DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXI, NR. 5

BEITRÄGE ZUR NICHT-EUDOXISCHEN GEOMETRIE I–II

VON

JOHANNES HJELMSLEV

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1944

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

Einleitung.

§ 1. Den folgenden Untersuchungen über nicht-Eudoxische Geometrie legen wir eine Kongruenzlehre zugrunde, die beispielsweise durch Hilberts Axiomgruppen I—III (Grundlagen der Geometrie, 2.—7. Auflage), eventuell ohne die räumlichen Axiome[1], festgelegt werden kann. Dies bringt mit sich, dass es in der Ebene stets sich nicht treffende Geraden gibt, z. B. Lote auf derselben Geraden. Die Ebene wird daher als offene Ebene bezeichnet.

Hierzu kommt nun als Ausdruck dafür, dass die Geometrie nicht-Eudoxisch ist:

Es gibt zwei Strecken von der Beschaffenheit, dass die eine von ihnen grösser als jedes Vielfache der anderen ist.

Innerhalb des hiermit gegebenen Rahmens hat man den »Euklidischen« Fall, wo die Winkelsumme eines jeden Dreiecks gleich $2R$ ist, den »elliptischen«, wo sie grösser, und endlich den »hyperbolischen«, wo sie kleiner als $2R$ ist.

In allen drei Fällen gilt der Satz vom Aussenwinkel (Euklid I, 16) und, dass die Summe zweier beliebiger Winkel eines Dreiecks kleiner als $2R$ ist (Euklid I, 17).

§ 2. Zwei Strecken a und b, $a<b$, heissen ebenbürtig, $a \backsim b$, wenn ein Vielfaches der kleineren grösser als die grössere ist, d. h. wenn eine ganze Zahl n derart existiert, dass $na>b$ ist. Selbstverständlich sollen auch zwei gleich grosse Strecken ebenbürtig genannt werden. Ist dagegen $na<b$ für jede positive ganze Zahl n, so wird a als b unterlegen ($a \prec b$), b als a überlegen ($b \succ a$) bezeichnet. Aus $a \backsim b$, $b \backsim c$ folgt $a \backsim c$. Aus $a \prec b$, $b \precsim c$ folgt $a \prec c$.

[1] Die räumlichen Axiome sind ja in dem Sinne überflüssig, dass sie stets durch konstruktive Erweiterung erfüllt werden können.

Die entsprechenden Bezeichnungen werden beim Vergleichen von Winkeln verwendet. Die Existenz der entsprechenden Relationen, Unterlegenheit und Überlegenheit, bei Winkeln wird im folgenden nachgewiesen.

Ein Winkel wird ordinär genannt, wenn er einem rechten Winkel ebenbürtig ist; er kann dann spitz, recht oder stumpf sein. Ein nicht ordinärer Winkel ist dem rechten Winkel unterlegen ($\prec R$) und wird singulär genannt. Zwei ordinäre Winkel sind stets ebenbürtig. Zwei ebenbürtige Winkel sind entweder beide ordinär oder beide singulär.

Im Euklidischen und elliptischen Fall besitzt jedes Dreieck wenigstens einen ordinären Winkel, während im hyperbolischen Fall alle drei Winkel singulär sein können.

§ 3. Die die nicht-Eudoxischen Geometrien betreffenden Untersuchungen fallen naturgemäss in drei Gruppen:

A. Die erste Gruppe besteht aus den vom Eudoxischen Axiom vollständig unabhängigen Untersuchungen, die somit sowohl in der Eudoxischen als auch in der nicht-Eudoxischen Geometrie Gültigkeit haben. Hierzu gehören viele Sätze bei Euklid, alle Untersuchungen unter den Axiomgruppen I-III bei Hilbert, die Einführung der Halbdrehungen und die daran anschliessenden Definitionen idealer Elemente usw.[1]. Als spezielle Beispiele aus dieser Gruppe sollen hier die folgenden fundamentalen Sätze angeführt werden, die in gewissem Sinne alle Untersuchungen dieser Art beherrschen:

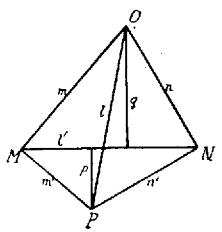

Fig. 1.

1°. Lotsatz. Auf zwei Geraden m und n durch einen Punkt O (Fig. 1) werden von einem Punkt P aus die Lote $PM = m'$ und $PN = n'$ gefällt. Auf die Verbindungsgerade $MN = l'$ der Fusspunkte werden die Lote p von P aus und q von O aus gefällt, und es wird die Gerade $PO = l$ gezogen. Es bestehen dann die Winkelrelationen $ml = qn$, $m'p = ln'$ und die Abstandsrelation $Mp = qN$.

Diese Relationen gelten zugleich als Spiegelungsrelationen, und als solche sind sie auch ursprünglich abgeleitet worden[2].

[1] Vgl. die Abhandlung des Verf. in Math. Ann. 64 sowie die weitergehenden Untersuchungen in »Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre« I, II, III, Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. VIII (1929), X (1929), XIX (1942).

[2] Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, I, S. 24—25, II, S. 4.

2°. Sätze über Quersummen von Strecken.

Unter der Quersumme c zweier Strecken a, b soll die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b verstanden werden. Wir schreiben dies

$$a \dot{+} b = c.$$

Die hierdurch definierte Operation (Queraddition) ist nicht nur kommutativ sondern auch assoziativ, d.h. für drei Strecken p, q, r gilt

$$(p \dot{+} q) \dot{+} r = p \dot{+} (q \dot{+} r).$$

Dies erkennt man unmittelbar mittels einer räumlichen Betrachtung, indem man p, q, r als Seiten eines windschiefen Streckenzuges auffasst, bei dem die Winkel zwischen p und q, zwischen q und r sowie zwischen den Ebenen pq und qr recht sind. Der Satz kann natürlich auch mittels ebener Betrachtungen bewiesen werden.

Die umgekehrte Operation (Quersubtraktion), die dadurch definiert ist, dass

$$c \dot{-} b = a$$

mit $a \dot{+} b = c$ gleichbedeutend ist, ist eindeutig, wenn sie ausführbar ist. Dies folgt daraus, dass das gleichschenklige Dreieck eine Symmetrieachse besitzt.

Dafür, dass die Quersubtraktion $c \dot{-} b$ möglich ist, ist notwendig, dass $c > b$ ist; wenn man kein Schnittpostulat für Kreis und Gerade einführt, kann man diese Bedingung aber nicht als hinreichend voraussetzen. Es ist indessen möglich, Rechenoperationen für Streckenpaare (a, b), (p, q), (r, s), $\cdots$ einzuführen, indem Gleichheit zweier Paare durch

$$(a, b) = (c, d),$$

wenn

$$a \dot{+} d = b \dot{+} c,$$

und Addition und Subtraktion durch

$$(p, q) \dot{+} (r, s) = (p \dot{+} r, q \dot{+} s)$$

$$(p, q) \dot{-} (r, s) = (p \dot{+} s, q \dot{+} r)$$

definiert werden. Wir wollen hierbei auch solche Grössenpaare in Betracht ziehen, bei denen 0 auf einer der Stellen oder auf beiden (Nullelement) steht.

Die üblichen Regeln der Addition und Subtraktion sind dann erfüllt.

