DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXIII, NR. 14

DEDICATED TO PROFESSOR NIELS BOHR ON THE OCCASION OF HIS 60TH BIRTHDAY

OM ET KOMPLEMENTARITETSFORHOLD VED SPREDNINGSEKSPERIMENTER

AV

HARALD WERGELAND
OSLO

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1945

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

Ennskjønt det særlig var eksistensen av de atomfysiske systemers stasjonære tilstander og utforskningen av disse, som ledet til kvanteteoriens nåværende stadium, har også de ikke-stasjonære fenomener, som man f. eks. har å gjøre med ved spredning av partikler eller bølger, like fra første stund stått i forgrunnen for interessen.

Man behøver bare å tenke på BOHRS bremsningsformel allerede fra 1913, fra kvantefysikkens »Mykenske tid«, som stadig finner en så utstrakt anvendelse, med eller uten de i almindelighet små korreksjoner som bølgemekanikken og relativitetsteorien forlanger.

Andre store fremskritt på dette område, som umiddelbart faller i tankene, er MÖLLERS relativistiske støtformel og BOHRS tydning av Ramsauereffekten, som fikk sitt matematiske belegg i teorien for elektronbølgenes diffraksjon i atomfelter ved FAXÉN og HOLTSMARK.

Når man bortser fra de ennå uløste problemer som knytter seg til energirike støtprosesser i den kosmiske stråling, danner kvantemekanikkens spredningsteori et særlig vakkert avsluttet hele; hensikten i det følgende er å anvende den på et skjematisk lite eksempel, som på atter en ny måte turde belyse det paradoksale i en samtidig anvendelse av to anskuelige billeder som gjensidig utelukker hverandre, eller rettere: står i det eiendommelige reciprocitetsforhold som er karakteristisk for kvanteteorien, og som nå er alminnelig kjent under begrepet komplementaritet.

For å gjøre det matematiske så enkelt som mulig vil vi betrakte spredningen av en homogen partikkelstråle på en stiv kule. Regningen kan da gjennomføres explicit og leder til forholdsvis enkle uttrykk.

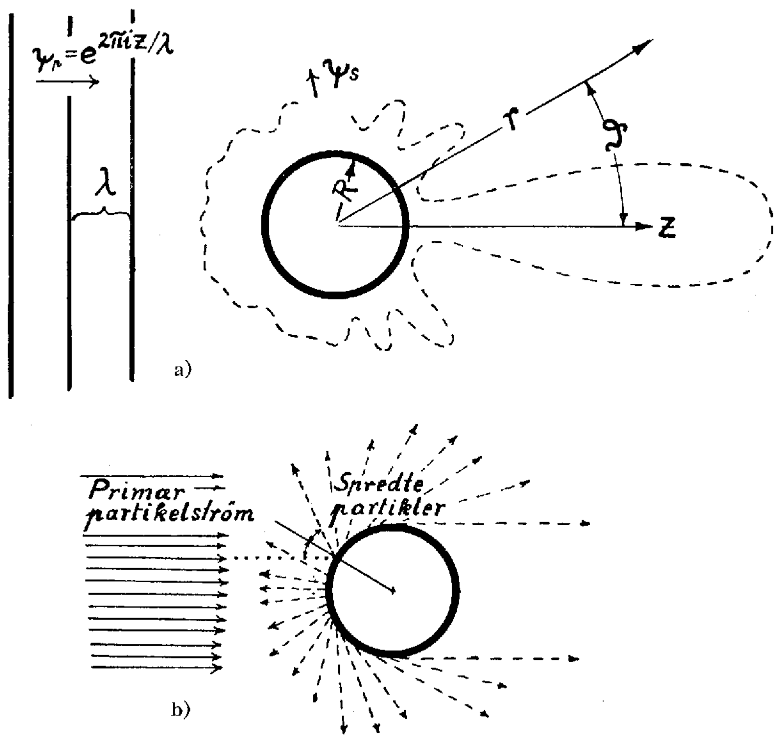

Fig. 1. Spredning på en stiv kule, a) bølgemekanisk, b) punktmekanisk.

Etter bølgemekanikken kan den primære partikelstrøm fremstilles ved en plan monokromatisk De Broglie-bølge,

$$\psi_p = e^{2\pi i z/\lambda},$$

hvis bølgelengde λ er gitt på kjent måte av partiklenes masse og hastighet.

