

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB  
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXII, NR. 5

---

ÜBER LINEARE  
UND QUADRATISCHE ABBILDUNGEN  
DES RAUMES AUF EINE EBENE

VON

FR. FABRICIUS-BJERRE



KØBENHAVN  
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD  
1945

## EINLEITUNG

Die vorliegende Untersuchung hat als Ausgangspunkt eine Abhandlung von L. ECKHART [3], in der gezeigt wird, wie man aus zwei gegebenen axonometrischen Bildern einer Raumfigur andere axonometrische Bilder konstruieren kann. Die Methode ist, kurz gesagt, die, dass man durch entsprechende Punkte der beiden Bilder (d. h. Bilder desselben Raumpunktes) parallel zu zwei gegebenen Richtungen Geraden legt, deren Schnittpunkt dann eine neue Figur durchläuft, die sich als ein neues axonometrisches Bild der Raumfigur erweist.

Im ersten Kapitel haben wir diese Methode aufs neue untersucht, indem wir nicht nur reguläre, sondern auch singuläre axonometrische Abbildungen betrachten. Dadurch ist z. B. ermöglicht worden, aus Grundriss und Aufriss allein, ohne Verwendung von Ähnlichkeit oder Kongruenz, beliebige axonometrische Bilder zu konstruieren. Wir beenden dieses Kapitel mit einer algebraischen Darstellung der behandelten Abbildungen nebst einigen Bemerkungen über orthogonale Axonometrie.

Im zweiten Kapitel, (das sich unabhängig vom ersten lesen lässt), wird die erwähnte Methode projektivisch verallgemeinert. Aus zwei perspektiven Bildern eines Gegenstandes konstruiert man ein neues Bild, indem man entsprechende Punkte der gegebenen Bilder aus zwei festen Punkten der Ebene projiziert, wobei der Schnittpunkt korrespondierender Strahlen ein drittes Bild durchläuft. Die dadurch erzeugte Abbildung des Raumes auf die Ebene wird allgemein nicht perspektivisch. Wir werden nachweisen, dass man entweder eine Abbildung, die aus STEINERS »schiefer Projektion«<sup>1)</sup> und einer Kollineation besteht, oder eine rationale quadratische Abbildung eines Geradenbündels auf eine Ebene oder schliesslich eine neue perspektive Abbildung erhält.

<sup>1)</sup> Siehe S. 20.

Wir untersuchen dann besonders, unter welchen Bedingungen die Abbildung perspektivisch wird. Indem wir sowohl reguläre als singuläre Abbildungen einführen, werden wir zu Konstruktionen ähnlich denjenigen von G. HAUCK [7, 8] geführt. Wir schließen dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen über imaginäre Abbildungen und mit einer algebraischen Darstellung der verschiedenen Transformationen.

Die oben definierte quadratische Abbildung des Raumes auf eine Ebene lässt sich unmittelbar auf Räume mehrerer Dimensionen verallgemeinern. Im vierdimensionalen Raum z. B. müssen wir drei perspektive Abbildungen von diesem Raum auf einen  $R^3$  betrachten, und im  $R^3$  müssen ausserdem drei Geraden vorgelegt sein. Aus diesen Geraden projiziert man entsprechende Punkte der drei Bilder, und der Schnittpunkt korrespondierender Ebenen durchläuft dann ein neues Bild der gegebenen vierdimensionalen Figur. Diese Abbildung wird von drittem Grade, und man erhält dadurch eine Verallgemeinerung der Steinerschen schiefen Projektion. Die Abbildung, die hierdurch zwischen zwei dreidimensionalen Räumen allgemeiner Lage erzeugt wird, ist von anderen Gesichtspunkten aus z. B. von R. STURM (Geom. Verwandtsch. IV, S. 394) untersucht worden.

Im Raum von  $n+1$  Dimensionen müssen  $n$  perspektive Abbildungen des Raumes auf einen  $R^n$  vorgelegt sein, und die erzeugte Abbildung wird in diesem Fall von  $n$ 'tem Grade.

Im folgenden werden wir auf die Abbildungen in höheren Räumen nicht eingehen.

## 1. KAPITEL

### Axonometrische Abbildungen.

#### § 1. Reguläre und singuläre Abbildungen.

Unter einer axonometrischen Abbildung versteht man eine affine (lineare) Abbildung des Raumes  $R^3$  auf eine Ebene  $\alpha$ , die Bildebene. Eine solche Abbildung  $T$  lässt sich aus einer Parallelprojektion in einer Richtung  $r$  auf eine Ebene  $\beta$  und einer affinen Abbildung von  $\beta$  auf  $\alpha$  zusammensetzen. Falls diese Affinität den Rang 2 hat, nennt man  $T$  regulär. Ist der Rang gleich 1, wird  $T$  als singulär (einfach-singulär) bezeichnet, und ist schliesslich der Rang gleich 0, nennt man  $T$  doppel-singulär, und  $R^3$  wird in einen einzelnen Punkt abgebildet. Diesen letzteren Fall werden wir gewöhnlich ausser Betracht lassen.

Wenn  $T$  regulär ist, werden Geraden mit der Richtung  $r$  in Punkte abgebildet, während andere Geraden wieder in Geraden transformiert werden. Entsprechende Punktreihen sind ähnlich. Ist  $T$  dagegen singulär, lässt sich die Abbildung von  $\beta$  auf  $\alpha$  aus einer Parallelprojektion in einer Richtung  $r'$  in  $\beta$  auf eine Gerade  $b$  und einer linearen Abbildung von  $b$  auf  $\alpha$  zusammensetzen. Es ist danach klar, dass eine Ebene  $\varrho$  parallel zu  $r$  und  $r'$  in einen einzelnen Punkt von  $\alpha$  abgebildet wird. Die Projektionsrichtung  $r$  hat dann keine besondere Stellung vor anderen Richtungen der Ebene  $\varrho$ , und  $T$  ergibt sich in diesem Fall durch eine »Ebenenprojektion« mit der »Ebenenrichtung«  $\varrho$  auf  $b$ , gefolgt von einer linearen Abbildung von  $b$  auf  $\alpha$ .

Es seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei gegebene axonometrische Abbildungen von  $R^3$  auf  $\alpha$ . Einen beliebigen Punkt in  $R^3$  bezeichnen wir mit  $P$ , eine von  $P$  durchlaufene Figur mit  $(P)$ , die Bilder von  $P$  bei  $T_1$  und  $T_2$  mit  $P_1$  und  $P_2$  und die Bilder der Figur mit  $(P_1)$

und  $(P_2)$ . Wir nehmen an, dass die Bilder  $O_1$  und  $O_2$  eines Punktes  $O$  zusammenfallen (in  $O_{12}$ ). Wenn dies für keinen Punkt des Raumes der Fall ist, fügen wir zu  $T_2$  die Parallelverschiebung  $O_2O_1$  hinzu.

Wenn  $T_1$  und  $T_2$  beide regulär sind, bezeichnen wir mit  $r_1$  und  $r_2$  Strahlen durch  $O$  in den gegebenen Projektionsrichtungen. Falls  $r_1$  und  $r_2$  zusammenfallen, werden zwei beliebige Bilder  $(P_1)$  und  $(P_2)$  affin sein. Sind dagegen die Richtungen verschieden, sind die Bilder nicht affin. Dies folgt z. B. daraus, dass die Gerade  $r_1$  bei  $T_1$  in einen Punkt, bei  $T_2$  in eine Gerade abgebildet wird.

Wenn  $T_1$  regulär ist,  $T_2$  dagegen singulär (mit der Ebenenrichtung  $\varrho_2$  durch  $O$ ), werden zwei willkürliche Bilder  $(P_1)$  und  $(P_2)$  dann und nur dann affin sein, wenn  $r_1$  in der Ebene  $\varrho_2$  liegt. Und sind schliesslich sowohl  $T_1$  als auch  $T_2$  singulär (mit Ebenenrichtungen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  durch  $O$ ), werden die Bilder  $(P_1)$  und  $(P_2)$  einer beliebigen Figur  $(P)$  in  $R^3$  affin sein oder nicht, je nachdem  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  zusammenfallen oder nicht. Die Beweise dieser einfachen Sätze werden hier übergangen.

Falls  $T_1$  und  $T_2$  beide regulär mit verschiedenen Projektionsrichtungen  $r_1$  und  $r_2$  sind, wird die Ebene  $\pi_{12} = r_1r_2$  bei  $T_1$  in eine Gerade  $s_1^*$ , bei  $T_2$  in eine Gerade  $s_2^*$  abgebildet. Diese Geraden (durch  $O_{12}$ ) bestimmen die sogenannten singulären Richtungen in  $\alpha$ , und man sagt, dass  $T_1$  und  $T_2$  allgemeine oder spezielle Lage haben, je nachdem  $s_1^*$  und  $s_2^*$  verschieden oder zusammenfallend sind.

## § 2. Die Abbildung $T_3$ .

Wir betrachten nun zwei willkürliche axonometrische Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  und konstruieren eine neue Abbildung  $T_3$  folgendermassen:

Durch  $O_{12}$  legen wir zwei verschiedene Geraden  $s_1$  und  $s_2$ . Ein beliebiger Punkt  $P$  in  $R^3$  hat bei  $T_1$  und  $T_2$  die Bilder  $P_1$  und  $P_2$ . Durch  $P_1$  legt man eine zu  $s_1$  parallele Gerade  $p_1$ , durch  $P_2$  eine zu  $s_2$  parallele Gerade  $p_2$ . Den Schnittpunkt von  $p_1$  und  $p_2$  bezeichnen wir mit  $P_3$ . Somit ist eine Abbildung  $T_3$  von  $R^3$  auf die Ebene  $\alpha$  festgelegt, die  $P$  in  $P_3$  überführt (Fig. 1).

$T_3$  hängt ausser von  $T_1$  und  $T_2$  auch von den Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  ab, im ganzen von 14 Parametern, da  $T_1$  und  $T_2$  je von 6 Parametern abhängig sind (vgl. § 4). Der Punkt  $O_3$ , das Bild von  $O$  bei  $T_3$ , fällt, wie man unmittelbar sieht, in  $O_{12}$ . Von  $T_3$  gilt übrigens:

Die Abbildung  $T_3$  ist ebenfalls eine axonometrische Abbildung. Für diesen Satz werden wir im § 4 einen allgemeinen analytischen Beweis geben.

Wir wollen zunächst die verschiedenen möglichen Fälle näher untersuchen:

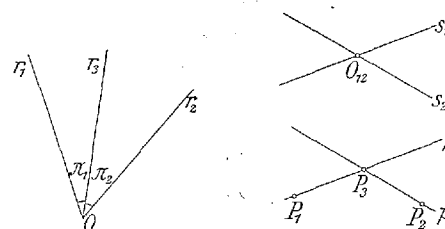


Fig 1.

### A. Die Abbildungen $T_1$ und $T_2$ sind beide regulär.

Die Geraden  $s_1$  bzw.  $s_2$  sind bei  $T_1$  bzw.  $T_2$  Bilder von zwei Ebenen  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  durch  $r_1$  bzw.  $r_2$ . Wenn diese Ebenen nicht zusammenfallen (in  $\pi_{12}$ ), gibt es eine Schnittgerade  $r_3$ , und jeder Punkt einer Geraden  $p$  durch  $P$  parallel zu  $r_3$  wird bei  $T_3$  in denselben Punkt  $P_3$  abgebildet. Punkte ausserhalb  $p$  werden dagegen in Punkte ausserhalb  $P_3$  abgebildet. Falls  $P$  eine Gerade  $q$  durchläuft, die nicht zu  $r_1, r_2$  oder  $r_3$  parallel ist, wird  $P_1$  eine Gerade  $q_1$ ,  $P_2$  eine Gerade  $q_2$  so durchlaufen, dass entsprechende Punktreihen ähnlich sind. Die zur Konstruktion der Punkte  $P_3$  gehörigen Büschel paralleler Geraden werden dann auch ähnlich, also perspektiv, und  $P_3$  durchläuft eine neue Gerade  $q_3$  in  $\alpha$ .  $q_3$  fällt speziell in  $p_1$ , wenn  $q$  zu der Ebene  $\pi_1$  parallel ist; dies hat auch Gültigkeit, wenn  $q$  zu  $r_1$  parallel wird. — Die Abbildung  $T_3$  ist somit eine reguläre axonometrische Abbildung mit der Projektionsrichtung  $r_3$ .

Falls die oben eingeführten Ebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  in  $\pi_{12}$  zusammenfallen, werden sämtliche Punkte in einer Ebene durch  $P$  parallel zu  $\pi_{12}$  in denselben Punkt  $P_3$  abgebildet, während Punkte ausser-

halb der Ebene ausserhalb  $P_3$  abgebildet werden. Eine Gerade  $q$ , die nicht zu  $\pi_{12}$  parallel ist, wird wie oben in eine neue Gerade abgebildet, woraus folgt, dass  $T_3$  in diesem Fall eine singuläre axonometrische Abbildung mit  $\pi_{12}$  als Ebenenrichtung ist.

Wenn  $T_1$  und  $T_2$  dieselbe Projektionsrichtung  $r_1 = r_2$  haben, folgt aus obigem, dass man allgemein wieder eine Abbildung  $T_3$  mit derselben Projektionsrichtung erhält, so dass die drei Bilder  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ ,  $(P_3)$  eines Objekts affin sind.

Sind  $r_1$  und  $r_2$  verschieden, wird  $T_3$  nur dann singulär sein, wenn  $s_1$  und  $s_2$  in den in § 1 definierten singulären Richtungen  $s_1^*$  und  $s_2^*$  gewählt werden, und diese Möglichkeit kann nur entstehen, wenn  $T_1$  und  $T_2$  allgemeine Lage haben. Wenn also  $T_1$  und  $T_2$  spezielle Lage besitzen, wird  $T_3$  immer regulär.