Ist $p > q$ und existiert $p - q$, so hat man

$$(p, q) = (p - q, 0),$$

und ist $p < q$ und existiert $q - p$, so hat man

$$(p, q) = (0, q - p).$$

Hat man aber das elementare Schnittpostulat für Kreis und Gerade nicht, so kann das Paar (p, q) nicht immer auf eine Form gebracht werden, die 0 an einer der Stellen hat, da weder $p - q$ noch $q - p$ zu existieren braucht.

Nimmt man indessen die Strecken in dem Sinne unter die Grössenpaare auf, dass die beliebige Strecke x durch das Paar $(x, 0)$ vertreten wird, und untersucht man die Bedeutung der Addition und Subtraktion für diese speziellen Grössenpaare, so sieht man, dass

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$
$$(x, 0) - (y, 0) = (x, y)$$

gilt, wo das letzte Paar eventuell auf $(x - y, 0)$ oder $(0, y - x)$ reduziert werden kann. Auf diese Weise ist es möglich einer beliebigen Reihe von Queradditionen und -subtraktionen eine Bedeutung beizulegen, die die Anwendung der gewöhnlichen Umformungen von (additiv und subtraktiv gebildeten) mehrgliedrigen Grössen gestattet.

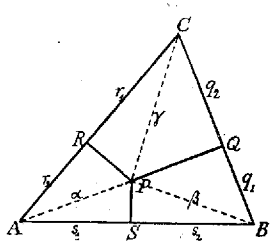

Fig 2.

Ein paar Anwendungen seien angeführt.

1) Von einem Punkt P werden die Lote PQ, PR, PS auf die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 2) gefällt. Bezeichnen q_1, q_2; r_1, r_2; s_1, s_2 die Stücke, in welche die Seiten hierbei geteilt werden, so gilt

$$q_1 + r_1 + s_1 = q_2 + r_2 + s_2.$$

Dies folgt aus den Gleichungen

$$\beta - q_1 = \gamma - q_2$$
$$\gamma - r_1 = \alpha - r_2$$
$$\alpha - s_1 = \beta - s_2$$

durch Queraddition.

2) Hat man umgekehrt auf den Seiten eines Dreiecks ABC drei Punkte Q, R, S, die die Seiten in Stücke $q_1, q_2; r_1, r_2; s_1, s_2$ teilen, die der Relation

$$q_1 + r_1 + s_1 = q_2 + r_2 + s_2$$

genügen, so gehen die auf den Seiten in den Punkten Q, R, S errichteten Lote durch denselben Punkt, falls sich überhaupt zwei von ihnen schneiden. Der Beweis wird indirekt geführt, indem man beachtet, dass die Quersumme wächst mit den Addenden, und dass $a + b < a + b$. Der Satz kann so erweitert werden, dass auch ideale Schnittpunkte einbezogen werden, worauf wir jedoch nicht eingehen wollen.

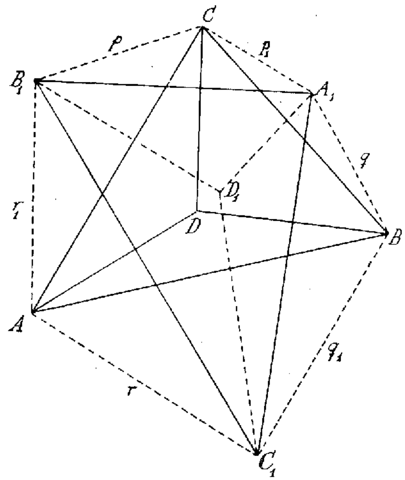

Fig. 3.

3) Der Satz von den orthologen Dreiecken (Fig 3).

Gehen die von den Ecken A, B, C eines Dreiecks ABC auf die Seiten B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 eines anderen Dreiecks gefällten Lote durch denselben Punkt D, so gehen auch die von den Ecken A_1, B_1, C_1 des zweiten Dreiecks auf die Seiten BC, CA, AB des ersten gefällten Lote durch einen und denselben Punkt D_1 (vorausgesetzt, dass sich überhaupt zwei von ihnen schneiden).

Der Beweis ergibt sich leicht aus den unter 1) und 2) angeführten Sätzen. Man hat nämlich nach 1)

$$p + q + r = p_1 + q_1 + r_1$$

woraus nach 2) folgt, dass die von A_1, B_1, C_1 auf BC, CA, AB gefällen Lote durch denselben Punkt gehen.

Der Satz kann natürlich so erweitert werden, dass auch ideale Punkte einbezogen werden, worauf aber nicht eingegangen werden soll.

Der gefundene Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Wenn zwei vollständige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ so gelegen sind, dass die fünf Seiten AD, BD, CD, AB und BC des einen auf den Seiten B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, C_1D_1 bzw. A_1D_1 des anderen senkrecht stehen, so stehen auch die sechsten Seiten AC und B_1D_1 aufeinander senkrecht.

Im Euklidischen Fall ist dieser Satz dem Pappus-Pascalschen Satz äquivalent.

Wir machen darauf aufmerksam, dass der Beweis unabhängig davon gilt, ob die Figur eben ist oder nicht, sodass der Satz in der folgenden Form auch im Raume gilt:

Wenn zwei Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ so gelegen sind, dass die fünf Kanten AD, BD, CD, AB und BC des einen auf den »gegenüberliegenden« Kanten B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, C_1D_1 bzw. A_1D_1 des anderen senkrecht stehen, so stehen auch die sechsten »einander gegenüberliegenden« Kanten AC und B_1D_1 aufeinander senkrecht[1].

Auf ganz analoge Weise beweist man den folgenden Satz über orthologe Vierecke im Raume:

Wenn zwei windschiefe Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ so gelegen sind, dass die vier durch A, B, C bzw. D gehenden, auf A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 bzw. D_1A_1 senkrechten Ebenen durch denselben Punkt gehen, so gehen auch die vier entsprechenden, durch A_1, B_1, C_1 bzw. D_1 gehenden und auf AB, BC, CD bzw. DA senkrechten Ebenen durch einen Punkt (vorausgesetzt, dass überhaupt drei dieser Ebenen einen Punkt gemein haben; anderenfalls kann man den Satz durch Einführung idealer Elemente retten).

Aus diesem Satz folgert man nun leicht den Satz von den orthologen Tetraedern:

Wenn zwei Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ so gelegen sind, dass die Lote von den Ecken A, B, C, D des einen auf die »gegenüberliegenden« Seitenflächen $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ durch denselben Punkt gehen, so gehen auch die Lote von den Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 des

[1] Dass zwei Geraden im Raume aufeinander senkrecht stehen, soll bedeuten, dass eine der Geraden einer auf der anderen senkrechten Ebene angehört.

zweiten auf die »gegenüberliegenden« Seitenflächen BCD, CDA, DAB, ABC des ersten durch einen und denselben Punkt.

Schliesslich ergibt sich aus diesem Satz unmittelbar die Existenz von vollständigen Fünfecken $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ im Raume, die derart miteinander verknüpft sind, dass jede Seite des einen auf der »gegenüberliegenden« Seitenebene des anderen senkrecht steht, also $AB \perp C_1D_1E_1$, $BC \perp A_1D_1E_1$ usw., $A_1B_1 \perp CDE$, $B_1C_1 \perp ADE$ usw.

Die angeführten Sätze können natürlich durch Einführung idealer Elemente auf bekannte Weise in den projektiven Raum eingeordnet werden; hier war jedoch beabsichtigt, ihre Gültigkeit in den unmittelbar durch die Axiome festgelegten Raum und ihren einfachen Zusammenhang mit dem assoziativen Gesetz der Queraddition hervorzuheben.

