

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB  
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XX, NR. 21

---

# DIE GEOMETRIE DER SCHWACHEN FIGUREN

VON

JOHANNES HJELMSLEV



KØBENHAVN  
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD  
1943

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

## Einleitung.

1. Unter einer schwachen Figur soll eine variable Figur verstanden werden, deren Punkte sämtlich gegen ein und denselben Punkt, deren Geraden sämtlich gegen ein und dieselbe Gerade und deren Ebenen sämtlich gegen ein und dieselbe Ebene konvergieren. Alle Abstände, Winkel, Flächeninhalte, Volumina einer solchen Figur konvergieren also gegen Null, und die Geometrie der Figur handelt von den Relationen zwischen den Grenzverhältnissen dieser gegen Null strebenden Grössen. Im folgenden werden allgemeine Methoden zur Erforschung dieser Geometrie entwickelt.

Als den der Natur der Sache angepassten Arbeitsbereich wählen wir den projektiven Raum. Die Grenzverhältnisse zwischen den in einer Figur auftretenden Grössen derselben Art sind projektive Invarianten und daher unabhängig von der speziellen (euklidischen oder nichteuklidischen) Metrik, die man jederzeit als Hilfsmittel frei wählen kann. Die Geometrie der schwachen Figuren erweist sich somit als Kapitel der projektiven Geometrie.

2. Wir beginnen mit der Besprechung der infinitesimalprojektiven Gebilde.

Zwei eineindeutig und stetig aufeinander bezogene Punktreihen  $O \cdots A \cdots$  und  $O' \cdots A' \cdots$  auf zwei Geraden  $l$  und  $l'$  werden (infinitesimal) projektiv in  $O, O'$  genannt, wenn folgendes der Fall ist: Man wähle zwei von  $O$  bzw.  $O'$  verschiedene, feste Punkte (Bezugspunkte)  $U$  und  $U_1$  auf  $l$  bzw.  $l'$ , ferner einen von  $O$  und  $U$  verschiedenen Punkt  $P$  auf  $l$ . Ist dann  $P'_1$  der durch die Relation

$$OAPU \propto O'A'P'_1U_1$$

bestimmte Punkt von  $l'$ , so soll  $P'_1$  gegen einen Punkt  $P_1$  konvergieren, wenn  $A$  gegen  $O$  (und daher der entsprechende Punkt  $A'$  gegen  $O'$ ) strebt.

Die Punktreihen  $O \cdots A \cdots$  und  $O' \cdots A' \cdots$  werden ordinär projektiv oder singulär projektiv in  $O, O'$  genannt, je nachdem  $P_1$  von  $O'$  und  $U_1$  verschieden ist oder mit einem dieser Punkte zusammenfällt<sup>1</sup>.

Wir bedienen uns auch der Redeweise, die infinitesimalen Vektoren  $OA$  und  $O'A'$  seien projektiv und haben die Repräsentanten  $OPU$  und  $O'P_1U_1$ .

In ähnlichem Sinne kann man von in  $O, O'$  (infinitesimal) projektiven Punktreihen auf zwei Kurven sprechen. Man hat dann zwei variable Bezugspunkte zu benutzen, die gegen Grenzpunkte  $U, U_1$  auf den Tangenten der Kurven in  $O$  und  $O'$  konvergieren, und  $P$  ist durch einen variablen Punkt zu ersetzen, der gegen einen Punkt  $P$  auf der Tangente der ersten Kurve konvergiert. Auch hier sprechen wir von projektiven infinitesimalen Vektoren  $OA$  und  $O'A'$ , welche durch die auf den Kurventangenten gelegenen Repräsentanten  $OPU$  und  $O'P_1U_1$  dargestellt werden.

An die Stelle der beiden Punktreihen können in analoger Weise zwei beliebige (gleich- oder verschiedenartige) stetige eindimensionale Gebilde treten, die aufeinander bezogen sind, z. B. Geraden- oder Ebenenbüschel, allgemein (eindimensionale) Punktscharen, Geradenscharen u. s. w. Auch hier kann man von untereinander projektiven infinitesimalen Vektoren bzw. Winkeln sprechen.

3. Ein weiteres fundamentales Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen sind die hyperprojektiven Gebilde.

Zwei eineindeutig und stetig aufeinander bezogene Punktreihen  $O \cdots A \cdots B \cdots C \cdots$  und  $O' \cdots A' \cdots B' \cdots C' \cdots$  auf zwei Geraden werden hyperprojektiv in den Punkten  $O, O'$  genannt, wenn jedem bestimmten Grenzverhältnis  $\alpha$  zweier infinitesimaler Vektoren  $OA$  und  $OB$  der einen Punktreihe ein eindeutig bestimmtes Grenzverhältnis  $\alpha'$  der beiden entsprechenden infinitesimalen Vektoren  $O'A'$  und  $O'B'$  der anderen Reihe entspricht. Wird die funktionale Abhängigkeit  $\alpha' = \varphi(\alpha)$  als stetig vorausgesetzt, so folgt  $\varphi(\alpha) = \alpha^r$ , wo  $r$  eine reelle Zahl ist. Den Grenzverhältnissen

<sup>1</sup> Eine eingehendere Untersuchung dieser Begriffsbildung findet man in der Abhandlung des Verfassers: Infinitesimale Elemente im projektiven Raum (Nouvième congrès des mathém. scandinaves, Helsingfors 1938). Insbesondere sei auf die dort behandelten Beziehungen zu Krümmung und Torsion hingewiesen.

$$\frac{OA}{OB}, \frac{OB}{OC}, \frac{OA}{OC}$$

entsprechen nämlich bzw.

$$\frac{O'A'}{O'B'}, \frac{O'B'}{O'C'}, \frac{O'A'}{O'C'}$$

so dass für beliebige Werte von  $\alpha$  und  $\beta$

$$\varphi(\alpha) \varphi(\beta) = \varphi(\alpha\beta)$$

gelten muss, woraus eben  $\varphi(\alpha) = \alpha^r$  folgt.

Die Zahl  $r$  wird als Exponent der Korrespondenz oder genauer als Exponent der Korrespondenz  $A \rightarrow A'$  im Punktpaar  $O, O'$  bezeichnet. Ist die Korrespondenz ordinär infinitesimal projektiv, so ist  $r = 1$ . Der umgekehrte Schluss ist jedoch nicht statthaft.

4. Auch hier können an die Stelle der Punktreihen beliebige andere eindimensionale stetige Gebilde treten, beispielsweise eine Punktschar  $O \cdots A \cdots B \cdots$  und eine Geradenschar  $o \cdots a \cdots b \cdots$ , die derart aufeinander bezogen sind, dass jedem bestimmten Grenzverhältnis  $\alpha$  zweier infinitesimaler Vektoren  $OA$  und  $OB$  der Punktschar eindeutig ein bestimmtes Grenzverhältnis  $\alpha'$  der zugeordneten infinitesimalen Winkel  $oa$  und  $ob$  der Geradenschar entspricht, wobei die Abhängigkeit  $\alpha' = \varphi(\alpha)$  wieder als stetig vorausgesetzt wird. In allen diesen Fällen wird von hyperprojektiven Gebilden gesprochen, und jedesmal gibt es eine bestimmte reelle Zahl  $r$ , derart dass  $\varphi(\alpha) = \alpha^r$  ist, und diese Zahl heisst der Exponent der Korrespondenz, genauer: die Korrespondenz  $A \rightarrow a$  hat den Exponenten  $r$ , die Korrespondenz  $a \rightarrow A$  den Exponenten  $\frac{1}{r}$ .

## I. Unendlich kleine Grössen.

5. Cauchy hat in seinen Exercices de Mathématiques, 1826, p. 145—150, die Ordnung unendlich kleiner Grössen folgendermassen definiert:

Eine Funktion  $f(x)$ , die für  $x \rightarrow 0$  gegen 0 strebt, heisst unendlich klein von der Ordnung  $\alpha$  (in Bezug auf  $x$ ), wenn

$$\frac{f(x)}{x^r} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } r < a \\ \infty & \text{für } r > a, \end{cases}$$

während an das Verhalten von  $\frac{f(x)}{x^r}$  für  $r = a$  keine Forderung gestellt wird. Als Beispiele führt Cauchy die Funktionen

$$e^x x^a, \quad e^x x^a \log x, \quad e^x x^a \frac{1}{\log x}$$

an, die nach Division durch  $x^a$  bzw. gegen

$$1, \quad \infty, \quad 0$$

konvergieren. Selbstverständlich ist hierbei vorauszusetzen, dass  $x$  durch positive Werte gegen 0 geht.

Die Definition scheint ganz in Vergessenheit geraten zu sein; denn sie wird in keinem der bekannten neueren Standardwerke über Analysis erwähnt<sup>1</sup>.

Wir wollen hier Cauchy's Definition wieder aufnehmen und hinzufügen: Eine Funktion  $f(x)$ , die für  $x \rightarrow 0$  gegen 0 strebt, heisse unendlich klein von unendlich hoher Ordnung, wenn  $\frac{f(x)}{x^r} \rightarrow 0$  für jede positive Zahl  $r$  und unendlich klein von der Ordnung 0, wenn  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ , aber  $\frac{f(x)}{x^r} \rightarrow \infty$  für jeden positiven Wert von  $r$ . Beispiele von Funktionen der beiden letzteren Arten sind

$$y = e^{-\frac{1}{x}}, \quad y = -\frac{1}{\log x}.$$

Durch diese Definitionen wird also jeder unendlich kleinen Grösse  $f(x)$  eine Zahl zugeordnet, die die Ordnung von  $f(x)$  angibt und entweder 0, positiv oder  $\infty$  ist.

Wie man sieht, werden für  $x \neq 0$  keinerlei die Stetigkeit von  $f(x)$  betreffende Annahmen gemacht, und auch der Grenzübergang  $x \rightarrow 0$  braucht nicht kontinuierlich vor sich zu gehen;  $x$  kann eine beliebige Fundamentalreihe mit dem Grenzwert 0

<sup>1</sup> In J. Hadamard's Cours d'Analyse I, p. V wird im Gegensatz dazu sogar gesagt, dass  $x^n (\log x)^p$  keine bestimmte Ordnung beigelegt werden soll.

durchlaufen. Übrigens können auch mehrdeutige Funktionen zugelassen werden.

6. Wir werden uns jedoch besonders für den Fall interessieren, wo die Gleichung  $y = f(x)$  für  $x > 0$  und  $x \rightarrow 0$  einen Kurvenbogen im ersten Quadranten darstellt, der in jedem Punkt eine eindeutige, mit dem Punkt stetig variierende Tangente besitzt, und für den die positive  $x$ -Achse Halbtangente im Nullpunkt ist, so dass  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ . Die Ordnung von  $f(x)$  ist dann mindestens

1. Dass sie genau 1 ist, bedeutet, dass die Kurve  $y = f(x)$  in der Umgebung des Nullpunktes von allen Parabeln  $y = px^r$ , wo  $r > 1$ ,  $p > 0$ , umschlossen wird. Ist die Ordnung  $a > 1$ , so wird die Kurve von allen Parabeln  $y = px^r$ , wo  $r > a$ ,  $p > 0$ , umschlossen, während sie selbst die zu den Werten  $1 < r < a$  gehörigen Parabeln umschliesst. Die Parabeln  $y = px^a$ ,  $p > 0$ , sind dann diejenigen, die der Kurve in der Umgebung von  $O$  am nächsten kommen. Durch jeden Punkt  $P$  der Kurve geht genau eine dieser Parabeln. Lässt man  $P$  gegen  $O$  gehen, und konvergiert diese Parabel hierbei gegen eine Grenzlage, so wird die letztere als oskulierende Parabel der Kurve in  $O$  bezeichnet.

Dass die Ordnung  $a$  unendlich gross ist, bedeutet, dass die Kurve in der Umgebung von  $O$  alle Parabeln  $y = px^r$  umschliesst.

7. In Übereinstimmung mit der üblichen Terminologie sagen wir, die Kurve  $y = f(x)$  habe eine Berührungsordnung (mit ihrer Tangente), die gleich der Ordnung von  $\frac{f(x)}{x}$ , also gleich  $a - 1$  ist.

8. Ist  $y = f(x)$  unendlich klein von einer Ordnung, die  $< 1$  und  $\geq 0$  ist, so berührt die Kurve die  $y$ -Achse in  $O$ , und man kann dann nach Vertauschung von  $x$  und  $y$  die obigen Betrachtungen auf die inverse Funktion anwenden.

9. Ausser einer Reihe naheliegender allgemeiner Sätze über Summe, Produkt u. a. von unendlich kleinen Grössen führt Cauchy an der genannten Stelle einen Satz an, der in Beziehung zu den Untersuchungen steht, die wir im folgenden anstellen werden:

Ist  $f(x)$  unendlich klein von der Ordnung  $a$ , so konvergiert die Grösse  $\frac{xf'(x)}{f(x)}$  für  $x \rightarrow 0$  gegen  $a$ . Für die Kurve  $y = f(x)$

(Fig. 1), die hier als konvex in der Umgebung von  $O$  vorausgesetzt werden soll, bedeutet dies, dass die  $x$ -Achse von der Tangente in  $P$  in einem solchen Punkt  $Q$  geschnitten wird, dass  $\frac{OR}{QR} \rightarrow a$  und folglich  $\frac{QP}{OQ} \rightarrow \frac{1}{a-1}$ . Das Grenzwertverhältnis  $\frac{1}{a-1}$  von  $\frac{QP}{OQ}$  nennen wir den Index der Kurve im Punkte  $O$ , so dass Cauchy's Bemerkung besagt, dass der Index im Nullpunkt gleich dem reziproken Wert der Berührungsordnung ist.

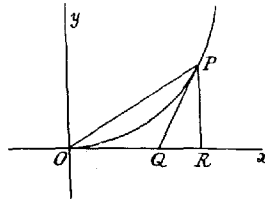


Fig. 1.

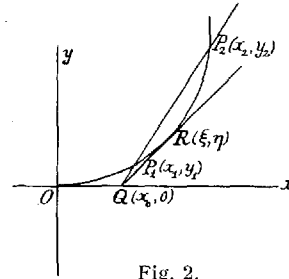


Fig. 2.

Im folgenden werden wir mit unseren Zielen vor Augen auf diese Eigenschaft zurückkommen.

10. Wir schränken nun unseren Kurvenbegriff  $y = f(x)$  derart ein, dass der betrachtete Bogen  $OA$  in der Umgebung von  $O$  konvex (jedoch nicht notwendig frei von Ecken) ist. Wir nehmen ferner an, dass Abszisse  $x$  und Ordinate  $y$  des variablen Kurvenpunktes eine in  $O$  hyperprojektive Korrespondenz mit dem Exponenten  $r+1$ , wo  $r > 0$  ist, bilden, dass also für zwei Punkte  $P_1 = (x_1, y_1)$  und  $P_2 = (x_2, y_2)$  der Kurve (Fig. 2), die beide gegen  $O$  konvergieren, die Grenzwertverhältnisse  $\frac{y_2}{y_1}$  und  $\frac{x_2}{x_1}$  in der Beziehung

$$\frac{y_2}{y_1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{r+1}$$

stehen<sup>1</sup>.

Ist das Grenzwertverhältnis  $\frac{x_2}{x_1} = \alpha > 1$ , so ist das Grenzwertverhältnis  $\frac{y_2}{y_1}$  folglich  $= \alpha^{r+1}$ , und da sich die Abszisse  $x_0$  des Schnittpunktes  $Q$  der  $x$ -Achse mit  $P_1P_2$  aus

<sup>1</sup> Dabei ist  $\frac{y_2}{y_1}$  statt  $\lim \frac{y_2}{y_1}$  und  $\frac{x_2}{x_1}$  statt  $\lim \frac{x_2}{x_1}$  geschrieben. Diese kurze Schreibweise wird im folgenden überall verwendet.



$$x_0 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$$

bestimmt, hat man die Grenzverhältnisse

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{\frac{y_2 - x_2}{y_1} x_1}{\frac{y_2 - 1}{y_1}} = \alpha \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1} - 1}$$

und

$$\frac{x_0}{x_2} = \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1} - 1}.$$

11. Die Tangente von  $Q$  aus an den Bogen  $P_1 P_2$  berühre ihn im Punkte  $R = (\xi, \eta)$ . Das Grenzverhältnis  $\frac{x_0}{\xi}$  ist dann an das Intervall  $\left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_0}{x_1}\right)$ , also an  $\left(\frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1} - 1}, \alpha \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1} - 1}\right)$  gebunden.

Setzt man  $\alpha = 1 + \varepsilon$ , so erhält man

$$\frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{r+1} - 1} = \frac{(1 + \varepsilon)^r - 1}{(1 + \varepsilon)^{r+1} - 1} = \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1}{1 + \eta},$$

wo  $\varepsilon > \eta > 0$ ; und das genannte Intervall kann

$$\left(\frac{r}{r+1} \cdot \frac{1}{1 + \eta}, \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 + \eta}\right)$$

geschrieben werden, woraus ersichtlich ist, dass es im Intervall

$$\left(\frac{r}{r+1} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon}, \frac{r}{r+1} (1 + \varepsilon)\right)$$

enthalten ist.

