Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV,** 8.

OM TAL, SOM PAA TO MAADER KAN SKRIVES SOM EN SUM AF POTENSER AF FEMTE GRAD

AF

A. S. BANG

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1937

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Indledning.

1. A. MARTIN har i Aaret 1887[1] fundet 2 Eksempler paa Potenstal af femte Grad, som er lig med Summen af seks Potenstal af samme Grad, nemlig

$$12^5 = 11^5 + 9^5 + 7^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5$$
$$\text{og } 30^5 = 29^5 + 19^5 + 16^5 + 11^5 + 10^5 + 5^5.$$

Han skriver herom i 1896[2]:

Som bekendt kan Summen af to hele Tals femte Potenser ikke være lig en femte Potens, men, saavidt Forfatterens Viden rækker, er det ikke bevist, at Summen af tre, fire eller fem femte Potenser ikke kan være lig en femte Potens. Det er ikke lykkedes Forfatteren at finde færre end seks hele Potenser af femte Grad, hvis Sum er en femte Potens.

2. Det Problem, MARTIN her har opstillet, staar, saavidt mig bekendt, stadig uløst.

Jeg ved heller ikke, om der eksisterer Femte-Potenser, som er lig Summen af tre eller fire Potenser af samme Grad, men jeg har fundet, at der gives uendelig mange Femte-Potenser, som hver er lig Summen af fem Potenser af samme Grad.

Dette Resultat fremgaar af en Identitet, som indeholder seks Femte-Potenser, og er fremsat paa Side 26, og hvoraf man specielt faar

[1] Bull. Phil. Soc. Washington.

[2] Chicago Congr. Papers. Se: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathem. 1897. Side 175.

$$107^5 = 100^5 + 80^5 + 57^5 + 43^5 + 7^5;$$
$$17516^5 = 15435^5 + 14175^5 + 11441^5 + 5366^5 + 709^5.$$

3. Det skal tilføjes, at der ogsaa eksisterer Femte-Potenser, som er lig Summen af syv eller af otte Potenser af samme Grad, idet jeg, ved at prøve mig frem, har fundet

$$92^5 = 89^5 + 58^5 + 51^5 + 22^5 + 11^5 + 9^5 + 2^5$$
og $$14^5 = 13^5 + 11^5 + 5^5 + 4^5 + 4^5 + 3^5 + 2^5 + 2^5.$$

4. Man kan stille den mere almindelige Opgave:

At bestemme Tal, som paa to Maader kan skrives som en Sum af Femte-Potenser.

Regner man ogsaa med negative Tal, kan man kortere sige:

At bestemme Femte-Potenser med Summen Nul.

I Stedet for f. Eks.

$$69^5 + 66^5 + 63^5 = 79^5 + 53^5 + 50^5 + 16^5$$

kan skrives

$$79^5 + (-69)^5 + (-66)^5 + (-63)^5 + 53^5 + 50^5 + 16^5 = 0.$$

5. Den stillede Opgave er selvfølgelig ikke løst her i sin Almindelighed.

Den tilsvarende Opgave for Fjerde-Potenser er saaledes ogsaa kun løst i specielle Tilfælde, men i det følgende skal angives en Mængde Identiteter, som umiddelbart giver

9, 8, 7 eller 6 Femte-Potenser med Summen Nul.

Der er angivet 4 Identiteter med 9 Potenser, 7 med 8, 1 med 7 og 1 med 6 Potenser.

Af Identiteterne med 8 Potenser indeholder en 4 Femte- og 4 Tiende-Potenser og en anden 4 Femte- og 4 Femtende-Potenser.

6. Der er angivet 3 Tal, som hver for sig paa 3 Maader, og 1 Tal, som paa 4 Maader kan skrives som en Sum af 4 (positive eller negative) Femte-Potenser.

7. I et Tillæg er samlet de specielle Eksempler, som findes i Afhandlingen, og i hvilke hver enkelt Potens er mindre end 300^5.

1. Kapitel.

9 Femte-Potenser.

1. Vi vil betragte Ligningen

$$(x+m)^5+(x-m)^5+(x+n)^5+(x-n)^5=$$
$$=(x+p)^5+(x-p)^5+(x+q)^5+(x-q)^5+y^5,$$

som indeholder 9 Femte-Potenser.

Den reduceres til

$$20x^3(m^2+n^2-p^2-q^2)+10x(m^4+n^4-p^4-q^4)=y^5.$$

Betingelsen for, at Koefficienten til x^3 bliver Nul, er

$$m+p=2ab;\quad m-p=2cd;$$
$$q+n=2ac;\quad q-n=2bd,$$

hvoraf

$$m=ab+cd;\quad p=ab-cd;$$
$$q=ac+bd;\quad n=ac-bd,$$

hvorpaa Indsætning giver

$$80\,abcd\,(a^2-d^2)(b^2-c^2)\,x=y^5.$$

Denne Ligning tilfredsstilles af

$$x=\frac{2s^4}{5e^5};\quad y=\frac{2s}{e},$$

idet man, for Kortheds Skyld, sætter

$$abcd\,(a^2 - d^2)\,(b^2 - c^2) = s.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer da Identiteten:

$$A^5 + B^5 + C^5 + D^5 = E^5 + F^5 + G^5 + H^5 + I^5,$$

hvor

$$\begin{aligned}
A &= 2s^4 + 5\,(ab + cd)\,e^5; & B &= 2s^4 - 5\,(ab + cd)\,e^5;\\
C &= 2s^4 + 5\,(ac - bd)\,e^5; & D &= 2s^4 - 5\,(ac - bd)\,e^5;\\
E &= 2s^4 + 5\,(ab - cd)\,e^5; & F &= 2s^4 - 5\,(ab - cd)\,e^5;\\
G &= 2s^4 + 5\,(ac + bd)\,e^5; & H &= 2s^4 - 5\,(ac + bd)\,e^5;\\
I &= 10\,se^4.
\end{aligned}$$

Ved at indsætte hele Værdier for a, b, c, d og e faar man Eksempler paa 9 Femte-Potenser med Summen Nul.

Specielt faar man, idet man i hvert enkelt Tilfælde dividerer med den højeste Potens af femte Grad, som gaar op i alle 9 Potenser.

for $a = 2,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 1,\ e = 12$

$$67^5 + 60^5 + 57^5 + 23^5 = 77^5 + 27^5 + 27^5 + 13^5 + 3^5;$$

for $a = 3,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 1,\ e = 24$

$$143^5 + 113^5 + 103^5 + 73^5 = 133^5 + 133^5 + 83^5 + 83^5 + 60^5;$$

for $a = 2,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 1,\ e = 18$

$$209^5 + 196^5 + 180^5 + 151^5 = 241^5 + 164^5 + 119^5 + 16^5 + 16^5;$$

for $a = 4,\ b = 4,\ c = 1,\ d = 1,\ e = 360$

$$253^5 + 100^5 + 100^5 + 35^5 = 235^5 + 180^5 + 172^5 + 53^5 + 28^5;$$

for $a = 5,\ b = 3,\ c = 1,\ d = 1,\ e = 288$

$$269^5 + 143^5 + 107^5 + 1^5 = 251^5 + 197^5 + 180^5 + 53^5 + 19^5;$$

for $a = 6,\ b = 5,\ c = 3;\ d = 2,\ e = 3840$

$$441^5 + 266^5 + 166^5 = 391^5 + 366^5 + 300^5 + 66^5 + 41^5 + 9^5.$$

2. Vi vender tilbage til Ligningen

$$(x+m)^5+(x-m)^5+(x+n)^5+(x-n)^5=$$
$$=(x+p)^5+(x-p)^5+(x+q)^5+(x-q)^5+y^5,$$

som reduceres til

$$20x^3(m^2+n^2-p^2-q^2)+10x(m^4+n^4-p^4-q^4)=y^5.$$

Bestemmer man nu m, n, p og q saaledes, at

$$m^4+n^4=p^4+q^4,$$

faar man

$$20x^3(m^2+n^2-p^2-q^2)=y^5,$$

som tilfredsstilles af

$$x=\frac{250\,a^3}{b^5};\quad y=\frac{50\,a^2}{b^3},$$

idet man, for Kortheds Skyld, sætter

$$m^2+n^2-p^2-q^2=a.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer da Identiteten

