleküle in diesem Zustand des Gases doppelt so gross ist wie der klassische CHAPMAN'sche Stossquerschnitt.

Diese Abweichung ist in Übereinstimmung mit den bei den Bestimmungen des effektiven Stossquerschnittes für nicht-identische Moleküle nach der Methode der Molekularstrahlen gefundenen Resultaten. Stellt es sich bei anderen Untersuchungen, z. B. Untersuchungen über die molekulare Reibung und die molekulare Wärmeleitfähigkeit in dem Zustande $\frac{d}{\lambda} \to 0$, heraus, dass der beobachtete Wert von α doppelt so gross ist wie der berechnete, muss man annehmen, dass der einzelne Zusammenstoss zwischen zwei identischen Molekülen auch nach den Gesetzen der Wellenmechanik behandelt werden muss, während nach der kinetischen Gastheorie die Anwendung der klassischen Mechanik erlaubt ist, wenn es sich um den mittleren Effekt von vielen gegenseitigen Zusammenstössen handelt.

Im Hinblick auf dieses Problem wäre es von wesentlichem Interesse, dass neue Präzisionsmessungen über den Verlauf der molekularen Reibung und molekularen Wärmeleitfähigkeit in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \gtrsim 0$ vorgenommen würden. —

Der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds bin ich wieder für gewährte Stütze sehr zu Dank verpflichtet.

Indleveret til Selskabet den 19. Juni 1946.
Færdig fra Trykkeriet den 20. December 1947.