12. Ist  $R = (\xi, \eta)$  ein beliebiger von  $O$  verschiedener Punkt der Kurve, so kann man durch den Punkt  $Q = (x_0, 0)$ , in welchem die Tangente (oder eine Stützgerade) in  $R$  die  $x$ -Achse schneidet, stets eine Sekante  $QP_1 P_2$  derart legen, dass für einen gegebenen, genügend kleinen positiven Wert von  $\varepsilon$  das Verhältnis  $\frac{QP_2}{QP_1} = 1 + \varepsilon$  wird. Aus dem Obigen entnimmt man dann,

dass alle Häufungswerte von  $\frac{x_0}{\xi}$  beim Grenzübergang  $R \rightarrow O$  für jedes  $\varepsilon$  dem Intervall

$$\left( \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{r}{r+1} (1+\varepsilon) \right)$$

angehören müssen, d. h. das Grenzverhältnis  $\frac{x_0}{\xi}$  ist eindeutig bestimmt und gleich  $\frac{r}{r+1}$ . Hiermit gleichbedeutend ist, dass das Grenzverhältnis

$$\frac{OQ}{OR} = \frac{r}{r+1}$$

oder

$$\frac{QR}{OQ} = \frac{1}{r}$$

ist, also dass die Kurve den Index  $\frac{1}{r}$  in  $O$  hat.

13. Dass die Korrespondenz  $x \rightarrow y$  hyperprojektiv mit dem Exponenten  $r+1$  ist, hat zur Folge, dass die Korrespondenz  $x \rightarrow \frac{y}{x}$  hyperprojektiv mit dem Exponenten  $r$  ist, d. h.:

Die Korrespondenz, die dem laufenden Punkt  $P$  des Bogens  $OA$  seinen projizierenden Strahl  $OP$  zuordnet, ist hyperprojektiv mit dem Exponenten  $r$  im Grenzpunkt  $O$  und dessen zugeordneter Gerade, der Tangente in  $O$ .

Die Zahl  $r$  soll daher der Krümmungsexponent in  $O$  genannt werden. Von diesem Gesichtspunkte aus könnte man den bereits als Index bezeichneten reziproken Wert  $\frac{1}{r}$  auch den Krümmungsgrad nennen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Zahl  $r$  eine projektive Invariante ist.

Aus der Existenz des Krümmungsexponenten  $r$  als Exponent einer für den Grenzpunkt  $O$  und die Tangente in  $O$  hyperprojektiven Korrespondenz zwischen dem laufenden Kurvenpunkt  $P$  und seinem projizierenden Strahl  $OP$  kann man umgekehrt auf eine hyperprojektive Korrespondenz mit dem Exponenten  $r+1$  zwischen den Koordinaten  $x, y$  des laufenden Punktes in Bezug

auf ein Koordinatensystem mit der Tangente als  $x$ -Achse und einer beliebigen anderen Geraden durch  $O$  als  $y$ -Achse schliessen.

Den Krümmungsexponenten  $r$  wollen wir der Kürze halber den Exponenten in  $O$  und die Zahl  $r+1$  den Ordinatenexponenten in  $O$  nennen.

14. Wir wollen nun eingehender die Bedingung dafür untersuchen, dass die Relation  $y = f(x)$  eine in  $x = 0$  hyperprojektive Korrespondenz  $x \rightarrow y$  mit dem Exponenten  $n (> 0)$  darstellt. Bei dieser Untersuchung soll die Funktion  $f(x)$  vorläufig nur als positiv und stetig für alle  $x > 0$  innerhalb eines gewissen Intervalls vorausgesetzt werden. Es handelt sich um die Frage, was man aus der für jedes  $\mu < 1$  und  $\geq 0$  gegebenen Grenzbedingung

$$\frac{f(tx)}{f(x)} \rightarrow \mu^n \quad \text{für } x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \mu,$$

über das Verhalten der Funktion im Nullpunkt selbst schliessen kann.

Lässt man  $x$  eine »grenzgeometrische Progression«, d. h. eine Fundamentalfolge

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

durchlaufen, für welche

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \rightarrow \mu, \quad 0 \leq \mu < 1,$$

gilt, so bilden die entsprechenden Funktionswerte

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), \dots$$

wegen der gegebenen Grenzbedingung eine grenzgeometrische Progression mit dem Grenzquotienten  $\mu^n$  und konvergieren daher ebenfalls gegen Null.

Hieraus kann man aber schliessen, dass  $f(x)$  gegen Null konvergiert, wenn  $x$  eine ganz beliebige Nullfolge positiver Zahlen durchläuft.

Man nehme nämlich an, dass es eine Nullfolge positiver Zahlen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  derart gäbe, dass für die entsprechenden Funktionswerte

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_i), \dots \rightarrow k > 0$$

gilt. Man könnte dann stets eine solche Teilfolge

$$x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$$

auswählen, dass

$$\frac{x_{i_r+1}}{x_{i_r}} < \frac{1}{2}.$$

Entweder ist dann diese Teilfolge selbst oder eine ihrer Teilfolgen eine grenzgeometrische Progression mit einem Grenzquotienten  $\leq \frac{1}{2}$  (eventuell 0). Dann müssten aber die entsprechenden Funktionswerte gegen Null konvergieren, während sie nach Annahme gegen  $k > 0$  konvergieren. Der Beweis gilt auch für  $k = \infty$ .

Es ergibt sich somit, dass für jede Nullfolge positiver Zahlen  $x_0, x_1, \dots$  die zugehörigen Funktionswerte  $f(x_0), f(x_1), \dots$  ebenfalls eine Nullfolge bilden, dass also  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ , oder m.a.W. dass  $f(x)$  eine unendlich kleine Grösse definiert.

15. Aus der obigen Untersuchung ist sofort ersichtlich, dass die Grenzbedingung

$$\frac{f(tx)}{f(x)} \rightarrow \mu^n \quad \text{für } x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \mu,$$

für einen negativen Wert  $n$  die Relation  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$  zur Folge hat, so dass  $f(x)$  eine unendlich grosse Grösse definiert.

16. Schliesslich nun der wichtige Satz: Hat die Kurve  $y = f(x)$  im Nullpunkt  $O$  den Krümmungsexponenten  $r$  (und folglich den Ordinatenexponenten  $r+1$ ), so ist ihre Berührungsordnung mit der Tangente in  $O$  gleich  $r$ , und  $f(x)$  stellt eine unendlich kleine Grösse der Ordnung  $r+1$  dar.

Setzt man nämlich

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^n}, \quad x > 0,$$

so hat man

$$\frac{\varphi(tx)}{\varphi(x)} = \frac{f(tx)}{f(x)} \cdot \frac{(tx)^n}{x^n} \rightarrow t^{r+1-n} \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Für  $n > r + 1$  ist  $\varphi(x)$  also eine unendlich kleine und für  $n > r + 1$  eine unendlich grosse Grösse, d. h.  $f(x)$  ist unendlich klein von der Ordnung  $r + 1$ ,  $\frac{f(x)}{x}$  unendlich klein von der Ordnung  $r$ , und damit ist der Satz bewiesen.

17. Für  $n = r + 1$  entsteht eine Funktion

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^{r+1}}, \quad x > 0,$$

über deren Verhalten für  $x \rightarrow 0$  von vornherein nicht mehr als  $\frac{\varphi(tx)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$  ausgesagt werden kann. Nimmt man jedoch an, dass  $\varphi(x)$  für  $x \rightarrow 0$  einen endlichen oder unendlichen Grenzwert hat, so kommen folgende Möglichkeiten in Betracht:

1°.  $\varphi(x) \rightarrow a \neq 0$  und  $\infty$  für  $x \rightarrow 0$ .

In diesem Fall ist die Grenzbedingung stets erfüllt.

2°.  $\varphi(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ .

Setzt man  $\frac{\varphi(x)}{x} = \psi(x)$ , so hat man

$$\frac{\psi(tx)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(tx)}{tx} \cdot \frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \frac{1}{t},$$

woraus folgt, dass

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow 0,$$

also, dass die  $y$ -Achse Tangente der Kurve  $y = \varphi(x)$  im Nullpunkt ist.

Für zwei variable Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  dieser Kurve (Fig. 3) soll nun gelten, dass  $\frac{y_2}{y_1}$ , wenn  $\frac{x_2}{x_1}$  gegen einen Wert  $> 1$  konvergiert, gegen 1 konvergiert. Wählt man nun die beiden variablen Punkte derart, dass  $\frac{y_2}{y_1}$  gegen einen Wert  $> 1$  konvergiert,

so muss  $\frac{x_2}{x_1}$  ins Unendliche wachsen. Die inverse Korrespondenz  $y \rightarrow x$  ist also hyperprojektiv mit unendlich hohem Exponenten.

(Die Korrespondenz  $y \rightarrow x$  ist hierbei eindeutig gedacht; im übrigen spielt dies aber keine Rolle.)

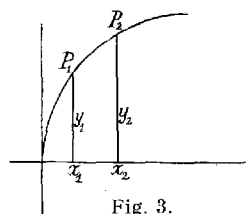


Fig. 3.

Als Resultat hat man daher, dass die fragliche Funktion  $\varphi$  in diesem Fall die inverse einer Funktion mit unendlich hohem Exponenten ist.

3°.  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$ .

Die reziproke Funktion  $\frac{1}{\varphi(x)}$  konvergiert dann gegen 0, und dieser Fall kann daher sofort auf den vorigen mit dem Resultat zurückgeführt werden, dass  $\varphi(x)$  hier die reziproke der inversen einer Funktion mit unendlich hohem Exponenten ist.

Die einfachsten Beispiele von Funktionen  $\varphi(x)$  für die drei Fälle 1°, 2°, 3° sind:

$$\varphi(x) = e^x, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\log x}, \quad \varphi(x) = -\log x.$$

Diesen entsprechend hat man die folgenden drei Beispiele von Kurven mit dem Exponenten  $r$  im Nullpunkt

$$y = x^{r+1}e^x, \quad y = -\frac{x^{r+1}}{\log x}, \quad y = -x^{r+1}\log x.$$

## II. Schwache Figuren in der Ebene.

18. Ein schwaches Dreieck  $ABC$  ist ein variables Dreieck, dessen Ecken alle gegen einen Punkt  $O$  und dessen Seiten alle gegen eine Gerade  $l$  konvergieren (Fig. 4). Die infinitesimalen Seiten und Winkel des Dreiecks konvergieren sämtlich gegen Null. Die Geometrie des Dreiecks hat es mit den Relationen zwischen den Grenzverhältnissen der Seiten und den Grenzverhältnissen der Winkel zu tun. (Unter »Winkel« verstehen wir »infinitesimale Winkel«.) Die Grenzver-

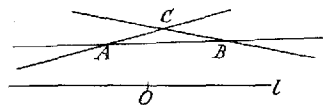


Fig. 4.

hältnisse der Seiten bzw. Winkel seien durch die Verhältniszahlen  $a, b, c$  bzw.  $A, B, C$  gegeben. Man hat dann wegen der Konvergenz der Richtungen  $AC, CB, AB$  gegen dieselbe Richtung

$$c = a + b, \quad C = A + B,$$

$$(a, b, c) \propto (A, B, C),$$

wo die letzte Relation die Proportionalität von  $a, b, c$  und  $A, B, C$  zum Ausdruck bringt<sup>1</sup>.

Hiermit ist die Trigonometrie des schwachen Dreiecks erschöpft.

19. Indem wir nun zur Betrachtung einer aus mehr als drei Punkten  $A_1, A_2, A_3, \dots$  bestehenden schwachen Figur mit dem Grenzpunkt  $O$  übergehen, wollen wir einschränkend annehmen, dass der Punkt  $O$  der Figur in dem Sinne angehört, dass die Geraden  $OA_i$  dieselbe Grenzlage wie die Geraden  $A_i A_k$  haben.

In der Figur (Fig. 5) ist angenommen, dass die Halbgerade  $x$  die gemeinsame Grenzlage der Halbgeraden  $O(A_1), A_1(A_2), A_2(A_3), A_3(A_4)$ , u. s. w. ist. Das gleiche gilt dann für die Halbgeraden  $O(A_2), O(A_3), O(A_4), A_1(A_3), A_1(A_4), A_2(A_4)$  u. s. w.

Wir nehmen an, dass die Abstände  $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, \dots$  Grenzverhältnisse haben, die durch die positiven Verhältniszahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$  (wobei bis auf weiteres  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \dots$  vorausgesetzt wird) angegeben werden, so dass also

$$(OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, \dots) \propto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots).$$

<sup>1</sup> Dieses Resultat ist zum ersten Mal von L'Hospital in seinem berühmten Werk: *Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696, sec. édit. 1716, p. 153. angegeben worden.

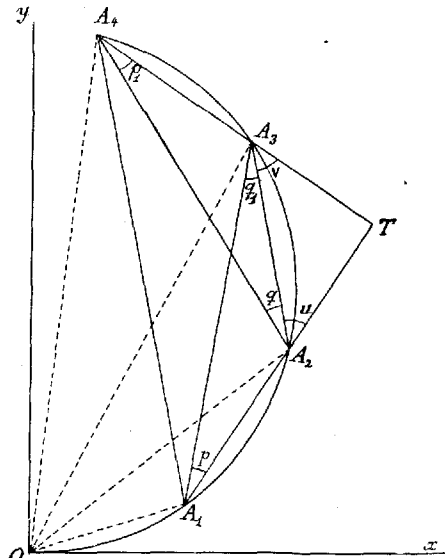


Fig. 5.

Ferner wird angenommen, dass die Halbgeraden  $O(A_1)$ ,  $O(A_2)$ ,  $O(A_3)$ ,  $O(A_4)$ ,  $\dots$  Winkel mit der gemeinsamen Grenzlage  $\alpha$  bilden, deren Grenzverhältnisse durch positive Verhältniszahlen  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$  angegeben werden können.

Sämtliche Grenzverhältnisse zwischen Abständen und zwischen Winkeln der Figur lassen sich dann durch die Grössen  $\alpha_i$  und  $\theta_i$  ausdrücken.

In einem affinen Koordinatensystem  $x, y$  können die Koordinaten jedes der Punkte  $A_i$  durch  $(\alpha_i, \theta_i \alpha_i)$  repräsentiert werden. Führt man die Grösse

$$[ikl] = \theta_i \alpha_i (\alpha_l - \alpha_k) + \theta_k \alpha_k (\alpha_i - \alpha_l) + \theta_l \alpha_l (\alpha_k - \alpha_i)$$

ein, die den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $A_i A_k A_l$  repräsentiert, so kann der infinitesimale Winkel  $(ikl) = \angle A_i A_k A_l$  d. h. der infinitesimale Winkel zwischen den Geraden  $A_i A_k$  und  $A_k A_l$  durch

$$(ikl) = \frac{[ikl]}{(\alpha_k - \alpha_i)(\alpha_l - \alpha_k)}$$

ausgedrückt werden.

Führt man für die in der Figur hervorgehobenen infinitesimalen Winkel die dort angegebenen Bezeichnungen  $p, q, p_1, q_1, u, v$  ein, so erhält man das Grenzverhältnis

$$\frac{u}{v} = \frac{p + q_1}{q + p_1} = \frac{p}{p_1} \cdot \frac{1 + \frac{q_1}{p}}{\frac{q}{p_1} + 1} = \frac{[123]}{[234]} \cdot \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden  $A_1 A_2$  und  $A_3 A_4$  mit  $T$ , so hat man das Grenzverhältnis

$$\tau = \frac{A_2 T}{A_1 A_2} = \frac{[234]}{[134] - [234]}.$$

Die Strecken  $A_i A_k$ ,  $i < k$ , werden durch  $\alpha_k - \alpha_i$  und die Strecke  $OT$  durch

$$OT = OA_2 + A_2 T = \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1) \tau$$

repräsentiert.



Man sieht nun leicht, dass man für alle Abstände und Winkel der Figur durch die Grössen  $\alpha_i$  und  $\theta_i$  ausdrückbare, repräsentierende Zahlen finden kann.

20. Sind die Punkte  $O$  und  $A_i$  der Figur speziell an eine feste konvexe, die  $x$ -Achse in  $O$  berührende Kurve mit dem Exponenten  $r(>0)$  in  $O$  gebunden, so hat man

$$\frac{u}{v} = \frac{\alpha_1^{r+1}(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_2^{r+1}(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_3^{r+1}(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2^{r+1}(\alpha_4 - \alpha_3) + \alpha_3^{r+1}(\alpha_2 - \alpha_4) + \alpha_4^{r+1}(\alpha_3 - \alpha_2)} \cdot \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

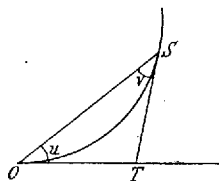


Fig. 6.