Wenn man  $s_1$  in  $s_1^*$ ,  $s_2$  dagegen ausserhalb  $s_2^*$ , wählt, ist  $r_2$  in der Ebene  $\pi_1$  enthalten, und  $T_3$  hat die Projektionsrichtung  $r_2$ , wodurch  $(P_2)$  und  $(P_3)$  affin werden. Wählt man sowohl  $s_1$  ausserhalb  $s_1^*$  als  $s_2$  ausserhalb  $s_2^*$ , haben  $\pi_1$  und  $\pi_2$  eine Schnittgerade  $r_3$ , welche nicht in der Ebene  $\pi_{12}$  liegt.  $T_3$  wird also eine reguläre Abbildung mit der Projektionsrichtung  $r_3$ .

Verschiedenen Wahlen von  $s_1$  und  $s_2$  entsprechend erhält man verschiedene Richtungen  $r_3$ . Man kann jedoch nicht alle Richtungen  $r_3$  erhalten. Erstens muss  $r_3$  ausserhalb der Ebene  $\pi_{12}$  liegen, und ferner muss man die Forderung stellen, dass die Bilder  $s_1$  von  $\pi_1$  (bei  $T_1$ ) und  $s_2$  von  $\pi_2$  (bei  $T_2$ ) nicht zusammenfallen. Wenn nun eine Gerade  $s$  den Strahlenbüschel mit dem Scheitel  $O_{12}$  durchläuft, so durchlaufen die (in  $T_1$  und  $T_2$ ) entsprechenden Ebenen projektive Ebenenbüschel mit den Achsen  $r_1$  und  $r_2$ . Diese Ebenenbüschel werden nur in dem Fall perspektiv, wenn die Ebene  $\pi_{12}$  dasselbe Bild sowohl bei  $T_1$  als auch bei  $T_2$  hat, also wenn  $T_1$  und  $T_2$  spezielle Lage haben.

Wenn also  $T_1$  und  $T_2$  allgemeine Lage haben, können wir als Projektionsrichtung jede Richtung ausserhalb der Ebene  $\pi_{12}$  und der durch die projektiven Ebenenbüschel erzeugten Kegelfläche zweiter Ordnung haben. Falls die Abbildungen spezielle Lage haben, muss die Kegelfläche durch einen von den perspektiven Ebenenbüscheln erzeugten (ebenen) Geradenbüschel ersetzt werden.

Unabhängig davon, ob  $T_1$  und  $T_2$  allgemeine oder spezielle Lage haben, haben  $T_1$  und  $T_3$  (und ebenso  $T_2$  und  $T_3$ ) in jedem

Fall spezielle Lage. Der Strahl  $s_1$  entspricht nämlich sowohl in  $T_1$  wie in  $T_3$  der Ebene  $\pi_1$ . Zum Abbildungspaar  $(T_1, T_3)$  gehört somit nur die eine singuläre Richtung  $s_1$ , und dementsprechend zu  $(T_2, T_3)$  nur die singuläre Richtung  $s_2$ .

Wir gehen nun zum zweiten Fall über:

### B. Die Abbildung $T_1$ ist regulär, die Abbildung $T_2$ singulär.

Bei  $T_1$  wird der Raum  $R^3$  in die ganze Ebene  $\alpha$  abgebildet, während  $T_2$  den Raum in eine Gerade  $a_2$  durch  $O_{12}$  abbildet. Eine Gerade  $s_1$  durch  $O_{12}$  ist in  $T_1$  das Bild einer Ebene  $\pi_1$  durch  $r_1$ , während der Punkt  $O_{12}$  selber in  $T_2$  das Bild der Ebene  $\varrho_2$  durch  $O$  ist. Eine Gerade  $s_2$  durch  $O_{12}$  wird, wenn sie in  $a_2$  fällt, das Bild des ganzen Raumes sein; im entgegengesetzten Fall werden Punkte von  $s_2$  ausserhalb  $O_{12}$  gar nicht Bilder von Punkten im Raume sein.

Im ersten Fall, wenn  $s_2$  in  $a_2$  liegt, werden alle Punkte einer Ebene  $\pi$  durch  $P$ , parallel zu  $\pi_1$ , bei  $T_3$  in denselben Punkt  $P_3$  (auf  $a_2$ ) abgebildet, und da übrigens Gerade wie oben in Gerade überführt werden, ist  $T_3$  eine singuläre axonometrische Abbildung von  $R^3$  auf  $a_2$  mit der Ebenenrichtung  $\pi_1$ . Wenn  $s_1$  variiert, erzeugt  $\pi_1$  einen Ebenenbüschel mit der Achse  $r_1$ .

Sind dagegen  $s_2$  und  $a_2$  verschieden — und fällt  $r_1$  nicht in  $\varrho_2$  — wird die Schnittgerade  $r_3$  der Ebenen  $\pi_1$  und  $\varrho_2$  Projektionsrichtung für eine reguläre Abbildung  $T_3$ . Wenn  $s_1$  den Strahlenbüschel ( $O_{12}$ ) in  $\alpha$  durchläuft, wird  $r_3$  einen Strahlenbüschel in  $\varrho_2$  durchlaufen, dessen Strahlen alle Projektionsrichtungen für  $T_3$  sein können. Zu jeder Richtung  $s_1$  kann man unendlich viele Richtungen  $s_2$  wählen, so dass man zu jeder Projektionsrichtung  $r_3$  unendlich viele unter sich affine Bilder erhalten kann. Der Strahl  $s_1$  bestimmt somit die Projektionsrichtung  $r_3$ , während  $s_2$  bestimmt, welches von den affinen Bildern entstehen wird.

Der Fall, wo  $r_1$  in  $\varrho_2$  liegt, hat nichts von Interesse aufzuweisen. Schliesslich soll der letzte Fall betrachtet werden:

### C. Die Abbildungen $T_1$ und $T_2$ sind beide singulär.

$R^3$  wird bei  $T_1$  in die Gerade  $a_1$  durch  $O_{12}$ , bei  $T_2$  in die Gerade  $a_2$  durch  $O_{12}$  abgebildet. Der Punkt  $O_{12}$  ist bei  $T_1$  (bzw.  $T_2$ )

das Bild einer Ebene  $\varrho_1$  (bzw.  $\varrho_2$ ) durch  $O$ . Je nachdem die gewählten Strahlen  $s_1$  und  $s_2$  in  $a_1$  bzw.  $a_2$  fallen oder nicht, entstehen, vorausgesetzt dass  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  nicht zusammenfallen, drei verschiedene Fälle:

1°.  $s_1 = a_1$ ,  $s_2 = a_2$ . Der ganze  $R^3$  wird in den Punkt  $O_{12}$  abgebildet.  $T_3$  ist somit eine doppel-singuläre axonometrische Abbildung.

2°.  $s_1 = a_1$ ,  $s_2$  verschieden von  $a_2$ . Der ganze  $R^3$  wird auf  $a_1$  abgebildet, so dass sämtliche Punkte in einer Ebene durch  $P$  parallel mit  $\varrho_2$  in denselben Punkt von  $a_1$  abgebildet werden.

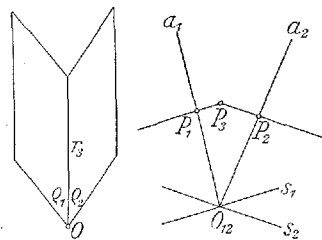


Fig. 2.

Da sich im übrigen Strahlen als Strahlen abbilden, wird  $T_3$  eine (einfach-)singuläre axonometrische Abbildung.

3°.  $s_1$  ist verschieden von  $a_1$ ,  $s_2$  von  $a_2$  (Fig. 2.). Sämtliche Punkte einer Geraden  $p$  durch  $P$  parallel zu der Schnittgeraden  $r_3$  der Ebenen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  werden bei  $T_3$  in denselben Punkt  $P_3$  abgebildet. Deshalb wird hier  $T_3$

eine reguläre Abbildung mit der Projektionsrichtung  $r_3$ . — Man beachte, dass die Projektionsrichtung  $r_3$  unabhängig von den gewählten Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  ist. Wir erhalten durch Variation von  $s_1$  und  $s_2$  eine doppelte Unendlichkeit von unter sich affinen, derselben Projektionsrichtung entsprechenden Bildern.

Indem wir uns besonders für die regulären Abbildungen  $T_3$  interessieren, können wir den folgenden Satz aussprechen:

Je nachdem  $T_1$  und  $T_2$  beide regulär, die eine oder beide singulär sind, entstehen durch Variation der Geraden  $s_1$  und  $s_2$  Bilder, die  $\infty^2$ ,  $\infty^1$  und einer Projektionsrichtung entsprechen. Die Zahl der unter sich affinen, jeder Projektionsrichtung entsprechenden Bilder ist 1,  $\infty^1$  und  $\infty^2$ .

### § 3. Erzeugung einer vorgelegten $T_3$ aus gegebenen $T_1$ und $T_2$ .

Es seien  $T_1$  und  $T_2$  gegebene reguläre axonometrische Abbildungen mit den Projektionsrichtungen  $r_1$  und  $r_2$ , und  $T_3$  sei eine neue reguläre Abbildung mit der Projektionsrichtung  $r_3$ . Die Bilder des Gegenstandes ( $P$ ) werden wie früher mit  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ ,  $(P_3)$  bezeichnet.

Allgemein lässt sich  $(P_3)$  nicht aus  $(P_1)$  und  $(P_2)$  durch Wahl der Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  bilden. Wenn bei  $T_3$  die Richtung  $r_3$  Projektionsrichtung werden soll, muss man nämlich  $s_1$  und  $s_2$  als Bilder der Ebene  $r_1 r_3$  bzw.  $r_2 r_3$  in  $T_1$  bzw.  $T_2$  wählen, und das aus  $(P_1)$  und  $(P_2)$  und den Richtungen  $s_1, s_2$  entstehende Bild wird dann im allgemeinen nur mit dem gegebenen  $(P_3)$  affin sein.

Man könnte sich nun die Aufgabe stellen, zu  $T_1$  und  $T_2$  solche ebenen affinen Abbildungen hinzufügen, wodurch  $(P_1)$  in  $(P'_1)$  und  $(P_2)$  in  $(P'_2)$  übergehen, dass sich  $(P_3)$  nun durch die gewöhnliche Konstruktion aus den neuen Bildern  $(P'_1)$  und  $(P'_2)$  bilden lässt. Mit den drei Projektionsrichtungen  $r_1, r_2, r_3$  sind auch die Richtungen  $s_1, s_2$  gegeben, da wir ja früher gezeigt haben (S. 9), dass auch in  $T_3$  die Gerade  $s_1(s_2)$  das Bild der Ebene  $r_1 r_3(r_2 r_3)$  ist. Indem wir annehmen, dass  $r_3$  ausserhalb der Ebene  $r_1 r_2$  liegt, sind  $s_1$  und  $s_2$  verschiedene Geraden.

Hiermit ist unsere Aufgabe darauf reduziert worden, eine Affinität zu finden, die  $(P_1)$  in  $(P'_1)$  überführt, so dass entsprechende Punkte in  $(P'_1)$  und  $(P_3)$  auf Geraden parallel zu  $s_1$  liegen, und analog für  $(P_2)$ . Da eine Affinität durch zwei entsprechende Dreiecke bestimmt ist, brauchen wir nur auf zu  $s_1$  parallelen Geraden durch drei Punkte  $P_3, Q_3, R_3$  drei andere Punkte  $P'_1, Q'_1, R'_1$  zu wählen, wodurch die Affinität festgelegt wird. Entsprechend für  $(P_2)$ . Wenn man nun das neue Bild  $(P'_3)$  aus  $(P'_1)$  und  $(P'_2)$  mit den Richtungen  $s_1, s_2$  konstruiert, wird  $(P'_3)$  der Projektionsrichtung  $r_3$  entsprechen, also mit  $(P_3)$  affin sein, und da drei entsprechende Punkte von  $(P_3)$  und  $(P'_3)$  zusammenfallen, werden die beiden Bilder identisch.

Unsere Aufgabe ist hiermit gelöst, und zwar, wie man sieht, mit unendlich vielen Lösungen. Man könnte ferner die Forderung stellen, die Figur  $(P'_1)$  solle der Figur  $(P_1)$  ähnlich sein. Wir

gelangen dann zu der elementaren Aufgabe, ein Dreieck, einem gegebenen ähnlich, so zu legen, dass ein Eckpunkt in einem gegebenen Punkte und die beiden anderen auf gegebenen parallelen Geraden liegen. Wenn die Orientierung beibehalten wird, hat diese Aufgabe eine und nur eine Lösung. Wir haben somit:

Aus zwei axonometrischen Bildern kann man, einer willkürlichen Projektionsrichtung entsprechend, die ausserhalb der Ebene der gegebenen Projektionsrichtungen liegt, jedes axonometrische Bild auf eine und nur eine Weise allein durch Anwendung von Ähnlichkeit aus den vorgelegten Bildern erhalten.

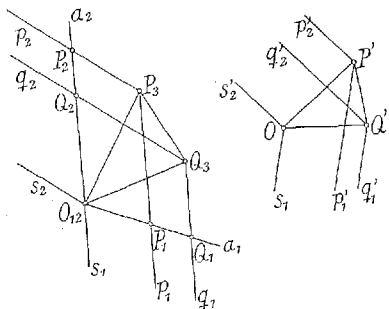


Fig. 3.

Es seien danach  $T_1$  und  $T_2$  beide singuläre axonometrische Abbildungen mit den Ebenenrichtungen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , deren Schnittgerade mit  $r_3$  bezeichnet ist.  $T_1$  bilde den Raum auf die Gerade  $a_1$ ,  $T_2$  auf  $a_2$  ab. Wie auch  $s_1$  und  $s_2$  gewählt werden, führt die früher beschriebene Kon-

struktion zu unter sich affinen Bildern, der Projektionsrichtung  $r_3$  entsprechend. In diesem Fall gilt folgender Satz:

Durch passende Wahl von  $s_1$  und  $s_2$  kann man im allgemeinen bis auf Ähnlichkeit jedes axonometrische Bild der Richtung  $r_3$  entsprechend erhalten.

