Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XVI**, 3.

MENGENFUNKTIONEN UND KONVEXE KÖRPER

VON

W. FENCHEL UND B. JESSEN

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1938

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

§ 1. Einleitung.

Der formale Apparat der Brunn-Minkowskischen Theorie der konvexen Körper ist bisher nur für Polyeder und für Körper mit hinreichend glatter Berandung entwickelt worden; insbesondere liegen Formeln für die gemischten Volumina, auf denen die Beweise mehrerer wichtigen Sätze beruhen, nur für solche Körper vor. In vielen Fällen kann man mit Hilfe dieses Apparates Sätze für beliebige konvexe Körper beweisen, indem man durch Polyeder oder glatte Körper approximiert. In anderen Fällen hat dies aber zur Folge, dass bereits die allgemeine Formulierung der betreffenden Sätze unmöglich ist. Nun liegt es nahe zu vermuten, dass die in Ausdrücken für die gemischten Volumina von Polyedern bzw. glatten Körpern auftretenden Summen bzw. Integrale als Spezialfälle von Stieltjes-Integralen in Bezug auf total additive Mengenfunktionen auf der Oberfläche der Einheitskugel aufgefasst werden können. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass dies in der Tat der Fall ist und verwenden den so erweiterten Apparat, um einige Sätze der Theorie von bisher gemachten unnötigen Einschränkungen zu befreien.

Der entscheidende Begriff ist der der Oberflächenfunktion eines beliebigen konvexen Körpers. Es ist dies diejenige Mengenfunktion auf der Einheitskugel Ω, deren Wert für eine vorgeschriebene Menge ω von Ω gleich dem Flächeninhalt der Menge derjenigen Randpunkte des Körpers ist, durch die eine Stützebene mit zu ω gehöriger Normalenrichtung geht. Die dabei zur Verwendung kommende Flächeninhaltsdefinition ist eine dem vorliegenden Zweck angepasste Modifikation der Minkowskischen und führt ähnlich wie diese die Flächeninhaltsbestimmung auf Volumenbestimmung von Normalenmengen zurück. Für hinreichend glatte Körper ist diese Oberflächenfunktion das unbestimmte Integral der reziproken Gaußschen Krümmung der Randfläche als Funktion der Normalenrichtung.

Als ein Hauptresultat ergibt sich die vollständige Charakterisierung derjenigen Mengenfunktionen, die als Oberflächenfunktionen konvexer Körper auftreten können. Für Körper mit inneren Punkten zeigen wir: Zu jeder nicht negativen, total additiven Mengenfunktion auf der Kugel, die gewissen, trivialerweise notwendigen Bedingungen genügt, gibt es einen bis auf Translationen eindeutig bestimmten konvexen Körper, dessen Oberflächenfunktion sie ist.

Dieser Satz ist die natürliche Verallgemeinerung des Satzes von MINKOWSKI, dass es ein, und bis auf Translationen nur ein konvexes Polyeder gibt, dessen Normalenrichtungen und Flächeninhalte der Seitenflächen mit gewissen trivialerweise notwendigen Einschränkungen willkürlich vorgeschrieben sind.

Durch Grenzübergang gewinnt MINKOWSKI aus diesem Satz einen entsprechenden Satz für eine Klasse konvexer Körper, die er als stetig gekrümmt bezeichnet. Von einem solchen Körper $\mathfrak{K}$ wird verlangt, dass es eine positive stetige Funktion $F(\xi)$ auf der Einheitskugel derart gibt, dass für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$ das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{3}\int_{\Omega} H(\xi)\, F(\xi)\, M(d\Omega)$$

ist, wo $M(d\Omega)$ das Mass des Flächenelementes $d\Omega$ der Einheitskugel Ω bedeutet. Diese sogenannte Krümmungsfunktion $F(\xi)$, die für hinreichend glatte Körper die reziproke Gaußsche Krümmung ist, wird also nicht differentialgeometrisch definiert, sondern durch unendlich viele Integralbedingungen festgelegt, und es bleibt bei MINKOWSKI unentschieden, ob bei einem in diesem Sinne stetig gekrümmten Körper $\mathfrak{K}$ die Funktion $F(\xi)$ die übliche differentialgeometrische Deutung zulässt. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Oberflächenfunktion eines beliebigen konvexen Körpers den obigen analogen Integralrelationen genügt und durch diese eindeutig bestimmt ist. Für einen im Minkowskischen Sinne stetig gekrümmten Körper mit der Krümmungsfunktion $F(\xi)$ folgt hieraus, dass seine Oberflächenfunktion gleich dem unbestimmten Integral von $F(\xi)$ ist, und damit, dass $F(\xi)$ die Ableitung der Oberflächenfunktion, also der Grenzwert des Quotienten entsprechender Flächeninhalte auf der Körperberandung und der Einheitskugel ist.

Für die Theorie der konvexen Körper verweisen wir, was Bezeichnungen, Resultate und Hinweise auf Originalliteratur betrifft, stets auf T. BONNESEN und W. FENCHEL: »Theorie der konvexen Körper«[1]. Ebenso wie dort wird im Folgenden der n-dimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt.

In § 2 stellen wir die erforderlichen Hilfsmittel aus der Theorie der total additiven Mengenfunktionen auf der Einheitskugel zusammen.

In § 3 führen wir die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers zunächst als Grenzfunktion von (in naheliegender Weise zu definierenden) Oberflächenfunktionen

[1] Ergebnisse der Mathematik, Bd. 3, Heft 1, Berlin 1934; im folgenden kurz als »Bericht« zitiert.

konvexer Polyeder ein und zeigen, dass sie sich durch Integralrelationen der oben erwähnten Art charakterisieren lässt.

In § 4 beweisen wir dann den genannten Haupsatz über die Bestimmung eines konvexen Körpers durch die Oberflächenfunktion. Wir gehen dabei wie Minkowski vom entsprechenden Polyedersatz aus und folgen überhaupt dem Minkowskischen Gedankengang.

In § 5 führen wir für $n-1$ beliebige konvexe Körper eine gemischte Oberflächenfunktion ein, die mit den gemischten Volumina durch gewisse Integralrelationen verknüpft und durch diese Relationen charakterisiert ist.

Als Spezialfälle hiervon betrachten wir in § 6 die gemischten Oberflächenfunktionen eines Körpers mit der Einheitskugel und zeigen, dass ein konvexer Körper auch durch jede dieser Funktionen bis auf Translationen eindeutig bestimmt ist. Für hinreichend glatte Körper sind diese Mengenfunktionen bis auf konstante Faktoren die unbestimmten Integrale der Krümmungsfunktionen des Körpers, d. h. der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungsradien der Randfläche als Funktionen der Normalenrichtung.