Den matematiske oppgave som skal løses er å bestemme en sekundær bølge ψ_s således at hele feltet, $\psi = \psi_p + \psi_s$, tilfredsstiller SCHRØDINGERS bølgeligning og randbetingelsene:

$$\psi(\vartheta) = \psi(\vartheta + 2n\pi) \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

$$\psi \quad = 0 \qquad ; \; r = R \tag{2}$$

$$\psi \quad \rightarrow f(\vartheta) \cdot \frac{e^{2\pi i r/\lambda}}{r} \quad ; \; r \rightarrow \infty. \tag{3}$$

Det vil si:

1) Feltet skal være en éntydig funksjon av polarvinkelen ϑ (fig. 1a).
2) Amplituden skal til enhver tid være 0 på kulens overflate. Det svarer til at overflaten fremstilles ved en uendelig høy potensialbarrière, hvilket kan oppfattes som en definisjon på absolutt stivhet.
3) Den tredje betingelse som angår bølgefeltets forløp i stor avstand fra spredningscentret, utelukker innløpende sekundærbølger. Sådanne kan nemlig ikke tillates fordi en fysisk meningsfull løsning av problemet ikke kan fremstille noen innstråling fra uendeligheten utover den som er inneholdt i primærbølgen.

Den asymptotiske løsning for store r har formen:

$$\psi_\infty = \psi_p + \frac{e^{ikr}}{kr} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos\vartheta); \quad P_l = \text{Legendre polynom}, \quad k = 2\pi/\lambda, \tag{4}$$

hvorav intensitets-fordelingen i tilstrekkelig store avstander kan beregnes når koeffisientene a_l er kjent. Disse må egentlig bestemmes av den eksakte løsning ved hjelp av randbetingelsen (2) etter en metode som går tilbake på Lord Rayleigh og som består i å utvikle primærbølgen i en tilsvarende rekke etter kulefunksjonene P_l.

I det foreliggende tilfelle hvor spredningen er elastisk, kan imidlertid en viktig egenskap ved sekundærbølgens utviklingskoeffisienter a_l avledes allerede av materialbalansen.

Danner man nemlig massestrømmen $\vec{S}$ ved å sette inn (4) i den velkjente bølgemekaniske formel,

$$\vec{S} = \frac{h}{4\pi i}(\psi \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \operatorname{grad} \psi), \tag{5}$$

og integrerer over en lukket flate som omslutter den spredende kule, så må resultatet være lik 0, ettersom partikler hverken oppstår eller forsvinner innenfor det betraktede volum.

Det gir ligningen:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{2l+1}\left|a_l\right|^2+i(a_l-a_l^*)\right\}=0. \tag{6}$$

Da koeffisientene a_l er funksjoner av bølgelengden λ og kulens radius R, må denne ligning være oppfylt identisk. Hvis man altså skriver de komplekse koeffisienter a_l på formen $|a_l|\exp(i\eta_l)$, må vi for alle indices l ha:

$$|a_l| = (2l+1)\sin\eta_l. \tag{7}$$

Den fysiske betydning av størrelsene η_l er faseforskjellen mellom ut- og innløpende kulebølger i uendeligheten. Disse »faser« er de fundamentale størrelser i ethvert spredningsproblem; er de gitt, så er også bøyningsfiguren entydig bestemt.

Ved hjelp av (7) kan altså det asymptotiske uttrykk for sekundærbølgen skrives på formen:

$$\psi_{s,\infty} = \frac{e^{ikr}}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin\eta_l\cdot e^{i\eta_l}\cdot P_l(\cos\vartheta). \tag{8}$$

Denne del av feltet kalles i alminnelighet den spredte bølge, men det må bemerkes at en slik avspaltning av sekundærbølgen fra det fullstendige felt er en rent matematisk operasjon, som i visse situasjoner virker kunstig, således for eksempel ved geometrisk skygge.

Det synes ganske unaturlig å si at kulen spreder noe inn i skyggen, men i virkeligheten har jo »den spredte bølge« i ovennevnte matematiske betydning en stor amplitude just i dette område — nemlig like stor som primærbølgen — og motsatt fase, således at de tilsammen opphever hverandre.