Beweis. — Drei Punkte  $O, P, Q$  sollen eine Ebene bestimmen, die  $r_3$  nicht enthält. Die Bilder von  $P$  und  $Q$  werden wie üblich mit  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  bezeichnet. Durch  $P_1$  und  $Q_1$  werden Geraden  $p_1$  und  $q_1$  parallel zu einer vorgelegten Richtung  $s_1$  gelegt, analog durch  $P_2$  und  $Q_2$  Geraden  $p_2$  und  $q_2$  parallel zu  $s_2$ ;  $p_1$  und  $p_2$  schneiden sich in  $P_3$ ,  $q_1$  und  $q_2$  in  $Q_3$ . Wir wollen nun beweisen, dass  $s_1$  und  $s_2$  im allgemeinen so gewählt werden können, dass das Dreieck  $O_{12}P_3Q_3$  ähnlich einem beliebigen Dreieck  $O'P'Q'$  wird.

Dies wird dadurch bewiesen, dass man eine Ähnlichkeitstransformation findet, welche die Punkte  $O_{12}P_1Q_1P_2Q_2$  so in Punkte  $O'P'_1Q'_1P'_2Q'_2$  überführt, dass die Geraden  $P'P'_1$  und  $Q'_1Q'$  und ebenso  $P'_2P'$  und  $Q'_2Q'$  parallel werden.

Die Lage der parallelen Strahlen  $s'_1, p'_1 = P'_1P'$  und  $q'_1 = Q'_1Q'$  lässt sich dadurch bestimmen, dass ihre Abstände sich wie  $O_{12}P_1 : P_1Q_1$  verhalten müssen. Analog findet man die parallelen Geraden  $s'_2, p'_2, q'_2$  durch  $O', P', Q'$ , indem ihre Abstände das Verhältnis  $O_{12}P_2 : P_2Q_2$  haben. Da die Punkte  $O, P, Q$  weder auf einer Geraden noch in einer zu der Richtung  $r_3$  parallelen Ebene liegen, sind die genannten Verhältnisse ungleich, und die beiden Systeme von parallelen Geraden haben folglich verschiedene Richtung.

Man hat nun noch ein dem Dreieck  $O_{12}P_1P_2$  ähnliches Dreieck so zu legen, dass  $P'_1$  auf  $p'_1$  und  $P'_2$  auf  $p'_2$  liegen. Denn wenn dieses erfüllt ist, werden von selbst  $Q'_1$  auf  $q'_1$  und  $Q'_2$  auf  $q'_2$  liegen. Wir sind somit zu der elementaren Aufgabe geführt worden, ähnlich einem gegebenen Dreieck ein Dreieck zu legen, welches einen Eckpunkt in einem gegebenen Punkt und die beiden anderen auf gegebenen sich schneidenden Geraden hat. Es gibt im allgemeinen nur eine Lösung unter Bewahrung der Orientierung, doch keine oder unendlich viele in dem Sonderfall, wo  $\angle(a_1, a_2) = \angle(s'_1, s'_2)$ . — Somit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Die zuletzt erwähnte Möglichkeit kommt nicht in Frage, wenn  $a_1$  und  $a_2$  mit einander den Winkel null bilden, also parallel (zusammenfallend) sind. Wir heben hervor, dass in diesem Fall der obige Satz unbeschränkt gilt.

Die Eckhart'sche Methode — Parallelkonstruktion aus eigentlichen axonometrischen Bildern — hat in der Praxis den Nachteil, dass Ähnlichkeits- und Kongruenztransformationen der gegebenen Figuren notwendig sind, um bestimmte axonometrische Bilder hervorzubringen. Diesem Nachteil ist, wie wir jetzt zeigen werden, durch Anwendung von singulären axonometrischen Abbildungen abzuweichen. Hierdurch wird es dann ermöglicht, z. B. allein aus Grundriss und Aufriss einer Figur, ohne Anwendung der erwähnten Transformationen, beliebige axonometrische Bilder zu konstruieren.

Wir betrachten drei reguläre axonometrische Abbildungen  $T_1, T_2, T_3$  mit den Projektionsrichtungen  $r_1, r_2, r_3$ , die nicht in derselben Ebene liegen. Objekt und Bilder werden wie gewöhnlich bezeichnet. Den Ebenen  $r_1r_3$  und  $r_2r_3$  entsprechen in  $T_1$  und  $T_2$  die Strahlen  $s_1$  und  $s_2$ ; diese Geraden können zusammenfallend (parallel) sein oder nicht. Durch entsprechende Punkte

$P_1$  und  $P_2$  legt man jetzt Geraden  $p_1$  und  $p_2$  parallel zu  $s_1$  und  $s_2$ . Man sucht aber nicht den Schnittpunkt dieser Geraden, sondern lässt neue Geraden  $a_1$  bzw.  $a_2$  die Geraden  $p_1$  bzw.  $p_2$  schneiden (Fig. 4). Mit anderen Worten: Wir parallelprojizieren die Figur ( $P_1$ ) auf die Gerade  $a_1$  in der Richtung  $s_1$ , und analog für ( $P_2$ ).

Die neuen Bilder auf  $a_1$  und  $a_2$ , ( $P'_1$ ) und ( $P'_2$ ), sind axonometrische Bilder von ( $P$ ) in den singulären Abbildungen  $T'_1$  und  $T'_2$ , wo  $T'_1$  bzw.  $T'_2$  die Ebenenrichtung  $r_1 r_3$  bzw.  $r_2 r_3$  hat. Falls wir auf diese neuen Bilder die gewöhnliche Parallelkonstruktion anwenden, werden reguläre axonometrische, der Projektionsrichtung  $r_3$  entsprechende Bilder entstehen, und durch passende Wahl der neuen Richtungen  $s'_1$  und  $s'_2$  kann man, wie oben gezeigt ist, bis auf Ähnlichkeit jedes axonometrische Bild hervorbringen.

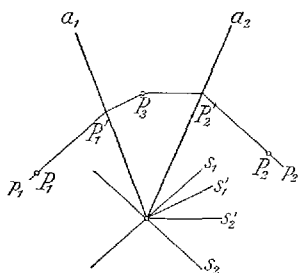


Fig. 4.

#### § 4. Algebraische Darstellung. Orthogonale Axonometrie.

Eine axonometrische Abbildung  $T_1$  lässt sich durch zwei Gleichungen folgender Form definieren

$$(1) \quad \begin{aligned} y'_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha x \\ y'_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = \beta x, \end{aligned}$$

oder kürzer

$$(1) \quad y' = (y'_1, y'_2) = (\alpha x, \beta x),$$

wo  $x = (x_1, x_2, x_3)$  affine Koordinaten eines Punkts  $P$  in  $R^3$  und  $y' = (y'_1, y'_2)$  affine Koordinaten des Bildpunktes  $P_1$  in der Bildebene  $\alpha$  sind.

Wenn  $\alpha = \beta = 0$ , wird der ganze Raum in dem Punkt  $(0,0)$  abgebildet; diesen Fall lassen wir hier ausser Betracht. In anderen Fällen wird die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{vmatrix}$$

den Rang 2 oder 1 haben, je nachdem die Abbildung regulär oder singulär ist. Der Vektor  $(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ ,

den wir mit  $\widehat{ab}$  bezeichnen<sup>1)</sup>, wird entsprechend ein eigentlicher Vektor, der die Projektionsrichtung  $r_1$  bestimmt, oder der Nullvektor sein.  $\widehat{ab}$  befriedigt nämlich die Gleichungen  $\alpha x = 0$  und  $\beta x = 0$ .

Wenn  $\widehat{ab} = 0$ , existiert ein eigentliches Zahlenpaar  $(p, q)$ , wo  $pa + qb = 0$ . Der Raum wird auf die Gerade  $py'_1 + qy'_2 = 0$  abgebildet, und die Ebenenrichtung  $\varrho$  wird durch eine der Gleichungen  $\alpha x = 0$  oder  $\beta x = 0$  bestimmt.

Es sei nun die axonometrische Abbildung  $T_2$  durch

$$(2) \quad y'' = (y''_1, y''_2) = (cx, dx)$$

bestimmt, wo  $c$  und  $d$  gegebene Vektoren, nicht beide Nullvektoren, sind.

Wenn  $T_1$  und  $T_2$  beide regulär sind, werden die durch  $T_1$  und  $T_2$  bestimmten Bilder affin sein oder nicht, je nachdem die beiden eigentlichen Vektoren  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  linear abhängig sind oder nicht. Die zu  $T_1, T_2$  gehörigen singulären Richtungen  $s_1^*$  und  $s_2^*$  werden Bilder der Ebene  $x = \alpha \widehat{ab} + \beta \widehat{cd}$  in  $T_1$  bzw.  $T_2$ . Die Richtungen werden dann durch  $(|\alpha \widehat{cd}|, |\beta \widehat{cd}|)$  und  $(|\alpha \widehat{bc}|, |\alpha \widehat{bd}|)$  bestimmt, und die beiden Abbildungen haben allgemeine oder spezielle Lage, je nachdem die Determinante von Null

$$\begin{vmatrix} |\alpha \widehat{cd}| & |\beta \widehat{cd}| \\ |\alpha \widehat{bc}| & |\alpha \widehat{bd}| \end{vmatrix}$$

verschieden oder gleich Null ist.

Es seien zwei Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  in der Bildebene  $\alpha$  durch  $(\lambda_1, \lambda_2)$  und  $(\mu_1, \mu_2)$ , wo  $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$ , gegeben. Wir wollen die Gleichungen für die aus  $T_1, T_2, s_1$  und  $s_2$  abgeleitete Abbildung  $T_3$  aufstellen. Wenn der Punkt  $P_3$  den Koordinatenvektor  $y''' = (y'''_1, y'''_2)$  hat, wird  $P_3$  durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_2 y'''_1 - \lambda_1 y'''_2 &= \lambda_2 y'_1 - \lambda_1 y'_2 \\ \mu_2 y'''_1 - \mu_1 y'''_2 &= \mu_2 y'_1 - \mu_1 y'_2 \end{aligned}$$

bestimmt. Setzen wir hier (1) und (2) ein, erhalten wir Ausdrücke der Form

<sup>1)</sup> Wenn das Koordinatensystem in  $R^3$  rechtwinklig ist, bedeutet  $\widehat{ab}$  das Vektorprodukt  $a \times b$ .



$$\eta''' = (y_1''', y_2''') = (e\bar{x}, \bar{f}x),$$

wo  $e$  und  $\bar{f}$  aus den Gleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} \lambda_2 e - \lambda_1 \bar{f} &= \lambda_2 a - \lambda_1 b \\ \mu_2 e - \mu_1 \bar{f} &= \mu_2 c - \mu_1 d \end{aligned}$$

gefunden werden können.

Man sieht daraus, dass  $T_3$  eine neue axonometrische Abbildung ist. Die in den obigen Paragraphen gefundenen geometrischen Eigenschaften kann man jetzt durch Rechnung nachweisen<sup>1)</sup>. Beispielsweise sei hier erwähnt, dass man aus (3) die Gleichung

$$(4) \quad (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \widehat{e\bar{f}} = \lambda_2 \mu_2 \widehat{ac} - \lambda_2 \mu_1 \widehat{ad} - \lambda_1 \mu_2 \widehat{bc} + \lambda_1 \mu_1 \widehat{bd}$$

erhalten kann. Falls sowohl  $T_1$  als  $T_2$  singulär sind, d. h. sowohl  $a$  und  $b$  als auch  $c$  und  $d$  linear abhängig sind, zeigt die obige Gleichung (4), dass  $T_3$  im allgemeinen regulär ist und dass die Projektionsrichtung  $\widehat{e\bar{f}}$  von der Wahl der Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  unabhängig ist, da nämlich die Vektoren  $\widehat{ac}, \widehat{ad}, \widehat{bc}, \widehat{bd}$  alle linear abhängig sind.

Schließlich erwähnen wir einige einfache Bedingungen, die erforderlich sind, wenn ein axonometrisches Bild eine orthogonale Projektion des Gegenstandes sein soll. Wir nehmen hier an, dass  $(x_1, x_2, x_3)$  rechtwinklige Koordinaten bezeichnen, dass die  $x_1 x_2$ -Ebene Bildebene ist, und dass  $(y'_1, y'_2)$  rechtwinklige Koordinaten dieser Ebene bezeichnen.

Falls das Bild  $(P_1)$  eine orthogonale Projektion des Objektes  $(P)$  sein kann, muss man  $(P)$  so drehen können, dass der Punkt  $P(x_1, x_2, x_3)$  in den Punkt  $P'(y'_1, y'_2, y'_3)$ , wo  $y'_3$  eine zu  $y'_1, y'_2$  gehörige passende  $x_3$ -Koordinate ist, kommt. Folglich sollen die Gleichungen

$$y'_1 = a\bar{x}, \quad y'_2 = b\bar{x}, \quad y'_3 = c\bar{x}$$

eine Drehung im Räume bestimmen, d. h.  $a$  und  $b$  müssen orthogonale Einheitsvektoren (und  $c = \widehat{ab} = a \times b$ ) sein. Daraus folgt:

<sup>1)</sup> Siehe [5].

Die Abbildung  $\eta' = (a\bar{x}, b\bar{x})$  ist dann und nur dann eine orthogonale axonometrische Abbildung, wenn  $a$  und  $b$  orthogonale Einheitsvektoren sind.

Die Einheitsvektoren  $i(1, 0, 0)$ ,  $j(0, 1, 0)$  und  $k(0, 0, 1)$  werden durch (1) in die Vektoren  $i'(a_1, b_1)$ ,  $j'(a_2, b_2)$  und  $k'(a_3, b_3)$  abgebildet. Ein solches Vektorensystem ist somit orthogonale Projektion eines rechtwinkligen Koordinatensystems, wenn

$$(5) \quad a^2 = b^2 \text{ und } ab = 0,$$

indem man nicht gerade fordert, dass die gegebenen Vektoren Einheitsvektoren sein sollen.