Schliesslich kommen wir in § 7 auf die Definition der Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers zurück und zeigen, dass man zu diesem Begriff statt wie in § 3 durch Polyederapproximation auch dadurch gelangt, dass man die Minkowskische Flächeninhaltsdefinition in der oben angedeuteten Weise auf beliebige Teilmengen der Körperberandung überträgt.[1]

[1] Während der Ausarbeitung dieser Untersuchung erschien eine Arbeit von A. Alexandroff: Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. I. Verallgemeinerung einiger Begriffe der Theorie von konvexen Körpern. [Rec. math. Moscou **44**, 947—970 u. deutsche Zusammenfassung 970—972 (1937)] (Russisch). Wie wir aus dem deutschen Auszug entnehmen, verfolgt Alexandroff dieselben Ziele und führt in dem vorliegenden ersten Teil seiner Arbeit die Oberflächenfunktionen und gemischten Oberflächenfunktionen ein, und zwar, wie uns scheint, auf einem anderen Wege.

§ 2. Über nicht negative, total additive Mengenfunktionen auf der Kugel.

Es sei Ω die Oberfläche $|\xi| = 1$ der Einheitskugel des n-dimensionalen Raumes. Wir betrachten total additive, nicht negative Mengenfunktionen $\Phi(\omega)$, die für alle Borel-Mengen ω von Ω definiert sind. Wenn im folgenden von Mengenfunktionen die Rede ist, sind stets Funktionen mit diesen Eigenschaften gemeint. Wir werden vielfach eine Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ als Massenbelegung von Ω auffassen und die entsprechende massengeometrische Terminologie verwenden. Das Integral[1] einer Funktion $G(\xi)$ über eine Borel-Menge ω von Ω mit Bezug auf eine Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ schreiben wir

$$\int_\omega G(\xi)\,\Phi(d\Omega).$$

Das Mass auf Ω bezeichnen wir mit $M(\omega)$.

I. *Zwei Mengenfunktionen Φ und Ψ mit der Eigenschaft, dass für jede auf Ω stetige Funktion $G(\xi)$*

[1] Vgl. J. Radon: Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. [S.—B. Akad. Wiss. Wien Abt. IIa, **122**, 1295—1438 (1913)]. Die im Folgenden vorkommenden Integrale existieren im allgemeinen im Sinne der ersten, der Riemannschen analogen Definition von Radon (S. 1322—1324). Für die Beweise der anzuführenden Sätze ist jedoch die systematische Verwendung der zweiten, allgemeineren, der Lebesgueschen analogen Definition (S. 1324—1328) zweckmässig. Zum Teil finden sich diese Sätze explizit bei Radon. Die übrigen Behauptungen können bekanntlich mit den von Radon entwickelten Hilfsmitteln bewiesen werden.

$$\int_{\Omega} G(\xi)\,\Phi(d\Omega) = \int_{\Omega} G(\xi)\,\Psi(d\Omega)$$

gilt, sind identisch.

Eine Borel-Menge ω von Ω heisst Stetigkeitsmenge der Mengenfunktion $\Phi(\omega)$, falls

$$\Phi(\overline{\omega}) = \Phi(\tilde{\omega})$$

ist, wo $\overline{\omega}$ die abgeschlossene Hülle und $\tilde{\omega}$ den offenen Kern (in Bezug auf Ω) von ω bedeuten. Ω selbst ist offenbar immer Stetigkeitsmenge. Gilt für zwei Mengenfunktionen Φ und Ψ die Ungleichung

$$\Phi(\omega) \leqq \Psi(\omega)$$

für alle gemeinsamen Stetigkeitsmengen von Φ und Ψ, so gilt sie für alle Borel-Mengen. Zwei Mengenfunktionen, die für alle gemeinsamen Stetigkeitsmengen denselben Wert haben, sind identisch.

Eine Folge von Mengenfunktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ heisst konvergent, wenn es eine Mengenfunktion Φ derart gibt, dass

$$\Phi_\nu(\omega) \to \Phi(\omega)$$

für jede Stetigkeitsmenge ω von Φ. Die Mengenfunktion Φ ist dann eindeutig bestimmt und heisst die Grenzfunktion der Folge. Wir schreiben

$$\Phi_\nu \to \Phi.$$

Notwendig und hinreichend hierfür ist, dass

$$\Phi_\nu(\Omega) \to \Phi(\Omega)$$

und

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(\omega) \geqq \Phi(\omega)$$

für jedes offene ω gilt.

II. *Eine Folge $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ von Mengenfunktionen ist dann und nur dann konvergent, wenn*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\Omega} G(\xi)\,\Phi_\nu(d\Omega)$$

bei jedem stetigen $G(\xi)$ auf Ω existiert. Ist Φ die Grenzfunktion der Folge, so gilt bei jedem stetigen $G(\xi)$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\Omega} G(\xi)\,\Phi_\nu(d\Omega) = \int_{\Omega} G(\xi)\,\Phi(d\Omega),$$

und sogar gleichmässig in jeder Menge von gleichartig gleichmässig stetigen Funktionen $G(\xi)$.

Ausschlaggebend für das Folgende ist, dass man in den Sätzen I und II nicht beliebige stetige Funktionen $G(\xi)$ zu betrachten braucht, sondern sich auf Stützfunktionen konvexer Körper beschränken darf. Es gelten mit anderen Worten die Sätze:

III. *Zwei Mengenfunktionen Φ und Ψ mit der Eigenschaft, dass für jede Stützfunktion $H(\xi)$*

$$\int_{\Omega} H(\xi)\,\Phi(d\Omega) = \int_{\Omega} H(\xi)\,\Psi(d\Omega)$$

gilt, sind identisch.

IV. *Eine Folge $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ von Mengenfunktionen ist dann und nur dann konvergent, wenn*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\Omega} H(\xi)\,\Phi_\nu(d\Omega)$$

bei jeder Stützfunktion $H(\xi)$ existiert. Ist Φ die Grenzfunktion der Folge, so gilt für jede Stützfunktion $H(\xi)$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\Omega} H(\xi)\,\Phi_\nu(d\Omega) = \int_{\Omega} H(\xi)\,\Phi(d\Omega),$$

und sogar gleichmässig in jeder Menge von gleichartig gleichmässig stetigen Funktionen $H(\xi)$.[1]

Um diese Sätze aus den Sätzen I und II abzuleiten, genügt es offenbar zu zeigen, dass die Stützfunktionen in dem Sinne eine Basis aller stetigen Funktionen bilden, dass jede stetige Funktion durch Linearkombinationen von Stützfunktionen gleichmässig approximiert werden kann.