$$(250\,a^3+mb^5)^5+(250\,a^3-mb^5)^5+(250\,a^3+nb^5)^5+$$
$$(250\,a^3-nb^5)^5=(250\,a^3+pb^5)^5+(250\,a^3-pb^5)^5+$$
$$(250\,a^3+qb^5)^5+(250\,a^3-qb^5)^5+(50\,a^2b^2)^5.$$

Nu har, som bekendt, Ligningen

$$m^4+n^4=p^4+q^4$$

uendelig mange Løsninger.

Euler har først angivet Identiteter, som giver sammenhørende Værdier af de ubekendte, og senere er mange andre fundet, men nogen almindelig Løsning kendes ikke.

Til hvert Sæt Løsninger af Fjerdegrads Ligningen svarer der altsaa Identiteter, som giver 9 Femte-Potenser med Summen Nul.

De mindste Tal, som passer i Fjerdegrads Ligningen er

$$m = 134; \quad n = 133; \quad p = 159; \quad q = 59.$$

Man faar da

$$144000\,x^3 = y^5,$$

som tilfredsstilles af

$$x = \frac{6\,a^5}{5\,b^5}; \quad y = \frac{12\,a^3}{b^3},$$

og giver Identiteten

$$\begin{gathered}(6\,a^5 + 670\,b^5)^5 + (6\,a^5 - 670\,b^5)^5 + (6\,a^5 + 665\,b^5)^5 + \\ (6\,a^5 - 665\,b^5)^5 = (6\,a^5 + 790\,b^5)^5 + (6\,a^5 - 790\,b^5)^5 + \\ (6\,a^5 + 295\,b^5)^5 + (6\,a^5 - 295\,b^5)^5 + (60\,a^3b^2)^5.\end{gathered}$$

Specielt giver $a = 1$, $b = 1$

$$784^5 + 676^5 + 671^5 + 289^5 = 796^5 + 664^5 + 659^5 + 301^5 + 60^5.$$

3. Ligningen paa Side 5 kan gøres mere almindelig, idet man sætter

$$\begin{gathered}(\alpha x + m)^5 + (\alpha x - m)^5 + (\beta x + n)^5 + (\beta x - n)^5 = \\ = (\alpha x + p)^5 + (\alpha x - p)^5 + (\beta x + q)^5 + (\beta x - q)^5 + y^5.\end{gathered}$$

Den reduceres til

$$\begin{gathered}20\,x^3\,(\alpha^3 m^2 + \beta^3 n^2 - \alpha^3 p^2 - \beta^3 q^2) + \\ + 10\,x\,(\alpha m^4 + \beta n^4 - \alpha p^4 - \beta q^4) = y^5.\end{gathered}$$

Her kan man bestemme de ubekendte saaledes, at

$$\alpha^3\,(m^2 - p^2) = \beta^3\,(q^2 - n^2).$$

Sætter man $\qquad m = p + k,$

fremkommer nemlig en Førstegrads Ligning til Bestemmelse af p, hvorpaa x findes af

$$10\,x\,(\alpha m^4 + \beta n^4 - \alpha p^4 - \beta q^4) = y^5.$$

Fremgangsmaaden skal vises ved 2 Eksempler.

4. Første Eksempel.

Ligningen

$$\alpha^3 (m^2 - p^2) = \beta^3 (q^2 - n^2)$$

tilfredsstilles af

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ m = 9,\ n = 1,\ p = 0,\ q = 5,$$

som giver

$$112500\,x = y^5,$$

som tilfredsstilles af

$$x = \frac{a^5}{36\,b^5};\quad y = \frac{5\,a}{b}.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten:

$$(2\,a^5 + 324\,b^5)^5 + (2\,a^5 - 324\,b^5)^5 + (3\,a^5 + \ 36\,b^5)^5 +$$
$$(3\,a^5 - \ 36\,b^5)^5 = (2\,a^5)^5 + (2\,a^5)^5 + (3\,a^5 + 180\,b^5)^5 +$$
$$(3\,a^5 - 180\,b^5)^5 + (180\,ab^4)^5.$$

Specielt giver $a = 2,\ b = 1$

$$97^5 + 33^5 + 21^5 + 15^5 = 90^5 + 69^5 + 65^5 + 16^5 + 16^5;$$

$a = 3,\ b = 1$ giver

$$90^5 + 85^5 + 77^5 + 18^5 = 101^5 + 61^5 + 60^5 + 54^5 + 54^5;$$

$a = 1,\ b = 1$ giver

$$326^5 + 177^5 + 39^5 = 322^5 + 183^5 + 180^5 + 33^5 + 2^5 + 2^5.$$

5. Andet Eksempel.

Ligningen

$$\alpha^3 (m^2 - p^2) = \beta^3 (q^2 - n^2)$$

tilfredsstilles af

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ m = 5,\ n = 1,\ p = 1,\ q = 2,$$

som giver

$$5940\,x = y^5,$$

som tilfredsstilles af

$$x = \frac{72\,a^5}{55\,b^5};\quad y = \frac{6\,a}{5}.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$(72\,a^5 + 275\,b^5)^5 + (72\,a^5 - 275\,b^5)^5 + (144\,a^5 + 55\,b^5)^5 + (144\,a^5 - 55\,b^5)^5 = (72\,a^5 + 55\,b^5)^5 + (72\,a^5 - 55\,b^5)^5 + (144\,a^5 + 110\,b^5)^5 + (144\,a^5 - 110\,b^5)^5 + (330\,ab^4)^5.$$

Specielt giver $a = 1$, $b = 1$

$$347^5 + 199^5 + 89^5 = 330^5 + 254^5 + 203^5 + 127^5 + 34^5 + 17^5.$$

6. De i dette Kapitel fremsatte Identiteter giver Eksempler paa, at

Summen af fire positive Femte-Potenser er lig Summen af fem positive Femte-Potenser,

eller, at

Summen af tre positive Femte-Potenser er lig Summen af seks positive Femte-Potenser.