Betrachtet man die Vektoren  $i', j'$  und  $k'$  als Ortsvektoren komplexer Zahlen der Ebene, und setzt

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad z_3 = a_3 + ib_3,$$

sieht man, dass die Bedingungen (5) sich in die einzige Gleichung

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

umschreiben lassen. Die Bedingungen in dieser Form sind GAUSS [6] zu verdanken.

Die erwähnten Bedingungen kann man so aufstellen, dass nur die Vektoren  $i', j', k'$  eingehen. Man erhält<sup>1)</sup>

$$(i'k') (j' \times k') = (k'i') (k' \times i') = (i'j') (i' \times j'),$$

welches sich durch Rechnen leicht nachweisen lässt. Diese letzteren Bedingungen sind notwendig, aber nur hinreichend, wenn keine der erhaltenen skalaren oder vektoriellen Produkte verschwinden.

<sup>1)</sup> Vergl. [5], S. 14–15.

## 2. KAPITEL

### Perspektive und quadratische Abbildungen.

#### § 5. Reguläre und singuläre Abbildungen.

Unter einer perspektiven Abbildung versteht man eine lineare Abbildung des projektiven Raumes auf eine projektive Ebene  $\alpha$ , die Bildebene. Eine solche Abbildung  $T$  lässt sich aus einer Zentralprojektion mit dem Zentrum  $O$  auf eine Ebene  $\beta$  und einer projektiven Abbildung von  $\beta$  auf  $\alpha$  zusammensetzen. Ist diese Abbildung regulär, wird  $T$  selbst als regulär bezeichnet. Wenn dagegen die ganze Ebene auf eine Gerade  $a$  in  $\alpha$  abgebildet wird, sagt man, dass  $T$  singulär ist, und falls der ganze  $R^3$  in einen Punkt abgebildet wird, ist  $T$  ganz ausgeartet. Diesen letzteren Fall werden wir im Folgenden ausser Betracht lassen.

Ist  $T$  regulär, werden Geraden durch  $O$  in Punkte abgebildet, während andere Geraden projektiv auf Geraden in  $\alpha$  abgebildet werden. Der Punkt  $O$  selber hat kein Bild. Ist  $T$  singulär, lässt sich die Abbildung von  $\beta$  auf  $\alpha$  aus einer Zentralprojektion der Ebene  $\beta$  aus einem Punkt  $O_1$  von  $\beta$  auf eine Gerade  $b$  und einer projektiven Abbildung von  $b$  auf  $a$  zusammensetzen. Jede Ebene durch den Strahl  $OO_1$  wird dann in einen Punkt von  $a$  abgebildet; die Gerade selber, die Achse der Abbildung, hat kein Bild.

Man kann kurz sagen, dass eine reguläre perspektive Abbildung eine projektive Abbildung eines Strahlenbündels auf eine Ebene ist; eine singuläre perspektive Abbildung dagegen ist eine projektive Abbildung eines Ebenenbüschels auf eine Gerade.

Es seien jetzt  $T_1$  und  $T_2$  gegebene perspektive Abbildungen. Ein beliebiger Punkt des Raumes wird mit  $P$  bezeichnet, seine Bilder bei  $T_1$  und  $T_2$  werden mit  $P_1$  und  $P_2$  bezeichnet. Eine

von  $P$  durchlaufene Raumfigur wird mit  $(P)$  und ihre Bilder werden mit  $(P_1)$  und  $(P_2)$  bezeichnet.

Wenn  $T_1$  und  $T_2$  beide regulär sind, werden die beiden Bilder  $(P_1)$  und  $(P_2)$  von  $(P)$  dann und nur dann projektiv, wenn die Projektionszentren  $O_1$  und  $O_2$  zusammenfallen. Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, dass  $O_2$  einen Bildpunkt in  $T_1$ , aber nicht in  $T_2$  hat, wenn  $O_1$  und  $O_2$  verschieden sind.

Falls  $T_1$  regulär mit dem Zentrum  $O_1$  und  $T_2$  singulär mit der Achse  $o_2$  sind, wird  $(P_2)$  nur dann ein projektives (singuläres) Bild von  $(P_1)$ , wenn  $O_1$  auf  $o_2$  liegt. Sind endlich  $T_1$  und  $T_2$  beide singulär mit den Achsen  $o_1$  und  $o_2$ , werden  $(P_1)$  und  $(P_2)$  dann und nur dann projektiv, wenn die Achsen  $o_1$  und  $o_2$  zusammenfallen. Die Beweise dieser einfachen Sätze werden hier übergangen.

#### § 6. Die Abbildung $T_3$ .

Wir betrachten jetzt zwei willkürliche, reguläre oder singuläre Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$ , bei welchen der Punkt  $P$  in  $P_1$  bzw.  $P_2$  abgebildet wird. Eine neue Abbildung  $T_3$  des Raumes wird folgendermassen gebildet:

In der Ebene  $\alpha$  wählen wir zwei feste Punkte  $U_1$  und  $U_2$ . Wir nehmen an, dass die Geraden  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  sich in einem Punkt  $P_3$  schneiden. Dadurch ist eine neue Abbildung  $T_3$  festgelegt, die  $P$  in  $P_3$  überführt.

Diese aus  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$  abgeleitete Abbildung wird, wie wir sehen werden, im allgemeinen nicht eine perspektive, sondern eine quadratische Abbildung des Raumes auf  $\alpha$  (oder auf eine Gerade oder einen Kegelschnitt in  $\alpha$ ) sein. Da eine perspektive Abbildung von der Wahl des Zentrums und von einer ebenen Kollineation, d. h. von  $3 + 8 = 11$  Parametern, abhängig ist, wird  $T_3$  von  $2 \cdot 11 + 2 \cdot 2 = 26$  Parametern abhängen. Im folgenden sollen die verschiedenen Formen von  $T_3$ , je nachdem  $T_1$  und  $T_2$  regulär oder singulär sind, nebst verschiedenen Lagen von  $U_1$  und  $U_2$  untersucht werden. Wir interessieren uns besonders für die Fälle, wo  $T_1$  und  $T_2$  entweder beide regulär oder beide singulär sind, während der »schiefe« Fall, wo die eine regulär, die andere singulär ist, nur kurz behandelt werden wird.

### A. Die Abbildungen $T_1$ und $T_2$ sind beide regulär.

Der Punkt  $U_1$  ist in  $T_1$  das Bild einer Geraden  $u_1$  durch  $O_1$ , entsprechend  $U_2$  das Bild in  $T_2$  einer Geraden  $u_2$  durch  $O_2$ . Für  $T_3$  ist es jetzt entscheidend, ob die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  windschief liegen, sich schneiden oder zusammenfallen.

#### A<sub>1</sub>. Die Geraden $u_1$ und $u_2$ schneiden sich nicht.

Es sei  $P$  ein Punkt im  $R^3$  ausserhalb  $u_1$  und  $u_2$ . Der Ebene  $u_1P$  entspricht in  $T_1$  die Gerade  $U_1P_1$ , der Ebene  $u_2P$  in  $T_2$  die Gerade  $U_2P_2$ . Wenn  $P_1$  und  $P_2$  nicht beide auf der Geraden  $u = U_1U_2$  liegen, hat  $P$  in  $T_3$  einen bestimmten Bildpunkt  $P_3$ , den Schnittpunkt der Geraden  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$ , und alle Punkte

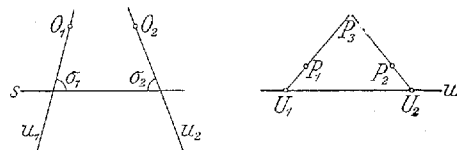


Fig. 5.

der Schnittgeraden  $p$  der Ebenen  $u_1P$  und  $u_2P$ , d. h. alle Punkte auf der Geraden durch  $P$ , die  $u_1$  und  $u_2$  schneiden (die Punkte auf  $u_1$  und  $u_2$  ausgenommen), haben denselben Bildpunkt  $P_3$ . — Die Gerade  $u = U_1U_2$  ist in  $T_1$  das Bild einer Ebene  $\sigma_1$  durch  $u_1$ , in  $T_2$  das Bild einer Ebene  $\sigma_2$  durch  $u_2$ . Liegt  $P$  auf der Schnittgeraden  $s$  dieser Ebenen, so hat  $P$  kein bestimmtes Bild. Liegt endlich  $P$  auf  $u_1$ , wird  $P_1$  in  $U_1$  fallen, die Gerade  $U_1P_1$  ist deshalb unbestimmt, und  $P$  hat kein Bild bei  $T_3$ . Wir haben somit (Fig. 5):

Bei  $T_3$  hat jeder Punkt  $P$  ausserhalb der Geraden  $u_1$ ,  $u_2$  und  $s$  einen Bildpunkt.

Die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  sind Leitgeraden einer Geradenkongruenz  $G$ , der  $s$  angehört. Indem wir im folgenden nur auf die ausserhalb  $u_1$ ,  $u_2$  und  $s$  liegenden Punkte  $P$  im  $R^3$  Rücksicht nehmen, gilt der Satz:

Bei  $T_3$  werden sämtliche Strahlen der Kongruenz  $G$  (ausser  $s$ ) in Punkte der Ebene  $\alpha$  abgebildet.

Umgekehrt ist ein Punkt  $P_3$  in der Ebene  $\alpha$  ausserhalb der Geraden  $u$  das Bild einer Geraden der Kongruenz. Der Punkt  $U_1$  kann als Schnittpunkt der Geraden  $u$  und einer beliebigen von  $u$  verschiedenen Geraden durch  $U_1$  aufgefasst werden.  $U_1$  ist deshalb in  $T_3$  das Bild der Ebene  $\sigma_2$ ,  $U_2$  das Bild von  $\sigma_1$ . Die übrigen Punkte von  $u$  sind nicht Bilder von Punkten im  $R^3$ . Also:

Jeder Punkt der Ebene  $\alpha$  ausserhalb  $u$  ist Bild einer Geraden der Kongruenz  $G$ .  $U_1(U_2)$  ist Bild der Ebene  $\sigma_2 = u_2s$  ( $\sigma_1 = u_1s$ ). Die übrigen Punkte von  $u$  sind nicht Bildpunkte.

Wir wollen danach das Bild einer Geraden untersuchen, indem wir doch stets etwaige Punkte auf  $u_1$ ,  $u_2$  und  $s$  ausschliessen. Es gibt 5 Fälle:

- 1°. Wenn die Gerade  $p$  die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  schneidet, jedoch von  $s$  verschieden ist, wird  $p$  in einen Punkt abgebildet.
- 2°. Wenn  $p$  die Geraden  $u_1$  und  $s$  schneidet, also in  $\sigma_1$  liegt, wird  $p$  in  $U_2$  abgebildet.
- 3°. Wenn  $p$  die Gerade  $u_1$ , aber weder  $u_2$  noch  $s$  schneidet, beschreibt, wenn  $p$  von  $P$  durchlaufen wird, der in  $T_1$  entsprechende Punkt  $P_1$  eine feste Gerade durch  $U_1$ , und  $P_3$  wird deshalb diese Gerade so durchlaufen, dass  $P$  und  $P_3$  projektive Reihen erzeugen.
- 4°. Wenn  $p$  die Gerade  $s$ , aber weder  $u_1$  noch  $u_2$  schneidet, werden die Ebenenbüschel  $u_1P$  und  $u_2P$  projektiv, die Geradenbüschel  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  aber perspektiv. Der Punkt  $P_3$  durchläuft deshalb die Perspektivachse der Geradenbüschel, so dass die Punktreihen  $(P)$  und  $(P_3)$  projektiv werden.
- 5°. Wenn  $p$  allgemeine Lage hat, also weder  $u_1$ ,  $u_2$  noch  $s$  schneidet, werden, wenn  $p$  von  $P$  durchlaufen wird, die Geradenbüschel  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  projektiv, aber nicht perspektiv.  $P_3$  durchläuft folglich einen Kegelschnitt durch  $U_1$  und  $U_2$ .

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Eine Gerade  $p$  wird im allgemeinen in einen Kegelschnitt durch  $U_1$  und  $U_2$  abgebildet. Wenn  $p$  eine der Geraden  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $s$  schneidet, ist das Bild von  $p$  eine Gerade, und wenn  $p$  zwei dieser Geraden schneidet, wird das Bild ein Punkt.

Die Abbildung  $T_3$  wird somit eine quadratische Abbildung des Raumes auf die Ebene  $\alpha$ .

Die Geraden  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $s$  werden als Hauptgeraden des Raumes, die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  als Hauptpunkte, der Strahl  $u$  als Hauptgerade der Ebene  $\alpha$  bezeichnet.

Hiernach sieht man leicht, wie eine Ebene  $\gamma$  auf  $\alpha$  abgebildet wird.

1°. Wenn  $\gamma$  die Geraden  $u_1$  und  $s$  enthält ( $\gamma = \sigma_1$ ), wird sie in den Punkt  $U_2$  abgebildet.

2°. Wenn  $\gamma$  die Gerade  $u_1$ , aber nicht  $s$  enthält, ist ihr Bild eine Gerade durch  $U_1$ .

3°. Wenn  $\gamma$  die Gerade  $s$ , aber weder  $u_1$  noch  $u_2$  enthält, wird  $\gamma$  projektiv auf  $\alpha$  abgebildet. Bei der dadurch bestimmten Kollineation korrespondieren die Geraden  $s$  und  $u$ .

4°. Wenn  $\gamma$  die Hauptgeraden in den Punkten  $B_1, B_2, C_1$  schneidet, wird  $\gamma$  in  $\alpha$  durch eine quadratische Transformation abgebildet. Die Gerade  $B_1C$  wird in den Punkt  $U_2$ , die Gerade  $B_2C$  in  $U_1$  und die Gerade  $B_1B_2$  in einen Punkt  $B_3$  der Ebene  $\alpha$  abgebildet. Die Hauptpunkte in  $\alpha$  sind somit die Punkte  $U_1, U_2, B_3$ , in  $\gamma$  die Punkte  $B_1, B_2, C$ .