Es sei $H_{\eta, r}(\xi)$ für $r > 1$ die Stützfunktion der konvexen Hülle der Einheitskugel und des Punktes $r\eta$, wo η ein beliebiger Punkt von Ω ist. Dann ist offenbar

$$H_{\eta, r}(\xi) - 1 \geq 0$$

für alle ξ und zwar positiv im sphärischen Abstand kleiner als $\arccos \frac{1}{r}$ von η und sonst Null. Es sei

$$I_r = \int\limits_{\Omega} \left[H_{\eta, r}(\xi) - 1\right] M(d\Omega)$$

das offenbar von η unabhängige Integral dieser Funktion über Ω, ferner $G(\xi)$ die zu approximierende stetige Funktion. Dann ist

$$F_r(\eta) = \int\limits_{\Omega} G(\xi) \frac{H_{\eta, r}(\xi) - 1}{I_r} M(d\Omega)$$

eine stetige Funktion von η und strebt für $r \to 1$ gleichmässig gegen $G(\eta)$. Andererseits ist $F_r(\eta)$ für jedes r Differenz zweier Stützfunktionen. Für nicht negatives $G(\xi)$ ist dies unmittelbar ersichtlich[2], und im allgemeinen Fall schreibe man $G(\xi)$ als Differenz zweier nicht negativen Funktionen.

[1] Selbstverständlich ist nur ein Teil dieses Satzes eine Verschärfung von II.

[2] Bericht, **19**, S. 28.

§ 3. Die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein konvexes Polyeder, $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$ die Normaleneinheitsvektoren seiner $(n-1)$-dimensionalen Seiten und $v_1, v_2, \ldots, v_N$ deren $(n-1)$-dimensionale Volumina. Als Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{P}; \omega)$ von $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir die Mengenfunktion auf der Einheitskugel Ω, deren Wert für die Borel-Menge ω gleich der Summe derjenigen v_ν ist, für welche $\xi^{(\nu)}$ zu ω gehört. Man hat dann für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$[1]

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}, \ldots, \mathfrak{P}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} H(\xi^{(\nu)})\, v_\nu = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H(\xi)\, S(\mathfrak{P}; d\Omega).$$

Es sei nun $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper und $\mathfrak{P}^1, \mathfrak{P}^2, \ldots$ eine Folge konvexer Polyeder, die gegen $\mathfrak{K}$ konvergieren. Dann gilt wegen der Stetigkeit der gemischten Volumina[2] für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$

$$\lim_{\nu \to \infty} V(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}^\nu, \ldots, \mathfrak{P}^\nu) = V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}).$$

Nach IV und III gibt es also eine und nur eine Mengenfunktion $S(\mathfrak{K}; \omega)$, die wir als Oberflächenfunktion von $\mathfrak{K}$ bezeichnen, derart dass für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H(\xi)\, S(\mathfrak{K}; d\Omega)$$

ist. Wählt man insbesondere für $\mathfrak{H}$ die Einheitskugel, so erhält man[3] für die Oberfläche $S(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$

[1] Bericht, S. 41.

[2] Bericht, S. 40.

[3] Bericht, S. 47.

$$S(\mathfrak{K}) = S(\mathfrak{K}; \Omega).$$

Ist ferner $\mathfrak{K}^1, \mathfrak{K}^2, \ldots$ eine Folge beliebiger konvexer Körper, die gegen den Körper $\mathfrak{K}$ konvergieren, so folgt nach IV, dass die zugehörigen Oberflächenfunktionen $S(\mathfrak{K}^\nu; \omega)$ gegen eine Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ konvergieren, die für jeden Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$ der Relation

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}) = \frac{1}{n}\int_\Omega H(\xi)\, \Phi(d\Omega)$$

genügt und daher nach III mit $S(\mathfrak{K}; \omega)$ übereinstimmt. Damit haben wir:

V. *Zu jedem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ gibt es eine und nur eine Mengenfunktion $S(\mathfrak{K}; \omega)$, die Oberflächenfunktion von $\mathfrak{K}$, mit der Eigenschaft, dass für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$*

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}) = \frac{1}{n}\int_\Omega H(\xi)\, S(\mathfrak{K}; d\Omega) \tag{1}$$

ist, und diese Mengenfunktion hängt im Sinne der Konvergenz von Mengenfunktionen stetig von $\mathfrak{K}$ ab. Die gesamte Oberfläche $S(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ ist gleich $S(\mathfrak{K}; \Omega)$.

Ist $\mathfrak{K}$ speziell ein Polyeder, so ist $S(\mathfrak{K}; \omega)$ gleich der Summe der Inhalte der $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{K}$, deren Normaleneinheitsvektoren zur Menge ω gehören.

Hieraus geht speziell hervor, dass für einen hinreichend glatten Körper die Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}; \omega)$ gleich dem unbestimmten Integral des Produktes der Hauptkrümmungsradien ist; denn dieses unbestimmte Integral genügt den Relationen (1)[1].

[1] Dies entnimmt man aus den Formeln (5), S. 59 und (4), S. 62 des Berichtes.

Da $V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K})$ bei Translationen von $\mathfrak{K}$ ungeändert bleibt, gilt wegen der eindeutigen Bestimmtheit von $S(\mathfrak{K}; \omega)$, dass auch $S(\mathfrak{K}; \omega)$ translationsinvariant ist.

Wählt man für $\mathfrak{H}$ einen beliebigen Punkt a, so wird

$$H(\xi) = \Sigma a \xi$$

und

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}) = 0,$$

also

$$\int_\Omega \Sigma a \xi\, S(\mathfrak{K}; d\Omega) = 0.$$

Da dies für alle a gilt, hat man

$$\int_\Omega \xi\, S(\mathfrak{K}; d\Omega) = 0, \tag{2}$$

d. h. der Schwerpunkt der Massenbelegung $S(\mathfrak{K}; \omega)$ von Ω fällt in den Kugelmittelpunkt.

Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann höchstens $(n-2)$-dimensional, wenn $S(\mathfrak{K}) = S(\mathfrak{K}; \Omega) = 0$ ist, wenn also $S(\mathfrak{K}; \omega)$ identisch verschwindet.

Ist $\mathfrak{K}$ $(n-1)$-dimensional, und sind $\xi^{(0)}$ und $-\xi^{(0)}$ die Normaleneinheitsvektoren der Ebene, in der $\mathfrak{K}$ enthalten ist, so ist

$$S(\mathfrak{K}; \omega) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} S(\mathfrak{K}) \\ S(\mathfrak{K}) \end{cases} \tag{3}$$

je nachdem ω keinen, einen oder beide Punkte $\xi^{(0)}$ und $-\xi^{(0)}$ enthält. Dies ist klar für $(n-1)$-dimensionale Polyeder und folgt allgemein durch Approximation durch solche.

Ist $\mathfrak{K}$ n-dimensional, d. h. hat $\mathfrak{K}$ innere Punkte, so ist für jeden Einheitsvektor η

$$S(\mathfrak{K};\omega_\eta) < S(\mathfrak{K};\Omega),$$

wo ω_η die Grosskugel mit dem Pol η, d. h. den Durchschnitt von Ω mit der zu η senkrechten Ebene durch den Nullpunkt bezeichnet. Auf keiner Grosskugel liegt also die gesamte Masse der Massenbelegung $S(\mathfrak{K};\omega)$. Wäre nämlich für ein η

$$S(\mathfrak{K};\omega_\eta) = S(\mathfrak{K};\Omega),$$

also

$$S(\mathfrak{K};\omega) = 0$$

für jede zu ω_η punktfremde Menge ω, so hätte man

$$V(\mathfrak{H},\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}) = \frac{1}{n}\int\limits_\Omega H(\xi)\,S(\mathfrak{K};d\Omega) = 0,$$

wenn $\mathfrak{H}$ die Einheitsstrecke $0,\eta$ bedeutet, weil deren Stützfunktion auf ω_η verschwindet. Andererseits ist das n-fache dieses gemischten Volumens gleich dem Inhalt der Projektion von $\mathfrak{K}$ auf eine zu η senkrechte Ebene[1], also von Null verschieden, weil $\mathfrak{K}$ innere Punkte besitzt.