For å skille primær- og sekundærbølge er det videre nødvendig å innføre en skjerm, men på grunn av bøyning på kantene formår ingen skjerm å separere ut primærbølgen for alle vinkler.

Det er bare i retninger tilstrekkelig langt fra den primære bølgenormal at den spredte bølge har en enkel eksperimentell betydning. I nærheten av primærretningen er det bare mulig å måle intensiteten av det totale interferensfelt.

La oss imidlertid opprettholde definisjonen ovenfor og beregne strømtettheten av sekundærbølgen alene, ved innsetning av (8) i (5). Integrasjon over alle vinkler og divisjon med primærintensiteten gir den velkjente formel for det totale elastiske spredningstverrsnitt:

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l . \tag{9}$$

Beregningen av spredningstverrsnittet som funksjon av bølgelengden efter (9) er i alminnelighet meget besværlig på grunn av rekkens konvergensforhold.

I området $0 < l < kR$ antar fasene alle mulige verdier, men for $l > kR$ er de små av størrelsesorden $(kR/l)^l$. For å få en god tilnærmelse er det derfor nødvendig å ta med ca. kR ledd i rekken.

Men i to grensetilfeller: a) for meget lange bølgelengder og b) for meget korte bølgelengder — det vil si lange eller korte i forhold til kulens dimensjoner — kan man uten nøyere kjennskap til fasene slutte seg til spredningsfunksjonens alminnelige forløp.

Det er det siste grensetilfelle som vesentlig interesserer i denne sammenheng. Som en brukbar tilnærmelse kan vi her sette alle faser $\eta_l = 0$ for $l > kR$, og skrive

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{[kR]} (2l+1) \sin^2 \eta_l \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \left\{ \sum_{l=0}^{[kR]} (2l+1) - \sum_{l=0}^{[kR]} (2l+1) \cos 2\eta_l \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Fordi fasene oscillerer på en uregelmessig måte vil den siste sum i klammeren være av mindre størrelsesorden enn den første, i grensen kan vi anta at den vokser langsommere enn kvadratisk med kR, således at vi får $Q \sim 2\pi R^2$ eller det dobbelte av kulens tverrsnitt, $Q_0 = \pi R^2$.

Resonnementet kan begrunnes nøyere ved å anslå de ledd som er kastet bort. Det viser seg at den viktigste korreksjon er av størrelsesorden $(kR)^{1/3}$. Det elastiske spredningstverrsnitt nærmer seg altså kvotientasymptotisk til 2 ganger det geometriske tverrsnitt:

$$\lim_{\lambda \to 0} Q/Q_0 = 2. \tag{11}$$

Denne grenseverdi 2 som visstnok først blev bemerket av Massey og Mohr*, synes ganske forbløffende, for grenseprosessen, $\lambda \to 0$, er jo matematisk likeverdig med $h \to 0$, eller overgang til punktmekanikken. Ved uendelig korte bølgelengder har man geometrisk stråleutbredelse, og man kunde tenke at spredningen skulde være nøyaktig lik den flux som kulens skygge skjærer ut av den primære partikkelstrøm; det vil si en relativ spredning $Q/Q_0 = 1$, og forøvrig — etter den enkle refleksjonslov — med konstant intensitet i alle retninger.

Paradoxet henger sammen med den konvensjonelle definisjon av spredt stråling. Hvis vi tenker oss en lukket flate lagt om spredningscentret, så nær at den faller innenfor området med geometrisk skygge, så har vi nå regnet som om en stråle med primærbølgens fulle intensitet passerte gjennom kulens skyggebillede på flaten.

Men urimelighetene kan omgåes ved en mere kritisk anvendelse av den geometriske strålekonstruksjon. I virkeligheten blev det fremholdt allerede av Rayleigh (1871) i forbindelse med hans optiske undersøkelser, at retningen av en begrenset stråle er prinsipielt ubestemt på grunn av den uundgåelige diffraksjon i de begrensende blender.

I kvanteteorien er jo dette forhold velkjent. Strålekonstruksjonen og bølgebegrepene kan ikke anvendes samtidig utover visse grenser som er gitt ved en uskarphetsrelasjon.

* Proc. Roy. Soc. A **141**, 434, 1933.