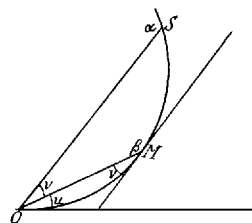


Fig. 7.

Für  $r = 1$  ergibt sich insbesondere

$$\frac{u}{v} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2}.$$

Lässt man  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gegen 0 und  $\alpha_3$  und  $\alpha_4$  gegen  $\alpha$  konvergieren, so geht das Grenzverhältnis  $\frac{u}{v}$  in

$$\frac{u}{v} = \frac{TS}{OT} = \frac{1}{r}$$

über (Fig. 6).

21. Von den speziellen, mit der Kurve verknüpften schwachen Figuren erwähnen wir noch diejenige, die entsteht, wenn man die zur infinitesimalen Sehne  $OS$  parallele Tangente zieht. Gehört zu  $S$  die Zahl  $\alpha$  und zum Berührungspunkt  $M$  die Zahl  $\beta$ , so hat man mit den in der Figur (Fig. 7) angegebenen Bezeichnungen

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{u+v}{u} = 1+r = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r,$$

also das Grenzverhältnis

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(1+r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Wächst  $r$  ins Unendliche, so geht dieses Grenzverhältnis gegen 1; konvergiert  $r$  gegen 0, so geht es gegen  $e$ .

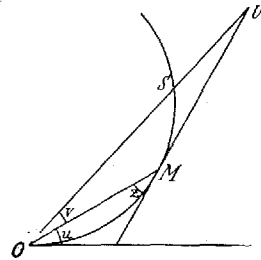


Fig. 8.

Es sei bemerkt, dass die Bedingung, dass die Tangente in  $M$  parallel  $OS$  ist, in diesem Zusammenhang in Wirklichkeit nur bedeutet, dass der Schnittpunkt der Tangente mit  $OS$  bei dem durchgeführten Grenzübergang keine Grenzlage in  $O$  hat.

22. Wir wollen noch die etwas weitergehende Aufgabe lösen, wo gefordert wird, dass der Schnittpunkt  $U$  der Tangente in

$M$  mit der Geraden  $OS$  beim Grenzübergang derart variiert, dass ein eindeutig bestimmtes Grenzverhältnis

$$\frac{OU}{OS} = \mu$$

existiert, das mit Vorzeichen, positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem  $OU$  und  $OS$  dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben.

In diesem Fall hat man mit den in Fig. 8 angegebenen Bezeichnungen

$$\frac{v}{z} = \frac{MU}{OU} = 1 - \frac{OM}{OU} = 1 - \frac{OM}{OS} \cdot \frac{1}{\mu},$$

$$\frac{z}{u} = r,$$

also

$$\frac{v}{u} = r - \frac{r}{\mu} \cdot \frac{OM}{OS},$$

während

$$\frac{v+u}{u} = \left(\frac{OS}{OM}\right)^r$$

ist, so dass man zur Bestimmung von  $\xi = \frac{OS}{OM}$  die Gleichung

$$\xi^{r+1} - (r+1) \xi + \frac{r}{\mu} = 0$$

erhält. Hierin ist für  $\mu = \infty$  die Lösung der vorigen Aufgabe (21.) enthalten.

23. Im übrigen verweisen wir auf die in 10. angegebenen Formeln, nach welchen die Grenzverhältnisse zwischen Abszissen und zwischen Ordinaten variabler Punkte  $(x, y)$ , die gegen  $O$  konvergieren, durch eine Gleichung der Form

$$\frac{y}{y_1} = \left( \frac{x}{x_1} \right)^{r+1}$$

der Behandlung zugänglich und die einschlägigen Fragen auf elementare analytisch-geometrische Betrachtungen reduziert werden. Die genannte Gleichung wird als Grenzgleichung der Kurve in  $O$  bezeichnet.

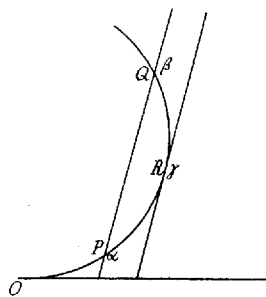


Fig. 9.

24. Als weiteres Anwendungsbeispiel sei noch die folgende Verallgemeinerung von 21. genannt: Auf dem Bogen  $PQ$  (Fig. 9), der gegen  $O$  konvergiert, werde ein Punkt  $R$  bestimmt, dessen Tangente der Sehne parallel ist. Die repräsentierende Zahl  $\gamma$  von  $R$  und die repräsentierenden Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $P$  bzw.  $Q$  sind dann durch die Gleichung

$$\gamma^r = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta}$$

verknüpft.

Die repräsentierende Zahl des Schnittpunktes der Tangenten in  $P$  und  $Q$  ergibt sich leicht mit Hilfe einer früheren Betrachtung (19.).

25. Wir wenden uns nun der Untersuchung von zwei konvexen Kurven  $k$  und  $k_1$  (Fig. 10) zu, die vom selben Punkt  $O$  ausgehen und dort dieselbe Halbtangente  $x$  und denselben Exponenten  $r$  haben. Die Kurven mögen ferner auf derselben Seite

der Tangente in  $O$  liegen, so dass sie eine Spitze zweiter Art bilden. Zur Behandlung der schwachen Figuren, die mit beiden Kurven verknüpft sind, müssen wir ausser den Grenzgleichungen der Kurven noch das Grenzverhältnis

$$i_1 = \frac{OA_1}{OA}$$

der beiden auf einer Sekante durch  $O$  ausgeschnittenen Sehnen heranziehen.

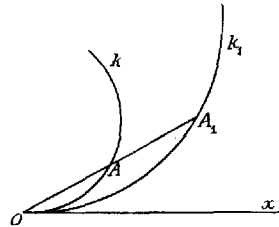


Fig. 10.

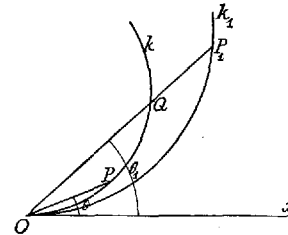


Fig. 11.

Von dieser Grösse, die als das Krümmungsverhältnis der Kurven (Krümmungsverhältnis von  $k$  und  $k_1$ ) bezeichnet wird, wird vorausgesetzt, dass sie einen eindeutigen Wert hat. Mit ihrer Hilfe können beliebige Sehnen  $OP, OP_1$  und ihre Neigungswinkel  $\theta, \theta_1$  (Fig. 11) verglichen werden:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \left( \frac{OP}{OQ} \right)^r = \left( \frac{OP}{OP_1} \cdot \frac{OP_1}{OQ} \right)^r,$$

also

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \left( i_1 \frac{OP}{OP_1} \right)^r.$$

26. Führt man (Fig. 12) ein affines Koordinatensystem  $x, y$  ein, so hat man für zwei Punkte  $(x_1, y)$  und  $(x_1, y_1)$  mit derselben Abszisse  $x_1$

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^r = i_1^r, \quad \frac{y}{y_1} = \frac{\theta}{\theta_1},$$

also

$$\frac{y}{y_1} = i_1^r.$$

Von den Kurven  $k_1$  der genannten Art, die ein bestimmtes endliches, von 0 verschiedenes Krümmungsverhältnis zu einer

gegebenen Kurve  $k$  haben, soll gesagt werden, dass sie den durch  $k$  bestimmten schwachen Bereich um  $O$  angeben; jeder Punkt  $(x, y)$  dieses Bereichs befriedigt eine Gleichung der Form

$$\frac{y}{y_1} = \mu \left( \frac{x}{x_1} \right)^{r+1},$$

wo  $\mu$  ein Parameter ist.

Zwei Punkte  $(x_1 \alpha_1, y_1 \mu_1 \alpha_1^{r+1})$  und  $(x_1 \alpha_2, y_1 \mu_2 \alpha_2^{r+1})$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , des Bereiches bestimmen eine Gerade mit der Steigung

$$\omega = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{\mu_1 \alpha_1^{r+1} - \mu_2 \alpha_2^{r+1}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

und mit der Abszisse (das ist das auf der  $x$ -Achse abgeschnittene Stück)

$$x = x_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\mu_1 \alpha_1^r - \mu_2 \alpha_2^r)}{\mu_1 \alpha_1^{r+1} - \mu_2 \alpha_2^{r+1}}.$$

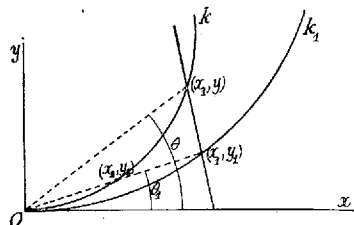


Fig. 12.

Setzt man  $\frac{y_1}{x_1} = \omega_1$ , so kann man sagen, dass die Gerade durch die Grenzverhältnisse

$$u = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\mu_1 \alpha_1^{r+1} - \mu_2 \alpha_2^{r+1}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$\xi = \frac{x}{x_1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\mu_1 \alpha_1^r - \mu_2 \alpha_2^r)}{\mu_1 \alpha_1^{r+1} - \mu_2 \alpha_2^{r+1}}$$

bestimmt ist;  $u$  und  $\xi$  können somit als Koordinaten der Geraden verwendet werden.

Zwei Geraden  $(u_1, \xi_1)$  und  $(u_2, \xi_2)$  haben, wenn  $u_1 \neq u_2$  ist, einen Schnittpunkt, der durch die Koordinaten

$$x = x_1 \frac{u_2 \xi_2 - u_1 \xi_1}{u_2 - u_1}, \quad y = y_1 u_1 u_2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{u_2 - u_1}$$

bestimmt ist.

**27.** Die analytische Geometrie der aus zwei Kurven mit den Grenzgleichungen

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r+1}, \quad \frac{y}{y_1} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{r+1}$$

bestehenden Figur ist nun leicht zu übersehen.

Wir wählen  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  auf derselben Sekante durch  $O$ , so dass

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0} = i_1;$$

die Gleichungen der Kurven können dann formal als Gleichungen zweier Parabeln

$$y = px^{r+1}, \quad y = qx^{r+1}$$

geschrieben werden, wo

$$p = \frac{y_0}{x_0^{r+1}}, \quad q = \frac{y_1}{x_1^{r+1}}$$

und

$$\frac{p}{q} = \frac{y_0}{y_1} \cdot \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{r+1} = i_1^r.$$

Damit hat man die analytischen Grundlagen der schwachen Geometrie der beiden Kurven in  $O$ : Die diesbezüglichen Aufgaben können mittels gewöhnlicher algebraischer Rechnungen gelöst werden, indem man vorgeht, als ob es sich um die elementare analytische Geometrie der bei-

den Parabeln  $y = px^{r+1}$ ,  $y = qx^{r+1}$ , wo  $\frac{p}{q} = i_1^r$ ,  $i_1 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{r}}$ , handelte.

28. Es ist jedoch zu beachten, dass die obigen Überlegungen in Wirklichkeit keinerlei Metrik voraussetzen. Die Grenzverhältnisse infinitesimaler Vektoren in Richtung der  $x$ -Achse sind rein projektiv bestimmt, und dasselbe gilt für infinitesimale Vektoren in der Richtung der  $y$ -Achse, allgemein für Vektoren einer bestimmten Richtung. Für zwei Vektoren verschiedener Richtung hat jedoch das Grenzverhältnis keinen bestimmten Sinn, solange man keine Metrik eingeführt hat. Jede der obengenannten Größen  $p$  und  $q$ ,  $p = \frac{y_0}{x_0^{r+1}}$ ,  $q = \frac{y_1}{x_1^{r+1}}$ , für sich hat daher nur rein formale, während  $\frac{p}{q} = i_1^r$  reale Bedeutung hat. Führt man

aber irgend eine beliebig gewählte Metrik im infinitesimalen Bereiche um  $O$  ein, so erhält jede der genannten Grössen für sich eine geometrische Bedeutung; die Endresultate, die Geometrie der vorgelegten schwachen Figur, sind rein projektiver Natur und gelten unabhängig von der speziellen Metrik, die man während der Zwischenrechnung vor Augen gehabt hat. Auch die beiden Parabeln

$$y = px^{r+1}, \quad y = qx^{r+1}$$

haben nur die hierdurch fixierte mehr formale Bedeutung. Sie sollen die oskulierenden Parabeln der Kurven in  $O$  und  $p$  und  $q$  ihre Parameter genannt werden. Das Krümmungsverhältnis ist mit den Parametern, wie schon oben erwähnt, durch die Gleichung  $\frac{p}{q} = i_1^r$  verknüpft.

### III. Berührungsinvarianten.

29. Die Invariante  $i_1$  ist die erste der sogenannten Berührungsinvarianten unserer beiden Kurven  $k$  und  $k_1$ . Sie setzt voraus, dass die durch Zentralprojektion von  $O$  aus vermittelte Beziehung der Kurven infinitesimal projektiv in  $O$  ist, und gibt dann das Grenzverhältnis entsprechender infinitesimaler Vektoren  $OA_1$  und  $OA$  an (vgl. Einl. 2.). Sie ist als Krümmungsverhältnis der Kurven  $k$  und  $k_1$  in  $O$  bezeichnet worden. Im ordinären Fall, wo  $i_1$  einen endlichen, von Null verschiedenen Wert hat, und den wir, wenn nichts anderes gesagt wird, stets vor Augen haben wollen, haben die Kurven denselben Exponenten  $r$ . Besitzen die Kurven gewöhnliche Krümmungen in  $O$ , so gibt  $i_1$  deren Verhältnis an. Auch wenn beide Kurven die Krümmung 0 oder  $\infty$  in  $O$  haben, das Grenzverhältnis  $i_1 = \frac{OA_1}{OA}$  aber noch existiert, wollen wir, wie schon gesagt, an der Bezeichnung Krümmungsverhältnis festhalten.

In allen Fällen ist  $i_1$  eine projektive Invariante. Wir werden nun im folgenden eine Reihe von ähnlichen projektiven Invarianten (Berührungsinvarianten) der beiden Kurven angeben, die sich indessen alle als durch  $i_1$  ausdrückbar erweisen werden.

30. Die erste dieser Invarianten,  $i_2$ , ist dual zu  $i_1$ . Es seien  $t$  und  $t_1$  die Tangenten von einem Punkt  $Q$  auf  $x$  an die Kur-





Da die Winkel  $u_1$  und  $u$ , und folglich auch  $\varphi_1$  und  $\varphi$  das Grenzverhältnis 1 haben, sieht man jedoch unmittelbar, dass

$$i_4 = i_1$$

ist.

Welchen Grenzlagen  $U$  auf der Halbgeraden  $x_1$  der Punkt  $T$  zustrebt, ist ohne Einfluss auf das Resultat.

Man sieht ferner, dass das Grenzverhältnis der infinitesimalen Winkel  $(st_1)$  und  $(st)$ , wo  $s$  die Gerade  $OT$  bezeichnet, denselben Wert  $i_4$  hat.

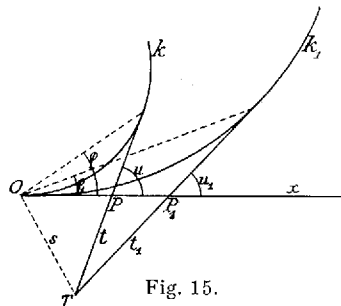


Fig. 15.

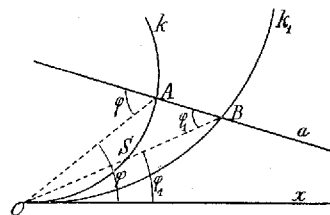


Fig. 16.

33. Endlich seien noch zwei zueinander duale Invarianten  $i_5$  und  $i_6$  genannt. Die erstere ist das Grenzverhältnis zweier infinitesimaler Vektoren  $OB$  und  $OA$ , wo  $A$  und  $B$  die Schnittpunkte der Kurven mit einer Geraden  $a$  sind (Fig. 16), die in der Weise gegen  $x$  konvergiert, dass  $O$  nicht Grenzlage von Schnittpunkten der Geraden  $a$  und  $x$  ist. Man erhält sofort

$$i_5 = \frac{OB}{OA} = \frac{\varphi}{\varphi_1}$$

und weiter

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \left( \frac{OA}{OS} \right)^r = \left( \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OS} \right)^r,$$

$$i_5 = \left( \frac{1}{i_5} \cdot i_1 \right)^r$$

oder

$$i_5 = \frac{r}{i_1^{r+1}}.$$

Für  $r = 1$  ergibt sich speziell  $i_5 = \sqrt{i_1}$ .

34. Die duale Invariante  $i_6$  entsteht folgendermassen: Von einem Punkt  $T$  (Fig. 17), der derart gegen  $O$  konvergiert, dass keine Grenzlage der Geraden  $OT$  auf  $x$  fällt, werden die Tangenten  $t$  und  $t_1$  an die Kurven gelegt. Es seien  $R$  und  $R_1$  ihre Berührungspunkte und  $P$  und  $P_1$  ihre Schnittpunkte mit  $x$ . Die Invariante  $i_6$  ist dann das Grenzverhältnis

$$i_6 = \frac{u_1}{u}$$

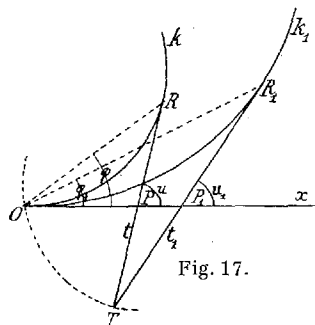


Fig. 17.

der Winkel  $u_1 = (xt_1)$  und  $u = (xt)$ .