Hieraus geht hervor: Wenn die Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K};\omega)$ eines Körpers $\mathfrak{K}$ nicht identisch verschwindet und für ein passendes η der Bedingung

$$S(\mathfrak{K};\omega_\eta) = S(\mathfrak{K};\Omega),$$

genügt, d. h. wenn die gesamte Masse der Massenbelegung $S(\mathfrak{K};\omega)$ auf einer Grosskugel liegt, so ist $\mathfrak{K}$ $(n-1)$-dimensional und $S(\mathfrak{K};\omega)$ ist von der Form (3). Ist umgekehrt $\xi^{(0)}$ ein beliebiger Einheitsvektor und S eine positive Zahl, so ist die Mengenfunktion

[1] Bericht, S. 45.

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}S, \\ S \end{cases}$$

je nachdem ω keinen, einen oder beide Punkte $\xi^{(0)}$ und $-\xi^{(0)}$ enthält, eine Oberflächenfunktion, nämlich für die (unendlich vielen) $(n-1)$-dimensionalen Körper der Oberfläche S, die in einer zu $\xi^{(0)}$ senkrechten Ebene enthalten sind.

§ 4. Bestimmung eines konvexen Körpers durch die Oberflächenfunktion.

VI. *Zwei konvexe Körper mit inneren Punkten haben dann und nur dann dieselbe Oberflächenfunktion, wenn sie durch Translation ineinander übergeführt werden können.*

Der eine Teil des Satzes, nämlich die Translationsinvarianz der Oberflächenfunktion, ist bereits in § 3 gezeigt worden.

Es seien also $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ zwei konvexe Körper mit inneren Punkten, den Stützfunktionen $H(\xi)$ bzw. $K(\xi)$ und derselben Oberflächenfunktion

$$S(\omega) = S(\mathfrak{H};\omega) = S(\mathfrak{K};\omega).$$

Dann ist nach (1)

$$V(\mathfrak{H},\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}) = \frac{1}{n}\int\limits_\Omega H(\xi)\,S(d\Omega) = V(\mathfrak{H},\mathfrak{H},\ldots,\mathfrak{H}) = V(\mathfrak{H})$$

und

$$V(\mathfrak{K},\mathfrak{H},\ldots,\mathfrak{H}) = \frac{1}{n}\int\limits_\Omega K(\xi)\,S(d\Omega) = V(\mathfrak{K},\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}) = V(\mathfrak{K}),$$

wo $V(\mathfrak{H})$ und $V(\mathfrak{K})$ die Volumina von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ und daher positiv sind. Folglich gehen die Minkowskischen Ungleichungen[1]

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K})^n \geqq V(\mathfrak{H})\, V(\mathfrak{K})^{n-1}$$

und

$$V(\mathfrak{K}, \mathfrak{H}, \ldots, \mathfrak{H})^n \geqq V(\mathfrak{K})\, V(\mathfrak{H})^{n-1}$$

in

$$V(\mathfrak{H}) \geqq V(\mathfrak{K})$$

und

$$V(\mathfrak{K}) \geqq V(\mathfrak{H})$$

über. Also ist

$$V(\mathfrak{H}) = V(\mathfrak{K})$$

und in den Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen. Dies hat zur Folge, dass die Körper $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ homothetisch sind[1] und daher, da sie dasselbe Volumen haben, durch Translation auseinander hervorgehen.

VII. *Eine Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ ist dann und nur dann Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ mit inneren Punkten, wenn sie den folgenden beiden Bedingungen genügt:*

1) *Der Schwerpunkt der Massenbelegung $\Phi(\omega)$ fällt in den Nullpunkt, d. h.*

$$\int_{\Omega} \xi\, \Phi(d\Omega) = 0.$$

2) *Auf keiner Grosskugel liegt die gesamte Masse, d. h. für jeden Einheitsvektor η gilt für die Grosskugel ω_η mit dem Pol η*

$$\Phi(\omega_\eta) < \Phi(\Omega).$$

[1] Bericht, S. 91.

Dann und nur dann, wenn für eine endliche Menge ω

$$\Phi(\omega) = \Phi(\Omega)$$

ist, ist $\mathfrak{K}$ ein Polyeder.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo für eine endliche Menge ω

$$\Phi(\omega) = \Phi(\Omega)$$

ist. Es seien $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$ die Punkte von ω und

$$v_\nu = \Phi(\xi^{(\nu)}), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

die entsprechenden Werte der Mengenfunktion, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv annehmen können. Infolge der Bedingungen 1) und 2) ist

$$\sum_{\nu=1}^{N} \xi^{(\nu)} v_\nu = 0,$$

und unter den Vektoren $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$ gibt es n linear unabhängige.

Nach Minkowski[1] gibt es also ein konvexes Polyeder, dessen Oberflächenfunktion die gegebene Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ ist.

Es sei nun $\Phi(\omega)$ eine beliebige den obigen Bedingungen 1) und 2) genügende Mengenfunktion. Für jede natürliche Zahl $\varkappa$ zerlegen wir die Kugel Ω in endlich viele (disjunkte) Borel-Mengen vom sphärischen Durchmesser kleiner als $\frac{1}{\varkappa}$. Diejenigen dieser Mengen, für welche Φ einen positiven Wert hat, seien $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$. Wir bezeichnen mit $\varrho_\nu \xi^{(\nu)}$, $\varrho_\nu > 0$, $|\xi^{(\nu)}| = 1$, den offenbar vom Nullpunkt verschiedenen

[1] Bericht, **60**, S. 118.

Schwerpunkt der durch $\Phi(\omega)$ definierten Massenbelegung von Ω_ν, setzen also

$$\int_{\Omega_\nu} \xi\, \Phi(d\Omega) = \Phi(\Omega_\nu)\, \varrho_\nu\, \xi^{(\nu)}. \tag{4}$$

Dann ist $\arccos \frac{1}{\varkappa} < \varrho_\nu \leqq 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, sodass die ϱ_ν mit $\varkappa \to \infty$ gleichmässig gegen 1 konvergieren. Unter $\Phi_\varkappa(\omega)$ verstehen wir dann diejenige Mengenfunktion, deren Wert für die Borel-Menge ω gleich der Summe derjenigen Werte $\Phi(\Omega_\nu)\, \varrho_\nu$ ist, für welche $\xi^{(\nu)}$ zu ω gehört. Dann genügt $\Phi_\varkappa(\omega)$ nach (4) offenbar der Bedingung 1).