Det kritiske område er i vårt tilfelle en kegle,

$$\vartheta \lesssim \frac{1}{kR}, \tag{12}$$

hvis åpningsvinkel ganske visst stadig avtar med bølgelengden, men som allikevel alltid vil gjøre begrepet geometrisk skygge ugyldig i tilstrekkelig stor avstand fra det spredende objekt.

Nå kan man vise at dette snevre område omkring primærretningen omfatter en tett strålebundt som bærer just halvparten av den spredte energi. Hvis altså den kritiske kegle blev utelatt ved integrasjonen (9), vilde den resterende spredning anta den verdi som er forenlig med rettlinjet stråleutbredelse.

For å se det er det fordelaktig å spalte opp sekundærbølgen (8) i to deler:

$${}'_{s,\infty} = \underbrace{\frac{e^{ikr}}{ikr} \cdot \sum_{l=0}^{[kR]} \left(l+\frac{1}{2}\right) P_l(\cos\vartheta)}_{\psi'_s} - \underbrace{\frac{e^{ikr}}{ikr} \cdot \sum_{l=0}^{[kR]} \left(l+\frac{1}{2}\right) e^{2i\eta_l} \cdot P_l(\cos\vartheta)}_{\psi''_s}. \tag{13}$$

Vi vil først studere den ved små vinkler, $\vartheta \sim 1/kR$. Faktorene $P_l(\cos\vartheta)$ vil da meget nær være konstante lik 1, og ved et resonnement analogt til (10) (11) sidene 7 og 8 kan man slutte at den første sum ψ'_s er dominant, idet leddene i den annen sum ψ''_s i stor utstrekning opphever hverandre.

Ved hjelp av kulefunksjonenes egenskaper kan summasjonen utføres, og man får som tilnærmelsesformel for små vinkler,

$$\psi'_s \approx (kR)^2 \cdot \left[\frac{J_1\,(2\,kR \sin\vartheta/2)}{2\,kR \sin\vartheta/2}\right] \cdot \frac{e^{ikr}}{ikr} \tag{14}$$

hvor J = Besselfunksjon av 1. art.

Faktoren i hakeparentesen har et skarpt maksimum for $\vartheta = 0$, dens alminnelige forløp fremgår av fig. 2. Det tilsvarende strømuttrykk gir ved integrasjon over den lille kegle $\vartheta \leq 1/kR$, en flux $\approx \pi R^2 \cdot h/\lambda$, eller tilnærmet like meget som kulens tverrsnitt skjærer ut av primærstrålen.

Subtraksjon av dette bidrag vilde følgelig redusere spredningen til en halvpart, som nevnt ovenfor. Men den åpningsvinkel

$\vartheta \sim 1/kR$ som skal utelukkes er selvsagt bare gitt med hensyn til størrelsesorden.

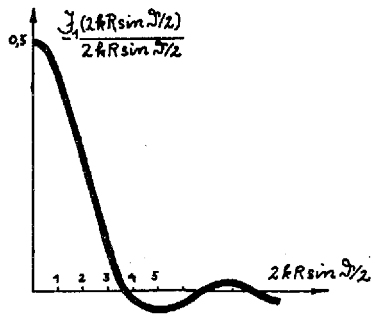

Fig. 2.

Idet vi vender tilbake til uttrykket (13) for sekundærbølgen, må vi huske at det er bare for meget små vinkler at den siste sum ψ_s'' kan neglisjeres. Når variasjonen av funksjonene, $P_l(\cos\vartheta)$, og fasene, η_l, tas nøyere i betraktning, viser det seg at de forskjellige kulefunksjonskomponenter summerer seg opp til en bølge med tilnærmelsesvis konstant amplitude,

$$|\psi_s''| \approx \frac{R}{2r} \tag{15}$$

for alle vinkler.

Hertil svarer en kulesymmetrisk spredning med en total intensitet lik den primærflux som treffer kulen, altså nettopp hvad man vil vente etter det klassiske billede av en partikkelstrøm som spredes ved elastiske støt mot en kule.