Die Abbildung betreffend sei noch Folgendes bemerkt. Es sei  $p$  eine Gerade, die bei  $T_3$  in den Kegelschnitt  $\kappa_p$  durch  $U_1$  und  $U_2$  abgebildet wird; und  $q$  sei eine andere Gerade, die in  $\kappa_q$  abgebildet wird. Allgemein haben  $\kappa_p$  und  $\kappa_q$  noch zwei Punkte gemein, die Bilder der zwei Transversalen der 4 Strahlen  $u_1, u_2, p, q$ . Haben die vier Geraden nur eine Transversale, berühren sich die Kegelschnitte; und wenn die vier Geraden hyperboloidische Lage haben, fallen  $\kappa_p$  und  $\kappa_q$  zusammen. Folglich wird ein Kegelschnitt in  $\alpha$  durch  $U_1$  und  $U_2$  das Bild einer Fläche zweiter Ordnung sein. Die eine zur Kongruenz  $G$  gehörige Regelschar wird so

abgebildet, dass jede Erzeugende einem Punkt des Kegelschnittes zugeordnet ist, während jede Erzeugende der anderen Schar sich in den ganzen Kegelschnitt abbildet.

Eine Gerade in  $\alpha$ , die weder  $U_1$  noch  $U_2$  enthält, ist auch das Bild einer Fläche zweiter Ordnung, wo jedoch die zu  $G$  gehörige Regelschar die Gerade  $s$  enthalten muss.

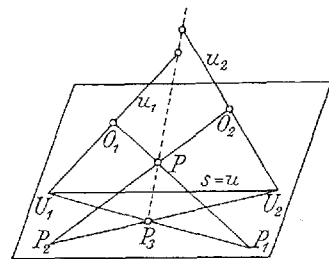


Fig. 6.

Besonders übersichtlich wird die betrachtete Abbildung, wenn beide perspektiven Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  nur Zentralprojektionen sind (Fig. 6). Die Sehpunkte  $O_1$  und  $O_2$  liegen ausserhalb  $\alpha$ .

$u_1$  ist die Gerade  $O_1U_1$ ,  $u_2$  die Gerade  $O_2U_2$ . Eine Gerade der Kongruenz  $G$  wird in ihren Schnittpunkt mit  $\alpha$  abgebildet, und eine beliebige Gerade  $p$  wird durch den Kegelschnitt, in dem  $\alpha$  von der Strahlenfläche zweiter Ordnung durch  $p, u_1, u_2$  geschnitten wird, abgebildet. Die quadratische Abbildung zwischen einer Ebene  $\gamma$ , die nicht  $s (= u)$  enthält, und  $\alpha$  ist die bekannte STEINER'sche »schiefe Projektion«.<sup>1)</sup>

Hieraus folgt leicht:

Wenn  $u_1$  und  $u_2$  sich nicht schneiden, kann man die Abbildung  $T_3$  aus einer schiefen Projektion des Raumes auf eine Ebene  $\gamma$  und einer projektiven Abbildung dieser Ebene auf  $\alpha$  zusammensetzen.

Man braucht nur die Ebene  $\gamma$  durch die Hauptgerade  $s$  zu wählen.

## A<sub>II</sub>. Die Geraden $u_1$ und $u_2$ schneiden sich.

Den Schnittpunkt der Geraden bezeichnen wir mit  $O_3$ . Es sei  $P$  ein Punkt im  $R^3$  ausserhalb der Ebene  $\omega = O_1O_2O_3$ . Der Ebene  $u_1P(u_2P)$  entspricht in  $T_1(T_2)$  die Gerade  $U_1P_1(U_2P_2)$ . Wenn  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  nicht zusammenfallen (in  $u = U_1U_2$ ), wird  $P$  in ihren Schnittpunkt  $P_3$  abgebildet. Dieser Punkt ist zugleich das Bild aller anderen Punkte der Geraden  $O_3P$ , doch hat  $O_3$  offenbar kein Bild in  $T_3$ . Die Gerade  $u = U_1U_2$  ist bei  $T_1(T_2)$  das Bild einer Ebene  $\sigma_1(\sigma_2)$  durch  $u_1(u_2)$ . Es entstehen dann zwei verschiedene Möglichkeiten, je nachdem  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (mit der Schnittgeraden  $s$  durch  $O_3$ ) verschieden sind oder in der Ebene  $\omega$  zusammenfallen. Diese kann man auch so formulieren, dass im ersten Falle die Ebene  $\omega$  verschiedene Bilder in  $T_1$  und  $T_2$  hat, im zweiten Falle aber dasselbe Bild und dann eben die Gerade  $u = U_1U_2$ .

### a) Die Ebene $\omega = O_1O_2O_3$ hat verschiedene Bilder in $T_1$ und $T_2$ .

Jeder Punkt  $P$  ausserhalb  $u_1, u_2$  und  $s$  hat in  $T_3$  einen bestimmten Bildpunkt  $P_3$ , der gleichzeitig der Bildpunkt der ganzen Geraden  $O_3P$ ,  $O_3$  ausgenommen, ist. Jedem Punkt der Ebene  $\omega$  (ausserhalb  $u_1$  und  $u_2$ ) entspricht der Punkt  $S$ , wo die  $\omega$  in  $T_1$  und  $T_2$  entsprechenden Geraden durch  $U_1$  und  $U_2$  sich schnei-

<sup>1)</sup> vergl. [9], S. 73 ff., [11], [12], [13].

den. Einem Punkt in der Ebene  $\sigma_1(\sigma_2)$  entspricht der Punkt  $U_2(U_1)$ . Durchläuft  $P$  eine Gerade  $p$ , die keine der drei Geraden  $u_1, u_2, s$  schneidet, werden die Ebenenbüschel  $u_1P$  und  $u_2P$  bei  $T_1$  bzw.  $T_2$  in projektive, aber nicht perspektive Geradenbüschel  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  abgebildet. Daraus folgt, dass  $P_3$  einen Kegelschnitt durch  $U_1, U_2$  und  $S$  durchläuft. Es ist nun ersichtlich:

$T_3$  ist eine quadratische Abbildung des Geradenbündels ( $O_3$ ) auf die Ebene  $\alpha$ , wo  $u_1, u_2, s$  die Hauptgeraden des Bündels,  $U_1, U_2, S$  die Hauptpunkte der Ebene  $\alpha$  sind.

Dies kann man auch auf folgende Weise auslegen:

Wenn die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  sich in  $O_3$  schneiden, und wenn die Ebene  $u_1u_2$  bei  $T_1$  und  $T_2$  nicht in dieselbe Gerade abgebildet wird, lässt sich die Abbildung  $T_3$  aus einer Zentralprojektion aus  $O_3$  auf eine Ebene  $\gamma$  und einer quadratischen Transformation von  $\gamma$  auf  $\alpha$  zusammensetzen.

Speziell kann  $s$  in  $u_1$  oder  $u_2$  fallen; in diesem Fall wird die quadratische Abbildung singulär (mit zwei zusammenfallenden Hauptpunkten).

b) Die Ebene  $\omega = O_1O_2O_3$  hat dasselbe Bild in  $T_1$  und  $T_2$ .

Wie oben werden die Punkte einer Geraden  $O_3P$  bei  $T_3$  in denselben Punkt  $P_3$  abgebildet. Wenn  $P$  eine Gerade  $p$  ausserhalb  $\omega$  durchläuft, werden die oben erwähnten Geradenbüschel  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  diesmal perspektiv, da der Schnittpunkt der Geraden  $p$  mit  $\omega$  in  $T_1$  sowohl als in  $T_2$  einem Punkt der Geraden  $u = U_1U_2$  entspricht. Folglich wird  $P_3$  eine  $p$  entsprechende Gerade  $p_3$  durchlaufen, so dass die zugeordneten Punktreihen projektiv werden. Es gilt daher:

Wenn die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  sich in  $O_3$  schneiden, und die Ebene  $u_1u_2$  bei  $T_1$  und  $T_2$  in dieselbe Gerade  $U_1U_2$  abgebildet wird, ist  $T_3$  eine neue perspektive Abbildung mit dem Sehpunkt  $O_3$ .

Bei dieser Abbildung hat die Ebene  $\omega$  kein Bild, wie die Gerade  $u$  nicht Bild einer Ebene ist; die entstehende perspektive Abbildung von  $R^3$  ausserhalb  $\omega$  wird jedoch bewirken, dass  $\omega$  und  $u$  einander zugeordnet werden.

Wir gehen jetzt zu dem besonders speziellen Fall über:

A<sub>III</sub>. Die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  fallen zusammen.

$U_1$  ist dann in  $T_1$  das Bild der Geraden  $o = O_1O_2$ , speziell das Bild des Punktes  $O_2$ . Entsprechend für  $U_2$ . Ein Punkt  $P$  ausserhalb  $o$  wird bei  $T_3$  in einen Punkt  $P_3$  abgebildet, und man sieht, dass die ganze Ebene  $oP$  in denselben Punkt abgebildet wird. Wenn die Ebene sich um  $o$  dreht, wird der Ebenenbüschel ( $o$ ) bei  $T_1$  und  $T_2$  in projektive Geradenbüschel abgebildet werden. Der ganze Raum (die Achse  $o$  ausgenommen) wird dann in einen Kegelschnitt oder in eine Gerade abgebildet, je nachdem diese Geradenbüschel projektiv oder zugleich perspektiv sind. Welche der beiden Möglichkeiten eintritt, ist davon abhängig, ob es eine Ebene gibt, die sowohl bei  $T_1$  als bei  $T_2$  in die Gerade  $u$  abgebildet wird oder nicht. Wir haben somit:

Wenn die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  beide in die Gerade  $o = O_1O_2$  fallen, wird  $T_3$  eine singuläre quadratische oder eine singuläre perspektive Abbildung sein. Der Raum wird auf einen Kegelschnitt oder eine Gerade abgebildet.

Wir haben hiermit die Möglichkeiten für  $T_3$  untersucht, die eintreffen können, wenn  $T_1$  und  $T_2$  beide regulär und die Projektionszentren  $O_1$  und  $O_2$  verschieden sind. Wir wollen jetzt kurz den Fall betrachten, wo  $O_1$  und  $O_2$  zusammenfallen.

In diesem Fall sind, wie in § 5 erwähnt, die Bilder ( $P_1$ ) und ( $P_2$ ) eines Gegenstandes projektiv. Die Geraden  $u_1$  und  $u_2$  können nicht windschief sein, so dass nur die Fälle A<sub>II</sub> und A<sub>III</sub> vorkommen können. Die Ergebnisse werden völlig wie oben, man kann sie aber hier anders erklären. Da ( $P_1$ ) und ( $P_2$ ) projektiv sind, bedeuten die Bedingungen b) S. 24 und a) S. 23, dass die Gerade  $u = U_1U_2$  in der Kollineation, die ( $P_1$ ) in ( $P_2$ ) überführt, Fixgerade ist oder nicht.

Wir erhalten dann die SEYDEWITZ'sche Erzeugung einer quadratischen Abbildung<sup>1)</sup>:

Wenn man aus zwei Punkten  $U_1$  und  $U_2$  zwei ebene projektive Figuren ( $P_1$ ) und ( $P_2$ ) zentralprojiziert, und die Gerade  $u = U_1U_2$  nicht Fixgerade der Kollineation ( $P_1$ )  $\rightarrow$  ( $P_2$ ) ist, wird der Schnittpunkt entsprechender

<sup>1)</sup> Verg. z. B. Enzyklopädie der math. Wissensch. III C 11 S. 2012 ff.

Strahlen eine Figur  $(P_3)$  durchlaufen, die mit  $(P_1)$  oder  $(P_2)$  quadratisch verwandt ist.

Wenn dagegen  $u$  Fixgerade ist, wird  $(P_3)$  mit  $(P_1)$  und  $(P_2)$  projektiv sein.

Es ist oben eine Voraussetzung, dass  $U_1$  und  $U_2$  verschiedenen Geraden  $u_1$  und  $u_2$  durch  $O_1 = O_2$  entsprechen, welches bedeutet, dass  $U_1$  und  $U_2$  nichtentsprechende Punkte der Projektivität  $(P_1) \rightarrow (P_2)$  sind. Sind sie dagegen entsprechende Punkte, entsteht der Fall  $A_{III}$ , dem wir hier folgende Formulierung geben:

Wenn man von zwei entsprechenden Punkten  $U_1$  und  $U_2$  zwei projektive Figuren  $(P_1)$  und  $(P_2)$  zentralprojiziert, wird die Figur  $(P_3)$  auf einem Kegelschnitt oder einer Geraden liegen, je nachdem die Gerade  $u$  nicht Fixgerade oder Fixgerade der Kollineation  $(P_1) \rightarrow (P_2)$  ist.

Es bleibt noch zu untersuchen, welchen Einfluss die Wahl der Punkte  $U_1$  und  $U_2$  auf die erzeugte Abbildung  $T_3$  hat, wenn zwei Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  vorliegen.

Hier müssen wir auch eine Reihe von Möglichkeiten behandeln, indem die gegebenen Abbildungen verschieden gelegen sein können. Wir nehmen an, dass  $T_1$  und  $T_2$  regulär und die Zentren  $O_1$  und  $O_2$  verschieden seien. Der Punkt  $O_2$ , also die Gerade  $O_1O_2$ , wird bei  $T_1$  in einem Punkt  $V_1$  abgebildet, während  $O_1$ , also wieder die Gerade  $o = O_1O_2$ , bei  $T_2$  in  $V_2$  abgebildet wird.  $V_1$  und  $V_2$  heißen die Kernpunkte der Abbildung. Der Ebenenbüschel  $(o)$  wird bei  $T_1$  und  $T_2$  in projektive Geradenbüschel mit den Scheiteln  $V_1$  und  $V_2$  abgebildet. Dann entstehen die folgenden Fälle:

- 1°. Die Kernpunkte  $V_1$  und  $V_2$  sind verschieden, und die Büschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  sind projektiv, aber nicht perspektiv.
- 2°. Die Punkte  $V_1$  und  $V_2$  sind verschieden und die Büschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  perspektiv.
- 3°. Die Punkte  $V_1$  und  $V_2$  sind zusammenfallend, und die projektiven Geradenbüschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  haben 2, 1 oder 0 reelle Doppelstrahlen.