At der findes uendelig mange Eksempler af hver Slags, ses f. Eks. af den sidste Identitet, idet man i første Tilfælde tager

$$72\,a^5 > 275\,b^5$$

og i andet Tilfælde

$$275\,b^5 > 72\,a^5 > 55\,b^5.$$

7. Efterfølgende Eksempler skyldes ikke Identiteterne, men de er fundne ved Forsøg:

$$11^5 + 10^5 + 6^5 + 1^5 = 12^5 + 7^5 + 5^5 + 2^5 + 2^5,$$

hvor $11 + 10 + 6 + 1 = 12 + 7 + 5 + 2 + 2;$

$$24^5 + 8^5 + 1^5 + 1^5 = 22^5 + 17^5 + 17^5 + 4^5 + 4^5;$$

$$55^5 + 40^5 + 9^5 + 8^5 = 57^5 + 21^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5;$$

$$22^5 + 4^5 + 3^5 = 20^5 + 18^5 + 9^5 + 5^5 + 5^5 + 2^5;$$
$$61^5 + 18^5 + 18^5 = 55^5 + 51^5 + 8^5 + 8^5 + 3^5 + 2^5;$$
$$93^5 + 92^5 + 6^5 + 5^5 = 106^5 + 44^5 + 14^5 + 1^5 + 1^5.$$
$$20^5 + 6^5 = 19^5 + 14^5 + 11^5 + 8^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$$
$$14^5 = 13^5 + 11^5 + 5^5 + 4^5 + 4^5 + 3^5 + 2^5 + 2^5.$$

2. Kapitel.

8 Femte-Potenser.

1. Vi vil betragte Ligningen

$$(x+m)^5 + (x-m)^5 + (x+n)^5 + (x-n)^5 =$$
$$(x+p)^5 + (x-p)^5 + (x+q)^5 + (x-q)^5,$$

som indeholder 8 Femte-Potenser.

Den reduceres, efter Division med $10x$, til

$$2x^2(m^2 + n^2 - p^2 - q^2) = q^4 + p^4 - m^4 - n^4.$$

Sætter man

$$m = \alpha + \beta;\; p = \alpha - \beta;\; q = \gamma + \delta;\; n = \gamma - \delta,$$

omdannes den til

$$x^2(\alpha\beta - \gamma\delta) = \gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2).$$

Denne Ligning skal løses i 5 specielle Tilfælde.

2. Første Tilfælde.

Vi sætter

$$\beta = 3\gamma;\; \delta = 2\alpha;\; x = 5y,$$

og faar da

$$\alpha^2 = 5y^2 + 5\gamma^2$$

eller
$$\alpha^2 = (\gamma + 2y)^2 + (2\gamma - y)^2.$$

Denne Ligning tilfredsstilles af

$$\alpha = a^2 + b^2; \quad 2y + \gamma = 2ab; \quad y + 2\gamma = a^2 - b^2.$$

Dette giver

$$5\beta = 6a^2 + 6ab - 6b^2; \qquad 5\gamma = 2a^2 + 2ab - 2b^2;$$
$$\delta = 2a^2 + 2b^2; \qquad x = -a^2 + 4ab + b^2;$$

og derefter

$$5m = 11a^2 + 6ab - b^2; \qquad 5n = -8a^2 + 2ab - 12b^2;$$
$$5p = -a^2 - 6ab + 11b^2; \quad 5q = 12a^2 + 2ab + 8b^2.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer da Identiteten

$$A^5 + B^5 + C^5 + D^5 = E^5 + F^5 + G^5 + H^5,$$

hvor

$$A = 6a^2 + 26ab + 4b^2; \quad B = -16a^2 + 14ab + 6b^2;$$
$$C = -13a^2 + 22ab - 7b^2; \quad D = 3a^2 + 18ab + 17b^2;$$
$$E = -6a^2 + 14ab + 16b^2; \quad F = -4a^2 + 26ab - 6b^2;$$
$$G = 7a^2 + 22ab + 13b^2; \quad H = -17a^2 + 18ab - 3b^2.$$

Her er tillige

$$A + B + C + D = E + F + G + H.$$

Her giver $a = 1, \ b = 0$

$$16^5 + 13^5 + 7^5 = 17^5 + 6^5 + 6^5 + 4^5 + 3^5;$$

$a = 1, \ b = 1$ giver

$$21^5 + 12^5 + 8^5 = 19^5 + 18^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5;$$

$a = 3, \ b = 1$ giver

$$68^5 + 51^5 + 49^5 = 71^5 + 48^5 + 29^5 + 18^5 + 2^5;$$

$a = 2, \ b = -1$ giver

$$107^5 + 74^5 + 36^5 + 3^5 = 103^5 + 86^5 + 24^5 + 7^5;$$

$a = 5, \ b = 1$ giver

$$169^5 + 142^5 + 91^5 + 32^5 = 162^5 + 149^5 + 111^5 + 12^5;$$

$a = 4, \; b = 1$ giver

$$213^5 + 194^5 + 127^5 + 34^5 = 204^5 + 203^5 + 137^5 + 24^5;$$

$a = 3, \; b = 2$ giver

$$226^5 + 203^5 + 57^5 = 247^5 + 96^5 + 94^5 + 36^5 + 13^5;$$

$a = 5, \; b = 3$ giver

$$288^5 + 249^5 + 91^5 = 311^5 + 118^5 + 102^5 + 68^5 + 29^5.$$

3. Andet Tilfælde.

Vi gaar tilbage til Ligningen

$$x^2 (\alpha\beta - \gamma\delta) = \gamma\delta (\gamma^2 + \delta^2) - \alpha\beta (\alpha^2 + \beta^2),$$

og sætter

$$\beta = 4\gamma; \;\; \delta = 2\alpha,$$

hvoraf $$2\alpha^2 - x^2 = 31\gamma^2.$$

Sættes nu $$\gamma = 2a^2 - b^2,$$

faar man

$$31\gamma^2 = 2(8a^2 + 2ab + 4b^2)^2 - (2a^2 + 16ab + b^2)^2.$$

Denne Ligning er tilfredsstillet af

$$x = 2a^2 + 16ab + b^2; \quad \alpha = 8a^2 + 2ab + 4b^2;$$
$$\beta = 8a^2 - 4b^2; \; \gamma = 2a^2 - b^2; \; \delta = 16a^2 + 4ab + 8b^2,$$

som giver

$$m = 16a^2 + 2ab; \quad n = -14a^2 - 4ab - 9b^2;$$
$$p = 2ab + 8b^2; \quad q = 18a^2 + 4ab + 7b^2.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$A^5 + B^5 + C^5 + D^5 = E^5 + F^5 + G^5 + H^5,$$

hvor

$$A = 18a^2 + 18ab + b^2; \quad B = -14a^2 + 14ab + b^2;$$
$$C = -12a^2 + 12ab - 8b^2; \quad D = 16a^2 + 20ab + 10b^2;$$

$$E = 2a^2 + 18ab + 9b^2; \qquad F = 2a^2 + 14ab - 7b^2;$$
$$G = 20a^2 + 20ab + 8b^2; \qquad H = -16a^2 + 12ab - 6b^2.$$