B. Eine zweite, die nicht-Eudoxische Geometrie betreffende Gruppe von Untersuchungen läuft auf den Nachweis hinaus, dass gewisse Sätze, die aus einem das Eudoxische Axiom enthaltenden Axiomsystem Σ ableitbar sind, nicht ohne Anwendung dieses Axioms bewiesen werden können. Dieser Nachweis besteht in der Konstruktion einer Geometrie, in welcher das Eudoxische Axiom nicht gilt, während alle übrigen Axiome aus Σ gelten, und in der Angabe eines Beispiels, das zeigt, dass der betreffende Satz in dieser Geometrie nicht richtig ist. Die Einführung derartiger Untersuchungen verdankt man David Hilbert.

Ein bekanntes Beispiel hat man in den Ausführungen über Satz 46 in Hilberts »Grundlagen der Geometrie«, 7. Aufl., S. 72—73, wo nachgewiesen wird, dass der Satz, dass Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen zerlegungsgleich sind, nicht ohne Heranziehung des Eudoxischen Axioms bewiesen werden kann.

Ein weiteres Beispiel hat man in dem Beweis dafür, dass das Saccheri-Lambertsche Axiom von der Existenz eines Rechtecks zusammen mit den Hilbertschen Axiomgruppen I—III das V. Postulat Euklids nicht ohne Hinzufügung des Eudoxischen Axioms zu beweisen gestattet. Der Beweis wird in folgender Weise geführt: In der durch die vorgelegten Axiome definierten Geometrie Π betrachte man ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 4) mit den Katheten $a = BC$, $b = CA$, $a \prec b$, und definiere eine Untergeometrie, die den Bereich Π' umfasst, der aus allen den Punkten von Π besteht, deren Abstand von C kleiner als oder ebenbürtig mit a ist, und zwar so, dass unter den Geraden in Π' die Durchschnitte der ursprünglichen Geraden mit Π' verstanden werden. Alle für Π vorgeschriebenen Axiome einschliesslich des Saccheri-Lambertschen gelten dann auch in Π'. Der Durchschnitt des Dreiecks ABC mit Π' ist jedoch eine Figur, die unmittelbar zeigt, dass das V. Postulat in Π' nicht gilt, und damit ist unser Nachweis beendet.

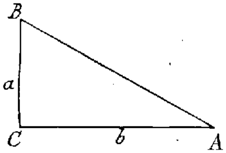

Fig. 4.

C. Die dritte Gruppe von Untersuchungen läuft schliesslich darauf hinaus, die nicht-Eudoxische Geometrie selbst in Bezug auf solche Eigenschaften zu untersuchen, die direkt keine Bedeutung oder keine Gültigkeit in der Eudoxischen Geometrie haben. Sätze dieser Art scheinen auf der hier gewählten Grundlage bisher keine Rolle in der mathematischen Literatur gespielt zu haben, wenn man von Sätzen rein negativer Form, die eine direkte Folge von Untersuchungen der Gruppe B sind, absieht.

Im folgenden sollen einige der naheliegendsten Fragen dieser Art, die einerseits die Ebenbürtigkeit oder Nicht-Ebenbürtigkeit von Seiten und Winkeln eines Dreiecks o. a., andererseits die Zerlegungsgleichheit von Polygonen betreffen, behandelt werden[1].

[1] G. Veronese hat in seinem gross angelegten, aber schwer zugänglichen Werk »Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare«, Padova 1891 (deutsche Ausgabe von A. Schepp: »Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten ...«, Leipzig 1894) die erste umfassende Behandlung einer nicht-Eudoxischen Geometrie gegeben. Es liegt in der Natur der Sache, dass gewisse Betrachtungen dieses Werkes Berührungspunkte mit den vorliegenden Untersuchungen aufweisen. Axiomatische Einstellung, Grundlage und Ziele sind jedoch wesentlich verschieden.

Bestimmte Definitionen von Zahlsystemen, die dem Nachweis der Existenz der Geometrien, mit denen Veronese arbeitet, dienen können, sind von T. Levi-Civita in einer Arbeit aus dem Jahre 1893: Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, Atti Ist. Veneto (7) IV. S. 1765—1815, sowie in einer späteren Arbeit: Sui numeri transfiniti, Rend. Acc. Lincei (5) 7_1, S. 91—96, 113—121 (1898) aufgestellt worden.

Aber erst durch Hilberts epochemachendes Werk »Grundlagen der Geometrie«, 1899, haben die nicht-Eudoxischen Gebilde einen fundamentalen Platz in der mathematischen Forschung erhalten.

I. Allgemeine Sätze über Ebenbürtigkeit.

§ 4. Zunächst soll es sich um Sätze handeln, die innerhalb des in der Einleitung angegebenen Rahmens in allen drei Hauptfällen (dem Euklidischen, dem elliptischen und dem hyperbolischen) gelten.

Aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung entnimmt man, dass die beiden grössten Seiten eines Dreiecks stets ebenbürtig sind.

Satz 1. Ebenbürtigen Winkeln eines Dreiecks liegen ebenbürtige Seiten gegenüber.

Das gegebene Dreieck sei ABC. Der Winkel A sei kleiner als und ebenbürtig mit $\angle B$ (Fig. 5). Man konstruiere das gleichschenklige Dreieck ABB_1 ($AB_1 = BB_1$), indem man an AB in B den Winkel A abträgt. Ferner konstruiere man das gleichschenklige Dreieck B_1BB_2 ($BB_2 = B_1B_2$), und so fahre man fort. Die Winkel, die man hierbei nacheinander bei B abträgt, sind zuerst A, dann ein Winkel grösser als A, danach ein noch grösserer usw. Hieraus geht hervor, dass die abgetragenen Winkel zusammen schliesslich $\angle B$ überdecken müssen, so dass man einmal eine Strecke BB_{r-1} erhält, die innerhalb des Winkels B verläuft, während die folgende BB_r ausserhalb fällt (und möglicherweise überhaupt keinen Schnittpunkt B_r liefert). Hieraus folgt, dass $\angle B_{r-1}BC$ kleiner als $\angle BB_{r-1}C$ ist, also

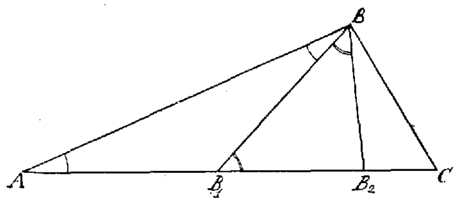

Fig. 5.

$$B_{r-1}C < BC,\ BB_{r-1} < BC + B_{r-1}C < 2\,BC,$$

$$BB_{r-2} < 4\,BC, \cdots, BB_1 < 2^{r-1}BC,\ AB < 2^r BC,$$

$$AC < AB + BC < (2^r + 1)\,BC.$$

Da zugleich $AC > BC$ ist, sind folglich AC und BC ebenbürtig, was zu beweisen war.

Beim Beweis ist, von gewöhnlichen, einfachen Kongruenzbetrachtungen abgesehen, nur der Satz vom Aussenwinkel benutzt worden. Satz 1 gilt daher auch für sphärische Dreiecke, deren Seiten kleiner als 90° sind.

Aus Satz 1 folgert man sofort

Satz 2. Die Seiten eines Dreiecks mit lauter ordinären Winkeln sind untereinander ebenbürtig.

Ferner hat man den spezielleren

Satz 3. In einem rechtwinkligen Dreieck mit einem ordinären spitzen Winkel ist dessen gegenüberliegende Kathete der Hypotenuse ebenbürtig.