4°. Die Punkte  $V_1$  und  $V_2$  sind zusammenfallend, und die Büschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  sind identisch.

Wir wollen diese Fälle der Reihe nach behandeln.

1°. Die Büschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  erzeugen einen Kegelschnitt  $\kappa$ . Falls  $U_1$  und  $U_2$  so gewählt werden, dass die Geraden  $V_1U_1$  und  $V_2U_2$  sich nicht auf  $\kappa$  schneiden, werden die Strahlen  $u_1$  und  $u_2$  nicht in derselben Ebene liegen. Wenn dagegen die Geraden sich auf  $\kappa$  schneiden, liegen  $u_1$  und  $u_2$  in derselben Ebene. Diese Ebene hat jedoch nicht dasselbe Bild bei  $T_1$  und bei  $T_2$ . Wir sehen also, dass  $T_3$  immer eine quadratische Abbildung, entweder ohne oder mit Sehpunkt, wird. Dies gilt auch, wenn  $U_1$  in  $V_1$ ,  $U_2$  in  $V_2$  gewählt werden. Wir haben also:

Wenn man aus zwei gegebenen perspektiven Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  eine neue Abbildung  $T_3$  bildet, wird diese Abbildung im allgemeinen nicht perspektiv sein, wie man auch die Projektionszentren  $U_1$  und  $U_2$  wählt.

2°. In diesem Fall existiert also im Büschel  $(o)$  eine Ebene  $\pi$ , die sowohl bei  $T_1$  als bei  $T_2$  in die Gerade  $v = V_1V_2$  abgebildet wird. Die Perspektivachse der Büschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  bezeichnen wir mit  $k$ . Wählen wir nun  $U_1$  in  $V_1$ ,  $U_2$  in  $V_2$ , werden sämtliche entsprechenden Strahlen  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  sich auf  $k$  schneiden. Projiziert man die Bilder  $(P_1)$  und  $(P_2)$  aus den Kernpunkten  $V_1$  und  $V_2$ , werden entsprechende Geradenbüschel perspektiv.

Hier können bei geeigneter Wahl von  $U_1$  und  $U_2$  alle Möglichkeiten  $A_1$ ,  $A_{IIa}$  und  $A_{IIb}$  entstehen. Wir erhalten eine quadratische Abbildung ohne Zentrum, mit Zentrum oder eine perspektive Abbildung, je nachdem die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  so gewählt werden, dass 1)  $V_1U_1$  und  $V_2U_2$  sich ausserhalb  $k$  schneiden, 2)  $V_1U_1$  und  $V_2U_2$  sich auf der Geraden  $k$  schneiden, und 3)  $U_1$  und  $U_2$  beide auf der Geraden  $V_1V_2$  liegen. Als Sehpunkt (Zentrum) der Abbildung hat man den Schnittpunkt der Geraden  $u_1$  und  $u_2$ .

Wir wollen noch untersuchen, ob sämtliche Punkte der Ebene  $\pi$  abgesehen von den Punkten der Geraden  $o$  als Sehpunkte  $O_3$  in  $T_3$  auftreten können. Lässt man einen Punkt  $Q$  die Gerade  $v = V_1V_2$  durchlaufen, werden die bei  $T_1$  und  $T_2$  entsprechenden Strahlen projektive Geradenbüschel in der Ebene  $\pi$  mit Scheiteln  $O_1$  und  $O_2$  durchlaufen. Da der Strahl  $o$  selber in die verschiede-

nen Punkte  $V_1$  und  $V_2$  abgebildet wird, werden die Geradenbündel einen Kegelschnitt in der Ebene  $\pi$  erzeugen. Wir sehen also:

Sämtliche Punkte der Ebene  $\pi$ , die Gerade  $o$  und ein gewisser Kegelschnitt durch  $O_1$  und  $O_2$  ausgenommen, können Sehpunkte in der aus  $T_1$  und  $T_2$  abgeleiteten perspektiven Abbildung  $T_3$  sein.

3°. Wir werden kurz die Resultate aufrechnen. Es ergibt sich eine quadratische Abbildung ohne Zentrum oder mit Zentrum oder eine perspektive Abbildung, je nachdem  $U_1$  und  $U_2$  auf nicht-entsprechenden Geraden der Büschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$ , auf entsprechenden Geraden oder auf einem Doppelstrahl gewählt werden.

4°. Diese letzte Möglichkeit ist von besonderem Interesse. Denn hier gibt es nur zwei Fälle: entweder ist die Abbildung quadratisch ohne Zentrum, oder sie ist perspektivisch. Die Fälle entstehen, je nachdem, ob die Gerade  $U_1U_2$  nicht durch den Punkt  $V_1 = V_2$  geht oder hindurchgeht.

Hier wird  $O_3$  nicht an eine bestimmte Ebene durch  $o$  gebunden sein, da jede Ebene durch  $o$  dasselbe Bild in  $T_1$  wie in  $T_2$  hat. Nicht alle Punkte des Raumes ausserhalb  $o$  können jedoch als Sehpunkte auftreten. Die Bedingung muss die sein, dass die Strahlen  $O_3O_1(u_1)$  bzw.  $O_3O_2(u_2)$  nicht bei  $T_1$  bzw.  $T_2$  in denselben Punkt der Ebene  $\alpha$  abgebildet werden. Lassen wir jetzt einen Punkt  $Q$  die Ebene  $\alpha$  durchlaufen, dann werden die entsprechenden Strahlen projektive Bündel mit Scheiteln  $O_1$  und  $O_2$  durchlaufen; da aber jede Ebene durch  $o = O_1O_2$  sich selbst entspricht, werden die Bündel perspektiv sein, und  $O_3$  muss ausserhalb der zugehörigen Perspektivebene gewählt werden. Also ergibt sich:

Sind die Kernbüschel  $(V_1)$  und  $(V_2)$  identisch, kann jeder Punkt ausserhalb der Geraden  $O_1O_2$  und einer bestimmten Ebene Sehpunkt der perspektiven Abbildung  $T_3$  werden.

Diese Abbildung entsteht, wenn  $T_1$  und  $T_2$  Zentralprojektionen auf dieselbe Ebene  $\beta$  sind.  $V_1$  und  $V_2$  fallen dann beide in die Spur  $V$  der Geraden  $o$  in der Ebene  $\beta$ . Die erwähnte Perspektivebene ist hier  $\beta$ . Wählt man  $O_3$  ausserhalb dieser Ebene (und des Strahls  $o$ ), werden die Geraden  $O_3O_1$  und  $O_3O_2$

die Ebene  $\beta$  in den Punkten  $U_1$  und  $U_2$  schneiden, so dass die Gerade  $U_1U_2$  den Punkt  $V$  enthält. Wenn dagegen diese Gerade  $V$  nicht enthält, bekommt man die Steinersche schiefe Projektion (Fig. 6).

Hiermit haben wir die Behandlung des Falles A, wo die gegebenen perspektiven Abbildungen beide regulär sind, beendet, und wir wollen jetzt zu den Fällen übergehen, wo  $T_2$  allein oder zugleich  $T_1$  singulär ist.

### B. Die Abbildung $T_1$ ist regulär, $T_2$ singulär.

$T_1$  hat den Sehpunkt  $O_1$  und bildet  $R^3$  auf die ganze Ebene  $\alpha$  ab.  $T_2$  hat die Achse  $o_2$  und bildet den Raum auf die Gerade  $a_2$  in  $\alpha$  ab. Wir nehmen an, dass die Achse  $o_2$  nicht durch den Punkt  $O_1$  hindurchgeht. Es mögen nun  $U_1$  und  $U_2$  die Projektionszentren in  $\alpha$  sein.  $U_1$  ist bei  $T_1$  das Bild einer Gerade  $u_1$  durch  $O_1$ , während  $U_2$  entweder das Bild von keinem Punkt oder das Bild einer Ebene durch die Achse  $o_2$  ist, je nachdem  $U_2$  ausserhalb oder auf der Geraden  $a_2$  liegt. Wir nehmen vorläufig an,  $U_2$  liege ausserhalb  $a_2$ .

Es ergeben sich jetzt zwei Möglichkeiten, je nachdem  $u_1$  und  $o_2$  sich schneiden oder nicht.

#### B<sub>1</sub>. Die Geraden $u_1$ und $o_2$ schneiden sich nicht.

Es sei  $P$  ein Punkt von  $R^3$  ausserhalb  $u_1$  und  $o_2$ . Die Ebene  $u_1P$  wird bei  $T_1$  in eine Gerade  $U_1P_1$  abgebildet. Die Ebene  $o_2P$  wird in den Punkt  $P_2$  auf  $a_2$  abgebildet. Die Geraden  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  werden sich, wenn  $P_1$  und  $P_2$  nicht beide auf der Geraden  $u = U_1U_2$  liegen, in  $P_3$  schneiden, und  $P_3$  ist ausserdem in  $T_3$  das Bild jedes Punktes (ausserhalb  $u_1$  und  $o_2$ ) der Schnittgeraden der Ebenen  $u_1P$  und  $o_2P$ . Bei  $T_1$  ist die Gerade  $u$  das Bild einer Ebene  $\sigma_1$ , und der Schnittpunkt  $S_2$  von  $u$  und  $a_2$  ist bei  $T_2$  das Bild einer Ebene  $\sigma_2$  durch  $o_2$ . Diese Ebenen haben die Schnittgerade  $s$ . Genau wie bei dem Fall A<sub>1</sub> ergibt sich hier:

$T_3$  ist eine quadratische Abbildung von  $R^3$  auf  $\alpha$  mit den Hauptgeraden  $u_1$ ,  $o_2$  und  $s$ .

Man bemerkt, dass  $o_2$  bei der Abbildung eine feste, von der Wahl von  $U_2$  unabhängige Achse ist. Wenn man also  $U_1$  und die Gerade  $U_1S_2$  festhält, während  $U_2$  auf dieser Geraden variiert,



werden sämtliche Hauptgeraden der quadratischen Abbildung und damit die schiefe Projektion bewahrt, welches zur Folge hat, dass man durch Variation von  $U_2$  unter sich projektive Bilder ( $P_3$ ) erhält.

**B<sub>II</sub>.** Die Geraden  $u_1$  und  $o_2$  schneiden sich.

Bezeichnet man den Schnittpunkt mit  $O_3$ , wird eine Gerade  $O_3P$  allgemein in einen Punkt  $P_3$  abgebildet, so dass hier eine quadratische oder perspektive Abbildung mit dem Zentrum  $O_3$  entsteht. Welche der beiden Abbildungen eintreffen wird, hängt — wie im Falle **A<sub>II</sub>** — davon ab, ob die oben definierten Ebenen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  verschieden sind oder zusammenfallen (in die Ebene  $\omega = O_1o_2$ ). Wir haben somit:

$T_3$  ist eine quadratische Abbildung mit Zentrum oder eine perspektive Abbildung.

Die dem Fall **A<sub>III</sub>** entsprechende Möglichkeit liegt hier nicht vor, da  $O_1$  ausserhalb  $o_2$  liegt, so dass  $u_1$  nie in  $o_2$  fallen kann.

Wir haben noch nicht den Sonderfall, wo der Punkt  $U_2$  auf der Geraden  $a_2$  liegt, behandelt; man sieht ohne Schwierigkeit, dass in diesem Fall nur singuläre perspektive Abbildungen entstehen können.

### C. Die Abbildungen $T_1$ und $T_2$ sind beide singulär.

Die Abbildung  $T_1$  hat die Achse  $o_1$  und bildet den Raum auf die Gerade  $a_1$  ab, analog hat  $T_2$  die Achse  $o_2$  und bildet den Raum auf die Gerade  $a_2$  ab. Entscheidend für den Charakter der Abbildung ist es, ob  $o_1$  und  $o_2$  windschief sind, sich schneiden oder zusammenfallen.

**C<sub>I</sub>.** Die Geraden  $o_1$  und  $o_2$  schneiden sich nicht.

Wir nehmen an, der Punkt  $U_1$  bzw.  $U_2$  sei ausserhalb  $a_1$  bzw.  $a_2$  gewählt. Ist  $P$  ein Punkt im Raume ausserhalb der gegebenen Achsen, wird die Ebene  $o_1P$  in einen Punkt  $P_1$  auf  $a_1$  abgebildet, analog  $o_2P$  in  $P_2$  auf  $a_2$ , so dass  $P$  in den Schnittpunkt von  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  abgebildet wird. In diesen Punkt werden ausserdem die übrigen Punkte der  $o_1$  und  $o_2$  schneidenden Geraden durch  $P$  abgebildet. Die Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  von  $u$  und  $a_1$  und  $a_2$  entsprechen in  $T_1$  bzw.  $T_2$  zwei Ebenen

$\sigma_1$  und  $\sigma_2$  durch  $o_1$  bzw.  $o_2$ , deren Schnittgerade  $s$  kein Bild in  $T_3$  hat. Wie oben sieht man dann:

$T_3$  ist eine quadratische Abbildung mit den Hauptgeraden  $o_1$ ,  $o_2$  und  $s$ .

Wenn  $U_1$  auf  $a_1$  oder  $U_2$  auf  $a_2$  liegt, entstehen singuläre perspektive Abbildungen. Diesen speziellen Fall werden wir hier ausser Betracht lassen.

**C<sub>II</sub>.** Die Geraden  $o_1$  und  $o_2$  schneiden sich.

Der Schnittpunkt heisst  $O_3$ , die Ebene der Achsen  $\omega$ . Indem wir wieder  $U_1$  und  $U_2$  allgemein wählen, sehen wir wie vorher:

$T_3$  ist eine quadratische Abbildung mit Zentrum oder eine perspektive Abbildung.