Tillige er

$$A + B + C + D = E + F + G + H.$$

Specielt giver $a = 1$, $b = 0$

$$9^5 + 8^5 + 8^5 = 10^5 + 7^5 + 6^5 + 1^5 + 1^5;$$

$a = 1$, $b = -1$ giver

$$32^5 + 27^5 + 8^5 = 34^5 + 19^5 + 7^5 + 6^5 + 1^5;$$

$a = 1$, $b = 1$ giver

$$48^5 + 29^5 + 9^5 + 8^5 = 46^5 + 37^5 + 10^5 + 1^5;$$

$a = 2$, $b = -1$ giver

$$83^5 + 80^5 + 48^5 = 94^5 + 37^5 + 34^5 + 27^5 + 19^5;$$

$a = 1$, $b = -3$ giver

$$106^5 + 103^5 + 46^5 = 120^5 + 47^5 + 32^5 + 29^5 + 27^5;$$

$a = 2$, $b = 1$ giver

$$114^5 + 109^5 + 46^5 = 128^5 + 53^5 + 32^5 + 29^5 + 27^5;$$

$a = 1$, $b = 3$ giver

$$152^5 + 137^5 + 48^5 = 166^5 + 81^5 + 37^5 + 34^5 + 19^5;$$

$a = 3$, $b = -1$ giver

$$167^5 + 152^5 + 128^5 = 186^5 + 109^5 + 94^5 + 31^5 + 27^5;$$

$a = 2$, $b = -3$ giver

$$192^5 + 131^5 + 32^5 + 27^5 = 190^5 + 139^5 + 34^5 + 19^5;$$

$a = 3$, $b = 1$ giver

$$217^5 + 214^5 + 114^5 = 248^5 + 83^5 + 81^5 + 80^5 + 53^5;$$

$a = 5$, $b = -2$ giver

$$243^5 + 226^5 + 166^5 = 272^5 + 137^5 + 120^5 + 59^5 + 47^5;$$

$a = 2$, $b = 3$ giver

$$274^5 + 189^5 + 46^5 + 37^5 = 272^5 + 197^5 + 48^5 + 29^5;$$

$a = 5$, $b = 2$ giver

$$320^5 + 317^5 + 152^5 = 366^5 + 133^5 + 106^5 + 103^5 + 81^5.$$

4. Tredie Tilfælde.

I Ligningen

$$x^2(\alpha\beta - \gamma\delta) = \gamma\delta(\gamma + \delta) - \alpha\beta(\alpha + \beta)$$

sætter man

$$\beta = 3\gamma;\ \delta = 3\varphi;\ \alpha = 2\varphi;\ \gamma = 2\varepsilon,$$

som giver

$$\varphi^2 - x^2 = 68\,\varepsilon^2.$$

Denne Ligning tilfredsstilles af

$$\varphi = 17\,a^2 + b^2;\ x = 17\,a^2 - b^2;\ \varepsilon = ab,$$

hvorpaa

$$\begin{aligned} \alpha &= 34\,a^2 + 2\,b^2; \quad \beta = 6\,ab; \quad \delta = 51\,a^2 + 3\,b^2;\\ m &= 34\,a^2 + 6\,ab + 2\,b^2; \quad p = 34\,a^2 - 6\,ab + 2\,b^2;\\ q &= 51\,a^2 + 2\,ab + 3\,b^2; \quad n = -51\,a^2 + 2\,ab - 3\,b^2. \end{aligned}$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$A^5 + B^5 + C^5 + D^5 = E^5 + F^5 + G^5 + H^5,$$

hvor

$$\begin{aligned} A &= 51\,a^2 + 6\,ab + b^2; \quad & B &= 17\,a^2 - 6\,ab + 3\,b^2;\\ C &= 34\,a^2 + 2\,ab + 4\,b^2; \quad & D &= 68\,a^2 - 2\,ab + 2\,b^2;\\ E &= 51\,a^2 - 6\,ab + b^2; \quad & F &= 17\,a^2 + 6\,ab + 3\,b^2;\\ G &= 34\,a^2 - 2\,ab + 4\,b^2; \quad & H &= 68\,a^2 + 2\,ab + 2\,b^2. \end{aligned}$$

Tillige er

$$A + B + C + D = E + F + G + H.$$

Specielt giver $a = 1$, $b = 1$

$$36^5 + 23^5 + 18^5 + 13^5 = 34^5 + 29^5 + 20^5 + 7^5;$$

$a = 1$, $b = 3$ giver

$$46^5 + 32^5 + 31^5 + 21^5 = 40^5 + 39^5 + 38^5 + 13^5;$$

$a = 1$, $b = 5$ giver

$$72^5 + 54^5 + 53^5 + 31^5 = 64^5 + 62^5 + 61^5 + 23^5;$$

$a = 1$, $b = 2$ giver

$$80^5 + 46^5 + 43^5 + 41^5 = 72^5 + 67^5 + 54^5 + 17^5;$$

$a = 1$, $b = 4$ giver

$$108^5 + 90^5 + 89^5 + 43^5 = 106^5 + 92^5 + 91^5 + 41^5;$$

$a = 1$, $b = 7$ giver

$$122^5 + 76^5 + 71^5 + 61^5 = 108^5 + 103^5 + 90^5 + 29^5;$$

$a = 1$, $b = 9$ giver

$$188^5 + 106^5 + 103^5 + 93^5 = 170^5 + 157^5 + 124^5 + 39^5;$$

$a = 1$, $b = 6$ giver

$$190^5 + 128^5 + 123^5 + 89^5 = 166^5 + 161^5 + 152^5 + 51^5;$$

$a = 1$, $b = 11$ giver

$$270^5 + 157^5 + 144^5 + 119^5 = 248^5 + 223^5 + 166^5 + 53^5;$$

$a = 2$, $b = 1$ giver

$$278^5 + 193^5 + 136^5 + 83^5 = 270^5 + 217^5 + 144^5 + 59^5;$$

$a = 2$, $b = 3$ giver

$$302^5 + 177^5 + 160^5 + 131^5 = 278^5 + 249^5 + 184^5 + 79^5.$$

5. Fjerde Tilfælde.

I Ligningen

$$x^2 (\alpha\beta - \gamma\delta) = \gamma\delta (\gamma^2 + \delta^2) - \alpha\beta (\alpha^2 + \beta^2)$$

sætter man

$$\alpha = (r^3 + r)\, b;\ \ \beta = a;\ \ \gamma = ra;\ \ \delta = 2b,$$

som giver

$$x^2 (r^3 - r) = a^2 (r^3 - r) - b^2 ((r^3 + r)^3 - 8r).$$

Forudsætter man, at r er forskellig fra $+1$, 0 og -1, kan man bortdividere $r^3 - r$ og faar da

$$a^2 - x^2 = (r^6 + 4\,r^4 + 7\,r^2 + 8)\, b^2.$$

Sætter man nu $b = 2de$ og, for Kortheds Skyld,

$$r^6 + 4r^4 + 7r^2 + 8 = k,$$

faar man

$$a^2 - x^2 = 4kd^2e^2,$$

som tilfredsstilles af

$$a = kd^2 + e^2;\ \ x = kd^2 - e^2.$$

Dette giver

$$\begin{aligned} \alpha &= (2r^3 + 2r)\, de; & \beta &= kd^2 + e^2; \\ \gamma &= krd^2 + re^2; & \delta &= 4de, \end{aligned}$$

og derefter

$$\begin{aligned} m &= \ \ kd^2 + (2r^3 + 2r)\, de + e^2; & n &= rkd^2 - 4de + re^2; \\ p &= -kd^2 + (2r^3 + 2r)\, de - e^2; & q &= rkd^2 + 4de + re^2. \end{aligned}$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$A^5 + B^5 + C^5 + D^5 = E^5 + F^5 + G^5 + H^5,$$

hvor

$$\begin{aligned} A &= 2kd^2 + (2r^3 + 2r)\, de; \\ B &= (-2r^3 - 2r)\, de - 2e^2; \\ C &= (kr + k)\, d^2 - 4de + (r - 1)\, e^2; \\ D &= (-kr + k)\, d^2 + 4de - (r + 1)\, e^2; \\ E &= (2r^3 + 2r)\, de - 2e^2; \\ F &= 2kd^2 - (2r^3 + 2r)\, de; \end{aligned}$$

$$G = (kr + k)\, d^2 + 4\, de + (r - 1)\, e^2;$$
$$H = (-kr + k)\, d^2 - 4\, de - (r + 1)\, e^2.$$