Aus dem schwachen Dreieck  $TPP_1$

entnimmt man, dass dieses Verhältnis auch durch  $\frac{TP}{TP_1}$ , also auch durch  $\frac{OP}{OP_1}$  oder (da die Kurven denselben Index haben) durch  $\frac{OR}{OR_1}$  dargestellt wird. In üblicher Weise erhält man daher

$$i_6 = \frac{u_1}{u} = \frac{\varphi_1}{\varphi} = \left(\frac{OS}{OR}\right)^r = \left(\frac{OS}{OR_1} \cdot \frac{OR_1}{OR}\right)^r$$

oder

$$i_6 = \left(\frac{1}{i_1} \cdot \frac{1}{i_5}\right)^r,$$

$$i_6 = \frac{1}{\frac{r}{i_1^{r+1}}} = \frac{1}{i_5}.$$

Ferner sei bemerkt, dass die drei Grenzverhältnisse

$$\frac{TP}{TP_1}, \quad \frac{OP}{OP_1}, \quad \frac{PR}{P_1R_1}$$

einander gleich sind und dass dem zufolge  $\frac{TR}{TR_1}$  denselben Wert hat.

Die Invariante  $i_6$  ist also auch gleich dem Grenzverhältnis  $\frac{TR}{TR_1}$  der Längen der Tangenten von  $T$  an die Kurven.

35. Wir wollen noch die Relation zwischen den Schnittpunkten der beiden Kurven mit einer beliebigen, gegen  $x$  kon-

vergiehenden Sekante  $s$  angeben (Fig. 18). Die Sekante schneide die Kurve  $k$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ , die derart gegen  $O$  konvergieren, dass das Grenzverhältnis  $\frac{OQ}{OP} = \alpha (> 1)$  ist. Sie schneide die andre Kurve  $k_1$  in den Punkten  $R$  und  $S$ , die durch die Grenzverhältnisse

$$\xi_1 = \frac{OR}{OP}, \quad \xi_2 = \frac{OS}{OP}$$

bestimmt seien. Eine gewöhnliche Rechnung zeigt dann, dass diese die Gleichung

$$\xi^{r+1} - i_1^r \frac{\alpha^{r+1} - 1}{\alpha - 1} \xi + i_1^r \frac{\alpha^{r+1} - \alpha}{\alpha - 1} = 0$$

befriedigen, die genau zwei reelle Wurzeln hat.

Im Fall  $i_1 > 1$  (der in der Figur wiedergegeben ist) ist die eine (dem Punkt  $R$  entsprechende) Wurzel kleiner als 1 und die andre (dem Punkt  $S$  entsprechende) grösser als 1. Für  $i_1 = 1$  sind die Wurzeln  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = \alpha$ .

Ist  $s$  Tangente an  $k$ , fallen also  $P$  und  $Q$  zusammen (Fig. 19), so geht die Gleichung in

$$\xi^{r+1} - i_1^r (r+1) \xi + i_1^r r = 0$$

über. Ist hier  $i_1 = 1$ , so ist sowohl  $\xi_1$  als auch  $\xi_2$  gleich 1.

**36.** Bisher haben wir von den beiden betrachteten konvexen Kurven nicht nur vorausgesetzt, dass sie denselben Anfangspunkt  $O$ , sondern auch, dass sie dort

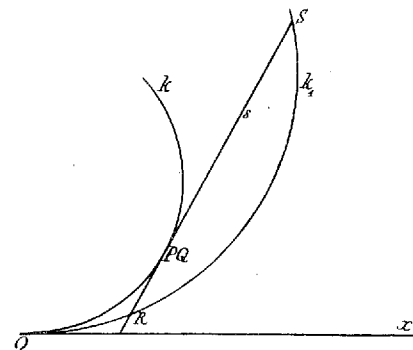


Fig. 19.

dieselbe Halbtangente  $x$  haben und auf derselben Seite derselben liegen. Nun kann man aber mittels einer harmonischen Homologie mit der Tangente als Achse und einem nicht auf dieser gelegenen Zentrum oder mit einer durch  $O$  gehenden Achse und

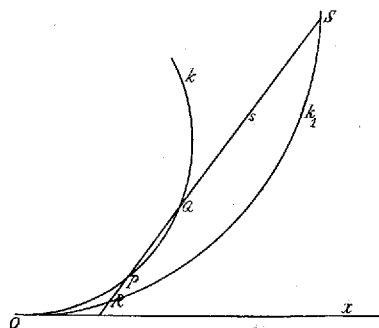


Fig. 18.

auf der Tangente gelegenem Zentrum oder schliesslich mit  $O$  als Zentrum und einer nicht durch  $O$  gehenden Achse die eine der Kurven in eine neue überführen, ohne dass die Grenzverhältnisse der mit der Kurve verknüpften infinitesimalen Vektoren mit dem Anfangspunkt  $O$  geändert werden. Hiernach ist klar, dass die Betrachtungen auf solche konvexen Kurven mit demselben Anfangspunkt  $O$  und derselben Tangente in  $O$  übertragen werden können, welche die zusätzliche Bedingung, dieselbe Halbtangente zu haben und auf derselben Seite zu liegen, nicht erfüllen. In

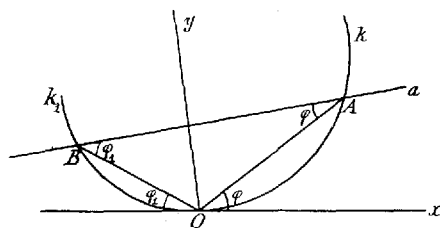


Fig. 20.

den alsdann möglichen Fällen, wo die beiden Kurven zusammen eine Kurve mit  $O$  als Konvexitätspunkt, mit  $O$  als Spitze erster Art oder mit  $O$  als Wendepunkt ausmachen, kann man, wie früher von einer Invariante  $i_1$ , dem Krümmungsverhältnis,

sprechen. Man könnte ihm ein Vorzeichen beilegen, wozu wir hier jedoch keinen Anlass haben.

37. Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Kurven  $k$  und  $k_1$  zusammen einen konvexen Bogen ausmachen (Fig. 20). Eine variable Gerade  $a$ , die derart gegen  $x$  konvergiert, dass ihr Schnittpunkt mit  $x$  keine Grenzlage in  $O$  hat, schneidet  $k$  und  $k_1$  in Punkten  $A$  und  $B$ , die beide gegen  $O$  konvergieren. Wir suchen das Grenzverhältnis

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\varphi}{\varphi_1}$$

der Vektoren  $OB$  und  $OA$ . Unter Heranziehung der zu  $k_1$  symmetrischen Kurve mit Bezug auf eine Gerade  $y$  erhält man wie in 33.

$$\frac{OB}{OA} = i_1^{\frac{r}{r+1}},$$

wo  $i_1$  das Krümmungsverhältnis von  $k$  und  $k_1$  ist.

Im Anschluss an 34. bemerken wir ferner, dass das Grenzverhältnis der Längen der Tangenten  $TR$  und  $TR_1$  an die Kurven

von einem Punkt  $T$  aus, der derart gegen  $O$  konvergiert, dass keine Grenzlage von  $OT$  mit  $x$  zusammenfällt, sich zu

$$i_6 = \frac{1}{i_1^{\frac{r}{r+1}}}$$

ergibt.

38. Konvergiert  $a$  dagegen in der Weise gegen  $x$ , dass der Schnittpunkt  $P$  mit  $x$  gegen  $O$  geht (Fig. 21), so hängt das

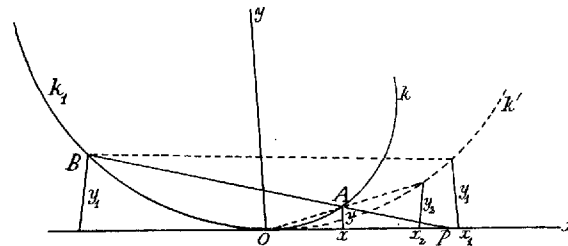


Fig. 21.

gesuchte Grenzverhältnis von  $\frac{PB}{PA}$  ab. Ist das letztere Grenzverhältnis gleich  $\mu$ , so erhält man unter Heranziehung der zu  $k_1$  mit Bezug auf  $y$  symmetrischen Kurve  $k'$

$$\frac{y_2}{y_1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{r+1};$$

und wegen

$$\frac{y_2}{y} = \frac{x_2}{x} = i_1, \quad \frac{y_1}{y} = \mu$$

entnimmt man hieraus

$$\frac{i_1}{\mu} = \left( i_1 \frac{x}{x_1} \right)^{r+1}$$

oder

$$\frac{OB}{OA} = \frac{x_1}{x} = \mu^{\frac{1}{r+1}} i_1^{\frac{r}{r+1}}.$$

Das Resultat von 37. ist hierin für  $\mu = 1$  enthalten.

Im einfachsten Fall  $r = 1$ ,  $i_1 = 1$ ,  $\mu = 1$  sind die beiden Vektoren  $OB$  und  $OA$  einander gleich.

Ist  $r = 1$ ,  $i_1 = 1$ ,  $\mu$  beliebig, so ergibt sich

$$\frac{OB}{OA} = \sqrt{\mu}.$$

In leicht verständlicher Schreibweise hat man dann die Gleichung

$$PO^2 = PA \cdot PB,$$

die als Ausdruck für »den infinitesimalen Satz über die Potenz eines Punktes« aufgefasst werden kann.

39. Wir nehmen nun an (Fig. 22), dass wir zwei Kurvenzweige  $k$  und  $k_1$  haben, die einen Wendepunkt in  $O$  bilden und ein bestimmtes Krümmungsverhältnis

$$i_1 = \frac{OA_1}{OA}$$

haben, wobei die Strecken ohne Vorzeichen gerechnet werden. Von den beiden Zweigen wird angenommen, dass sie den Exponenten  $r$  in  $O$  haben. Von einem Punkt  $T$  der Sekante  $OAA_1$  sind die Tangenten an die beiden Kurvenzweige gezogen; die

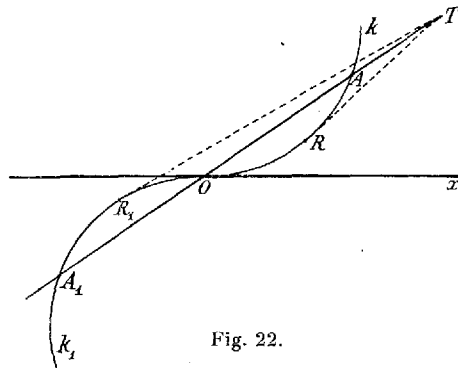


Fig. 22.

Berührungspunkte seien  $R$  und  $R_1$ . Der Punkt  $T$  konvergiere gegen  $x$ , jedoch so, dass er keine Grenzlage in  $O$  hat. Die Punkte  $A$  und  $A_1$ ,  $R$  und  $R_1$  konvergieren alle gegen  $O$ , so dass die



Das Verhältnis, in dem das Stück der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt von der Wendetangente geteilt wird, ist

$$\frac{BC}{CA} = (r+1)\xi + r.$$

Aus der obigen Gleichung folgt dann

$$\left(\frac{OB}{OA}\right)^{r+1} : \frac{BC}{CA} = i_1^r.$$

41. Wir betrachten wieder zwei Kurvenzweige  $k, k_1$  (Fig. 24), die in  $O$  einen Wendepunkt mit der Tangente  $x$  bilden und dort den Krümmungsexponenten  $r$  und das Krümmungsverhältnis  $i_1$  haben. Auf  $k$  werden zwei Punkte  $A$  und  $B$  gewählt, die in der Weise gegen  $O$  konvergieren, dass das Grenzverhältnis  $\frac{OB}{OA} = \alpha (> 1)$  ist. Die Gerade  $AB = s$  schneidet  $k_1$  im Punkt  $C$ ,

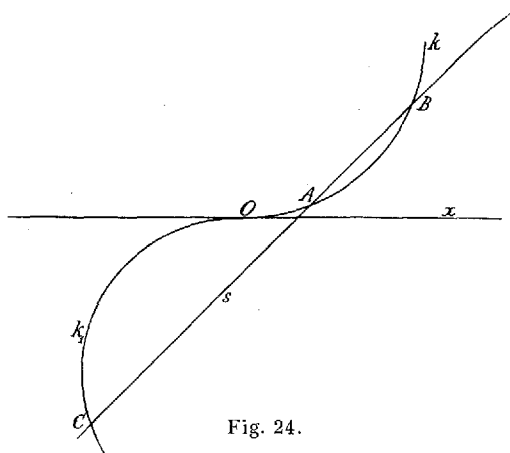


Fig. 24.

der dann gleichfalls gegen  $O$  konvergiert. Man sucht den Wert des Grenzverhältnisses  $\xi = \frac{OC}{OA}$ . Man erhält hierfür die Gleichung

$$\xi^{r+1} - i_1^r \frac{\alpha^{r+1} - 1}{\alpha - 1} \xi - i_1^r \frac{\alpha^{r+1} - \alpha}{\alpha - 1} = 0.$$



Hiermit hat man die Grenzrelation zwischen den drei Schnittpunkten  $A, B, C$ . Lässt man  $\alpha$  gegen 1 gehen, so erhält man die vorige Gleichung.

Unterwirft man  $s$  der Bedingung, dass das Grenzverhältnis  $\frac{CA}{AB}$  einen bestimmten Wert  $\mu$  haben soll, so hat man die Relation

$$\xi = \frac{OC}{OA} = \frac{CA - OA}{OA} = \mu\alpha - (\mu + 1),$$

die zusammen mit der obigen Gleichung zur Bestimmung von  $\xi$  und  $\alpha$  dient.

42. Analoge Aufgaben hat man, wenn eine Spitze erster Art vorliegt (Fig. 25). Die Tangente in einem Punkt  $A$  von  $k$  schneide  $k_1$  in  $B$ . Man sucht das Grenzverhältnis  $\xi = \frac{OB}{OA}$ , wenn  $A$ , und damit  $B$ , gegen  $O$  konvergiert. Zur Bestimmung von  $\xi$  findet man die Gleichung

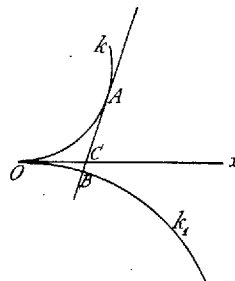


Fig. 25.

$$\xi^{r+1} + i_1^r (r+1) \xi + i_1^r r = 0,$$

die genau eine positive Wurzel  $\xi_1 \leq \frac{r}{r+1}$  besitzt. Das Teilverhältnis  $\frac{BC}{CA}$  ergibt sich zu  $r - (r+1) \xi_1$ . Man hat dann

$$\left(\frac{OB}{OA}\right)^{r+1} : \frac{BC}{CA} = i_1^r.$$

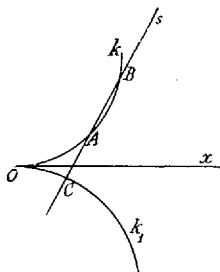


Fig. 26.

Man betrachte nun eine Sekante  $s$  (Fig. 26), die den einen Zweig in  $A$  und  $B$ , den anderen in  $C$  schneidet, so dass das Grenzverhältnis  $\frac{OB}{OA} = \alpha$  ist. Zur Bestimmung des Grenzverhältnisses  $\xi = \frac{OC}{OA}$  hat man dann

$$\xi^{r+1} + i_1^r \frac{\alpha^{r+1} - 1}{\alpha - 1} \xi - i_1^r \frac{\alpha^{r+1} - \alpha}{\alpha - 1} = 0.$$

43. Bei der Untersuchung schwacher Figuren ist es von Wichtigkeit, bestimmte Regeln für die Anwendung des

Dualitätsprinzips zu haben. Wir wollen daher einige Worte darüber hinzufügen. In einem ebenen Polarsystem entspricht einem schwachen Dreieck ein schwaches Dreieck, und da die beiden Dreiecke homolog sind, sind entsprechende Stücke proportional. Einem konvexen Bogen mit den Tangenten  $a, b$  in den Endpunkten  $A, B$  (Fig. 27) entspricht im Polarsystem ein konvexer Bogen mit den Tangenten  $a_1, b_1$  in den Endpunkten  $A_1, B_1$  (Fig. 28), derart dass  $a_1$  und  $b_1$  die Polaren von  $A$  und  $B$  und  $A_1$  und  $B_1$  die Pole von  $a$  und  $b$  sind. Konvergiert  $B, b$

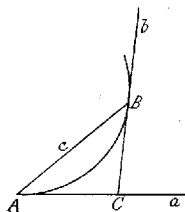


Fig. 27.