Für jede stetige Funktion $G(\xi)$ gilt ferner

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \int_\Omega G(\xi)\, \Phi_\varkappa(d\Omega) = \int_\Omega G(\xi)\, \Phi(d\Omega);$$

denn für jedes $\varkappa$ ist

$$\int_\Omega G(\xi)\, \Phi_\varkappa(d\Omega) = \int_\Omega G_\varkappa(\xi)\, \Phi(d\Omega),$$

wo $G_\varkappa(\xi)$ in jeder Menge Ω_ν den konstanten Wert $G(\xi^{(\nu)})\, \varrho_\nu$ hat und sonst gleich $G(\xi)$ ist, und diese Funktionen konvergieren gleichmässig gegen $G(\xi)$. Also konvergiert nach II die Folge der Mengenfunktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ gegen Φ.

Es sei $H_\eta(\xi)$ für einen beliebigen Einheitsvektor η die Stützfunktion der Strecke $0, \eta$. Diese Funktion $H_\eta(\xi)$ ist positiv in der offenen Halbkugel $\Omega_\eta^{!}$ mit dem (sphärischen) Mittelpunkt η und sonst 0. Also ist wegen der Bedingungen 1) und 2) das Integral

$$\int_\Omega H_\eta(\xi)\, \Phi(d\Omega)$$

für jedes η positiv; denn anderenfalls wäre $\Phi(\Omega_\eta) = 0$, und es müsste wegen 1) die gesamte Masse der Massenbelegung $\Phi(\omega)$ auf der Ω_η berandenden Grosskugel ω_η liegen, was 2) widerspricht. Dieses Integral ist eine stetige Funktion von η; folglich ist für eine passende Konstante $c > 0$

$$\int_\Omega H_\eta(\xi)\, \Phi(d\Omega) \geqq c$$

für alle η. Nun gilt für jedes η

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \int_\Omega H_\eta(\xi)\, \Phi_\varkappa(d\Omega) = \int_\Omega H_\eta(\xi)\, \Phi(d\Omega),$$

und zwar nach IV gleichmässig in η. Also gibt es ein $\varkappa_0$ derart, dass

$$\int_\Omega H_\eta(\xi)\, \Phi_\varkappa(d\Omega) > \frac{c}{2} \tag{5}$$

für $\varkappa \geqq \varkappa_0$ und alle η.

Hieraus entnehmen wir zunächst, dass die Mengenfunktionen $\Phi_\varkappa(\omega)$ für $\varkappa \geqq \varkappa_0$ der Bedingung 2) genügen; denn aus $\Phi_\varkappa(\omega_\eta) = \Phi_\varkappa(\Omega)$, also speziell $\Phi_\varkappa(\Omega_\eta) = 0$ würde ja das Verschwinden des Integrals (5) folgen.

Nach dem am Anfang des Beweises Gesagten gibt es also zu jedem $\varkappa \geqq \varkappa_0$ ein konvexes Polyeder $\mathfrak{P}^\varkappa$ mit $\Phi_\varkappa(\omega)$ als Oberflächenfunktion. Von diesen Polyedern können wir wegen der Translationsinvarianz der Oberflächenfunktion annehmen, dass sie alle den Nullpunkt enthalten, und wollen zeigen, dass sie dann in einer festen Kugel enthalten sind.

Hierzu bemerken wir, dass wegen

$$\Phi_\varkappa(\Omega) \leqq \Phi(\Omega)$$

die Oberflächen $S(\mathfrak{P}_{\varkappa}) = \Phi_{\varkappa}(\Omega)$ der Polyeder $\mathfrak{P}^{\varkappa}$ und damit nach der isoperimetrischen Ungleichung auch ihre Volumina $V(\mathfrak{P}^{\varkappa})$ beschränkt sind. Ist nun die Strecke $0, r\eta$, wo $r > 0$ und η ein Einheitsvektor ist, in einem Polyeder $\mathfrak{P}^{\varkappa}$ enthalten, so ist die Stützfunktion von $\mathfrak{P}^{\varkappa}$ grösser oder gleich $r H_{\eta}(\xi)$, also

$$V(\mathfrak{P}^{\varkappa}) = V(\mathfrak{P}^{\varkappa}, \mathfrak{P}^{\varkappa}, \ldots, \mathfrak{P}^{\varkappa}) \geqq \frac{r}{n} \int_{\Omega} H_{\eta}(\xi)\, \Phi_{\varkappa}(d\Omega).$$

Folglich liegt r nach (5) unter einer von $\varkappa$ und η unabhängigen Schranke.

Nach dem Auswahlsatz von BLASCHKE gibt es daher eine konvergente Teilfolge $\mathfrak{P}^{\varkappa_1}, \mathfrak{P}^{\varkappa_2}, \ldots$ der Folge $\mathfrak{P}^{\varkappa}, \varkappa \geqq \varkappa_0$. Ist $\mathfrak{K}$ der Grenzkörper, so ist seine Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}; \omega)$ wegen der stetigen Abhängigkeit der Oberflächenfunktion vom Körper die Grenzfunktion der Folge $\Phi_{\varkappa_1}, \Phi_{\varkappa_2}, \ldots$, also wegen $\Phi_{\varkappa} \to \Phi$

$$S(\mathfrak{K}; \omega) = \Phi(\omega).$$

Der Körper $\mathfrak{K}$ hat also die gewünschten Eigenschaften und ist nach VI bis auf Translationen eindeutig bestimmt.

Dass $\mathfrak{K}$ dann und nur dann ein Polyeder ist, wenn $\Phi(\omega) = \Phi(\Omega)$ ist für eine endliche Menge ω, hat sich zugleich ergeben.

Die festgestellte Beziehung zwischen konvexen Körpern mit inneren Punkten einerseits und Mengenfunktionen mit den Eigenschaften 1) und 2) andererseits kann offenbar dadurch eineindeutig gemacht werden, dass man nur Körper mit dem Schwerpunkt im Nullpunkt in Betracht zieht. Diese Beziehung, die nach V in der einen Richtung stetig ist, ist dann auch in der anderen stetig, d. h. es gilt:

VIII. *Eine Folge konvexer Körper $\mathfrak{K}^1, \mathfrak{K}^2, \ldots$ mit inneren Punkten und demselben Schwerpunkt konvergiert dann und nur dann gegen einen Körper $\mathfrak{K}$ mit inneren Punkten, wenn die Folge ihrer Oberflächenfunktionen $S(\mathfrak{K}^{\nu}; \omega)$ gegen die Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}; \omega)$ von $\mathfrak{K}$ konvergiert.*

Die eine Hälfte dieser Behauptung ist in V enthalten. Zum Beweis der anderen genügt es, aus der Konvergenz der Folge $S(\mathfrak{K}^{\nu}; \omega)$ gegen $S(\mathfrak{K}; \omega)$ die gleichartige Beschränktheit der Körper $\mathfrak{K}^{\nu}$ zu folgern; denn jeder Grenzkörper einer Teilfolge von $\mathfrak{K}^{\nu}$ hat die Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}; \omega)$, muss also mit $\mathfrak{K}$ identisch sein, und wenn alle konvergenten Teilfolgen einer gleichartig beschränkten Folge konvexer Körper denselben Grenzkörper haben, so ist die Folge selbst konvergent. Die Beschränktheit der Körper $\mathfrak{K}^{\nu}$ schliesst man wie im Beweis von VII die Beschränktheit der Polyeder $\mathfrak{P}^{\varkappa}$, wenn man beachtet, dass wegen der Konvergenz von $S(\mathfrak{K}^{\nu}; \omega)$ die Oberflächen $S(\mathfrak{K}^{\nu}) = S(\mathfrak{K}^{\nu}; \Omega)$ beschränkt sind.