Tillige er

$$A + B + C + D = E + F + G + H.$$

Specielt giver $r = 2,\ d = 1,\ e = 2$

$$61^5 + 46^5 + 23^5 = 63^5 + 36^5 + 21^5 + 6^5 + 4^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 6$ giver

$$63^5 + 56^5 + 37^5 = 69^5 + 31^5 + 26^5 + 24^5 + 6^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 10$ giver

$$69^5 + 66^5 + 63^5 = 79^5 + 53^5 + 50^5 + 16^5,$$

som kun indeholder 7 Femte-Potenser:

$r = 2,\ d = 1,\ e = 14$ giver

$$101^5 + 79^5 + 76^5 + 14^5 = 93^5 + 87^5 + 84^5 + 6^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 4$ giver

$$123^5 + 102^5 + 57^5 = 131^5 + 62^5 + 49^5 + 28^5 + 12^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 8$ giver

$$131^5 + 122^5 + 97^5 = 147^5 + 81^5 + 72^5 + 42^5 + 8^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 18$ giver

$$133^5 + 126^5 + 111^5 = 151^5 + 93^5 + 86^5 + 36^5 + 4^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 12$ giver

$$171^5 + 137^5 + 132^5 + 22^5 = 161^5 + 147^5 + 142^5 + 12^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 22$ giver

$$191^5 + 176^5 + 133^5 = 213^5 + 111^5 + 96^5 + 66^5 + 14^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 16$ giver

$$249^5 + 171^5 + 162^5 + 48^5 = 217^5 + 208^5 + 203^5 + 2^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 26$ giver

$$261^5 + 234^5 + 159^5 = 287^5 + 133^5 + 106^5 + 104^5 + 24^5;$$

$r = 2,\ d = 1,\ e = 20$ giver

$$321^5 + 300^5 + 243^5 = 361^5 + 203^5 + 182^5 + 100^5 + 18^5.$$

6. Femte Tilfælde.

I Ligningen

$$x^2(\alpha\beta - \gamma\delta) = \gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

sættes $$x = \delta = \frac{\alpha\beta}{2\gamma},$$

hvorved man faar $\gamma^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2,$

som tilfredsstilles af

$$\alpha = a^2 + 2ab - b^2; \quad \beta = a^2 - 2ab - b^2;$$

$$\gamma = 2a^2 + 2b^2; \quad \delta = \frac{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}{4a^2 + b^2}.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$A^5 + B^5 + C^5 = D^5 + E^5 + F^5 + G^5 + H^5,$$

hvor

$$\begin{aligned}
A &= 9a^4 - 6a^2b^2 - 7b^4;\\
B &= 8a^4 + 16a^2b^2 + 8b^4;\\
C &= 8a^4 + 16a^2b^2 + 8b^4;\\
D &= 10a^4 + 4a^2b^2 + 10b^4;\\
E &= 7a^4 + 6a^2b^2 - 9b^4;\\
F &= 6a^4 + 28a^2b^2 + 6b^4;\\
G &= a^4 + 16a^3b - 6a^2b^2 + 16ab^3 + b^4;\\
H &= a^4 - 16a^3b - 6a^2b^2 - 16ab^3 + b^4,
\end{aligned}$$

hvor tillige

$$A + B + C = D + E + F + G + H.$$

Specielt giver $a = 1,\ b = 0$

$$9^5 + 8^5 + 8^5 = 10^5 + 7^5 + 6^5 + 1^5 + 1^5;$$

$a = 2,\ b = 1$ giver

$$214^5 + 186^5 + 153^5 + 127^5 = 200^5 + 200^5 + 167^5 + 113^5;$$

$a = 5,\ b = 1$ giver

$$1590^5 + 1129^5 + 1114^5 + 639^5 = 1367^5 + 1352^5 + 1352^5 + 401^5.$$

7. Ligningen

$$(x + \alpha)^5 + (x - \alpha)^5 + 2y^5 = (y + \beta)^5 + (y - \beta)^5 + 2x^5$$

reduceres til

$$\alpha^2 x\,(2x^2 + \alpha^2) = \beta^2 y\,(2y^2 + \beta^2).$$

Denne Ligning skal løses i 2 specielle Tilfælde.

8. Første Tilfælde.

Man sætter

$$x = \frac{\beta^2}{2m}; \qquad y = \frac{\alpha^2}{2m},$$

og faar

$$\beta^4 + 2\alpha^2 m^2 = \alpha^4 + 2\beta^2 m^2,$$

som, for $\alpha \gtrless \beta$, giver

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2m^2.$$

Denne Ligning tilfredsstilles af

$$\alpha = a^2 + 2ab - b^2;\ \beta = a^2 - 2ab - b^2;\ m = a^2 + b^2,$$

hvoraf

$$x = \frac{(a^2 - 2ab - b^2)^2}{2a^2 + 2b^2}; \qquad y = \frac{(a^2 + 2ab - b^2)^2}{2a^2 + 2b^2}.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$2A^{10} + B^5 + C^5 = 2D^{10} + E^5 + F^5,$$

hvor

$$A = a^2 + 2ab - b^2;$$
$$B = 3a^4 + 2a^2b^2 + 8ab^3 - b^4;$$

$$C = -a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 + 3b^4;$$
$$D = a^2 - 2ab - b^2;$$
$$E = 3a^4 + 2a^2b^2 - 8ab^3 - b^4;$$
$$F = -a^4 + 8a^3b + 2a^2b^2 + 3b^4;$$

Denne Identitet kan ogsaa skrives saaledes

$$(A^2)^5 + (A^2)^5 + B^5 + C^5 = (D^2)^5 + (D^2)^5 + E^5 + F^5,$$

hvor tillige

$$A^2 + A^2 + B + C = D^2 + D^2 + E + F.$$

Specielt giver $c = 2$, $d = 1$

$$71^5 + 49^5 + 49^5 = 69^5 + 59^5 + 39^5 + 1^5 + 1^5;$$

$c = 3$, $d = 2$ giver

$$491^5 + 289^5 + 289^5 = 471^5 + 393^5 + 107^5 + 49^5 + 49^5.$$

9. Andet Tilfælde.

Ligningen

$$\alpha^2 x (2x^2 + \alpha^2) = \beta^2 y (2y^2 + \beta^2)$$

kan løses ved at man sætter

$$2\alpha^2 x^3 = \beta^4 y; \quad \alpha^4 x = 2\beta^2 y^3,$$

hvoraf

$$x = \frac{a^6}{8b^5}; \quad \beta = \frac{a^5}{4b^4}; \quad \alpha = a.$$

Ved Indsætning i den oprindelige Ligning fremkommer Identiteten

$$2A^{15} + B^5 + C^5 = 2D^{15} + E^5 + F^5,$$

hvor

$$A = 2b^2; \quad B = a^6 + 8ab^5; \quad C = a^6 - 8ab^5;$$
$$D = a^2; \quad E = 2a^5b + 8b^6; \quad F = -2a^5b + 8b^6.$$

Denne Identitet kan ogsaa skrives saaledes

$$(A^3)^5 + (A^3)^5 + B^5 + C^5 = (D^3)^5 + (D^3)^5 + E^5 + F^5,$$

hvor tillige

$$A^3 + A^3 + B + C = D^3 + D^3 + E + F.$$

Specielt giver $a = 1$, $b = 1$

$$9^5 + 8^5 + 8^5 = 10^5 + 7^5 + 6^5 + 1^5 + 1^5;$$

$a = 1$, $b = 2$ giver

$$512^5 + 512^5 + 257^5 = 516^5 + 508^5 + 255^5 + 1^5 + 1^5.$$

10. De i dette Kapitel fremsatte Identiteter giver Eksempler paa, at

Summen af fire positive Femte-Potenser er lig Summen af fire andre positive Femte-Potenser

eller at

Summen af tre positive Femte-Potenser er lig Summen af fem positive Femte-Potenser.