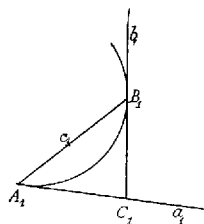


Fig. 28.

gegen  $A, a$ , so konvergiert auch  $B_1, b_1$  gegen  $A_1, a_1$ . Dem Grenzverhältnis  $\frac{BC}{AC}$  der einen Figur entspricht das Grenzverhältnis  $\frac{b_1c_1}{a_1c_1} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$  der anderen, und hieraus folgt, dass, wenn der eine Bogen einen bestimmten Index in  $A$  hat, auch der andere einen Index in  $A_1$  hat, und zwar den reziproken.

Ferner erkennt man mittels des genannten Grenzüberganges folgendes: falls der Vektor  $AB$  und der Winkel  $ab$  hyperprojektiv sind, so gilt dies auch für den Winkel  $a_1b_1$  und den Vektor  $A_1B_1$ , d. h. wenn der eine Bogen einen bestimmten Exponenten  $r$  in  $A$  hat, so hat der andere einen bestimmten Exponenten  $r_1$  im entsprechenden Punkt  $A_1$ , und da die beiden Indices reziprok sind, gilt dies auch für  $r$  und  $r_1$ .

Mit Hilfe dieser Bemerkungen kann man aus den Resultaten von 24., 35., 39., 40., 41., 42. neue Relationen herleiten sowie Zusammenhänge zwischen früher abgeleiteten Relationen unmittelbar erkennen.

#### IV. Indexrelationen.

44. Im folgenden beschäftigen wir uns speziell mit Relationen, die an den Indexbegriff anknüpfen, ohne Rücksicht darauf, ob

in dem betreffenden Kurvenpunkt ein bestimmter Krümmungsexponent existiert oder nicht.

Die beiden vom Punkt  $A$  ausgehenden konvexen Kurven  $l$  und  $m$  (Fig. 29) mögen eine Spitze zweiter Art bilden, derart dass  $m$  von  $l$  umschlossen wird. Die Tangente  $b$  an  $m$  im Punkte  $B$  schneide die gemeinsame Tangente  $a$  in  $D$  sowie die Kurve  $l$  in  $C_1$  und  $C_2$ . Die Tangenten  $c_1$  und  $c_2$  an  $l$  in  $C_1$  bzw.  $C_2$  schneiden  $a$  in  $E$  bzw.  $F$  und einander in  $G$ . Konvergiert  $B$  gegen  $A$ , so konvergieren die Punkte  $C_1, C_2, D, E, F, G$  sämtlich gegen  $A$  und ihre Verbindungsgeraden gegen  $a$ . Wir suchen eine »Repräsentantenfigur« für die hierdurch bestimmte schwache Figur, wobei wir voraussetzen, dass die Kurven bestimmte ordinäre Indices  $\lambda$  und  $\mu$  in  $A$  haben und dass bestimmte Grenzverhältnisse

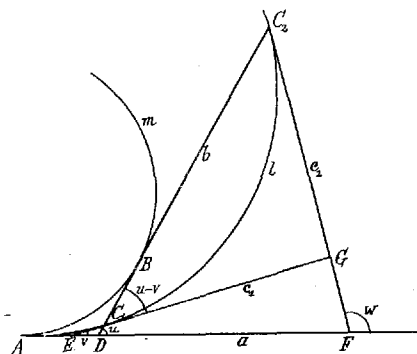


Fig. 29.

$$\xi_1 = \frac{AC_1}{AB}, \quad \xi_2 = \frac{AC_2}{AB}$$

existieren. Die Indizes der Kurven geben direkt die beiden Grenzverhältnisse

$$\lambda = \frac{EC_1}{AE} \text{ oder } \frac{FC_2}{AF}, \quad \mu = \frac{DB}{AD}$$

an.

Ein Diagramm aller Grenzverhältnisse erhält man, indem man auf einer Zahlengeraden die Punkte  $A, B, C_1, C_2, D, E, F$  in der Weise markiert, dass die Verhältnisse der durch die Abszissendifferenzen bestimmten Intervalle die betreffenden Grenz-

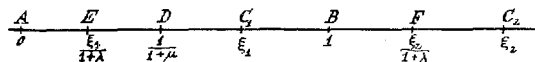


Fig. 30.

verhältnisse angeben. Auf diese Weise findet man die folgende Repräsentantenfigur (Fig. 30) mit den angegebenen Abszissen,

wobei den Punkten  $A$  und  $B$  die Abszissen 0 und 1 zugeschrieben sind.

Der Punkt  $G$  ist nicht angegeben. Seine Abszisse ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Menelaos zu

$$AG = \frac{1+\mu}{1+\lambda} \xi_1 \xi_2,$$

womit man zugleich das Grenzverhältnis

$$\frac{AG}{AB} = \frac{1+\mu}{1+\lambda} \xi_1 \xi_2$$

hat.

Alle Grenzverhältnisse von Strecken und Winkeln der vorliegenden schwachen Figur können dann an der Repräsentantenfigur abgelesen werden. Man erhält so

$$\eta_1 = \frac{v}{u} = \frac{DC_1}{EC_1} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\xi_1} \right),$$

$$\eta_2 = \frac{w}{u} = \frac{DC_2}{FC_2} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\xi_2} \right),$$

$$\frac{u-v}{w-u} = \frac{GC_2}{C_1G} = \frac{1-\eta_1}{\eta_2-1} = \frac{\frac{1}{\xi_1} - \frac{1+\mu}{1+\lambda}}{\frac{1+\mu}{1+\lambda} - \frac{1}{\xi_2}}.$$

Wegen  $1 \geq \eta_1 \geq 0$  hat man

$$\frac{1+\lambda}{1+\mu} \geq \xi_1 \geq \frac{1}{1+\mu}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\xi_2 \geq \frac{1+\lambda}{1+\mu}.$$

Wenn ein konvexer Bogen, der von  $A$  ausgeht und innerhalb der Spitze zwischen  $l$  und  $m$  verläuft, einen Index in  $A$  hat, so liegt dieser zwischen

$$\xi_1 (1+\mu) - 1 \quad \text{und} \quad \xi_2 (1+\mu) - 1.$$



und  $\eta_2$

$$\frac{AC_2}{AB} = \frac{1}{\xi_1}.$$

Ferner hat man

$$\frac{C_1B}{C_2B} = \frac{gc_2}{c_1g} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\xi_2} \\ \frac{1}{\xi_1} - 1 \\ \frac{\mu(\lambda+1)}{\lambda(\mu+1)} \cdot \frac{1}{\eta_1\eta_2} \end{cases}$$

Beim Übergang zur dualen Figur sind folgende Vertauschungen vorzunehmen:

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad \mu \rightarrow \frac{1}{\lambda}, \quad \xi_1 \rightarrow \frac{1}{\eta_2}, \quad \xi_2 \rightarrow \frac{1}{\eta_1}, \quad \eta_1 \rightarrow \frac{1}{\xi_2}, \quad \eta_2 \rightarrow \frac{1}{\xi_1}.$$

46. Ein schwaches Dreieck  $PQR$ , von dem zwei Ecken  $P$  und  $Q$  auf  $l$  liegen, sei der Kurve  $m$  umschrieben. Die Seiten

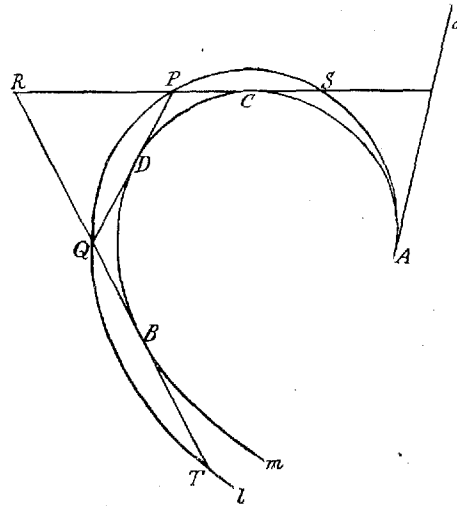


Fig. 32.

mögen  $m$  in den Punkten  $B, C, D$  (Fig. 32) berühren. Man kann dann alle Grenzverhältnisse in Abhängigkeit von den oben genannten Grössen ermitteln. Man hat

$$\frac{SC}{CP} = \frac{PD}{DQ} = \frac{QB}{BT} = \frac{1 - \xi_1}{\xi_2 - 1},$$

ferner

$$\frac{CP}{PD} = \frac{1 - \frac{1}{\xi_2}}{\frac{1}{\xi_1} - 1} = \frac{DQ}{QB}$$

und schliesslich (mit Hilfe der Dualität)

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{\angle RPQ}{\angle PQR} = \frac{1 - \eta_1}{\eta_2 - 1}.$$

Aus diesen Gleichungen können alle Verhältnisse gefunden werden, so z. B.

$$\frac{SP}{PQ} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Ein Diagramm, das die Grenzverhältnisse der Figur darstellt, sieht so aus (Fig. 33):

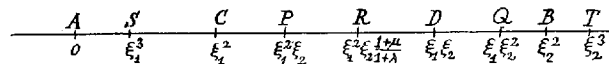


Fig. 33.

47. Es entsteht hier die interessante Frage, ob  $R$  zwischen  $P$  und  $Q$  fällt. Man kann sofort sagen, dass  $R$  jedenfalls in  $P$  fällt, wenn  $\lambda = \mu$  ist. Sind aber andere Fälle möglich, wo  $R$  nicht zwischen  $P$  und  $Q$  liegt? Man erkennt, dass  $R$  links von  $D$ , also auch links von  $Q$  liegen muss, da  $\xi_1 \leq \frac{1 + \lambda}{1 + \mu}$  (vgl. das vorige Diagramm, wo  $AE \leq AD$  ist). Kann aber  $R$  nicht links von  $P$  liegen? Die Frage läuft darauf hinaus, ob  $\mu$  unter der gemachten Voraussetzung, dass  $m$  von  $l$  umschlossen wird, kleiner als  $\lambda$  sein kann. Diese wichtige Frage kann nun gerade mit Hilfe der hier vorliegenden Figur beantwortet werden. Die Winkel bei  $P$  und  $Q$  im Dreieck  $PQR$  werden nämlich unendlich klein, und hieraus folgt, dass die »Projektion« von  $R$  auf  $PQ$  zwischen die Punkte  $P$  und  $Q$  oder in einen von ihnen fallen muss. Hiermit ist also bewiesen, dass  $R$  in der Repräsentantenfigur zwischen  $P$  und  $Q$ , jedoch möglicherweise in  $P$  (nämlich für  $\lambda = \mu$ ) fällt. Zugleich ist bewiesen, dass der Index

$\lambda$  von  $l$  höchstens gleich dem Index  $\mu$  von  $m$  ist, wenn  $m$  von  $l$  umschlossen wird.

Dieses wichtige Resultat führt sofort zu dem Satz, dass die Kurve  $AB$  in  $A$  keine ordinäre Krümmung haben kann, wenn der Index in  $A$  grösser als 1 ist. Jeder in  $A$  berührende Kegelschnitt muss dann nämlich die Kurve umschliessen. Ist der Index kleiner als 1, so wird hingegen jeder berührende Kegelschnitt von der Kurve umschlossen. Nur wenn der Index 1 ist, besteht die Möglichkeit ordinärer Krümmung. Es braucht jedoch keine bestimmte ordinäre Krümmung zu existieren, aber:

Hat die Kurve ordinäre Krümmung, so ist der Index gleich 1.

Allgemeiner: Hat die Kurve keine singuläre Krümmung (d. h. hat sie beschränkte Krümmung), so ist der Index 1.

Wenn die Kurve singuläre Krümmung hat, so braucht der Index nicht 1 zu sein. Beispiel:  $y = e^{-\frac{1}{x}}$ , wo der Index 0 ist.

48. Haben die beiden Kurven  $l$  und  $m$  denselben Index, so hat auch jede zwischen ihnen verlaufende konvexe Kurve diesen Index, vorausgesetzt, dass sie überhaupt einen bestimmten Index hat. Dass dieses nicht der Fall zu sein braucht, entnimmt man daraus, dass ein konvexer Streckenzug  $PQR \dots$ , der in  $l$  eingeschrieben und  $m$  umbeschrieben ist, keinen bestimmten Index hat, da die betreffenden Grenzwerte zwischen  $\xi_1(1+\mu)-1$  und  $\xi_2(1+\mu)-1$  oszillieren (vgl. 44.). Ist dagegen zugleich  $\xi_1 = \xi_2$ , d. h.  $i_1 = 1$ , so hat der genannte Streckenzug einen bestimmten Index, und zwar denselben wie die gegebenen Kurven. In diesem Fall ist es auch klar, dass alle konvexen Kurven, die innerhalb der Spitze verlaufen, den gleichen Index und das Krümmungsverhältnis 1 zu den gegebenen Kurven haben.

Hat eine konvexe Kurve  $k$  im Anfangspunkt  $A$  eine bestimmte oskulierende Parabel  $y = ax^r$ , die nicht entartet ist ( $a > 0$ ,  $r > 1$ ), so hat  $k$  im Punkte den Krümmungsexponenten  $r-1$  und den Index  $\frac{1}{r-1}$ . Hieraus folgt speziell für  $r = 2$ , dass ein konvexer

Bogen, der in einem Punkt eindeutige, nicht ausgeartete Krümmung besitzt, in diesem Punkt den Index 1 hat, woraus sich insbesondere ergibt, dass der Schmiegungskreis mit dem Krümmungskreis zusammenfällt.



Mit Hilfe der obigen Konstruktion findet man konvexe Streckenzüge als Beispiele von Kurven mit beliebig (auch 0 oder  $\infty$ ) vorgeschriebenem Index.

## V. Indextheorie der Raumkurven.

49. Die im folgenden zu betrachtenden Raumkurven werden stückweise monoton angenommen. Einleitend beschränken wir uns auf die Betrachtung eines monotonen Kurvenzweiges, der von dem Punkt  $A$  ausgeht, dessen Umgebung untersucht werden soll. Bei der daran anschliessenden Untersuchung innerer Kurvenpunkte werden die beiden von dem betreffenden Punkt ausgehenden Zweige einzeln betrachtet.

Das Verhalten des zu betrachtenden Kurvenzweiges  $A \dots$  im Punkte  $A$  betreffend, gehen wir davon aus, dass die folgenden drei Indexzahlen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  existieren und von 0 und  $\infty$  verschieden sind:

1°. Der Index  $\lambda$  der Raumkurve im Punkte  $A$ . Darunter wird das Grenzverhältnis für  $B \rightarrow A$  der beiden infinitesimalen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  verstanden, die die Sehne  $AB$  von  $A$  bis zu einem Nachbarpunkt  $B$  mit den Tangenten in diesen Punkten bildet. Die Zahl  $\lambda$  ist zugleich Index einer jeden Zentralprojektion von einem beliebigen Projektionszentrum  $O$  aus, das nicht der Schmieg Ebene in  $A$  angehört, oder, was auf dasselbe hinauskommt, Index des projizierenden Kegels in der Erzeugenden  $OA$ . Dies entnimmt man sofort daraus, dass das Grenzverhältnis der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gleich dem Grenzverhältnis ihrer Projektionen ist.

2°. Der Index  $\mu$  des von  $A$  aus projizierenden Kegels in der Kurventangente  $a$  in  $A$ . Diese Zahl stimmt mit dem Index einer jeden ebenen Leitkurve des Kegels in dem  $A$  entsprechenden Punkt auf  $a$  überein.

3°. Der Index  $\nu$  einer ebenen Leitkurve der Raumkurve (Schnitt der Tangentenfläche der Raumkurve mit einer nicht durch  $A$  gehenden Ebene) in dem  $A$  entsprechenden Punkt  $P$  auf  $a$ . Die Zahl  $\nu$  erweist sich als unabhängig von der Wahl der ebenen Leitkurve. Es seien nämlich  $A$  und  $B$  zwei Nachbarpunkte mit den Tangenten  $a$  und  $b$  (Fig. 34). Die Tangenten-

fläche werde von zwei Ebenen, die, wenn sie  $a$  in zwei verschiedenen Punkten  $P, P_1$  schneiden, in diesem Zusammenhang als parallel angesehen werden können, in zwei Bögen  $PQ$  und  $P_1Q_1$  mit den paarweise parallelen Tangenten  $PT$  und  $QT$ ,  $P_1T_1$  und  $Q_1T_1$  geschnitten, wo  $T$  und  $T_1$  auf der Schnittgeraden  $t$  der Schmiegeebenen in  $A$  und  $B$  liegen. Die Tangenten  $a$  und  $b$  werden von  $t$  in zwei Punkten  $A_1$  und  $B_1$  geschnitten, die für  $B \rightarrow A$  gegen  $A$  konvergieren. Man hat dann die Grenzverhältnissgleichungen

$$\frac{TQ}{T_1Q_1} = \frac{B_1T}{B_1T_1}, \quad \frac{PT}{P_1T_1} = \frac{A_1T}{A_1T_1},$$

woraus

$$\frac{TQ}{PT} = \frac{T_1Q_1}{P_1T_1}$$

folgt, was eben zeigt, dass  $\nu$  von der Lage der Schnittebene unabhängig ist, wenn diese nur nicht durch  $A$  geht.