Derimot har den første sum i (13), ψ_s', ingen partikkelstrøm som punktmekanisk motstykke; som vi nå skal se, fremstiller denne del av sekundærbølgen i det vesentlige skyggen:

Ved benyttelse av de eksakte bølgefunksjoners egenskaper finner man etter forskjellige omformninger at forholdet mellom primærbølgens og sekundærbølgens amplitude, ved små vinkler, tilnærmet kan skrives*:

$$\frac{\psi_s}{\psi_p} \approx -(kR)^2 \cdot \left[\frac{J_1(2\,kR\sin\vartheta/2)}{2\,kR\sin\vartheta/2}\right] \cdot 2\sin^2\vartheta/2 \int_{2\,kr\sin^2\vartheta/2}^{\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau}\,d\tau\,. \tag{16}$$

* Formelen gjelder ikke i kulens umiddelbare nærhet.

Hakeparentesen er den intensitetsfunksjon vi allerede har støtt på i (14). Den har en bemerkelsesverdig optisk analogi, nemlig i det Fraunhoferske bøyningsbillede av en cirkulær blende.

Den siste faktor med integralet spiller en lignende rolle som Cornuspiralen ved Fresnelske diffraksjonsfenomener, man overser den best ved å skrive:

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau} d\tau = x + iy \tag{17}$$

og velge x, y som rettvinklede koordinater. Den kurve som er gitt ved parameterfremstillingen:

$$x(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \frac{\cos\tau}{\tau} d\tau, \quad y(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau, \tag{18}$$

er en spiral som antydet i fig. 3. Man vil legge merke til at kurvens vinkelkoeffisient, dy/dx, i ethvert punkt simpelthen er lik parameterverdien τ.

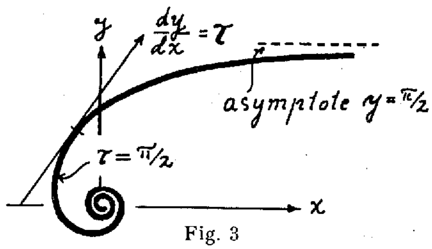

Fig. 3

Uten å gå nøyere inn på den numeriske diskusjon av formelen (16) kan vi nå i grove trekk fiksere skyggegrensen. Skyggevirkning har vi åpenbart i de områder hvor forholdet ψ_s/ψ_p er negativt reelt og i absolutt verdi ≈ 1, idet primær- og sekundærbølge da tilnærmet opphever hverandre.

For at der skal være en merkbar utslukning av primærbølgen, må to betingelser være oppfylt:

For det første må intensitetsfaktoren i hakeparentesen (16) være stor, det vil si dens argument må ligge vel innenfor det første sekundærmaksimum.

Dernest må faktoren $x + iy$ ha en relativt liten imaginær del. Parameteren τ må altså ikke være så stor at man når inn i spiralens vindinger som svarer til de små intensitetsvariasjoner utenfor skyggen. Som en grense for dette område kan man velge $\tau \approx \pi/2$, den kan naturligvis ikke fastlegges skarpt. (Ved $\tau \approx \pi/2$ har man i virkeligheten allerede igjen en liten forsterkning av primærbølgen, da x jo her er negativ.)

Etter disse to betingelser kan man definere skyggegrensen ved

$$\left.\begin{aligned} 2\,kR \sin \vartheta/2 &\approx \pi \\ 2\,kr \sin^2 \vartheta/2 &\approx \pi/2 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

eller

$$\sin \vartheta/2 \approx \frac{R}{2\,r},$$

hvilket etter forutsetningen, små vinkler, stemmer med den geometriske skyggekonstruksjon.

Da intensiteten av sekundærbølgen avtar (omtrent som $(kr)^{-2}$), vil skyggen naturligvis intet sted være absolutt men gradvis utviskes med voksende avstand fra kulen, hvor kort enn bølgelengden måtte være.

Summary.

The scattering of particles by a rigid sphere is discussed with particular reference to a curious result enunciated by MASSEY and MOHR:

With increasing velocity the scattering cross section does not, as might be conjectured, tend to the projected area of the sphere; but to *twice* this value.

The interpretation of the paradox lies in the essential indeterminateness of the primary direction. It can be shown that the scattered intensity consists of two parts, both carrying the same current. One part represents a spherical wave of uniform intensity in all directions, the other is confined to a narrow region around the primary direction. The latter part is intimately connected with the shadow.

Indleveret til Selskabet den 1. August 1945.
Færdig fra Trykkeriet den 21. September 1945.