At der gives uendelig mange Tilfælde af hver Slags ses f. Eks.

i første Tilfælde af Identiteten paa Side 15 ved at tage $a > b > 0$

og i andet Tilfælde af Identiteten paa Side 13 ved at tage $14a > 15b > 0$.

11. Efterfølgende Eksempler skyldes ikke Identiteterne, men de er fundne ved Forsøg.

$$24^5 + 3^5 + 1^5 + 1^5 = 23^5 + 15^5 + 15^5 + 6^5.$$

$$29^5 + 10^5 + 1^5 + 1^5 = 26^5 + 24^5 + 15^5 + 6^5.$$

$$29^5 + 23^5 + 15^5 + 10^5 = 26^5 + 24^5 + 24^5 + 3^5,$$

hvor $29 + 23 + 15 + 10 = 26 + 24 + 24 + 3$.

$$30^5 + 12^5 + 8^5 + 7^5 = 29^5 + 21^5 + 5^5 + 2^5.$$

$$51^5 + 15^5 + 14^5 + 5^5 = 48^5 + 39^5 + 16^5 + 12^5.$$

$$64^5 + 61^5 + 37^5 + 13^5 = 63^5 + 62^5 + 38^5 + 12^5,$$

hvor $64 + 61 + 37 + 13 = 63 + 62 + 38 + 12$.

$$99^5 + 67^5 + 14^5 + 6^5 = 96^5 + 77^5 + 9^5 + 4^5,$$

hvor $99 + 67 + 14 + 6 = 96 + 77 + 9 + 4$.

$$7^5 + 7^5 + 3^5 = 8^5 + 4^5 + 2^5 + 2^5 + 1^5,$$

hvor $7 + 7 + 3 = 8 + 4 + 2 + 2 + 1$.

$$15^5 + 14^5 + 3^5 = 16^5 + 12^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5,$$

hvor $15 + 14 + 3 = 16 + 12 + 2 + 1 + 1$.

$$20^5 + 17^5 + 5^5 = 21^5 + 14^5 + 4^5 + 2^5 + 1^5,$$

hvor $20 + 17 + 5 = 21 + 14 + 4 + 2 + 1$.

$$48^5 + 39^5 + 3^5 = 51^5 + 5^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$$

$$27^5 + 27^5 = 31^5 + 8^5 + 8^5 + 5^5 + 1^5 + 1^5,$$

hvor $27 + 27 = 31 + 8 + 8 + 5 + 1 + 1$.

$$32^5 + 14^5 = 30^5 + 25^5 + 7^5 + 6^5 + 4^5 + 4^5.$$

$$31^5 + 28^5 = 34^5 + 13^5 + 8^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5,$$

hvor $31 + 28 = 34 + 13 + 8 + 2 + 1 + 1$.

$$53^5 + 43^5 = 52^5 + 45^5 + 13^5 + 10^5 + 3^5 + 3^5.$$

$$54^5 + 9^5 = 53^5 + 29^5 + 29^5 + 5^5 + 5^5 + 2^5.$$

$$92^5 = 89^5 + 58^5 + 51^5 + 22^5 + 11^5 + 9^5 + 2^5.$$

12. Af de i dette Kapitel fundne Eksempler kan udledes, at

$$51^5 + 5^5 - 48^5 - 39^5 = 16^5 + 12^5 - 15^5 - 14^5 =$$
$$= 3^5 - 2^5 - 1^5 - 1^5 = 209;$$

$$29^5 + 10^5 - 26^5 - 24^5 = 24^5 + 3^5 - 23^5 - 15^5 =$$
$$= 15^5 + 6^5 - 1^5 - 1^5 = 767149;$$

$$128^5 + 53^5 - 114^5 - 109^5 = 120^5 + 47^5 - 106^5 - 103^5 =$$
$$= 46^5 - 32^5 - 29^5 - 27^5 = 137558488.$$

Tallene 209, 767149 og 137558488 kan da, hver især, paa 3 Maader skrives som en Sum af 4 (positive eller negative) Femte-Potenser.

Man faar endvidere

$$48^5 + 29^5 - 46^5 - 37^5 = 34^5 + 19^5 - 32^5 - 27^5 =$$
$$= 10^5 + 1^5 - 9^5 - 8^5 = 8^5 - 7^5 - 6^5 - 1^5 = 8184 = 2^{13} - 2^3.$$

Tallet 8184 kan altsaa paa 4 Maader skrives som en Sum af 4 (positive eller negative) Femte-Potenser.

3. Kapitel.

7 Femte-Potenser.

1. At der eksisterer 7 Femte-Potenser med Summen Nul, viser Martins Tal

$$12^5 = 11^5 + 9^5 + 7^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5$$

og

$$30^5 = 29^5 + 19^5 + 16^5 + 11^5 + 10^5 + 5^5.$$

2. Naar man i Identiteten paa Side 17, som indeholder 8 Femte-Potenser, sætter

$$e = -(r^3 + r)\, d \quad \text{og} \quad r = \frac{y}{z},$$

fremkommer følgende Identitet, som kun indeholder 7 Femte-Potenser.

$$A^5 + B^5 + C^5 = D^5 + E^5 + F^5 + G^5,$$

hvor

$$A = y^7 + 3y^5z^2 + y^4z^3 + 2y^3z^4 + 3y^2z^5 + 2yz^6 + 4z^7;$$
$$B = y^7 + 3y^5z^2 - y^4z^3 + 6y^3z^4 - 3y^2z^5 + 6yz^6 - 4z^7;$$
$$C = 2y^6z + 6y^4z^3 + 8y^2z^5 + 8z^7;$$
$$D = y^7 + 3y^5z^2 + y^4z^3 + 6y^3z^4 + 3y^2z^5 + 6yz^6 + 4z^7;$$
$$E = y^7 + 3y^5z^2 - y^4z^3 + 2y^3z^4 - 3y^2z^5 + 2yz^6 - 4z^7;$$
$$F = 2y^6z + 4y^4z^3 + 2y^2z^5;$$
$$G = 2y^4z^3 + 6y^2z^5 + 8z^7.$$

Tillige er

$$A + B + C = D + E + F + G.$$

Specielt giver $y = 2$, $z = 1$

$$69^5 + 66^5 + 63^5 = 79^5 + 53^5 + 50^5 + 16^5.$$

$y = 1$, $z = 2$ giver

$$1332^5 + 789^5 + 443^5 = 1232^5 + 1109^5 + 123^5 + 100^5.$$

3. Forandrer y eller z Fortegn, bliver Identiteten den samme. Man kan da antage y og z for positive.

A, C, D, F og G er da positive.