Schneiden die Ebenen die Erzeugende  $a$  im selben Punkt

$P$ , so zeigt eine direkte Betrachtung des Grenzüberganges, dass die beiden Schnittkurven denselben Index in diesem Punkt haben.

Insbesondere kann man (in einer metrischen oder auch nur affinen Darstellung) die Ebene der Leitkurve als Bezugsebene (unendlich ferne Ebene) verwenden, so dass  $\nu$  bei dieser Interpretation als Index des Richtungskegels bezeichnet werden kann.

Von den drei Zahlen  $\lambda, \mu, \nu$  ausgehend, kann man nun die infinitesimalen Eigenschaften der Kurve in dem betreffenden Punkt studieren.

Bemerkung I: Die obigen Beweise gelten auch für nicht monotone Kurven, wenn nur  $A_1$  und  $B_1$  mit  $B$  gegen  $A$  konvergieren.

Bemerkung II: An die Stelle ebener Leitkurven können auch monotone räumliche Leitkurven treten, die  $a$  in von  $A$  verschiedenen Punkten schneiden und deren Schmiegeebene in einem

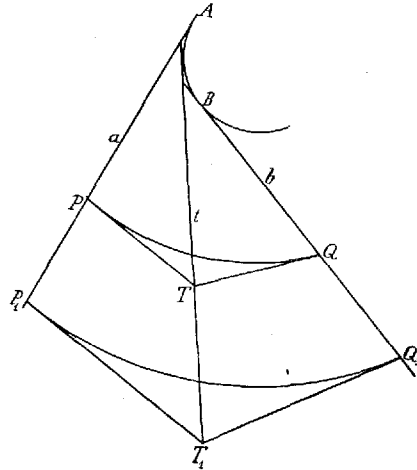


Fig. 34.

Schnittpunkt mit  $a$  von der Schmiegeebene der gegebenen Kurve in  $A$  verschieden ist. Alle derartigen Leitkurven haben in ihrem Schnittpunkt mit  $a$  denselben Index, nämlich  $v$ .

Bemerkung III: Die Beschränkung unserer Untersuchungen auf monotone Kurven erweist sich somit als unnötig. Es wäre hinreichend gewesen vorauszusetzen, dass die Kurven Charakteristiken sind, d. h. Kurven mit überallgewöhnlicher, stetig variierender Tangente und mit der Eigenschaft, dass jede feste Ebene durch die Tangente  $a$  eines festen Kurvenpunktes  $A$  von der Tangente  $b$  eines variablen Kurvenpunktes  $B$ , der gegen  $A$  konvergiert, in einem Punkt mit der Grenzlage  $A$  geschnitten wird<sup>1</sup>.

Aus konventionellen Gründen wollen wir hier jedoch daran festhalten, dass die zu betrachtenden Kurven monoton sind.

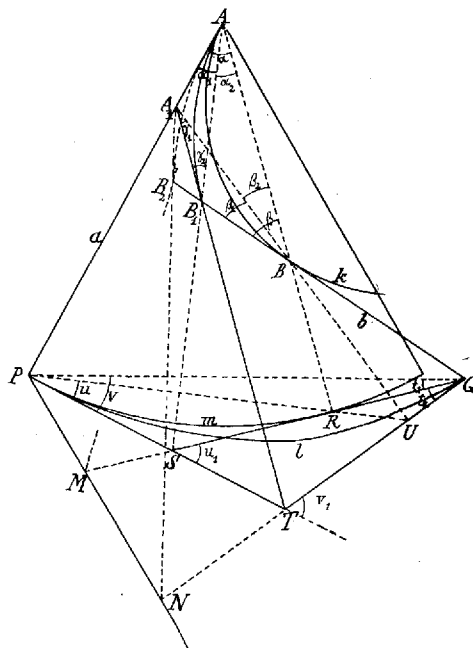


Fig. 35.

50. Fig. 35 zeigt die Raumkurve  $k$  mit der Punktschar  $A \cdots B \cdots$  und der Tangentschar  $a \cdots b \cdots$ , die Leitkurve  $l$  in der Ebene  $\sigma$  mit der Punktschar  $P \cdots Q \cdots$  sowie den projizierenden Kegel  $A(k)$  mit der Leitkurve  $m = P \cdots R \cdots$  in der Ebene  $\sigma$ . Die Schmiegeebene in  $A$  hat die Spur  $PST$  in  $\sigma$ , und  $B_1$  sei der Schnittpunkt der Tangente  $b$  mit dieser Schmiegeebene. Die Tangentenfläche von  $k$  schneidet die Schmiegeebene (des Punktes  $A$ ) in der Kurve  $k^0 = A \cdots B_1$ , die in  $B_1$  die Tangente  $A_1B_1T$  hat;  $TUQ$  ist die Spur der Schmiegeebene des Punktes  $B$ . Die beiden

<sup>1</sup> Vgl. hierzu die Abhandlung des Verfassers: Eksempler paa geometriske Undersøgelser over Integralkurver i Rummet. (Festskrift til J. F. Steffensen, København 1943).

Schmiegebenen schneiden einander in der Geraden  $A_1B_1$  (welche Tangente an  $k^0$  in  $B_1$  ist). Das Viereck  $AA_1B_1B$  ist dann beim Grenzübergang  $B \rightarrow A$  schwach. Seine Seiten streben der Richtung nach gegen  $a$  und der Grösse nach gegen 0, und gleichzeitig gehen seine infinitesimalen Winkel, für die wir die in der Figur angegebenen Bezeichnungen einführen, gegen 0. Alle Seitenebenen des Tetraeders  $AA_1B_1B$  konvergieren gegen die Schmiegeebene in  $A$  und alle infinitesimalen Flächenwinkel gegen 0. Die Kanten des Tetraeders werden von der Ebene  $\sigma$  in den Ecken  $P, Q, R, S, T, U$  eines schwachen vollständigen Vierseits geschnitten.

Alle Grenzverhältnisse des Vierecks  $AA_1B_1B$  und des soeben genannten Vierseits  $PQRSTU$  können nun durch die Zahlen  $\lambda, \mu, \nu$  ausgedrückt werden.

Zur Konstruktion einer Repräsentantenfigur hat man die Verhältnisse

$$\frac{PR}{RQ} = \lambda, \quad \frac{SR}{PS} = \mu, \quad \frac{TQ}{PT} = \nu$$

zur Verfügung, und durch sie ist die ganze Figur bestimmt, da beispielsweise die Abszisse von  $U$  sich daraus ergibt, dass die Punktenpaare  $PQ, RT, SU$  nach dem Desarguesschen Involutionsatz über das vollständige Vierseit einer Involution auf der Geraden angehören. Das Diagramm ist hiernach durch die unter den Punkten (Fig. 36) angegebenen Abszissen bestimmt.

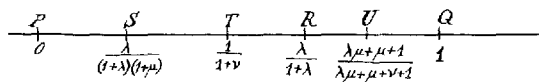


Fig. 36.

51. In dieser Figur können alle Grenzverhältnisse sowohl zwischen infinitesimalen Vektoren als auch zwischen infinitesimalen Winkeln des Vierseits abgelesen werden:

1°. Als Grenzverhältnisse der Seiten des Vierecks  $AA_1B_1B$  ergeben sich:

$$\frac{A_1B_1}{AA_1} = \frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{PS}{ST} = \frac{\lambda(\nu+1)}{\lambda(\mu-\nu)+\mu+1},$$

was zugleich den Index der Schnittkurve  $k^\circ$  der Tangentenfläche mit der Schmiegebene in  $A$  angibt. Ferner

$$\frac{A_1B_1}{B_1B} = \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{UQ}{TU} = \frac{\nu+1}{\mu(\lambda+1)}.$$

2°. Die Verhältnisse

$$AA_1 : A_1B_1 : B_1B$$

können also durch die drei Zahlen

$$\frac{\mu+1}{\lambda} + \mu - \nu, \quad \nu+1, \quad \mu(\lambda+1)$$

ausgedrückt werden, und  $AB$  kan zugleich durch die Summe dieser Zahlen, also durch

$$\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)(\mu\lambda + \mu + 1)$$

repräsentiert werden.

Der Index der Schnittkurve  $k^\circ$  der Schmiegebene mit der Tangentenfläche ist wie schon erwähnt

$$\frac{A_1B_1}{AA_1} = \frac{\lambda(\nu+1)}{\lambda(\mu-\nu) + \mu+1}.$$

3°. Projiziert man die Raumkurve  $k$  derart auf eine Ebene, dass die Schmiegebene nicht Projektionsebene ist, so hat die entstehende ebene Kurve denselben Index wie die Raumkurve.

4°. Ist die Schmiegebene Projektionsebene, die Tangente aber nicht Projektionsstrahl, so ist der Index der Projektion der Raumkurve

$$\lambda_1 = \frac{B_1B}{AB_1} = \frac{\alpha_2}{\beta} = \frac{SR}{RQ},$$

also

$$\lambda_1 = \frac{\lambda\mu}{\mu+1}.$$

5°. Ist schliesslich die Tangente Projektionsstrahl, so ist der Index der Projektion

$$\lambda_2 = \frac{BB_1}{AB_1} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha_1} = \mu(\lambda + 1).$$

6°. Für den Index der Schnittkurve der Tangentenfläche mit einer beliebigen, von der Schmiegebene

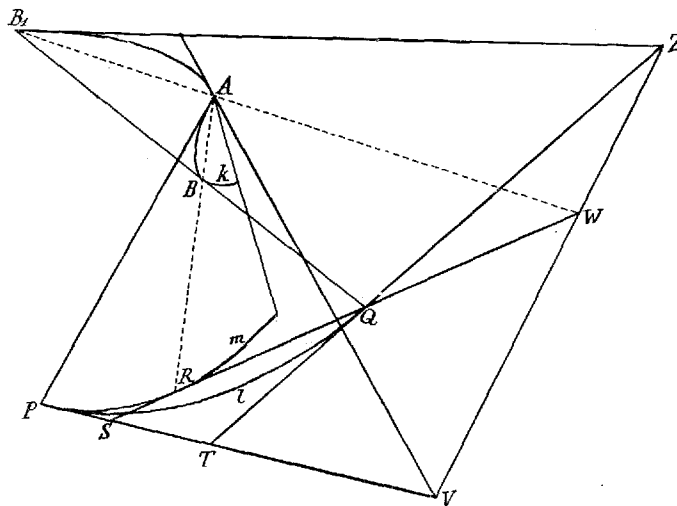


Fig. 37.

verschiedenen Ebene durch die Tangente  $a$  findet man, wenn  $PMN$  (Fig. 35) die Spur der Ebene in  $\sigma$  ist,

$$\frac{PM}{MN} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1}{u_1} \cdot \frac{u_1}{v_1} \cdot \frac{v_1}{t_2} = \frac{\nu\lambda}{\lambda(\mu - \nu) + \mu + 1}.$$

7°. Für den Index der Schnittkurve der Tangentenfläche mit einer beliebigen Ebene durch  $A$ , die  $a$  nicht enthält, findet man, wenn  $VWZ$  (Fig. 37) die Spur der Ebene ist,

$$\frac{VW}{WZ} = \frac{TQ}{ST} = \frac{\nu(\lambda + 1)(\mu + 1)}{\lambda(\mu - \nu) + \mu + 1}.$$

Im Falle  $\lambda = \mu = \nu = 1$  hat man

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \frac{PM}{MN} = \frac{1}{2}, \quad \frac{VW}{WZ} = 2,$$

alles wohlbekannte Resultate unter den gewöhnlichen elementaren Voraussetzungen über Raumkurven, die z. B. bei algebraischen Raumkurven 3. Ordnung, allgemeiner bei kubikalen Kurven<sup>1</sup> (bei denen die Krümmungen selbst nicht zu existieren brauchen) erfüllt sind.

52. In einem ebenen Polarsystem entspricht, wie früher erwähnt, einem schwachen Dreieck wieder ein schwaches Dreieck, wobei entsprechende Stücke proportional sind. Hieraus folgt auch für den Raum ein einfaches Prinzip zur Bestimmung der Verhältnisse einer schwachen Figur, die durch Polarität aus einer gegebenen schwachen Figur entstanden ist.

Die einer gegebenen Raumkurve mit den Indexzahlen  $\lambda, \mu, \nu$  entsprechende Raumkurve hat danach die Indexzahlen

$$\lambda_1 = \frac{1}{\nu}, \quad \nu_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu_1 = \frac{\lambda(\mu - \nu) + \mu + 1}{\lambda(\nu + 1)},$$

wo die letzte zum Index der Schnittkurve der Tangentenfläche mit der Schmiegene reziprok ist, da diese Kurve dem projizierenden Kegel dual entspricht.

Selbstverständlich hat man auch

$$\mu = \frac{\lambda_1(\mu_1 - \nu_1) + \mu_1 + 1}{\lambda_1(\nu_1 + 1)}$$

in Übereinstimmung mit den bereits gefundenen Ausdrücken.

Sollen die Indizes einer Kurve beim Übergang zur dualen ungeändert bleiben, so muss

$$\lambda\nu = 1$$

sein. An  $\mu$  werden keine Forderungen gestellt. Dieser Index wird sich aber in einer Hauptklasse von Fällen als gleich  $\nu$  erweisen.

<sup>1</sup> Das sind Kurven mit der Eigenschaft, dass 6 beliebige ihrer Punkte stets eine nicht ausgeartete algebraische Raumkurve 3. Ordnung bestimmen und alle Grenzlagen solcher algebraischen Kurven gleichfalls nicht ausgeartet sind.

53. Die bisherigen Untersuchungen beruhten ausschliesslich auf der Existenz der Indexzahlen  $\lambda, \mu, \nu$ , und von Relationen zwischen diesen hat man nur eine,  $\mu \geq \nu$ , die daraus folgt, dass die Kurve  $m$  von der Kurve  $l$  umschlossen wird. Die gegenseitige Lage von  $k^0$  und  $k$  ergibt nichts Neues.

Wir wollen nun die etwas weitergehende Voraussetzung machen, dass die Raumkurve eine im Punkte  $A$  hyperprojektive Verbindung zwischen der Punktschar der

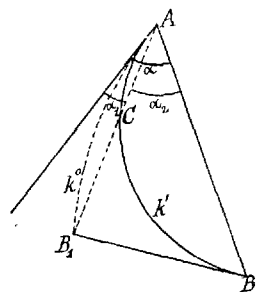


Fig. 38.

Kurve und dem von  $A$  ausgehenden projizierenden Kegel vermittelt, was damit gleichbedeutend ist, dass  $k$  durch eine Projektion, bei der die Schmiegenebene nicht Projektionsebene ist, in eine ebene Kurve übergeführt wird, die in dem  $A$  entsprechende Punkt einen bestimmten Krümmungsexponenten  $r$  hat. Diese Zahl  $r$  soll nun auch als Krümmungsexponent der Raumkurve in  $A$  bezeichnet werden, und es ist klar, dass  $r = \frac{1}{\lambda}$  ist.

54. Hiernach kann man zeigen, dass ein bestimmtes Krümmungsverhältnis zwischen  $k^0$  (der Schnittkurve der Tangentenebene mit der Schmiegenebene in  $A$ ) und  $k$  besteht, worunter das Krümmungsverhältnis  $\xi$  zwischen  $k^0$  und der Projektion  $k'$  der Raumkurve auf die Schmiegenebene zu verstehen ist. (Vgl. Fig. 35, S. 43, und die in der nebenstehenden Fig. 38 dargestellte Projektion, wo  $B'$  die Projektion von  $B$  und  $C$  den Schnittpunkt von  $k'$  und  $AB_1$  bezeichnen.) Man hat

$$\xi = \frac{AC}{AB_1} = \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{AB'}{AB_1}$$

oder

$$\xi = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha} \right)^\lambda \frac{\alpha_2 + \beta}{\beta}.$$

Aus Fig. 35, S. 43, entnimmt man nun

$$\xi = \left( \frac{PS}{PR} \right)^\lambda \frac{SQ}{RQ}$$

oder

$$\xi = \frac{\lambda\mu + \mu + 1}{(\mu + 1)^{\lambda + 1}}.$$



Da das Krümmungsverhältnis somit eine bestimmte, von 0 verschiedene Zahl ist, haben  $k'$  und  $k^0$ , also auch  $k$  und  $k^0$ , denselben Exponenten und daher auch denselben Index, d. h.

$$\frac{\lambda(\nu+1)}{\lambda(\mu-\nu)+\mu+1} = \lambda$$

oder

$$\mu = \nu,$$

folglich:

Wenn die Raumkurve  $k$  einen bestimmten Krümmungsexponenten  $r$  und damit einen bestimmten Index  $\lambda = \frac{1}{r}$  hat, und wenn ausserdem die beiden anderen Indizes  $\mu, \nu$  existieren, so sind diese einander gleich, und  $k^0$  und  $k$  haben ein bestimmtes Krümmungsverhältnis

$$\xi = \frac{\lambda\mu + \mu + 1}{(\mu + 1)^{\lambda+1}}.$$

Der erste Teil des Satzes kann offenbar auch so formuliert werden:

Wenn eine von einem Punkt  $A$  ausgehende, monotone Raumkurve einen bestimmten Krümmungsexponenten  $r$ , also auch einen bestimmten Index  $\lambda = \frac{1}{r}$ , und ausserdem einen bestimmten Index  $\mu$  in diesem Punkt besitzt, so existiert auch der dritte Index  $\nu$  und ist gleich  $\mu$ .