§ 5. Gemischte Oberflächenfunktionen.

IX. *Zu $n-1$ konvexen Körpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$ gibt es eine und nur eine Mengenfunktion $S(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}; \omega)$, die gemischte Oberflächenfunktion von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$, mit der Eigenschaft, dass für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$*

$$(6)\quad V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H(\xi)\, S(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}; d\Omega)$$

ist, und diese Mengenfunktion hängt im Sinne der Konvergenz von Mengenfunktionen stetig von den Körpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$ ab. Es ist

$$S(\mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}; \omega) = S(\mathfrak{K}; \omega).$$

Wir betrachten zunächst konvexe Polyeder $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{n-1}$. Es seien $\mathfrak{p}_1(\xi), \mathfrak{p}_2(\xi), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}(\xi)$ die höchstens $(n-1)$-dimensionalen Polyeder, die die Polyeder $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots,$ bzw. $\mathfrak{P}_{n-1}$ mit ihren Stützebenen der Richtung ξ gemeinsam haben. Das $(n-1)$-dimensionale gemischte Volumen

$$v\left(\mathfrak{p}_1(\xi), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}(\xi)\right) \geqq 0$$

ist nur für endlich viele Richtungen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$ positiv[1]. Wir setzen

$$v\left(\mathfrak{p}_1(\xi^{(\nu)}), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}(\xi^{(\nu)})\right) = v_\nu$$

und definieren als gemischte Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n-1}; \omega)$ diejenige Mengenfunktion, deren Wert für die Borel-Menge ω gleich der Summe derjenigen v_ν ist, für welche $\xi^{(\nu)}$ zu ω gehört. Dann gilt für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$[2]

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} H(\xi^{(\nu)}) v_\nu$$
$$= \frac{1}{n} \int_\Omega H(\xi) S(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n-1}; d\Omega).$$

Hieraus folgert man den obigen Satz durch Schlüsse, die den Schlüssen in § 3 vollständig analog sind.

[1] Diese Richtungen $\xi^{(\nu)}$ sind genau die Normalenrichtungen der $(n-1)$-dimensionalen Seiten des Polyeders

$$\lambda_1 \mathfrak{P}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \mathfrak{P}_{n-1}$$

für beliebige positive $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$. Vgl. Bericht, S. 42, ferner H. Weyl: Elementare Theorie der konvexen Polyeder. [Comment. math. helv., 7, 290—306 (1935), insbes. S. 306.]

[2] Bericht, S. 42.

Aus dem Satz IX und bekannten Integraldarstellungen der gemischten Volumina[1] geht hervor, dass für hinreichend glatte Körper

$$S(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}; \omega) = \int_\omega D(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}) M(d\Omega)$$

ist, wobei D ein gewisser Differentialausdruck zweiter Ordnung in den Stützfunktionen $H^{(1)}(\xi), H^{(2)}(\xi), \ldots, H^{(n-1)}(\xi)$ von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$ ist.

X. *Es seien* $\mathfrak{K}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(s)}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-p-1}, 0 < p \leqq n-1,$ *beliebige konvexe Körper und* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ *nicht negative Zahlen. Wird dann*

$$\mu_1 \mathfrak{K}^{(1)} + \ldots + \mu_s \mathfrak{K}^{(s)} = \mathfrak{K}$$

gesetzt, so ist

$$S(\underbrace{\mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}}_{p}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-p-1}; \omega)$$
$$= \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \mu_{\sigma_1} \ldots \mu_{\sigma_p} S(\mathfrak{K}^{(\sigma_1)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(\sigma_p)}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-p-1}; \omega),$$

wo über jedes σ *von* 1 *bis* s *zu summieren ist.*

Für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$ mit der Stützfunktion $H(\xi)$ gilt nämlich[2]

$$\frac{1}{n} \int_\Omega H(\xi) S(\underbrace{\mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}}_{p}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-p-1}; d\Omega)$$
$$= V(\mathfrak{H}, \underbrace{\mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{K}}_{p}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-p-1})$$
$$= \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} \mu_{\sigma_1} \ldots \mu_{\sigma_p} V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}^{(\sigma_1)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(\sigma_p)}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-p-1})$$

[1] Bericht, S. 59, Formel (5).

[2] Bericht, S. 40.

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} H(\xi) \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}{}' \mu_{\sigma_1}\ldots\mu_{\sigma_p} S(\mathfrak{K}^{(\sigma_1)},\ldots,\mathfrak{K}^{(\sigma_p)},\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_{n-p-1};d\Omega),$$

woraus nach III die Behauptung folgt.

Ebenso wie für die Oberflächenfunktion sieht man, dass jede gemischte Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_{n-1};\omega)$ der zu (2) analogen Relation

$$\int\limits_{\Omega} \xi\, S(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_{n-1};d\Omega) = 0$$

genügt und bei Translationen der Körper $\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2,\ldots,\mathfrak{K}_{n-1}$ ungeändert bleibt.

Ist umgekehrt $\Phi(\omega)$ eine beliebige Mengenfunktion, die der Bedingung

$$\int\limits_{\Omega} \xi\, \Phi(d\Omega) = 0$$

genügt, so gibt es konvexe Körper $\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2,\ldots,\mathfrak{K}_{n-1}$ mit

$$S(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_{n-1};\omega) = \Phi(\omega). \tag{7}$$

Ist nämlich Ω^* die (immer vorhandene) Grosskugel kleinster Dimension, für welche

$$\Phi(\Omega^*) = \Phi(\Omega)$$

ist, p die Dimension des durch Ω^* bestimmten Unterraumes R^*, ferner $\eta^{(1)},\eta^{(2)},\ldots,\eta^{(n-p)}$ paarweise orthogonale Normalenrichtungen dieses Unterraums und $\mathfrak{k}$ der nach VII vorhandene konvexe Körper in R^*, dessen Oberflächenfunktion in R^* die Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ auf Ω^* ist, so gilt (7), wenn $\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2,\ldots,\mathfrak{K}_{n-p}$ Einheitsstrecken der Richtungen $\eta^{(1)},\eta^{(2)},\ldots,\eta^{(n-p)}$ und

$$\mathfrak{K}_{n-p+1} = \mathfrak{K}_{n-p+2} = \ldots = \mathfrak{K}_{n-1} = \mathfrak{k}$$

sind.