Aus dem folgert man weiter

Satz 4. In einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Winkel an der Spitze ordinär ist, ist die Grundlinie den Schenkeln ebenbürtig.

Bemerkung: Auf der Kugel gilt ein entsprechender Satz mit dem Vorbehalt, dass die Schenkel $\leq 90^\circ$ sind.

Schliesslich erhält man aus Satz 1 durch einen indirekten Schluss:

Satz 5. Wenn eine Seite eines Dreiecks einer der anderen Seiten (und damit beiden) unterlegen ist, so ist ihr Gegenwinkel den beiden anderen Winkeln unterlegen und somit gewiss singulär.

Hierin liegt ein Beweis für die Existenz nicht ebenbürtiger Winkel und somit die von singulären Winkeln.

Ferner kann man im Anschluss hieran zeigen:

Satz 6. Zu einem gegebenen Winkel α lässt sich stets ein Winkel $\beta \prec \alpha$ konstruieren.

Der Winkel α habe den Scheitel A (Fig. 6). Auf seinem einen Schenkel werde die beliebige Strecke AC und auf dem anderen

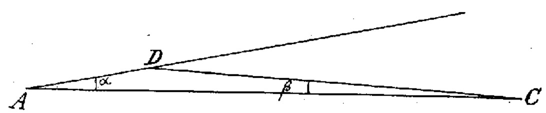

Fig. 6.

eine Strecke $AD \prec AC$ abgetragen. Im Dreieck ADC ist $AD \prec DC$ und daher $\beta = \angle ACD \prec \alpha$.

Hierdurch wird man weiter auf einen entsprechenden Satz über Strecken geführt:

Satz 7. Zu einer gegebenen Strecke a lässt sich stets eine Strecke $b \prec a$ konstruieren.

Beim Beweise können wir davon ausgehen, dass eine Strecke $k \succ a$ existiert, da Satz 7 anderenfalls nur ein neuer Ausdruck für die allgemeine nicht-Eudoxische Voraussetzung (§ 1) ist. Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 7) mit den Katheten $BC = a$, $AC = k$. Der Gegenwinkel α von a ist dann singulär. Man trage

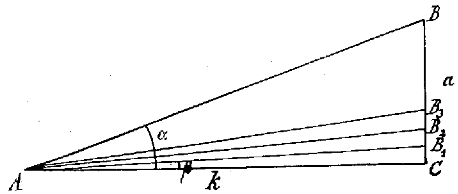

Fig. 7.

nun einen Winkel $\beta \prec \alpha$ in der aus der Figur ersichtlichen Weise ab. Dieser schneidet auf a die Strecke CB_1 aus. Man trage nun den Winkel β wiederholt derart ab, dass $\angle\, CAB_1 = B_1AB_2 = B_2AB_3 = \cdots$. Da α durch diese Winkel, die alle gleich β sind, niemals überdeckt werden kann, können die Strecken $CB_1, B_1B_2, B_2B_3, \cdots$, die eine wachsende Folge bilden, die Strecke a niemals überdecken, d. h. es ist $CB_1 \prec a$. Als die gewünschte Strecke b kann also CB_1 gewählt werden.

Die Sätze 6 und 7 gelten auch auf der Kugel, da man die betreffenden Untersuchungen auf einen Oktanten beschränken kann.

In der nicht-Eudoxischen Geometrie gibt es also keine niedrigste Grössenstufe in dem Sinne, dass zu jeder Strecke und zu jedem Winkel eine unterlegene Strecke bzw. ein unterlegener Winkel existiert. Dagegen kann es sehr wohl eine höchste Stufe geben. Was die Winkel betrifft, so repräsentiert der rechte Winkel stets die höchste Stufe. Falls es für Strecken keine höchste Stufe gibt, kann man zu einer vorgegebenen Strecke a stets eine Untergeometrie angeben, in der a die höchste Stufe repräsentiert. Man grenze nämlich um einen beliebig gewählten Punkt O den sogenannten Eudoxischen Bereich $E(a)$ ab, der aus allen den Punkten besteht, deren Abstand von O kleiner als oder ebenbürtig mit a ist. In diesem Bereich $E(a)$ gelten sämtliche vorausgesetzten Axiome, und damit hat man die gesuchte Untergeometrie.

Auf der Kugel hat man immer eine höchste Stufe, die durch den Quadranten k repräsentiert wird. Auch hier kann man natürlich zu jedem Abstand $a \prec k$ eine Untergeometrie $E(a)$ konstruieren, und jede solche Untergeometrie ist eine schwache elliptische Geometrie, d. h. eine Geometrie, in der alle Exzesse singülär sind (vgl. den folgenden § 5).

§ 5. Wir gehen nun zur spezielleren Untersuchung des elliptischen Falles innerhalb der Geometrie der nicht-Eudoxischen Ebene über und beweisen zunächst

Satz 8. Alle Exzesse von Dreiecken, und damit auch von Polygonen, sind singulär.

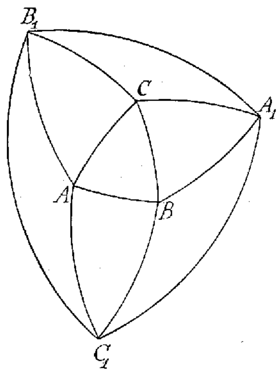

Fig. 8.

Die Winkel des Dreiecks seien A, B, C. Man betrachte die drei dem gegebenen kongruenten Dreiecke, die aus ihm durch Umwendung (Drehung um 180°) um die Mittelpunkte seiner Seiten hervorgehen (Fig. 8). Hierbei entstehen an den Ecken A, B, C drei Gruppen von Winkeln, von denen jede $A+B+C>2R$ ausmacht. Daraus folgt, dass ein grosses Dreieck $A_1B_1C_1$ entsteht, das alle übrigen umschliesst und dessen Exzess also mehr als viermal so gross wie der Exzess ε des gegebenen Dreiecks ist. Der Prozess kann wiederholt werden, woraus man ersieht, dass es ein Dreieck geben muss, dessen Exzess $4^r\varepsilon$ übersteigt, wo r eine beliebig grosse ganze Zahl ist. Da der Exzess jedoch stets kleiner als $4R$ ist, hat man $4^r\varepsilon < 4R$, d. h. ε ist singulär, was zu beweisen war.

Die Geometrie kann daher naturgemäss als schwache elliptische Geometrie bezeichnet werden[1].

§ 6. Danach gehen wir zu den Schnittkriterien im elliptischen und Euklidischen Fall über.

Satz 9. Wenn zwei Geraden l und m mit einer sie schneidenden Geraden innere Winkel bilden, von denen der eine recht und der andere spitz mit ordinärem Komplementwinkel ε ist, so schneiden sie sich (Fig. 9).

[1] Diesen geometrischen Systemen ordnet sich die von M. Dehn aufgestellte »Nicht-Legendresche Geometrie« (Math. Ann. 53, S. 431) unter. Ebenso gehört die dort aufgestellte »Semi-Euklidische Geometrie« zu den hier S. 13 genannten Untergeometrien.

Zum Beweise konstruiere man die gleichschenkligen Dreiecke ABB_1 $(BB_1 = AB)$, AB_1B_2 $(B_1B_2 = AB_1)$ usw. Deren Basiswinkel sind bzw.

$$\geqq \frac{R}{2}, \quad \geqq \frac{R}{4}, \ldots .$$

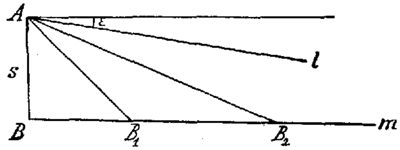

Fig. 9.