55. Mit Hilfe einer der obigen ähnlichen Rechnung kann man das Krümmungsverhältnis  $\eta$  der Kurven  $m$  und  $l$  in der Ebene  $\sigma$  finden, wo  $m$  die Projektion der Kurve  $k$  von  $A$  aus und  $l$  den Schnitt der Tangentenfläche mit  $\sigma$  bezeichnen: diese beiden Kurven haben unter den jetzigen Voraussetzungen denselben Exponenten  $\mu$ . Es ergibt sich

$$\eta = \frac{1+\lambda}{\lambda} \left( \frac{\lambda\mu + \mu}{\lambda\mu + \mu + 1} \right)^\mu.$$

56. Wir wollen nun ausserdem voraussetzen, dass die Beziehung zwischen der Punktschar der Kurve  $k$  und dem von der Tangente  $a$  ausgehenden projizierenden Ebenenbüschel hyper-

projektiv im Punkte  $A$  und in dessen zugeordneter Ebene, der Schmiegeebene  $\alpha$ , ist. Der Exponent dieser Beziehung wird der Torsionsexponent der Kurve in  $A$  genannt. Sind  $B$  und  $C$  zwei Nachbarpunkte von  $A$ , und werden die Ebenen  $aB$  und  $aC$  mit  $\beta$  bzw.  $\gamma$  bezeichnet, so ist das Grenzverhältnis  $\frac{AB}{AC}$  der beiden infinitesimalen Vektoren  $AB$  und  $AC$  mit dem Grenzverhältnis  $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$  der beiden infinitesimalen Winkel  $\alpha\beta$  und  $\alpha\gamma$  durch die Gleichung

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^s$$

verbunden. Werden die Geraden  $AB$  und  $AC$  mit  $b$  bzw.  $c$  bezeichnet, so hat man ferner

$$\frac{ab}{ac} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^r.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt dann

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \left(\frac{ab}{ac}\right)^{\frac{s}{r}},$$

also, dass der Krümmungsexponent des projizierenden Kegels  $\frac{s}{r}$  ist, also

$$\mu = \nu = \frac{r}{s}.$$

Man erkennt, dass die Existenz der Exponenten  $r$  und  $s$  die Existenz von  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  und die Gleichung  $\mu = \nu$  zur Folge hat.

57. Eine naheliegende Betrachtung lehrt, dass die Projektion der Raumkurve, wenn die Schmiegeebene Projektionsebene, die Tangente aber nicht Projektionsstrahl ist, den Exponenten  $r+s$  hat im Einklang mit der früher gefundenen Formel

$$\lambda_1 = \frac{\lambda\mu}{\mu+1} = \frac{1}{r+s}.$$

Ferner sieht man, dass eine Projektion in Richtung der Tangente von einem von  $A$  verschiedenen Punkt aus den Exponenten

$\frac{s}{r+1}$  hat im Einklang mit der früher gefundenen Formel

$$\lambda_2 = \mu(\lambda + 1) = \frac{r+1}{s}.$$

Wir führen noch die Krümmungsverhältnisse  $\xi$  und  $\eta$  an:

$$\xi = \left(1 + \frac{1}{r+s}\right) \left(\frac{s}{r+s}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad \eta = (1+r) \left(\frac{r+s}{rs+r+s}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Schliesslich ist der Exponent der Schnittkurve der Tangentenfläche mit einer beliebigen, von der Schmiegeebene verschiedenen Ebene durch  $a$

$$\frac{\mu+1}{\mu\lambda} = r+s$$

und der Exponent der Schnittkurve der Tangentenfläche mit einer beliebigen Ebene durch  $A$ , die  $a$  nicht enthält,

$$\frac{1}{\mu(\lambda+1)} = \frac{s}{r+1}.$$

Zwei Raumkurven, die einander in einem Polarsystem (einer Korrelation) entsprechen, haben Exponenten  $r, s$  und  $r', s'$ , die durch die Gleichungen

$$r' = \frac{r}{s}, \quad s' = \frac{1}{s}$$

verbunden sind.

## VI. Schwache Figuren im Raume.

58. Eine vom Punkt  $A$  ausgehende, monotone Raumkurve mit der Halbtangente  $x$ , dem Krümmungsexponenten  $r$  und dem Torsionsexponenten  $s$  in diesem Punkt, sei auf ein Koordinatensystem  $x, y, z$  bezogen, dessen  $y$ -Achse in der Schmiegehalbebene und dessen  $z$ -Achse in dem Halbraum liegt, der die Kurve enthält. Ein beliebiger, längs der Kurve gegen  $A$  konvergierender Punkt wird dann durch drei infinitesimale Vektoren  $x, y, z$  dargestellt, deren Richtungen gegen die drei Halbachsen des Koordinatensystems konvergieren.

Eine schwache Figur  $A_1A_2\cdots A_i\cdots$ , die an die Kurve gebunden ist, ist bestimmt, wenn die zu den Punkten gehörigen Abszissen bestimmte Grenzverhältnisse haben. Wir geben diese mittels der Verhältniszahlen  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  an. Die den anderen Koordinaten entsprechenden Grenzverhältnisse werden analog durch  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$  und  $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots$  angegeben. Man hat dann

$$\frac{y_i}{y_1} = \left(\frac{x_i}{x_1}\right)^{r+1}, \quad \frac{z_i}{z_1} = \left(\frac{x_i}{x_1}\right)^{r+s+1}$$

als »Grenzgleichungen« der Kurve. Mit diesen Gleichungen beherrscht man die schwache Figur vollständig in jedem Koordinatensystem der angegebenen Art, so dass jede sie betreffende Frage auf ganz elementare Weise, als ob es sich um eine Raumparabel mit den Gleichungen

$$y = px^{r+1}, \quad z = qx^{r+s+1}$$

in affinen Koordinaten handelte, gelöst werden kann.

59. Als Beispiel kann angeführt werden, dass die Schmiegeebene eines Punktes mit der Abszisse  $x$  ein Stück  $X$  von der  $x$ -Achse abschneidet, das durch das Verhältnis

$$\frac{X}{x} = \frac{r(r+s)}{(r+1)(r+s+1)}$$

bestimmt ist.

Dies entnimmt man jedoch in mehr direkter Weise aus der Fig. 35, S. 43:

$$\frac{X}{x} = \frac{AA_1}{AB} = \frac{\frac{\mu+1}{\lambda} + \mu - \nu}{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)(\lambda\mu + \mu + 1)},$$

womit man zugleich ein allgemeineres Resultat hat. Setzt man hierin speziell  $\lambda = \frac{1}{r}$ ,  $\mu = \nu = \frac{r}{s}$ , so erhält man den obigen Ausdruck.

60. Ein weiteres Beispiel, das das obige als Grenzfall umfasst, ist das folgende:

Drei gegen  $A$  konvergierende Punkte der Kurve, für die die Grenzverhältnisse der Abszissen (d. h. der entsprechenden infini-

tesimalen Vektoren) durch die Verhältniszahlen  $x_1, x_2, x_3$ , gegeben sind, bestimmen eine Ebene, die von der Tangente (der  $x$ -Achse) ein Stück abschneidet, dessen zugehörige Verhältniszahl

$$x = \left| \begin{array}{ccc} x_1^{r+s+1} & x_1^r & x_1 \\ x_2^{r+s+1} & x_2^r & x_2 \\ x_3^{r+s+1} & x_3^r & x_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} x_1^{r+s+1} & x_1^r & 1 \\ x_2^{r+s+1} & x_2^r & 1 \\ x_3^{r+s+1} & x_3^r & 1 \end{array} \right|$$

ist.

**61.** Eine beliebige schwache Figur  $A_1 \cdots A_2 \cdots A_3 \cdots$ , die in eine monotone, vom Grenzpunkt  $A$  der Figur ausgehende Kurve eingeschrieben ist, kann unter den benutzten Voraussetzungen unmittelbar mit Hilfe eines in der obigen Weise angebrachten Koordinatensystems behandelt werden. Die Relationen zwischen den Verhältniszahlen der Winkel und denen der Vektoren können direkt aus der ebenen Figur, S. 15, entnommen werden, da die Projektion auf die  $xy$ -Ebene eine ebene schwache Figur ist, deren Verhältniszahlen mit den entsprechenden der räumlichen Figur übereinstimmen.

Die Verhältnisse der Flächenwinkel des Tetraeders  $A_1 A_2 A_3 A_4$  werden durch die Grössen

$$(A_1 A_2), (A_2 A_3), (A_3 A_4), (A_1 A_3), (A_1 A_4), (A_2 A_4)$$

repräsentiert, wo

$$(A_1 A_2) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{[123][124]}, \quad (A_2 A_3) = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{[234][231]}, \quad (A_3 A_4) = \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{[341][342]}$$

und analog für die übrigen (mit der S. 16 angegebenen Bedeutung der Symbole in den Nennern). So erhält man z. B. für das Grenzverhältnis  $(A_1 A_2) : (A_2 A_3)$

$$\frac{(A_1 A_2)}{(A_2 A_3)} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \cdot \frac{[234]}{[124]}.$$

## VII. Berührungsinvarianten von Raumkurven.

**62.** Zwei monotone Raumkurven  $k$  und  $k_1$ , die vom selben Punkt  $A$  ausgehen, dort dieselbe Halbtangente  $a$  und dieselbe

Schmieghalbebene  $\alpha$  haben, auf derselben Seite der letzteren liegen und schliesslich in  $A$  die gleichen Exponenten  $r$  und  $s$  haben, besitzen zwei wesentliche Berührungsinvarianten, nämlich:

1°. Das Krümmungsverhältnis  $I_1$ , d. h. das Krümmungsverhältnis der Projektionen der beiden Kurven auf die gemeinsame Schmiegebene von einem beliebigen Punkt aus<sup>1</sup>.

2°. Das Torsionsverhältnis  $I_2$ , d. h. das Grenzverhältnis der beiden Vektoren (Sehnen), die in einer von  $a$  ausgehenden, gegen  $\alpha$  konvergierenden Halbebene von den Kurven geschnitten werden.

63. Bezüglich der Invariante  $I_1$  wollen wir sofort zeigen: Wenn sie für ein Projektionszentrum  $P$  existiert, so existiert sie auch für jedes andere Projektionszentrum  $Q$  und hat den gleichen Wert. Dass sie für das Projektionszentrum  $P$  existiert und den Wert  $I_1$  hat, bedeutet nämlich, dass eine gegen  $a$  konvergierende Ebene durch  $AP$  die Kurven in zwei Punkten  $K$  und  $K_1$  schneidet, die derart gegen  $A$  konvergieren, dass das Grenzverhältnis

$$\frac{AK_1}{AK} = I_1$$

ist. Gleichzeitig ist das Grenzverhältnis der Winkel, die die Vektoren  $AK_1$  und  $AK$  mit  $a$  bilden, gleich 1.

Legt man nun eine Ebene durch  $AQ$  und  $K$ , die  $k_1$  in einem Punkt  $K'_1$  schneidet, so haben die Winkel, die die Vektoren  $AK'_1$  und  $AK$  während des Grenzüberganges mit  $a$  bilden, ebenfalls das Grenzverhältnis 1. Hieraus folgt aber, dass auch die Winkel, die  $AK_1$  und  $AK'_1$  mit  $a$  bilden, das Grenzverhältnis 1 haben, also dass dasselbe für die Vektoren  $AK_1$  und  $AK'_1$  gilt, d. h. dass das Grenzverhältnis

$$\frac{AK'_1}{AK} = I_1$$

ist, was zu beweisen war.

<sup>1</sup> Selbstverständlich darf dieser Punkt nicht in der Ebene liegen, auf die projiziert wird, und dies wollen wir daher hier und in ähnlichen Fällen stillschweigend annehmen.

Man kann nun auch sagen, dass die Kegel, die die Kurven von einem beliebigen Projektionszentrum  $P$  ausserhalb der Schmiegeebene aus projizieren, in der Erzeugenden  $PA$  das Krümmungsverhältnis  $I_1$  haben.

Aus der obigen Untersuchung geht zugleich hervor, dass jede gegen  $a$ , aber nicht gegen  $\alpha$  konvergierende Ebene durch  $A$  die Kurven in solchen Punkten  $K$  und  $K_1$  schneidet, dass das Grenzverhältnis der Vektoren  $AK_1$  und  $AK$  gleich  $I_1$  ist.

64. Eine dritte Berührungsinvariante  $I_3$  ist das Krümmungsverhältnis der die Kurven von  $A$  aus projizierenden Kegel. Legt man von  $a$  aus eine Halbebene, die die Kurven in  $M$  und  $M_1$  schneidet, und lässt man diese Halbebene gegen  $\alpha$  konvergieren, so ist das Grenzverhältnis  $\frac{AM_1}{AM}$  gleich  $I_2$ , und die Winkel  $\theta$  und  $\theta_1$ , die die Vektoren  $AM$  und  $AM_1$  mit der Halbtangente  $a$  bilden, haben das Grenzverhältnis

$$\frac{\theta_1}{\theta} = I_3.$$

Eine variable Ebene durch  $A$  und  $M$ , die gegen  $a$ , aber nicht gegen  $\alpha$  konvergiert, schneidet die Kurve  $k_1$  in einem neuen Punkt  $M_2$ . Man hat dann

$$\frac{AM_2}{AM} = I_1, \quad \frac{AM_1}{AM} = I_2,$$

$$\left(\frac{AM_1}{AM_2}\right)^r = \frac{\theta_1}{\theta} = I_3,$$

also

$$I_3 = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^r.$$

Die Existenz von  $I_3$  ist eine Folge der Existenz von  $I_1$  und  $I_2$ .

$I_3 = 1$  ist gleichbedeutend mit  $I_1 = I_2$ . Dieser Fall liegt insbesondere vor, wenn die Kurven in  $A$  denselben projizierenden Kegel haben.  $I_1 \leq I_2$  ergibt  $I_3 \geq 1$ ; im ersten Fall umschliesst der projizierende Kegel der zweiten Kurve den der ersten, im zweiten Fall umgekehrt.

65. Um einen Überblick über die verschiedenen invarianten Relationen zwischen den beiden Kurven zu erhalten, ist es nützlich, zwei beliebige infinitesimale, auf den beiden Kurven endende Vektoren  $AM$  und  $AM_1$  zu betrachten. Die Winkel, die die Vektoren mit  $a$  bilden, seien  $\theta$  und  $\theta_1$ .

Durch  $AM$  lege man eine variable Ebene, die beim Grenzübergang  $M \rightarrow A$  gegen  $a$ , aber nicht gegen  $\alpha$  konvergiert. Diese Ebene schneidet  $k_1$  in einem solchen Punkt  $M_2$ , dass der von  $AM_2$  und  $a$  gebildete Winkel  $\theta_2$  das Grenzverhältnis 1 zu  $\theta$  hat. Es gilt nun

$$\frac{AM_2}{AM} = I_1,$$

$$\left(\frac{AM_1}{AM_2}\right)^r = \frac{\theta_1}{\theta},$$

woraus

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \left(\frac{AM_2}{AM} \cdot \frac{AM}{AM_1}\right)^r$$

oder

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \left(I_1 \cdot \frac{AM}{AM_1}\right)^r \quad (\text{I})$$

folgt.

Bezeichnet man nun die Winkel, die die Halbebenen  $aM$  und  $aM_1$  mit  $\alpha$  bilden, mit  $\varphi$  und  $\varphi_1$  und führt (dem obigen analog) den Punkt  $M_2$  ein, in dem die erstgenannte Halbebene  $k_1$  schneidet, so erhält man in ähnlicher Weise

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \left(I_2 \cdot \frac{AM}{AM_1}\right)^s. \quad (\text{II})$$

66. Projiziert man die beiden Kurven  $k$  und  $k_1$  von einem Punkt  $O$  aus, der in der gemeinsamen Schmiegebene in  $A$ , aber nicht auf der gemeinsamen Tangente liegt, so erhält man zwei projizierende Kegel, deren Krümmungsverhältnis  $I_4$  längs  $OA$  mit Hilfe der Formel in 33. für zwei ebene Kurven bestimmt werden kann. Man erhält so

$$\left(\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^r\right)^{\frac{s}{r+s}} = \left(\frac{1}{I_1} I_4\right)^r,$$

also

$$I_4 = I_1^{\frac{r}{r+s}} I_2^{\frac{s}{r+s}}.$$



67. Wählt man schliesslich ein Projektionszentrum  $O$ , das auf der gemeinsamen Tangente der Kurven in  $A$  liegt (aber von  $A$  verschieden angenommen wird, da der andere Fall bereits behandelt ist), so erhält man zwei projizierende Kegel, deren Krümmungsverhältnis (mit den in 64. angegebenen Bezeichnungen)

$$I_5 = \frac{AM_1}{AM} \cdot \frac{\theta_1}{\theta} = I_2 I_3 = \frac{I_2^{r+1}}{I_1^r}$$

ist.