Zwischen den gemischten Volumina beliebiger konvexer Körper besteht die Ungleichung[1]

$$V(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n)^2 \geqq V(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n)\cdot V(\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n),$$

worin, falls die rechte Seite positiv ist, das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn für jeden konvexen Körper $\mathfrak{H}$

$$\frac{V(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n)}{V(\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n)} = \frac{V(\mathfrak{H},\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n)^2}{V(\mathfrak{H},\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n)^2}$$

ist[2]. Nach IX ist dieses damit gleichwertig, dass die gemischten Oberflächenfunktionen $S(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n;\omega)$ und $S(\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_3,\ldots,\mathfrak{K}_n;\omega)$ proportional sind.

Die bisher nur in Spezialfällen bewiesene Kappenkörperbehauptung Minkowskis[3] besagt hiernach, dass von zwei konvexen Körpern $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ des dreidimensionalen Raumes $\mathfrak{K}_1$ dann und nur dann mit $\mathfrak{K}_2$ oder einem Kappenkörper von $\mathfrak{K}_2$ homothetisch ist, wenn die gemischte Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2;\omega)$ der Oberflächenfunktion $S(\mathfrak{K}_1;\omega)$ von $\mathfrak{K}_1$ proportional ist.

§ 6. Die Oberflächenfunktionen niedrigerer Ordnung eines konvexen Körpers.

Die gemischte Oberflächenfunktion

$$S_p(\mathfrak{K};\omega) = S(\underbrace{\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}}_{p},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1};\omega), \tag{8}$$

[1] Vgl. W. FENCHEL: Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes. [C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 647—650 (1936)] und A. ALEXANDROFF: Neue Ungleichungen für die Mischvolumen konvexer Körper. [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **14**, 155—157 (1937)].

[2] Vgl. W. FENCHEL: Généralisation du théorème de BRUNN et MINKOWSKI concernant les corps convexes. [C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 764—766 (1936)].

[3] Bericht, S. 92 u. 101.

wo $\mathfrak{S}$ die Einheitskugel ist, bezeichnen wir als p-te Oberflächenfunktion von $\mathfrak{K}$. Insbesondere ist dann

$$S_{n-1}(\mathfrak{K};\omega) = S(\mathfrak{K};\omega)$$

die Oberflächenfunktion im Sinne von § 3 und

$$S_0(\mathfrak{K};\omega) = M(\omega)$$

das Mass auf Ω.

Für hinreichend glatte Körper $\mathfrak{K}$ gilt

$$S_p(\mathfrak{K};\omega) = \frac{1}{\binom{n-1}{p}}\int_{\Omega}\{R_1\ldots R_p\}\,M(d\Omega),$$

wo $\{R_1\ldots R_p\}$ die p-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungsradien der Randfläche von $\mathfrak{K}$ ist[1].

Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann höchstens $(p-1)$-dimensional, wenn

$$n\,W_p(\mathfrak{K}) = n\,V(\underbrace{\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}}_{p},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p}) = S_p(\mathfrak{K};\Omega) = 0$$

ist. Dies folgt unmittelbar aus der Bedingung für das Verschwinden eines gemischten Volumens[2].

XI. *Zwei mindestens $(p+1)$-dimensionale konvexe Körper, wo $p>0$ ist, haben dann und nur dann dieselbe p-te Oberflächenfunktion, wenn sie durch Translation in einander übergeführt werden können.*

Die Translationsinvarianz der gemischten Oberflächenfunktionen ist bereits in § 5 bemerkt worden.

Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ zwei mindestens $(p+1)$-dimensionale

[1] Man entnimmt dies nach IX aus den Formeln (5), S. 59 und (7), S. 63 des Berichtes.

[2] Bericht, S. 41.

konvexe Körper mit den Stützfunktionen $H(\xi)$ bzw. $K(\xi)$ und derselben p-ten Oberflächenfunktion

$$S_p(\omega) = S_p(\mathfrak{H};\omega) = S_p(\mathfrak{K};\omega),$$

so gilt nach (6)

$$V(\mathfrak{H},\underbrace{\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}}_{p},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1}) = \frac{1}{n}\int_{\Omega}H(\xi)\,S_p(d\Omega) = V(\underbrace{\mathfrak{H},\ldots,\mathfrak{H}}_{p+1},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1})$$

und

$$V(\mathfrak{K},\underbrace{\mathfrak{H},\ldots,\mathfrak{H}}_{p},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1}) = \frac{1}{n}\int_{\Omega}K(\xi)\,S_p(d\Omega) = V(\underbrace{\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}}_{p+1},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1}),$$

und nach einer oben gemachten Bemerkung sind diese beiden Grössen positiv. Hiernach schliesst man mit Hilfe der Ungleichung

$$V(\mathfrak{H},\underbrace{\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}}_{p},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1})^{p+1} \geqq V(\underbrace{\mathfrak{H},\ldots,\mathfrak{H}}_{p+1},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1})\cdot V(\underbrace{\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K}}_{p+1},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1})^{p},$$

in der das Gleichheitszeichen nur für homothetische $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ gilt[1], ebenso wie beim Beweis von VI.

[1] Man folgert diese Ungleichung und die Bedingung für Gleichheit aus dem Satz der in Fussnote 2 Seite 25 zitierten Note in derselben Weise wie man die in § 4 angegebene Minkowskische Ungleichung aus dem Brunn-Minkowskischen Satz herleitet (Bericht, S. 91). Beim Beweis der Bedingung für Gleichheit wird in der genannten Note benutzt, dass die gemischten Volumina

$$V(\mathfrak{H},\ldots,\mathfrak{H},\mathfrak{K},\ldots,\mathfrak{K},\underbrace{\mathfrak{S},\ldots,\mathfrak{S}}_{n-p-1})$$

von Null verschieden sind, was unter der obigen Voraussetzung, dass $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ mindestens $(p+1)$-dimensional sind, stets der Fall ist.

Während im Falle $p = n-1$ die genaue Charakterisierung derjenigen Mengenfunktionen $\Phi(\omega)$ gelang, die als Oberflächenfunktionen konvexer Körper auftreten können, scheint das entsprechende Problem bei den Oberflächenfunktionen p-ter Ordnung für $p < n-1$ schwierig zu sein. Dass die Mengenfunktionen $S_p(\mathfrak{K}; \omega)$ für $0 < p < n-1$ starken nicht trivialen Einschränkungen unterliegen, sieht man leicht an Beispielen[1].