Hieraus folgt, dass die Strecke AB_r einmal innerhalb des Winkels ε fallen muss, da ε ordinär und daher grösser als $\frac{R}{2^n}$ für ein passendes n ist. Man sieht also, dass m von l zwischen B_{r-1} und B_r geschnitten wird.

Der Satz lässt sich verallgemeinern:

Satz 10. Wenn zwei Geraden l und m von einer dritten s so geschnitten werden, dass zwei auf derselben Seite von s gelegene Innenwinkel eine Summe haben, die um einen ordinären Winkel kleiner als $2R$ ist, so schneiden sie sich.

Der Beweis kann ganz wie der vorige geführt werden. Der Satz kann aber auch direkt auf den vorigen zurückgeführt werden, indem das Lot AC von A auf m gefällt wird (Fig. 10): Gegeben ist, das $\varepsilon = 2R - (\alpha + \beta)$ ordinär ist. Die Winkelsumme des Dreiecks ABC ist $2R + \eta$, wo η singulär oder 0 ist, und man hat

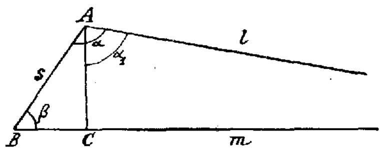

Fig. 10.

$$R + \beta + (\alpha - \alpha_1) = 2R + \eta$$

oder

$$\alpha_1 = R - (\varepsilon + \eta),$$

wo $\varepsilon + \eta$ ordinär ist. Nach Satz 9 schneiden sich also l und m.

Man kann dies auch formulieren als

Satz 11. Wenn die Differenz der Wechselwinkel ordinär ist, so schneiden sich die Geraden.

Anwendung: Bei einem Dreieck mit ordinären Winkeln existieren der einbeschriebene und die drei anbeschriebenen Kreise.

§ 7. Wir führen ferner einige Dreiecks- und Polygonsätze an, deren Gültigkeit auf den elliptischen und den Euklidischen Fall beschränkt ist.

Satz 12. Ist in einem Dreieck ein Winkel ordinär, und sind dessen anliegende Seiten ebenbürtig, so sind die beiden anderen Winkel ebenbürtig.

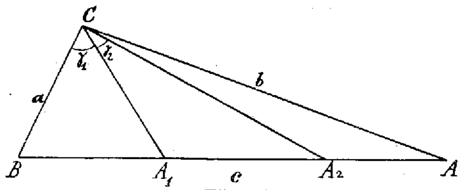

Fig. 11.

Das Dreieck sei ABC (Fig. 11), $\angle B$ ordinär, und die Seiten a und c, wo $a < c$, seien ebenbürtig. Man konstruiere nacheinander die gleichschenkligen Dreiecke BCA_1 $(BA_1 = a)$, CA_1A_2 $(A_1A_2 = CA_1)$ usw. Die Strecke BA_r muss dann einmal grösser als BA werden; denn man hat $BA_1 = a$, und $A_1A_2 = CA_1$ ist a ebenbürtig (Satz 4), ferner gilt $A_2A_3 = CA_2 > A_1A_2$ usw. Da nun $A_{r-1}A < CA_{r-1}$ ist, hat man $\angle A_{r-1}CA < A$. Bezeichnet man die Winkel bei C der Reihe nach mit $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$, so hat man aber $\gamma_1 > \frac{C}{2}$ (halbiert nämlich die Strecke CD den Winkel C (Fig. 12), so entnimmt man dem Dreieck CDA, dass $u > \frac{C}{2}$ ist, und danach dem Dreieck BCD, dass $BC > BD$, also $BA_1 > BD$, d. h. $\gamma_1 > \frac{C}{2}$ ist). Ferner hat man wegen $2\gamma_2 \geqq \gamma_1$, $2\gamma_3 \geqq \gamma_2, \cdots$

$$\gamma_2 > \frac{C}{4}, \quad \gamma_3 > \frac{C}{8}, \cdots, \quad \gamma_{r-1} > \frac{C}{2^{r-1}}.$$

Der Winkel γ_r wird von CA in zwei Teile geteilt, die beide kleiner als A sind. Folglich ist

$$A > \frac{\gamma_r}{2} > \frac{C}{2^{r+1}},$$

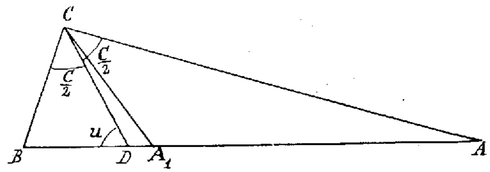

Fig. 12.

und da gleichzeitig $A < C$ gilt, folgt hieraus, dass A und C ebenbürtig sind.

Bemerkung: Satz 12 gilt auch in der sphärischen Geometrie innerhalb eines beschränkten Bereichs, z. B. eines Oktanten, nämlich soweit der Satz vom Aussenwinkel gilt.

Definition: Ein Winkel soll regulär genannt werden, wenn sowohl er selbst als auch sein Nebenwinkel ordinär sind.

Ein Winkel ist regulär, wenn er seinem Nebenwinkel ebenbürtig ist.

Satz 13. Ist in einem Dreieck ein Winkel regulär, und sind dessen anliegende Seiten ebenbürtig, so sind alle Winkel regulär und alle Seiten ebenbürtig.

Im Dreieck ABC sei der Winkel A regulär, und die Seiten b und c seien ebenbürtig. Nach Satz 12 sind dann auch die Winkel B und C ebenbürtig. Da aber ihre Summe grösser oder gleich dem Nebenwinkel von A, also ordinär ist, muss jeder dieser Winkel ordinär sein. Ferner sind die Nebenwinkel von B und C beide grösser als A, also ordinär, d. h. die Winkel B und C sind regulär. Aus Satz 1 folgt hiernach, dass alle Seiten des Dreiecks ebenbürtig sind.

Im elliptischen oder Euklidischen Fall ist die Summe der Nebenwinkel eines konvexen Polygons $ABC \cdots K \overline{\overline{<}} 4R$. Hieraus folgt unmittelbar

Satz 14. Hat ein konvexes Polygon der elliptischen oder Euklidischen Ebene zwei singuläre Winkel, so haben alle übrigen Polygonwinkel singuläre Nebenwinkel.

Mit Hilfe einfacher Anwendungen der obigen Sätze schliesst man hieraus weiter

Satz 15. Wenn ein konvexes Polygon (der elliptischen oder Euklidischen Ebene) lauter ordinäre Aussenwinkel hat, so sind auch die Innenwinkel ordinär (und daher regulär). Hat das Polygon ausserdem untereinander ebenbürtige Seiten, so sind alle Diagonalen und die Stücke, in die sie einander teilen, den Seiten ebenbürtig; ferner sind alle Winkel zwischen den von einer Ecke ausgehenden Seiten und Diagonalen sowie zwischen Diagonalen, die sich innerhalb des Polygons schneiden, ordinär.

Auf der Kugel gelten die entsprechenden Sätze innerhalb eines derart abgegrenzten Bereichs, dass der Satz vom Aussenwinkel zur Verfügung steht.