68. Wir gehen nun zur Besprechung der zu den obigen dualen Invarianten, d. h. der Berührungsinvarianten der Schnittkurven der Tangentenflächen mit ein und derselben Ebene über.

1°. Geht die Schnittebene nicht durch  $A$ , so haben die Schnittkurven  $l$  und  $l_1$  mit den beiden Tangentenflächen dasselbe Krümmungsverhältnis wie die Schnittkurven  $m$  und  $m_1$  der Ebenen mit den von  $A$  aus projizierenden Kegeln. Dies folgt unmittelbar daraus, dass das Krümmungsverhältnis von  $l$  und  $m$  mit dem von  $l_1$  und  $m_1$  übereinstimmt (vgl. den S. 51 angegebenen Ausdruck für dieses Krümmungsverhältnis  $\eta$ ). Hieraus folgt:

Das Krümmungsverhältnis der Schnittkurven der Tangentenflächen mit einer beliebigen nicht durch  $A$  gehenden Ebene ist gleich dem Krümmungsverhältnis der die Raumkurven von  $A$  aus projizierenden Kegel, also gleich

$$I_3 = \left( \frac{I_2}{I_1} \right)^r.$$

2°. Eine ähnliche Betrachtung lehrt:

Das Krümmungsverhältnis der Schnittkurven  $k^0$  und  $k_1^0$  der Tangentenflächen mit der gemeinsamen Schmiegeebene  $\alpha$  in  $A$  stimmt mit dem der Raumkurven selbst überein, ist also gleich  $I_1$ .

3°. Falls die Schnittebene die Tangente  $\alpha$  enthält, aber von der Schmiegeebene verschieden ist, ist das Krümmungsverhältnis der Schnittkurven

$$\frac{r}{I_1^{r+s}} \frac{s}{I_2^{r+s}}$$

dieselbe Invariante wie für die Projektionen der Kurven in dem Fall, wo die Schmiegeebene Projektionsebene ist (66.).

4°. Geht schliesslich die Schnittebene durch  $A$ , aber nicht durch die Tangente  $a$ , so ist das Krümmungsverhältnis der Schnittkurven

$$\frac{I_2^{r+1}}{I_1^r}$$

dieselbe Invariante wie für die Projektionen der Raumkurven in Richtung der Tangente (67.).

69. Eine direkte Untersuchung der Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen  $r, s, I_1, I_2$  und  $r', s', I'_1, I'_2$  zweier Paare  $k, k_1$  und  $k', k'_1$  von Raumkurven, die einander in einer Polarität entsprechen, zeigt, dass ausser den früher abgeleiteten

$$r' = \frac{r}{s}, \quad s' = \frac{1}{s}$$

die Formeln

$$I'_1 = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^s, \quad I'_2 = \frac{1}{I_2^s}$$

gelten. Hiermit hat man ein Mittel, um von jedem der im vorstehenden gefundenen Resultate zum dualen überzugehen.

70. Die angegebenen Berührungsinvarianten sind mit Hilfe invarianter Methoden, die sofort die betreffenden Relationen in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit klar hervortreten lassen, gefunden worden. Sie lassen sich aber natürlich auch mit Hilfe der in 58. besprochenen formalen analytischen Darstellung gewinnen. Um dies zu illustrieren, führen wir die wichtigsten Relationen zwischen den Konstanten der Grenzgleichungen und den betreffenden Invarianten an.

Die beiden Raumkurven seien durch die beiden Paare

$$\left. \begin{aligned} y &= px^{r+1} \\ z &= qx^{r+s+1} \end{aligned} \right\} \text{(I)} \qquad \qquad \left. \begin{aligned} y &= p_1x^{r+1} \\ z &= q_1x^{r+s+1} \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

von Grenzgleichungen dargestellt. Ihre Projektionen auf die  $xy$ -Ebene sind

$$y = px^{r+1}, \quad y = p_1x^{r+1}$$

und die Definition der Invariante  $I_1$  ergibt dann unmittelbar

$$I_1 = \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1)$$

Die Invariante  $I_2$  findet man, indem man mit der Ebene  $y = \alpha z$  schneidet. Sind  $x$  und  $x_1$  die Abszissen der Schnittpunkte, so ergibt sich

$$I_2 = \frac{x_1}{x} = \left( \frac{q}{q_1} : \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad (2)$$

also wegen (1)

$$\frac{q}{q_1} = I_1^r I_2^s. \quad (3)$$

Mit Hilfe elementarer analytischen Rechnungen und der Formeln (1), (2), (3) ist es nun leicht, alle übrigen Invarianten abzuleiten.

Beispielsweise ist die Invariante der Projektionen

$$z = qx^{r+s+1}, \quad z = q_1 x_1^{r+s+1}$$

auf die  $xz$ -Ebene

$$\left( \frac{q}{q_1} \right)^{\frac{1}{r+s}} = I_1^{\frac{r}{r+s}} I_2^{\frac{s}{r+s}},$$

womit man die allgemeine Formel aus 66. hat.

Die Projektionen

$$z = \frac{q}{p^{\frac{s}{r+1}+1}} y^{\frac{s}{r+1}+1}, \quad z = \frac{q_1}{p_1^{\frac{s}{r+1}+1}} y_1^{\frac{s}{r+1}+1}$$

auf die  $yz$ -Ebene ergeben die Invariante

$$\left( \frac{q}{q_1} : \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{s}{r+1}+1} \right)^{\frac{r+1}{s}} = I_2^{r+1} : I_1^r,$$

womit das allgemeine Resultat von 67. bestätigt ist.

Indem man die Tangentenflächen analytisch darstellt und ihre Schnittkurven mit den Ebenen  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  bestimmt, findet man alle Invarianten der ebenen Schnitte der Tangentenflächen, so wie sie in 68. angegeben sind.

71. An Stelle der Grundinvarianten  $I_1$  und  $I_2$  kann man

$$A_1 = I_1^{-r} = \frac{p_1}{p}$$

$$A_2 = I_1^{-r} I_2^{-s} = \frac{q_1}{q}$$

eingeführen, die sich im Koordinatensystem unmittelbar interpretieren lassen, nämlich  $A_1$  als das Grenzverhältnis der  $y$ -Koordinaten von Punkten mit gleicher Abszisse und  $A_2$  als das entsprechende Grenzverhältnis der  $z$ -Koordinaten. Da das Koordinatensystem keiner anderen Bedingung unterworfen ist, als dass  $x$  in die Halbtangente,  $y$  in die Schmiegebene und  $z$  ausserhalb derselben fällt, kann die geometrische Bedeutung von  $A_1$  und  $A_2$  ohne Schwierigkeit unabhängig vom Koordinatensystem formuliert werden.

$A_1$  und  $A_2$  sind die Segreschen Invarianten der Raumkurven<sup>1</sup>.

Als Normalformen der Grenzgleichungen der Kurven kann man hiernach für  $k$ :

$$y = x^{r+1}, \quad z = x^{r+s+1}$$

und für  $k_1$ :

$$x = A_1 x^{r+1}, \quad z = A_2 x^{r+s+1}$$

eingeführen.

72. Als Anwendungsbeispiel wollen wir folgende Aufgabe lösen: Auf dem Kurvenzweige  $k$  sind drei gegen  $A$  strebende Punkte gegeben, deren Abszissen durch die Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  repräsentiert seien. Die Ebene durch die drei Punkte konvergiert gegen die Schmiegebene in  $A$  und schneidet den anderen Kurvenzweig  $k_1$  in einem Punkt, der mit den anderen gegen  $A$  konvergiert. Gefragt wird nach der die Abszisse dieses Punktes repräsentierenden Zahl  $x$ . Die Aufstellung der Bedingung dafür, dass die vier Punkte in derselben Ebene liegen, ergibt unmittelbar die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & A_1 x^{r+1} & A_2 x^{r+s+1} & 1 \\ x_1 & x_1^{r+1} & x_1^{r+s+1} & 1 \\ x_2 & x_2^{r+1} & x_2^{r+s+1} & 1 \\ x_3 & x_3^{r+1} & x_3^{r+s+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<sup>1</sup> C. SEGREG, Sugli elementi curvilinei, che hanno comuni la tangente e il piano osculatore, Rendiconti Lincei (5) 23, 1924;

B. SEGREG, Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori, Rendiconti Lincei (6) 22, 1935.

zur Bestimmung von  $x$ . Sie kann bis zu drei Wurzeln haben im Einklang damit, dass die Ebene bis zu drei Schnittpunkten mit  $k_1$  haben kann.

Der Grenzfall, wo die drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  zusammenfallen und die betreffende Ebene in die Schmiegeebene im Punkt  $x_1$  übergeht, erledigt sich ebenso leicht, und man erhält zur Bestimmung des Schnittpunktes  $x$  die Gleichung

$$A_2 \xi^{r+s+1} - A_1 \frac{(r+s)(r+s+1)}{r(r+1)} \xi^{r+1} + \frac{s(r+s+1)}{r} \xi - \frac{s(r+s)}{r+1} = 0$$

$$\text{in } \xi = \frac{x}{x_1}.$$

73. Bisher haben wir ausschliesslich zwei Kurvenzweige  $k$  und  $k_1$  betrachtet, die mit derselben räumlichen Orientierung von  $A$  ausgehen. Wir wollen nun etwas weiter gehen. Wir halten daran fest, dass die Kurvenzweige vom selben Punkt  $A$  ausgehen und dort gemeinsame Tangente und gemeinsame Schmiegeebene haben, verlangen aber nicht mehr; dass sie dieselbe Halbtangente und dieselbe Schmiegehalbebene haben und auf derselben Seite der letzteren liegen. Wir lassen mit anderen Worten zu, dass die Bögen  $k$  und  $k_1$  in  $A$  einen beliebigen der acht v. Staudtschen Bogentypen bilden.

Bei allen Typen kann man von den Invarianten  $I_1$  und  $I_2$ , und damit auch von  $A_1$  und  $A_2$  sprechen, was man ganz wie für ebene Kurven einsieht. Das Koordinatensystem  $x, y, z$  sei mit Bezug auf  $k$  in der bisherigen Weise gewählt. Hat nun  $k_1$  nicht dieselbe Halbtangente wie  $k$ , so spiegele man  $k_1$  an der  $yz$ -Ebene; hat die dabei entstehende Kurve nicht dieselbe Schmiegehalbebene wie  $k$ , so spiegele man sie an der  $xz$ -Ebene; liegt die neue Kurve nicht auf derselben Seite der Schmiegeebene wie  $k$ , so spiegele man sie schliesslich an der  $xy$ -Ebene. Auf diese Weise sieht man, dass höchstens drei Spiegelungen an Koordinatenebenen hinreichend sind, um  $k_1$  in eine Kurve  $k'_1$  mit derselben Orientierung wie  $k$  überzuführen. Die Invarianten  $I_1, I_2$ , und damit auch  $A_1, A_2$ , von  $k$  und  $k_1$  werden nun als die entsprechenden Invarianten von  $k$  und  $k'_1$  definiert.

Wir rechnen die Invarianten nicht mit Vorzeichen, sie sind also stets grösser oder gleich 0. Dasselbe soll auch für die Koordinaten der Punkte auf den beiden Kurvenzweigen gelten.

74. Als Beispiel wollen wir die in 72. behandelte Aufgabe für zwei Kurvenzweige lösen, die in  $A$  einen Scheitelpunkt bilden (d. h. die Halbtangenten sind entgegengesetzt, die Schmiegehalben identisch und die Schmiegeebene ist Stützebene der ganzen Kurve  $k, k_1$ ).

In Bezug auf das mit  $k$  verknüpfte Koordinatensystem hat die Ebene durch die drei Punkte auf  $k$  mit den Abszissen  $x_1, x_2, x_3$  die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & x_1^{r+1} & x_1^{r+s+1} & 1 \\ x_2 & x_2^{r+1} & x_2^{r+s+1} & 1 \\ x_3 & x_3^{r+1} & x_3^{r+s+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir suchen nun einen Schnittpunkt dieser Ebene mit  $k_1$ . Es seien  $x, A_1x^{r+1}, A_2x^{r+s+1}$  die absolut genommenen Koordinaten dieses Punktes. Durch eine einzige Spiegelung, nämlich an der  $yz$ -Ebene, wird  $k_1$  in eine mit  $k$  gleich orientierte Kurve übergeführt. Daher muss  $x$  die Gleichung

$$\begin{vmatrix} -x & A_1x^{r+1} & A_2x^{r+s+1} & 1 \\ x_1 & x_1^{r+1} & x_1^{r+s+1} & 1 \\ x_2 & x_2^{r+1} & x_2^{r+s+1} & 1 \\ x_3 & x_3^{r+1} & x_3^{r+s+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

befriedigen, die genau eine reelle Wurzel hat.

Für die anderen Bogentypen löst man die analoge Aufgabe, indem man diejenigen Vorzeichenänderungen der Koordinaten  $x, A_1x^{r+1}, A_2x^{r+s+1}$  vornimmt, die den Spiegelungen an Koordinatenebenen entsprechen, durch welche  $k_1$  in eine mit  $k$  gleich orientierte Kurve übergeführt wird. Die acht Vorzeichenkombinationen entsprechen gerade den acht Bogentypen.

## VIII. Kurven in höheren Räumen.

75. Wie Kurven in höheren Räumen zu behandeln sind, liegt nach dem Vorstehenden auf der Hand: Eine monotone Kurve  $k$  in einem  $n$ -dimensionalen Raum, die von einem Punkt  $A$  ausgeht, dort die Halbtangente  $\alpha^1$ , die Schmiegshalbebene  $\alpha^2$ , die Schmiegshalbräume  $\alpha^3, \alpha^4, \dots, \alpha^{n-1}$  hat, ist durch die positiven Krümmungsexponenten  $r_0, r_1, \dots, r_{n-2}$  zu charakterisieren, die zu den hyperprojektiven Beziehungen zwischen der Punktschar  $(P)$  auf der Kurve und den sie von  $A, \alpha^1, \alpha^2, \dots$  bzw.  $\alpha^{n-2}$  aus projizierenden Büscheln gehören. Die Kurve kann dann in einem ihr angepassten Koordinatensystem  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  durch Grenzgleichungen der Form

$$x_1 = p_1 x_0^{r_0+1}, \quad x_2 = p_2 x_0^{r_0+r_1+1}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = p_{n-1} x_0^{r_0+r_1+\dots+r_{n-2}+1}$$

dargestellt werden, und dann können elementare analytische Methoden herangezogen werden.

Für zwei vom Punkt  $A$  ausgehende Kurven mit derselben Halbtangente, denselben Schmiegshalbräumen und denselben Exponenten  $r_0, r_1, \dots, r_{n-2}$  in  $A$  kann man dann die Berührungsinvarianten  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$  als Grenzverhältnisse der bei den Zentralprojektionen von  $A, \alpha^1, \alpha^2, \dots$  bzw.  $\alpha^{n-2}$  aus ausgeschnittenen Vektoren einführen.

Auf diese Weise gelangt man unmittelbar zu den von B. SEGRE (für speziellere Kurventypen) aufgestellten Invarianten<sup>1</sup>.

76. Auf Einzelheiten, die schwachen Figuren in höheren Räumen betreffend, wollen wir hier nicht eingehen, sondern nur zum Schluss eine andere Verallgemeinerung erwähnen, die daran anknüpft und durch geläufige Abbildungen in die obige eingeordnet werden kann, nämlich die schwachen Figuren höherer Ordnung. Was wir darunter verstehen, wollen wir uns begnügen, an Hand von zwei der einfachsten Beispiele anzudeuten:

1°. Unter einer schwachen Figur zweiter Ordnung in der projektiven Ebene wollen wir eine variable Figur verstehen, deren Punkte sämtlich gegen einen bestimmten Punkt und deren (durch je fünf Punkte der Figur bestimmte) Kegelschnitte sämt-

<sup>1</sup> L. c. Fussnote 1, S. 60.

lich gegen einen bestimmten eigentlichen Kegelschnitt konvergieren.

2°. Im »zyklischen Raume« wollen wir unter einer schwachen zyklischen Figur eine variable Figur verstehen, deren Punkte sämtlich gegen einen bestimmten Punkt und deren (durch je drei Punkte der Figur bestimmte) Kreise sämtlich gegen einen bestimmten Kreis konvergieren.

Diese und analoge schwache Figuren bieten ein interessantes Arbeitsfeld dar, das es sich gewiss lohnen würde zu erforschen.

---