Die Gerade  $u = U_1U_2$  schneidet wie oben  $a_1$  in  $S_1$ ,  $a_2$  in  $S_2$ , welche Bilder der Ebenen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (durch  $o_1$  bzw.  $o_2$ ) sind. Die Abbildung  $T_3$  wird quadratisch oder perspektivisch, je nachdem  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  eine Schnittgerade haben oder in  $\omega$  zusammenfallen.

**C<sub>III</sub>.** Die Geraden  $o_1$  und  $o_2$  fallen zusammen.

Der Ebenenbüschel mit der Achse  $o_1 = o_2$  wird bei  $T_1$  und  $T_2$  in projektive Reihen auf  $a_1$  und  $a_2$  abgebildet. Durch Projektion aus  $U_1$  und  $U_2$  bekommt man dann, wie bei dem Fall **A<sub>III</sub>**, als Bild von  $R^3$  entweder einen Kegelschnitt oder eine Gerade, wenn  $U_1$  bzw.  $U_2$  ausserhalb  $a_1$  bzw.  $a_2$  gewählt sind. Es lässt sich leicht entscheiden, wann die eine und wann die andere Möglichkeit entsteht. Also:

$T_3$  ist eine singuläre quadratische oder perspektive Abbildung.

Will man hier untersuchen, wie die Abbildung  $T_3$  bei gegebenen  $T_1$  und  $T_2$  von der Wahl von  $U_1$  und  $U_2$  abhängig ist, wird es aus dem Vorhergehenden offenbar sein, dass der Charakter der Abbildung im wesentlichen durch die Lage der Achsen  $o_1$  und  $o_2$ , die ja von der Wahl von  $U_1$  und  $U_2$  unabhängig sind, entschieden ist. Wir besprechen besonders die Verhältnisse im Fall **C<sub>II</sub>**.

Die Ebene  $\omega$  wird bei  $T_1$  bzw.  $T_2$  in den Punkt  $V_1$  bzw.  $V_2$  abgebildet. Die Abbildung  $T_3$  wird dann quadratisch oder per-



spektiv, je nachdem die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  nicht beide oder beide auf der Geraden  $v = V_1V_2$  liegen.

Wenn  $T_3$  perspektivisch ist, kann man die Ebene  $\omega$  der Geraden  $v = u$  zuordnen.

Einem bestimmten  $O_3$  entsprechend bekamen wir, wenn  $T_1$  und  $T_2$  regulär waren, nur eine einzelne perspektive Abbildung  $T_3$ . Hier dagegen erhalten wir mehrere, indem man die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  willkürlich auf der Geraden  $v = V_1V_2$  wählen darf. Im speziellen Fall, wo  $V_1$  und  $V_2$  zusammenfallen (im Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$ , falls diese Geraden verschieden sind), kann man die Gerade  $u = U_1U_2$  beliebig durch  $V_1 = V_2$ , wenn nur ausserhalb  $a_1$  und  $a_2$ , wählen. Wir haben somit:

Wenn aus zwei singulären perspektiven Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  sich eine reguläre perspektive Abbildung bilden lässt, kann man durch verschiedene Wahl von Projektionszentren  $U_1$  und  $U_2$   $\infty^2$  oder  $\infty^3$  unter sich projektive Bilder desselben Gegenstandes erhalten.

Die Projektivität der Bilder folgt daraus, dass wir stets dasselbe Zentrum  $O_3$  haben.

## § 7. Perspektive Abbildungen.

Es ist in der geometrischen Photogrammetrie eine zentrale Aufgabe, aus zwei perspektiven Bildern ein drittes zu konstruieren. Diese Aufgabe ist von GUIDO HAUCK<sup>1)</sup> durch sein »Dreibilderverfahren« gelöst worden. Auf Grund der vorstehenden Untersuchungen werden wir ein neues Konstruktionsverfahren angeben.

Falls  $T_1$  und  $T_2$  zwei reguläre perspektive Abbildungen mit allgemeiner Lage sind, wird — wie aus dem Satz S. 27 hervorgeht — unsere Methode kein neues perspektives Bild geben, wie auch die Projektionszentren  $U_1$  und  $U_2$  gewählt werden. Aus § 6 ergibt sich folgendes: Bezeichnet man mit  $V_1$  und  $V_2$  die Kernpunkte, d. h. die Bilder von  $O_2$  bei  $T_1$  und von  $O_1$  bei  $T_2$ , muss 1) die Gerade  $v = V_1V_2$  sowohl bei  $T_1$  als bei  $T_2$  das Bild derselben Ebene  $\omega$  durch  $O_1O_2$  sein, und 2) müssen  $U_1$  und  $U_2$  auf der Geraden  $v$  gewählt werden. Wenn also die Bedingung 1) nicht für die gegebenen Abbildungen befriedigt ist, kann  $T_3$  nie eine perspektive Abbildung werden.

<sup>1)</sup> [7] und [8]. Vergl. auch [9], S. 157 ff.

Es besteht nun die Möglichkeit, zu  $T_1$  oder  $T_2$  eine einfache projektive Abbildung in der Bildebene  $\alpha$  hinzuzufügen, z. B. eine Bewegung eines oder beider Bilder  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  einer gegebenen Figur  $(P)$ , um die obige Lage zu erreichen. Im allgemeinen ist dieses möglich.

Es sei  $O_3$  ein Punkt ausserhalb der Geraden  $O_1O_2$ , den wir als Sehpunkt der perspektiven Abbildung  $T_3$  wünschen. Die Ebene  $\omega = O_1O_2O_3$  wird bei  $T_1$  in eine Gerade  $w_1$  durch  $V_1$ , bei  $T_2$  in eine Gerade  $w_2$  durch  $V_2$  abgebildet. Nimmt man nun an,  $V_1$  und  $V_2$  liegen beide im Endlichen, kann man zu  $T_1$  bzw.  $T_2$  eine Drehung in der Ebene um  $V_1$  bzw.  $V_2$  hinzufügen, so dass der Strahl  $w_1$  bzw.  $w_2$  in den Strahl  $v$  fällt. Hiermit ist die Bedingung 1) befriedigt. Ist ein Kernpunkt unendlich fern, muss man die Drehung durch eine Parallelverschiebung ersetzen. Ist dagegen die Gerade  $v$ , also beide Kernpunkte, unendlich fern, kann man die Bedingung 1) durch Bewegungen der gegebenen Bilder nicht befriedigen.

Hat man nun die Befriedigung der Bedingung 1) erreicht, kann man durch passende Wahl der Punkte  $U_1$  und  $U_2$  fast jedes  $O_3$  der Ebene  $\omega$  als Sehpunkt erhalten (S. 28). Jeder Wahl des Projektionszentrums aber entspricht nur ein neues perspektives Bild der gegebenen Figur. Wir heben hervor:

Durch Hinzufügung von Bewegungen in der Bildebene  $\alpha$  zu  $T_1$  und  $T_2$  ist es im allgemeinen möglich, die beiden Bilder in solche Lagen zu bringen, dass neue perspektivische Bilder durch passende Wahl von  $U_1$  und  $U_2$  zu erhalten sind.

Wenn  $T_1$  und  $T_2$  nicht völlig allgemeine gegenseitige Lage haben, kann man ohne zusätzliche Bewegungen auskommen, indem z. B. die Bedingung 1) schon befriedigt sein, und die Konstruktion direkt an den vorliegenden Figuren vorgenommen werden kann. Dieses hat z. B. Gültigkeit, wenn die Kernpunkte  $V_1$  und  $V_2$  identisch sind, speziell wenn  $T_1$  und  $T_2$  nur Zentralprojektionen auf dieselbe Ebene sind (vergl. S. 28).

In dem Fall, wo  $(P_1)$  und  $(P_2)$  die MONGE'schen Bilder, d. h. Aufriss und Grundriss sind, sind die Verhältnisse sehr übersichtlich. Hier fallen  $V_1$  und  $V_2$  in dem unendlich fernen Punkt, der durch die Verbindungsgerade zweier entsprechender Punkte  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt ist, zusammen. Eine neue perspektive Abbil-

dung  $T_3$  erhält man in diesem Fall, wenn man  $U_1$  und  $U_2$  so wählt, dass die Gerade  $U_1U_2$  durch  $V_1 = V_2$  hindurchgeht. Dies bedeutet, dass  $U_1$  und  $U_2$  die MONGE'schen Bilder eines Punktes  $U$  im Raume sind. Der Schnittpunkt  $P_3$  von  $U_1P_1$  und  $U_2P_2$  wird ein zusammenfallendes Bild der Spur der Geraden  $UP$  in der Mittelebene bei beiden Abbildungen. Somit ist  $(P_3)$  die orthogonale Projektion auf eine der Bildebenen von derjenigen Figur, die durch Zentralprojektion der Figur  $(P)$  aus  $U$  auf die Mittelebene entsteht.

Werden  $U_1$  und  $U_2$  nicht so gewählt, dass sie Bilder von einem und demselben Punkt  $U$  sind, so wird die Abbildung  $T_3$  quadratisch.

Dem Verfahren bei axonometrischer Abbildung entsprechend werden wir auch hier eine andere Art der Erzeugung perspektiver Bilder aus zwei gegebenen Abbildungen (Bildern) besprechen, indem wir eine Kombination von regulären und singulären perspektiven Abbildungen versuchen. Dadurch erreichen wir, erstens die erwähnten Bewegungen der zwei gegebenen Bilder zu vermeiden, zweitens die Erzeugung von vielen verschiedenen, demselben Sehpunkt  $O_3$  entsprechenden Bildern  $(P_3)$ .

Es seien  $T_1$  und  $T_2$  gegebene reguläre perspektive Abbildungen mit Sehpunkten  $O_1$  und  $O_2$ . Wir suchen ein neues perspektives Bild mit Sehpunkt  $O_3$ , wo  $O_3$  ganz willkürlich ausserhalb  $O_1O_2$  gewählt wird. Dem Strahl  $O_1O_3$  entspricht bei  $T_1$  ein Punkt  $U_1$ , analog  $O_2O_3$  bei  $T_2$  ein Punkt  $U_2$ . Nun zentralprojizieren wir die Figuren  $(P_1)$  und  $(P_2)$  aus  $U_1$  bzw.  $U_2$  auf zwei Geraden  $a_1$  bzw.  $a_2$ . Dadurch entstehen auf  $a_1$  und  $a_2$  singuläre perspektive Bilder  $(P'_1)$  und  $(P'_2)$  von dem Objekt  $(P)$ , wobei die Geraden  $O_1O_3$  und  $O_2O_3$  die Achsen der Abbildungen sind. Wenden wir nun auf diese Bilder die auf S. 31–32 angegebene Konstruktion an, so entsteht ein Bild  $(P_3)$ , einer neuen regulären perspektiven Abbildung  $T_3$  mit Sehpunkt  $O_3$  entsprechend.

Damit sind wir zu folgendem Verfahren (Fig. 7) geführt worden:

Zu einem vorgelegten Sehpunkt  $O_3$  bestimmt man die  $O_3$  entsprechenden Punkte  $U_1$  und  $U_2$  in den Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$ . Von  $U_1$  aus projiziert man das Bild  $(P_1)$  auf eine willkürlich gewählte Gerade  $a_1$  in  $(P'_1)$ , von

$U_2$  aus das Bild  $(P_2)$  auf eine Gerade  $a_2$  in  $(P'_2)$ . Die Gerade  $U_1V_1$  schneidet  $a_1$  in  $S_1$ , und  $U_2V_2$  schneidet  $a_2$  in  $S_2$ . Auf der Geraden  $S_1S_2$  werden zwei beliebige Punkte  $U'_1$  und  $U'_2$  gewählt, wonach  $(P'_1)$  von  $U'_1$  aus und  $(P'_2)$  von  $U'_2$  aus projiziert werden. Der Schnittpunkt  $P_3$  entsprechender Geraden erzeugt ein neues perspektives Bild von  $(P)$ .

Bezüglich der Einführung der Punkte  $S_1$  und  $S_2$  ist zu bemerken, dass, indem  $V_1$  und  $V_2$  die Kernpunkte sind, die Gerade  $U_1V_1$  bei  $T_1$  das Bild der Ebene  $\omega = O_1O_2O_3$  wird, weshalb  $S_1$  in der singulären Abbildung das Bild derselben

Ebene wird. Analog für  $S_2$ .  $U'_1$  und  $U'_2$  sollen dann auf der Geraden  $S_1S_2$  liegen.

Da auch  $a_1$  und  $a_2$  willkürlich wählbar sind, gibt es im ganzen 6 Parameter zur Festlegung des Bildes  $(P_3)$ , d. h. es können im ganzen  $\infty^6$  unter sich projektive, dem vorgelegten Sehpunkt  $O_3$  entsprechende Bilder entstehen. Weil eine Kollineation von 8 Parametern und eine Kongruenztransformation von 3 Parametern abhängig sind, ist zu erwarten, — einen Beweis

dafür habe ich jedoch nicht durchführen können, — dass man durch geeignete Wahl der beiden Geraden  $a_1, a_2$  und der Punkte  $U_1, U_2$  aus einer gegebenen Figur  $(P)$  d. h. aus  $(P_1)$  und  $(P_2)$  sogar auf unendlich viele verschiedene Weisen ein vorgelegtes perspektives Bild  $(P_3)$  hervorbringen kann.

Wählt man sowohl  $a_1$  als  $a_2$  durch den Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $U_1V_1$  und  $U_2V_2$ , braucht man nur  $U'_1$  und  $U'_2$  auf einer Geraden durch  $S$  zu wählen.

Besonders einfach wird es, wenn  $a_1$  und  $a_2$  auf derselben Geraden  $a$  durch  $S$  gewählt werden. Die Konstruktion bekommt dann die in Fig. 8 angegebene relativ einfache Form.

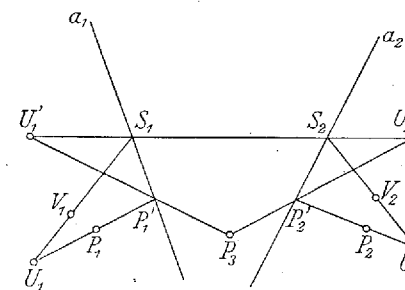


Fig. 7.