II. Betrachtungen zur Flächeninhaltslehre[1].

§ 8. Die geläufige Verwandlungsfigur (Fig. 13) zeigt, dass ein Dreieck ABC mit spitzen Winkeln bei A und B einem zweirechtwinkligen Viereck $APQB$ zerlegungsgleich ist, in dem $AP = BQ = CR$ (Scheitelhöhe) und $PQ = 2\,MN$ ist. Man ersieht hieraus: wird das Dreieck ABC derart abgeändert, dass MN dabei auf der Geraden PQ beliebig innerhalb der Strecke PQ verschoben wird, so bleibt es dem Viereck, und daher auch dem ursprünglichen Dreieck zerlegungsgleich. Die folgende Figur (Fig. 14) zeigt, dass das Dreieck ABC dem Dreieck ABD zerlegungsgleich ist, das

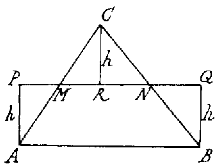

Fig. 13.

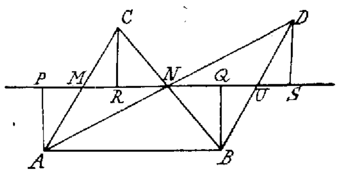

Fig. 14.

entsteht, wenn $ND = AN$ abgetragen wird. Die Verbindungsstrecke NU der Seitenmitten des neuen Dreiecks fällt in die Verlängerung von MN und ist gleich dieser Strecke ($AP = BQ$, $AP = DS$, $NU = \frac{1}{2}PQ$).

Durch Fortsetzung des letztgenannten Prozesses und Anwendung des erstgenannten gelangt man zu

Satz 16. Ein Dreieck ABC ist jedem Dreieck zerlegungsgleich, das dadurch entsteht, dass die Grundlinie AB beibehalten wird, während der Mittelpunkt M der Seite AC längs MN, wo N der Mittelpunkt von BC ist, ein beliebiges Stück verschoben wird, das kleiner als ein Vielfaches von MN ist.

Man erkennt auch leicht die Richtigkeit von

Satz 17. Ein Dreieck ABC ist, auch wenn es bei A und B nicht spitzwinklig ist, dem zugehörigen Verwand-

[1] Von früheren, die allgemeine Grundlage der Flächeninhaltslehre behandelnden Arbeiten sei ausser auf Hilbert's »Grundlagen« verwiesen auf: M. Dehn, Über den Inhalt sphärischer Dreiecke (Math. Ann. 60, S. 166—174), A. Finzel, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie (Math. Ann. 72, S. 262—284).

lungsviereck $APQB$ zerlegungsgleich, falls nur PM kleiner als ein Vielfaches von MN ist. (Fig. 15).

Es ist also hinreichend, dass AM, und damit AC (oder BC) kleiner als ein Vielfaches von MN ist.

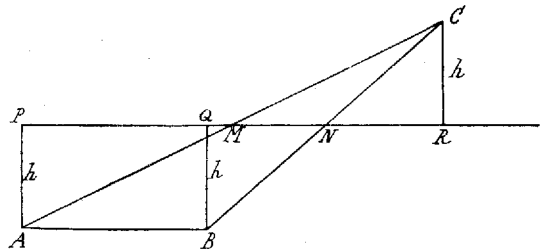

Fig. 15.

§ 9. Wir gehen nun zu Betrachtungen über, die allein den Euklidischen Fall betreffen. Indem wir als Inhaltsmass des Dreiecks (mit HILBERT) das halbe Produkt von Höhe und Grundlinie einführen, müssen wir beachten, dass die Existenz dieses Produktes von der zu wählenden Einheit abhängt. Wir setzen voraus, dass diese Einheit so gewählt ist, dass sie der grössten Strecke ebenbürtig ist, mit der wir es in den zu betrachtenden Figuren zu tun haben. Man kann dann ebenso wie bei HILBERT nachweisen, dass die gewöhnlichen Regeln der Addition und Multiplikation gültig sind. Die Division ist stets eindeutig, sobald sie möglich ist. Ferner kann man zeigen, dass Polygone mit gleichem Inhaltsmass stets ergänzungsleich sind.

Wir untersuchen nun die Bedingungen für Zerlegungsgleichheit, zunächst für zwei Dreiecke. Diesbezüglich beweisen wir

Satz 18. Zwei Dreiecke, die dasselbe Inhaltsmass haben und deren grösste Seiten ebenbürtig sind, sind zerlegungsgleich.

Dass die genannten Bedingungen notwendig sind leuchtet ein. Dass sie hinreichend sind, sieht man so: Die Dreiecke seien ABC und $A_1B_1C_1$, ihre grössten Seiten $AB = c$ und $A_1B_1 = c_1$, $c \geqq c_1$, $AC \geqq BC$, $A_1C_1 \geqq B_1C_1$ (Fig. 16—17). Man führt das Doppelte der Strecke

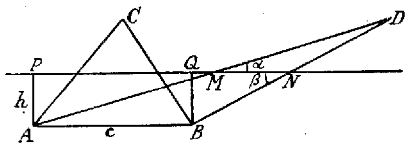

Fig. 16.

$$h + h_1 + c,$$

die kleiner als $3c$ ist, als Seite AD eines neuen Dreiecks ABD ein, das dem ursprünglichen ABC zerlegungsgleich ist und bei A einen spitzen Winkel hat. Dieselbe Grösse verwende man als Seite A_1D_1 eines Dreiecks $A_1B_1D_1$, das dem Dreieck $A_1B_1C_1$ zerlegungsgleich ist und bei A_1 einen spitzen Winkel hat. Die erforderlichen Konstruktionen werden ausgeführt, indem man

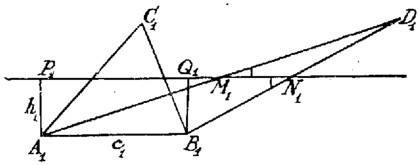

Fig. 17.

$$PM = h_1 + c, \quad P_1M_1 = h + c$$

abträgt, wodurch man die Mittelpunkte der Seiten AD und A_1D_1 erhält.

Die beiden neuen Dreiecke haben nun den gleichen Inhalt, und ihre grössten Seiten AD und A_1D_1 (Fig. 16: $AM > BN$, weil $\beta > \alpha$, also $AD > BD$) stimmen überein. Sie sind daher demselben Rechteck zerlegungsgleich. Hieraus folgt, dass auch die ursprünglichen Dreiecke zerlegungsgleich sind, was zu beweisen war.

Der Satz soll nun auf konvexe Polygone erweitert werden. Für Rechtecke erhält man sofort

Satz 19. Rechtecke mit gleichem Inhalt und ebenbürtigen Diagonalen (oder auch nur einem Paar ebenbürtiger Seiten) sind zerlegungsgleich.

Ferner gilt für zwei beliebige konvexe Vierecke:

Satz 20. Zwei konvexe Vierecke mit gleichem Inhaltsmass und ebenbürtigen grössten Seiten sind zerlegungsgleich.

Das eine der Vierecke sei $ABCD$ (Fig. 18) mit der grössten Seite AD. Die beiden Diagonalen mögen sich in O schneiden. Die Strecken AO und OD können nicht beide AD unterlegen sein; eine von ihnen, etwa OD, muss AD ebenbürtig sein. Das gleiche gilt dann von der Strecke BD, da diese grösser als OD und kleiner als $2\,AD$ ist. Das Viereck wird nun durch BD in zwei Dreiecke mit der Grundlinie BD zerlegt und ist also einem Rechteck mit der Grundlinie BD und demselben Inhalt zerlegungsgleich.