§ 7. Direkte Definition der Oberflächenfunktion.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper und ω eine Borel-Menge von Ω, ferner t eine beliebige positive Zahl. Zu jeder Stützebene von $\mathfrak{K}$, deren Normaleneinheitsvektor ξ zu ω gehört, betrachten wir die Punkte a von $\mathfrak{K}$, die in dieser Ebene liegen. Von jedem dieser Punkte a tragen wir die Strecke

$$a + \tau \xi, \qquad 0 < \tau \leqq t,$$

ab. Die Vereinigungsmenge aller dieser Strecken ist dann eine Borel-Menge $B_t(\mathfrak{K}; \omega)$ des Raumes, die wir die zu ω und t gehörige Bürstenmenge von $\mathfrak{K}$ nennen. Offenbar ist $B_t(\mathfrak{K}; \Omega)$ die mengentheoretische Differenz des Parallelkörpers $\mathfrak{K} + t\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$ selbst. Bezeichnet man für einen Punkt p ausserhalb $\mathfrak{K}$ mit p^* den (bekanntlich eindeutig bestimmten) Punkt von $\mathfrak{K}$, der von p minimalen Abstand hat, so besteht $B_t(\mathfrak{K}; \omega)$ genau aus den Punkten p, für welche die Strecke $p^* p$ höchstens die Länge t und eine Richtung aus ω hat. Das n-dimensionale Mass $V_t(\mathfrak{K}; \omega)$

[1] Vgl. z. B. A. ALEXANDROFF: Über die Frage nach der Existenz eines konvexen Körpers bei dem die Summe der Hauptkrümmungsradien eine gegebene positive Funktion ist, welche den Bedingungen der Geschlossenheit genügt. [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **14**, 59—60 (1937)].

von $B_t(\mathfrak{K}; \omega)$ ist eine Mengenfunktion auf Ω, und es gilt

$$(9) \qquad V_t(\mathfrak{K}; \Omega) = V(\mathfrak{K} + t\mathfrak{S}) - V(\mathfrak{K}).$$

XII. *Für jede Borel-Menge ω von Ω gilt*

$$S(\mathfrak{K}; \omega) = \lim_{t \to 0} \frac{V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{t}.$$

In diesem Satz ist natürlich enthalten, dass die Mengenfunktion $\frac{V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{t}$ für $t \to 0$ gegen die Oberflächenfunktion im Sinne von § 2 konvergiert; er besagt aber mehr, nämlich nicht nur die Konvergenz der Funktionswerte für die Stetigkeitsmengen von $S(\mathfrak{K}; \omega)$, sondern für alle Borel-Mengen von Ω.

Wir zeigen zunächst, dass $V_t(\mathfrak{K}; \omega)$ bei festem t im Sinne der Konvergenz von Mengenfunktionen stetig von $\mathfrak{K}$ abhängt. Hierzu haben wir nach § 2 zu zeigen: Konvergiert die Folge $\mathfrak{K}^1, \mathfrak{K}^2, \ldots$ konvexer Körper gegen den Körper $\mathfrak{K}$, so gilt

$$V_t(\mathfrak{K}^\nu; \Omega) \to V_t(\mathfrak{K}; \Omega)$$

und für jedes offene ω

$$(10) \qquad \varliminf_{\nu \to \infty} V_t(\mathfrak{K}^\nu; \omega) \geqq V_t(\mathfrak{K}; \omega).$$

Die erste Behauptung folgt wegen (9) aus der Stetigkeit des Volumens. Es sei nun ω eine offene Menge von Ω. Dann ist die Bürstenmenge $B_t(\mathfrak{K}; \omega)$ relativ zu $B_t(\mathfrak{K}; \Omega)$ offen, und ihr offener Kern $\tilde{B}_t(\mathfrak{K}; \omega)$, der durch Weglassen der zur Berandung von $\mathfrak{K} + t\mathfrak{S}$ gehörigen Punkte entsteht, hat ebenfalls das Mass $V_t(\mathfrak{K}; \omega)$. Ist nun p ein Punkt von $\tilde{B}_t(\mathfrak{K}; \omega)$ und p^* bzw. p^*_ν der Punkt von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}^\nu$, der von p minimalen Abstand hat, so konvergiert p_ν^* gegen p^*, also die Strecke $p_\nu^* p$ gegen $p^* p$. Da ω offen ist, liegt also p für alle hinreichend grossen ν in $B_t(\mathfrak{K}^\nu; \omega)$; d. h. $B_t(\mathfrak{K}; \omega)$ ist im Limes inferior der Mengenfolge $B_t(\mathfrak{K}^\nu; \omega)$ enthalten, und es gilt daher (10).

Wir betrachten nun die beiden Mengenfunktionen $S(\mathfrak{K}, \omega)$ und $\frac{V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{t}$. Ist $\mathfrak{K}$ ein Polyeder, so gilt offenbar für jede Borel-Menge ω die Ungleichung

$$S(\mathfrak{K}; \omega) \leqq \frac{V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{t};$$

denn die Bürstenmenge $B_t(\mathfrak{K}; \omega)$ enthält diejenigen Prismen der Höhe t, deren Grundflächen die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{K}$ mit Normalenrichtungen aus ω sind. Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper, so folgt hieraus durch Polyederapproximation wegen der stetigen Abhängigkeit der beiden Mengenfunktionen vom Körper dieselbe Ungleichung für alle gemeinsamen Stetigkeitsmengen der beiden Mengenfunktionen, also nach § 2 ebenfalls für alle Borel-Mengen. Es gilt also

$$0 \leqq \frac{V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{t} - S(\mathfrak{K}; \omega) \leqq \frac{V_t(\mathfrak{K}; \Omega)}{t} - S(\mathfrak{K}; \Omega),$$

letzteres wegen der Additivität von $\frac{V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{t} - S(\mathfrak{K}; \omega)$. Nach MINKOWSKI konvergiert aber die rechte Seite mit t gegen Null, womit der Satz bewiesen ist.

Aus der Definition der Bürstenmenge entnimmt man für beliebiges positives Δt die Relation

$$V_{t+\Delta t}(\mathfrak{K}; \omega) = V_t(\mathfrak{K}; \omega) + V_{\Delta t}(\mathfrak{K} + t\mathfrak{S}; \omega).$$

Nach XII gilt also für jede Borel-Menge ω

$$(11) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_{t+\Delta t}(\mathfrak{K}; \omega) - V_t(\mathfrak{K}; \omega)}{\Delta t} = S(\mathfrak{K} + t\mathfrak{S}; \omega).$$

Nun ist nach X und (8)

$$S(\mathfrak{K} + t\mathfrak{S}; \omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n-1}{\nu-1} t^{\nu-1} S_{n-\nu}(\mathfrak{K}; \omega).$$

Durch Integration von (11) nach t ergibt sich also der Ausdruck

$$V_t(\mathfrak{K}; \omega) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu S_{n-\nu}(\mathfrak{K}; \omega)$$

für das Volumen der Bürstenmenge, der für $\omega = \Omega$ in die Steinersche Formel für das Volumen eines Parallelkörpers übergeht.

Indleveret til Trykkeriet den 19. Marts 1938.
Færdig fra Trykkeriet den 20. Juni 1938.