Da $B > E$, maa enten B og E have samme Fortegn, eller ogsaa maa B være positiv og E negativ. I begge Tilfælde faar man, at

Summen af 3 positive Femte-Potenser er lig Summen af 4 positive Femte-Potenser.

Der er altsaa uendelig mange Tal, som baade er en Sum af 3 og af 4 positive Femte-Potenser.

4. Efterfølgende Eksempler er fundne ved Forsøg:

$$25^5 + 22^5 + 3^5 = 27^5 + 14^5 + 8^5 + 1^5,$$

hvor $25 + 22 + 3 = 27 + 14 + 8 + 1.$

$$34^5 + 10^5 + 1^5 = 33^5 + 20^5 + 20^5 + 2^5.$$

$$22^5 + 1^5 = 21^5 + 16^5 + 7^5 + 5^5 + 4^5.$$

$$64^5 + 45^5 = 58^5 + 57^5 + 11^5 + 9^5 + 4^5.$$

4. Kapitel.

6 Femte-Potenser.

1. I forrige Kapitel viste det sig, at en Identitet med flere Variable, som indeholder 8 Femte-Potenser, specielt kan give en Identitet, ligeledes med flere Variable, som indeholder 7 Femte-Potenser.

Det ligger da nær at antage, at man analogt af de allerede fundne Identiteter kan komme til Identiteter, som giver 6 Femte-Potenser med Summen Nul, men dette lader sig ikke gøre.

2. At der imidlertid eksisterer 6 Femte-Potenser med Summen Nul, kan man se af følgende Eksempel, som er fundet ved Forsøg.

$$29^5 + 3^5 = 28^5 + 20^5 + 10^5 + 4^5,$$

og her skal nu fremsættes en Identitet, som giver andre Eksempler af samme Art.

3. Vi betragter Ligningen

$$(x^5 + ay^5)^5 + (x^5 - ay^5)^5 =$$
$$(x + by^5)^5 + (x - by^5)^5 + (cx^3y^2)^5 + (dxy^4)^5.$$

Denne Ligning reduceres, hvorefter man dividerer med x^5y^5.

Derved faar man

$$20\,a^2x^{10} + 10\,a^4y^{10} = 20\,b^2x^{10} + 10\,b^4y^{10} + c^5x^{10} + d^5y^{10}.$$

Hvis man nu kan bestemme

$$a,\ b,\ c \text{ og } d$$

saaledes, at

$$20\,(a^2 - b^2) = c^5 \quad \text{og} \quad 10\,(a^4 - b^4) = d^5,$$

bliver den givne Ligning en Identitet.

Jeg har fundet Tallene

$$a = 75;\ b = 25;\ c = 10;\ d = 50,$$

som opfylder disse Betingelser.

Herved fremkommer Identiteten

$$(x^5 + 75\,y^5)^5 + (x^5 - 75\,y^5)^5 =$$
$$(x^5 + 25\,y^5)^5 + (x^5 - 25\,y^5)^5 + (10\,x^3y^2)^5 + (50\,xy^4)^5.$$

Specielt giver $x = 1,\ y = 1$

$$38^5 + 12^5 = 37^5 + 25^5 + 13^5 + 5^5.$$

$x = 5$, $y = 1$ giver

$$64^5 + 61^5 = 63^5 + 62^5 + 25^5 + 5^5.$$

$x = 2$, $y = 1$ giver

$$107^5 = 100^5 + 80^5 + 57^5 + 43^5 + 7^5.$$

$x = 3$, $y = 1$ giver

$$159^5 + 84^5 = 135^5 + 134^5 + 109^5 + 75^5.$$

$x = 5$, $y = 2$ giver

$$221^5 + 29^5 = 200^5 + 160^5 + 157^5 + 93^5.$$

$x = 5$, $y = 3$ giver

$$427^5 + 59^5 = 405^5 + 302^5 + 225^5 + 184^5.$$

$x = 7$, $y = 3$ giver

$$17516^5 = 15435^5 + 14175^5 + 11441^5 + 5366^5 + 709^5.$$

4. Identiteten i dette Kapitel giver enten

en Sum af 2 positive Femte-Potenser, som er lig en Sum af 4 positive Femte-Potenser,

eller

en positiv Femte-Potens, som er lig Summen af 5 positive Femte-Potenser.

5. At der er uendelig mange af hver Slags, ses ved i første Tilfælde at vælge x og y saaledes, at

$$x^5 > 75\,y^5,$$

og i andet Tilfælde saaledes, at

$$75\,y^5 > x^5 > 25\,y^5.$$

Efter at ovenstaaende er skrevet, har jeg set, at Identiteten paa Side 26 ikke er ny, men er fundet af S. Sastry i »The Journal of The London Mathematical Society« 1934 i en Artikel »On sums of powers«, Side 243.

Tabel over Femte-Potenser.

1.

$11^5 + 10^5 + 6^5 + 1^5 = 12^5 + 7^5 + 5^5 + 2^5 + 2^5.$

$24^5 + 8^5 + 1^5 + 1^5 = 22^5 + 17^5 + 17^5 + 4^5 + 4^5.$

$55^5 + 40^5 + 9^5 + 8^5 = 57^5 + 21^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$

$67^5 + 60^5 + 57^5 + 23^5 = 77^5 + 27^5 + 27^5 + 13^5 + 3^5.$

$97^5 + 33^5 + 21^5 + 15^5 = 90^5 + 69^5 + 65^5 + 16^5 + 16^5.$

$90^5 + 85^5 + 77^5 + 18^5 = 101^5 + 61^5 + 60^5 + 54^5 + 54^5.$

$143^5 + 113^5 + 103^5 + 73^5 = 133^5 + 133^5 + 83^5 + 83^5 + 60^5.$

$209^5 + 196^5 + 180^5 + 151^5 = 241^5 + 164^5 + 119^5 + 16^5 + 16^5.$

$253^5 + 100^5 + 100^5 + 35^5 = 235^5 + 180^5 + 172^5 + 53^5 + 28^5.$

$269^5 + 143^5 + 107^5 + 1^5 = 251^5 + 197^5 + 180^5 + 53^5 + 19^5.$

$93^5 + 92^5 + 6^5 + 5^5 = 106^5 + 44^5 + 14^5 + 1^5 + 1^5.$

$22^5 + 4^5 + 3^5 = 20^5 + 18^5 + 9^5 + 5^5 + 5^5 + 2^5.$

$61^5 + 18^5 + 18^5 = 55^5 + 51^5 + 8^5 + 8^5 + 3^5 + 2^5.$

$20^5 + 6^5 = 19^5 + 14^5 + 11^5 + 8^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$

$14^5 = 13^5 + 11^5 + 5^5 + 4^5 + 4^5 + 3^5 + 2^5 + 2^5.$

2.