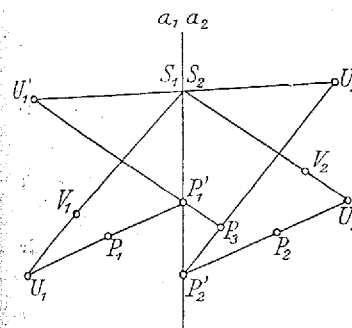


Fig. 8.

## § 8. Imaginäre Abbildungen.

Im Vorhergehenden haben wir immer die behandelten Abbildungen als reell vorausgesetzt, wie es natürlich erscheint, da der Ausgangspunkt die axonometrischen und perspektiven Abbildungen des Raumes auf eine Ebene waren, wo man sich gewöhnlich nur für die reellen Punkte interessiert. Wenn von quadratischen Abbildungen die Rede ist, kann man indessen vorteilhaft imaginäre Punkte verwenden, indem man dadurch neue Auskünfte auch auf reellem Gebiet bekommt.

Betrachtet man die allgemeine Abbildung  $T_3$ , die aus zwei perspektiven Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  in Verbindung mit zwei Projektionszentren  $U_1$  und  $U_2$  hervorgeht, nämlich die quadratische Abbildung, so haben wir gesehen, dass der ganze Strahlenraum so auf die Bildebene  $\alpha$  abgebildet wurde, dass eine Gerade einem Kegelschnitt durch  $U_1$  und  $U_2$  einer neuen Geraden oder einem Punkt entspricht, je nachdem sie die Hauptgeraden nicht schneidet oder eine oder zwei von ihnen schneidet. Wählen wir nun  $U_1$  und  $U_2$  als die Kreispunkte der Ebene, wird der ganze Strahlenraum sich auf die Kreise einer Ebene abbilden lassen, indem man zu den Kreisen auch Geraden (uneigentliche Kreise) und Punkte (Punktkreise) mitrechnet.

Im allgemeinen wird die Abbildung  $T_3$ , die den Strahlenraum in die Kreise der Ebene überführt, imaginär sein; bei besonderer Wahl von  $u_1$  und  $u_2$  wird die Transformation jedoch reell. Dann müssen  $u_1$  und  $u_2$  imaginär sein, und die früher erwähnte Geradenkongruenz  $G$  mit den Leitgeraden  $u_1$  und  $u_2$  wird elliptisch.

Als Beispiel werden wir folgende Abbildung betrachten.  $T_1$  und  $T_2$  sind Zentralprojektionen des Raumes auf die Ebene  $z=0$  (in allgemeinen rechtwinkligen Koordinaten) aus den Punkten  $O_1(0, 0, i)$  und  $O_2(0, 0, -i)$ , und  $U_1$  und  $U_2$  werden in den Kreispunkten der Ebene  $z=0$  gewählt. Ein reeller Punkt  $P$  wird bei den Zentralprojektionen in konjugiert-imaginäre Punkte  $P_1$  und  $P_2$  überführt, wonach die Verbindungsgeraden mit den konjugiert-imaginären Kreispunkten einen reellen Schnittpunkt  $P_3$  geben. Die Kongruenz  $G$ , die die Geraden  $O_1U_1$  und  $O_2U_2$  als Leitgeraden hat, wird, wie ein einfaches Ausrechnen zeigt, eine Rotationskongruenz mit der Z-Achse als

Hauptachse<sup>1)</sup>, und die betrachtete Abbildung  $T_3$  wird die schiefe Projektion auf die Ebene  $z=0$ , die durch diese elliptische Kongruenz bestimmt ist. (Einfach kann man diese Abbildung so erzeugen, dass die Gerade durch die Punkte  $(p, q, 1)$  und  $(-q, p, -1)$  in den Mittelpunkt  $\left(\frac{p-q}{2}, \frac{p+q}{2}, 0\right)$  der Strecke abgebildet wird;  $p$  und  $q$  sind unabhängige Parameter).

Diese bemerkenswerte Abbildung bildet ohne Ausnahme alle reellen Punkte des Raumes auf die reellen Punkte der Ebene ab. Die Gerade  $s$  fällt in die unendlich ferne Gerade der Ebene  $z=0$ . Die schiefe Abbildung zwischen zwei zu  $z=0$  parallelen Ebenen wird somit eine Ähnlichkeit (speziell eine Kongruenz), wodurch also Gerade in Gerade übergeführt wird. Dies ist damit übereinstimmend, dass eine zur Kongruenz gehörige Strahlenfläche, die eine zu  $z=0$  parallele Gerade enthält, ein hyperbolisches Paraboloid mit der Richtungsebene  $z=0$  ist. Da andere Geraden in Kreise abgebildet werden, schliesst man, dass für ein beliebiges Hyperboloid der Geradenkongruenz das eine System von Kreisen in Ebenen parallel zu  $z=0$  liegt.

## § 9. Algebraische Darstellung.

Eine perspektive Abbildung  $T_1$  lässt sich durch Gleichungen der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} qy'_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = \alpha x \\ qy'_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = \beta x \\ qy'_3 &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = \gamma x \end{aligned}$$

oder kürzer

$$(1) \quad qy' = q(y'_1, y'_2, y'_3) = (\alpha x, \beta x, \gamma x)$$

darstellen, wo  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  projektive Koordinaten des Raumes,  $y' = (y'_1, y'_2, y'_3)$  projektive Koordinaten der Bildebene  $\alpha$  und  $q$  ein Proportionalitätsfaktor sind.

Der Sehpunkt  $O_1$  ist dadurch charakterisiert, dass er keinen Bildpunkt hat. Löst man also die Gleichungen

$$\alpha x = 0, \quad \beta x = 0, \quad \gamma x = 0,$$

<sup>1)</sup> [14], S. 168 ff.

bekommt man Koordinaten für  $O_1$ . Wir bezeichnen eine Lösung dieser Gleichungen mit  $\widehat{abc}$ , wo dieses Symbol ein Vektor ist, dessen Komponenten die Komplemente der letzten Reihe der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{vmatrix}$$

sind.

Wenn dieser Vektor eigentlich ist, d. h. wenn die Matrix den Rang 3 hat, ist die Abbildung regulär. Hat die Matrix den Rang 2, wodurch  $\widehat{abc}$  ein Nullvektor wird, ist  $T_1$  eine singuläre Abbildung, durch die der Raum auf eine Gerade abgebildet wird. Ist endlich der Rang gleich 1, bekommt man eine Abbildung des Raumes in einen einzelnen Punkt. Der Rang Null ist ausgeschlossen.

Es sei nun  $T_1$  eine reguläre Abbildung. Wir suchen die Punkte  $x$ , die in denselben Punkt  $y^0$  abgebildet werden.

Ist  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$  eine Lösung der Gleichungen (1) für  $y' = y^0$ , werden sämtliche Lösungen  $x$  in der Form

$$x = \lambda x^0 + \mu \widehat{abc} \quad (\lambda \neq 0)$$

dargestellt, woraus man sieht, dass alle Punkte  $x$  auf einer Geraden durch das Projektionszentrum (Sehpunkt)  $O_1$  liegen.

Es sei nun eine neue perspektive Abbildung  $T_2$  durch

$$(2) \quad \varphi y'' = (by'', ex'', fx'')$$

bestimmt, und es seien die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  in der Ebene  $\alpha$  durch die Koordinaten  $u' = (u'_1, u'_2, u'_3)$  und  $u'' = (u''_1, u''_2, u''_3)$  gegeben. Wir suchen eine algebraische Darstellung der Abbildung  $T_3$ , die dadurch bestimmt ist, dass der Punkt  $P$  ( $x$ ) in den Schnittpunkt  $P_3$  der Geraden  $U_1 P_1$  und  $U_2 P_2$  abgebildet werden soll. Die Linienkoordinaten dieser Geraden sind  $\widehat{u'y'}$  und  $\widehat{u'y''}$ , wonach wir zur Bestimmung von  $y'''$  die Gleichungen

$$y''' = \widehat{u'y' u''y''} = u' | \widehat{u'y' y''} | - y'' | \widehat{u'y' u''} |$$

haben. Setzt man hier  $y' = (ax, bx, cx)$  und  $y'' = (bx, ex, fx)$  ein, entstehen Gleichungen einer quadratischen Abbildung des Raumes auf die Ebene.

Diese Gleichungen werden sehr einfach, wenn man z. B.  $U_1$  im Punkte  $(1, 0, 0)$  und  $U_2$  im Punkte  $(0, 1, 0)$  wählt. Man hat dann

$$u'y' = (0, -y'_3, y'_2), \quad u''y'' = (y''_3, 0, -y''_1),$$

wodurch

$$\varphi y''' = (y'_3 y''_1, y'_2 y''_3, y'_3 y''_3)$$

oder

$$(3) \quad \varphi y''' = ((cx)(bx), (bx)(fx), (cx)(fx)).$$

Wir nehmen jetzt an, dass sowohl  $T_1$  als  $T_2$  reguläre Abbildungen sind, d. h. weder  $\widehat{abc}$  noch  $\widehat{def}$  Nullvektor ist. Die Gerade  $u_1$ , die bei  $T_1$  in den Punkt  $(1, 0, 0)$  abgebildet wird, muss durch die Gleichungen  $bx = 0, cx = 0$  bestimmt sein. Die Gerade  $u_2$  ist entsprechend durch  $bx = 0, fx = 0$  bestimmt. Weil die Ebene  $\sigma_1$  bei  $T_1$  der Geraden  $U_1 U_2$  entspricht, muss die Gleichung dieser Ebene  $cx = 0$  sein. Analog hat  $\sigma_2$  die Gleichung  $fx = 0$ , so dass die dritte Hauptgerade  $s$  durch die Gleichungen  $cx = 0, fx = 0$  gegeben ist.

Man kann nun leicht entscheiden, wann die Abbildung  $T_3$  quadratisch ohne Sehpunkt oder mit Sehpunkt oder perspektivisch wird. Die Abbildung wird quadratisch ohne Sehpunkt, wenn  $u_1$  und  $u_2$  sich nicht schneiden, d. h.

$$|bcd\widehat{f}| \neq 0.$$

Ist dagegen  $|bcd\widehat{f}| = 0$ , existiert ein Sehpunkt  $O_3$  mit dem Koordinatenvektor  $\widehat{bcd}$ , und die Abbildung ist quadratisch oder perspektiv. Welche der beiden Möglichkeiten eintritt, ist davon abhängig, ob die Gerade  $s$  existiert oder nicht, also ob die Vektoren  $c$  und  $f$  linear unabhängig sind oder nicht. Wenn  $c = k \cdot f$ , ist  $T_3$  perspektiv, und wenn  $c \neq k \cdot f$  ist, wird  $T_3$  quadratisch.

Wenn  $T_3$  perspektiv ist, bekommt man aus (3) die Gleichung

$$\varphi y''' = (k \cdot bx, bx, cx).$$

Die Ebene  $\alpha x = fx = 0$  enthält die Sehpunkte  $O_1$  ( $\widehat{abc}$ ),  $O_2$  ( $\widehat{def}$ ) und  $O_3$  ( $\widehat{bcd}$ ) und ist die früher mit  $\omega$  bezeichnete Ebene, die sowohl bei  $T_1$  als bei  $T_2$  in dieselbe Gerade der Ebene  $\alpha$ , hier die  $y_3$ -Achse, abgebildet wird.

Es ist nun auch klar, dass die Kernpunkte, d.h. das Bild  $V_1$  von  $O_2$  bei  $T_1$  und das Bild  $V_2$  von  $O_1$  bei  $T_2$  auf dieser Geraden liegen. Setzt man nämlich  $x = \widehat{abc}$  in die Gleichung (2) ein, oder  $x = \widehat{def}$  in (1), wird in beiden Fällen die dritte Koordinate Null.

### Literaturverzeichnis.

- [1] ARVESEN, P., Zur axonometrischen Methode von L. Eckhart, Det kgl. Norske Vidensk. Selsk. Forh. XI (1938), S. 72.
- [2] — Weiteres über L. Eckharts axonometrische Methode, ebenda S. 78.
- [3] ECKHART, L., Affine Abbildung und Axonometrie, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, mat. nat. Kl., B. 146 (1937), S. 51.
- [4] — Ein neues Schrägrissverfahren, Zeitschr. des Vereins deutsch. Ingen. (VDI) (1938), S. 447.
- [5] FABRICIUS-BJERRE, FR., Om L. Eckharts aksonometriske Metode, Mat. Tidsskr. B, (1944), S. 1.
- [6] GAUSS, Werke, B. VIII (1900), S. 345.
- [7] HAUCK, G., Neue Constructionen der Perspektive und Photogrammetrie, Journ. f. reine u. angew. Mat., B. 95 (1883), S. 1.
- [8] — Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme, ebenda B. 97 (1884), S. 261.
- [9] MÜLLER, E., Vorlesungen über darstellende Geometrie, Leipzig 1923.
- [10] NYSTRÖM, E. J., Zur praktischen Axonometrie, Soc. Sc. Fenn., Comm. Phys. Math. XI, 11, 1942.
- [11] STEINER, Gesammelte Werke, B. 1 (1881), S. 409.
- [12] TRANSON, A., De la projection gauche, Nouv. Ann. 2, ser. IV (1865), S. 385.
- [13] — — — (suite), ebenda, ser. V (1866), S. 63.
- [14] ZINDLER, K., Liniengeometrie mit Anwendungen, Leipzig 1902, B. 1.

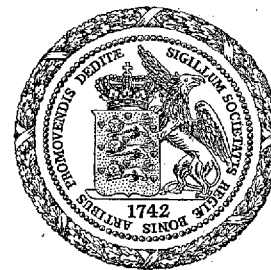
DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB  
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXII, NR. 6

## EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

VIERTE MITTEILUNG



KØBENHAVN  
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1945