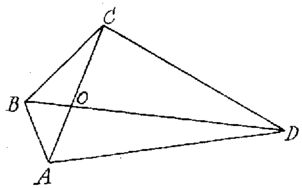

Fig. 18.

Analog schliesst man für das andere Viereck, wonach man den gefundenen Satz über Rechtecke anwenden kann.

Fünfecke können auf ähnliche Weise behandelt werden, und durch Induktion gelangt man dann zu dem Satz für beliebige konvexe Polygone:

Satz 21. Zwei konvexe Polygone mit gleichem Inhaltsmass und ebenbürtigen grössten Seiten sind zerlegungsgleich.

Es erhebt sich nun die Frage, ob dieser Satz auf nicht-konvexe Polygone erweitert werden kann. Das ist im allgemeinen

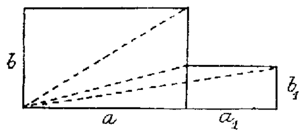

Fig. 19.

Fig. 20.

nicht der Fall. Ein Polygon, das aus zwei Rechtecken zusammengesetzt ist, von denen eines kleinere Dimensionen als das andere hat, kann in ein Rechteck verwandelt werden, indem es einfach in Dreiecke zerlegt wird, wie in der Figur angegeben (Fig. 19, wo $a > b > a_1 > b_1$). Das zweite Polygon (Fig. 20), das aus einem Rechteck mit den Seiten $1, t^2$ und einem Quadrat mit der Seite t ($t \prec 1$) besteht und somit den Inhalt $2t^2$ hat, kann jedoch nicht in ein Rechteck verwandelt werden. Der Inhalt eines solchen Rechtecks müsste $2t^2$, seine grösste Dimension ebenbürtig mit 1 und seine kleinste Dimension ebenbürtig mit t^2 sein. Dann kann es aber kein rechtwinkliges Dreieck enthalten, dessen Katheten beide mit t ebenbürtig sind. Wenigstens eine der Projektionen der Katheten auf die kurze Seite des Rechtecks würde nämlich mit t ebenbürtig sein und folglich keiner Strecke, die höchstens gleich der kurzen Seite des Rechtecks ist, angehören können. Das gegebene Quadrat mit der Seite t kann aber nicht in rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden, deren eine Kathete $\overset{\backsim}{\prec} t$ und deren andere $\prec t$ ist; denn mit einer endlichen Anzahl solcher Dreiecke kann das Quadrat t^2 nicht ausgefüllt werden, da jedes der Dreiecke einen Inhalt $\prec t^2$ hat.

§ 10. Um die Zerlegungsgleichheit von Dreiecken in den beiden anderen Geometrien, dem elliptischen und dem hyperbolischen Fall zu untersuchen, wählen wir wieder die grösste

Seite des Dreiecks als Grundlinie, so dass auch hier die Basiswinkel spitz sind. Ein solches Dreieck ist dem zugehörigen zweirechtwinkligen Verwandlungsviereck (vgl. Fig. 13, S. 18) zerlegungsgleich. Haben zwei solche Dreiecke dieselbe Grundlinie und dieselbe Winkelsumme, so sind die zugehörigen Vierecke kongruent und die Dreiecke selbst folglich untereinander zerlegungsgleich. Also:

Satz 22. Im elliptischen und im hyperbolischen Fall sind zwei Dreiecke zerlegungsgleich, wenn sie dieselbe Winkelsumme haben und die beiden grössten Seiten einander gleich sind.

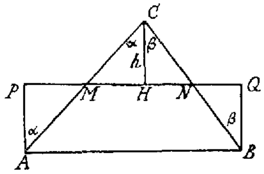

Fig. 21.

Um in der gemeinsamen Untersuchung der beiden Geometrien weiter zu kommen, wollen wir voraussetzen, dass die zu betrachtenden Dreiecke lauter ordinäre Winkel haben. Sei ABC (Fig. 21) ein solches Dreieck mit der grössten Seite AB. Seine Seiten sind untereinander ebenbürtig (Satz 2). Die Scheitelhöhe $h = CH$ teilt den Winkel C in zwei Winkel α und β, für die man leicht die Werte

$$\alpha = \frac{B+C-A}{2}, \quad \beta = \frac{A+C-B}{2}$$

findet. Beide sind ordinär. Die Strecken MH und NH sind dann ebenbürtig mit MC und NC und daher auch mit AB. Also hat man auch $MN \backsim AB$.

Es seien nun zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ mit lauter ordinären Winkeln, gleicher Winkelsumme und ebenbürtigen grössten Seiten c und c_1, $c > c_1$, vorgelegt. Indem wir $AC \geqq BC$, $A_1C_1 \geqq B_1C_1$ annehmen können, gehen wir ebenso wie im Euklidischen Fall vor (vgl. Fig. 16—17, S. 19—20). Wir tragen die Seiten AD und A_1D_1 gleich dem Doppelten der Strecke $h + h_1 + c$ (die kleiner als $3c$ ist) ab, so dass zwei Dreiecke ABD und $A_1B_1D_1$ mit den grössten Seiten AD und A_1D_1 entstehen. Diese sind den gegebenen Dreiecken zerlegungsgleich, da die Verbindungsstrecken der Seitenmitten der obigen Betrachtung zufolge mit c und c_1 ebenbürtig sind. Da nun die beiden Dreiecke dieselbe Winkelsumme haben, sind sie nach Satz 22 auch untereinander zerlegungsgleich, und dies gilt somit auch für die ursprünglichen

Dreiecke. Hieraus geht hervor, dass zwei Dreiecke mit derselben Winkelsumme, lauter ordinären Winkeln und ebenbürtigen grössten Seiten zerlegungsgleich sind.

Man kann indessen zeigen, dass die letztgenannte Bedingung, dass die grössten Seiten ebenbürtig sind, eine Folge der übrigen ist. Wenn nämlich die Dreiecke lauter ordinäre Winkel haben, so sind die Seiten jedes einzelnen Dreiecks untereinander ebenbürtig. Dann müssen aber auch die Seiten des einen Dreiecks denen des anderen ebenbürtig sein. Anderenfalls wären beispielsweise die Seiten von ABC denen von $A_1B_1C_1$ unterlegen. Daraus würde aber folgen, dass $\triangle ABC$ als Teil von $\triangle A_1B_1C_1$ angebracht werden kann, z. B. indem man das erste Dreieck so legt, dass sein kleinster Winkel einen Teil des grössten Winkels des zweiten Dreiecks ausmacht, was stets möglich ist, da die Dreiecke die gleiche Winkelsumme haben. Andrerseits wäre dies aber unvereinbar damit, dass die Dreiecke die gleiche Winkelsumme haben, da ein Dreieck, das einen Teil eines andren ausmacht, kleineren Exzess bzw. Defekt als dieses hat.

Damit ist man zu folgendem Resultat gelangt:

Satz 23. Im elliptischen und im hyperbolischen Fall sind zwei Dreiecke mit lauter ordinären Winkeln und gleicher Winkelsumme stets zerlegungsgleich.

Aus der obigen Betrachtung geht zugleich hervor, dass man den folgenden Satz aussprechen kann:

Satz 24. Zwei Dreiecke mit derselben ordinären Winkelsumme und ebenbürtigen grössten Seiten sind zerlegungsgleich.

Im elliptischen Fall, wo die Winkelsumme ja stets ordinär ist, da sie grösser als $2R$ ist, ist der Wortlaut wie folgt abzuändern:

Zwei Dreiecke mit derselben Winkelsumme und ebenbürtigen grössten Seiten sind zerlegungsgleich.

Wir bemerken ferner, dass ein Dreieck ABC, dessen Seite AB den anderen Seiten nicht unterlegen ist, im elliptischen Fall stets einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundlinie AB zerlegungsgleich ist. Die Verbindungsstrecke MN der Mittelpunkte von AC und BC ist nämlich grösser als $\frac{1}{2}AB$ und zugleich kleiner als $\frac{1}{2}(BC+CA)$, also mit AB ebenbürtig.

Für konvexe Polygone können wir nun im elliptischen Fall den folgenden Satz aufstellen:

Satz 25. Zwei konvexe Polygone mit demselben Exzess und ebenbürtigen grössten Seiten sind zerlegungsgleich.

Zunächst mögen zwei Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ mit den grössten Seiten AB und A_1B_1 betrachtet werden. Die Schnittpunkte der Diagonalen seien O und O_1. Wenigstens eine der Strecken AO und BO ist mit AB ebenbürtig. Sei dies AO. Dann sind AC und AB ebenbürtig, und das Viereck ist somit in zwei Dreiecke mit der mit AB ebenbürtigen gemeinsamen Seite AC zerlegt. Diese Dreiecke können, da keine ihrer Seiten AC überlegen ist, in ihnen zerlegungsgleiche, gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Basis verwandelt werden; und diese machen ein Viereck aus, das aus zwei kongruenten Dreiecken zusammengesetzt ist. Diese Dreiecke können wiederum in gleichschenklige verwandelt werden. Auf dieselbe Weise kann das andere Viereck in die Summe zweier kongruenter gleichschenkliger Dreiecke, die denselben Exzess wie die vorigen haben, verwandelt werden. Hiermit ist für zwei Vierecke mit demselben Exzess alles klar.

Bei Fünf- und Sechsecken kann man in ähnlicher Weise vorgehen, z. B. für Sechsecke so: Man zerlegt das eine Sechseck in zwei Vierecke und verwandelt diese in zwei Paare T_1 und T_2 von kongruenten Dreiecken. Eines der Dreiecke T_1 und eines der Dreiecke T_2 zusammen werden durch gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Seite ersetzt, womit das Sechseck auf die Summe von vier kongruenten Dreiecken reduziert ist. Analog behandelt man das andere Sechseck. Auch hier entstehen vier kongruente Dreiecke, von denen jedes einem der vorigen zerlegungsgleich ist.

Auf diese Weise geht man weiter, und die Untersuchung führt dann gerade auf den obigen Satz.

Was den hyperbolischen Fall betrifft, so ist man genötigt, weitergehende Vorbehalte zu machen, z. B. indem man die Untersuchung auf solche konvexen Polygone beschränkt, bei denen alle Dreipunktswinkel (das sind die Winkel der durch drei Polygonecken bestimmten Dreiecke) ordinär sind. Hier zeigen den obigen ähnliche Betrachtungen, dass Polygone dieser Art zerlegungsgleich sind, wenn sie denselben Defekt haben. Übrigens gilt der analoge Satz auch in der elliptischen Ebene.

§ 11. Zum Schluss führen wir die entsprechenden Untersuchungen für die Lehre vom Flächeninhalt auf der Kugel durch.

Wir verwenden auch hier die gewöhnliche Verwandlungsfigur für ein Dreieck ABC, und die der früheren analoge, die Verschiebung der Verbindungsstrecke MN der Seitenmittelpunkte längs ihres Grosskreises betreffende Betrachtung führt sofort zu dem Satz: Dreieck ABC ist einem anderen Dreieck ABD mit derselben Grundlinie AB zerlegungsgleich, wenn nur die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden anderen Seiten des zweiten Dreiecks aus der entsprechenden Strecke MN des ersten durch eine Verschiebung längs des Grosskreises MN hervorgeht, deren Grösse der Strecke MN selbst ebenbürtig ist. Hieraus folgt zugleich, dass das Dreieck ABC einem Zweieck zerlegungsgleich ist, wenn MN ordinär, d. h. dem ganzen Grosskreis der Kugel ebenbürtig ist.

Die einzigen sphärischen Dreiecke, die keinem Zweieck zerlegungsgleich sind, sind also solche mit singulären Verbindungsstrekken der Seitenmittelpunkte. Das von diesen Strecken gebildete Dreieck ist in dem Sinne singulär, dass alle Abstände zwischen seinen Punkten singulär sind. Das ursprüngliche Dreieck selbst ist dann auch singulär. Die einzigen Dreiecke, die durch endliche Zerlegung und Zusammensetzung nicht in ein Zweieck verwandelt werden können, sind die singulären, die Dreiecke mit singulären Seiten; und dass dies bei diesen Dreiecken nicht möglich ist, ist von vornherein einleuchtend.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich

Satz 26. Zwei sphärische Dreiecke sind zerlegungsgleich, wenn sie denselben Exzess ε und jedes wenigstens eine ordinäre Seite besitzt.

Beide sind nämlich einem Zweieck mit dem Winkel $\frac{\varepsilon}{2}$ zerlegungsgleich.

Satz 27. Zwei sphärische Dreiecke mit demselben Exzess ε sind stets dann zerlegungsgleich, wenn ε ordinär ist.

Ein singuläres Dreieck hat nämlich stets singulären Exzess. Dies erkennt man ganz wie in der offenen elliptischen Ebene.

Überhaupt macht jeder singuläre Bereich auf der Kugel, d. h. die Menge aller Punkte, deren Abstand von einem festen Punkt kleiner oder ebenbürtig einem vorgegebenen singulären Abstand ist, eine offene elliptische Ebene aus, so dass in einem solchen Bereich alle Sätze dieser Ebene gelten.

Was die sphärischen Polygone betrifft, können wir ganz wie früher vorgehen. Hat ein konvexes sphärisches Viereck eine ordinäre Seite, so bestimmt diese zusammen mit den Diagonalen ein Dreieck, dessen andere Seiten nicht beide singulär sein können. Eine Diagonale, die eine ordinäre dieser Seiten enthält, ist selbst ordinär und teilt das Viereck in zwei Dreiecke, die beide durch Zerlegung und Zusammensetzung in Zweiecke verwandelt werden können. Damit wird auch das ganze Viereck in ein Zweieck verwandelt, also: Ein konvexes sphärisches Viereck, das wenigstens eine ordinäre Seite (und daher mindestens noch eine) besitzt, ist stets einem Zweieck zerlegungsgleich. Der Satz lässt sich leicht auf Polygone mit mehr Seiten erweitern. Die einzigen konvexen sphärischen Polygone, die nicht in Zweiecke verwandelt werden können, sind die singulären, deren sämtliche Seiten und somit auch ihr Exzess singulär sind. Man hat also die folgenden Sätze:

Satz 28. Zwei konvexe sphärische Polygone mit demselben Exzess, von denen jedes wenigstens eine ordinäre Seite besitzt, sind zerlegungsgleich.

Satz 29. Zwei konvexe sphärische Polygone mit demselben ordinären Exzess sind zerlegungsgleich.

Man kann diese Resultate auch zu folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 30. Nicht-singuläre, konvexe sphärische Polygone mit demselben Exzess sind zerlegungsgleich.

Für singuläre sphärische Polygone hat man, wie bereits bemerkt, dieselben Sätze wie in der schwachen elliptischen Geometrie.

Indleveret til Selskabet den 10. Januar 1944.
Færdig fra Trykkeriet den 26. Maj 1944.