$24^5 + 3^5 + 1^5 + 1^5 = 23^5 + 15^5 + 15^5 + 6^5.$

$29^5 + 10^5 + 1^5 + 1^5 = 26^5 + 24^5 + 15^5 + 6^5.$

$29^5 + 23^5 + 15^5 + 10^5 = 26^5 + 24^5 + 24^5 + 3^5.$

$30^5 + 12^5 + 8^5 + 7^5 = 29^5 + 21^5 + 5^5 + 2^5.$

$36^5 + 23^5 + 18^5 + 13^5 = 34^5 + 29^5 + 20^5 + 7^5.$

$46^5 + 32^5 + 31^5 + 21^5 = 40^5 + 39^5 + 38^5 + 13^5.$

$48^5 + 29^5 + 9^5 + 8^5 = 46^5 + 37^5 + 10^5 + 1^5.$

$51^5 + 15^5 + 14^5 + 5^5 = 48^5 + 39^5 + 16^5 + 12^5.$

$64^5 + 61^5 + 37^5 + 13^5 = 63^5 + 62^5 + 38^5 + 12^5.$

$72^5 + 54^5 + 53^5 + 31^5 = 64^5 + 62^5 + 61^5 + 23^5.$

$80^5 + 46^5 + 43^5 + 41^5 = 72^5 + 67^5 + 54^5 + 17^5.$
$99^5 + 67^5 + 14^5 + 6^5 = 96^5 + 77^5 + 9^5 + 4^5.$
$101^5 + 79^5 + 76^5 + 14^5 = 93^5 + 87^5 + 84^5 + 6^5.$
$107^5 + 74^5 + 36^5 + 3^5 = 103^5 + 86^5 + 24^5 + 7^5.$
$108^5 + 90^5 + 89^5 + 43^5 = 106^5 + 92^5 + 91^5 + 41^5.$
$122^5 + 76^5 + 71^5 + 61^5 = 108^5 + 103^5 + 90^5 + 29^5.$
$169^5 + 142^5 + 91^5 + 32^5 = 162^5 + 149^5 + 111^5 + 12^5.$
$171^5 + 137^5 + 132^5 + 22^5 = 161^5 + 147^5 + 142^5 + 12^5.$
$188^5 + 106^5 + 103^5 + 93^5 = 170^5 + 157^5 + 124^5 + 39^5.$
$190^5 + 128^5 + 123^5 + 89^5 = 166^5 + 161^5 + 152^5 + 51^5.$
$192^5 + 131^5 + 32^5 + 27^5 = 190^5 + 139^5 + 34^5 + 19^5.$
$213^5 + 194^5 + 127^5 + 34^5 = 204^5 + 203^5 + 137^5 + 24^5.$
$214^5 + 186^5 + 153^5 + 127^5 = 200^5 + 200^5 + 167^5 + 113^5.$
$249^5 + 171^5 + 162^5 + 48^5 = 217^5 + 208^5 + 203^5 + 2^5.$
$270^5 + 157^5 + 144^5 + 119^5 = 248^5 + 223^5 + 166^5 + 53^5.$
$274^5 + 189^5 + 46^5 + 37^5 = 272^5 + 197^5 + 48^5 + 29^5.$
$278^5 + 193^5 + 136^5 + 83^5 = 270^5 + 217^5 + 144^5 + 59^5.$

$7^5 + 7^5 + 3^5 = 8^5 + 4^5 + 2^5 + 2^5 + 1^5.$
$9^5 + 8^5 + 8^5 = 10^5 + 7^5 + 6^5 + 1^5 + 1^5.$
$15^5 + 14^5 + 3^5 = 16^5 + 12^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$
$16^5 + 13^5 + 7^5 = 17^5 + 6^5 + 6^5 + 4^5 + 3^5.$
$21^5 + 12^5 + 8^5 = 19^5 + 18^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$
$20^5 + 17^5 + 5^5 = 21^5 + 14^5 + 4^5 + 2^5 + 1^5.$
$32^5 + 27^5 + 8^5 = 34^5 + 19^5 + 7^5 + 6^5 + 1^5.$
$48^5 + 39^5 + 3^5 = 51^5 + 5^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$
$61^5 + 46^5 + 23^5 = 63^5 + 36^5 + 21^5 + 6^5 + 4^5.$
$63^5 + 56^5 + 37^5 = 69^5 + 31^5 + 26^5 + 24^5 + 6^5.$
$68^5 + 51^5 + 49^5 = 71^5 + 48^5 + 29^5 + 18^5 + 2^5.$
$69^5 + 66^5 + 63^5 = 79^5 + 53^5 + 50^5 + 16^5.$
$71^5 + 49^5 + 49^5 = 69^5 + 59^5 + 39^5 + 1^5 + 1^5.$
$83^5 + 80^5 + 48^5 = 94^5 + 37^5 + 34^5 + 27^5 + 19^5.$

$$106^5 + 103^5 + 46^5 = 120^5 + 47^5 + 32^5 + 29^5 + 27^5.$$
$$114^5 + 109^5 + 46^5 = 128^5 + 53^5 + 32^5 + 29^5 + 27^5.$$
$$123^5 + 102^5 + 57^5 = 131^5 + 62^5 + 49^5 + 28^5 + 12^5.$$
$$131^5 + 122^5 + 97^5 = 147^5 + 81^5 + 72^5 + 42^5 + 8^5.$$
$$133^5 + 126^5 + 111^5 = 151^5 + 93^5 + 86^5 + 36^5 + 4^5.$$
$$152^5 + 137^5 + 48^5 = 166^5 + 81^5 + 37^5 + 34^5 + 19^5.$$
$$167^5 + 152^5 + 128^5 = 186^5 + 109^5 + 94^5 + 31^5 + 27^5.$$
$$191^5 + 176^5 + 133^5 = 213^5 + 111^5 + 96^5 + 66^5 + 14^5.$$
$$217^5 + 214^5 + 114^5 = 248^5 + 83^5 + 81^5 + 80^5 + 53^5.$$
$$226^5 + 203^5 + 57^5 = 247^5 + 96^5 + 94^5 + 36^5 + 13^5.$$
$$243^5 + 226^5 + 166^5 = 272^5 + 137^5 + 120^5 + 59^5 + 47^5.$$
$$261^5 + 234^5 + 159^5 = 287^5 + 133^5 + 106^5 + 104^5 + 24^5.$$

$$27^5 + 27^5 = 31^5 + 8^5 + 8^5 + 5^5 + 1^5 + 1^5.$$
$$32^5 + 14^5 = 30^5 + 25^5 + 7^5 + 6^5 + 4^5 + 4^5.$$
$$31^5 + 28^5 = 34^5 + 13^5 + 8^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5.$$
$$53^5 + 43^5 = 52^5 + 45^5 + 13^5 + 10^5 + 3^5 + 3^5.$$
$$54^5 + 9^5 = 53^5 + 29^5 + 29^5 + 5^5 + 5^5 + 2^5.$$

$$92^5 = 89^5 + 58^5 + 51^5 + 22^5 + 11^5 + 9^5 + 2^5.$$

3.

$$25^5 + 22^5 + 3^5 = 27^5 + 14^5 + 8^5 + 1^5.$$
$$34^5 + 10^5 + 1^5 = 33^5 + 20^5 + 20^5 + 2^5.$$
$$69^5 + 66^5 + 63^5 = 79^5 + 53^5 + 50^5 + 16^5.$$

$$22^5 + 1^5 = 21^5 + 16^5 + 7^5 + 5^5 + 4^5.$$
$$64^5 + 45^5 = 58^5 + 57^5 + 11^5 + 9^5 + 4^5.$$

4.

$$29^5 + 3^5 = 28^5 + 20^5 + 10^5 + 4^5.$$
$$38^5 + 12^5 = 37^5 + 25^5 + 13^5 + 5^5.$$

$$64^5 + 61^5 = 63^5 + 62^5 + 25^5 + 5^5.$$
$$159^5 + 84^5 = 135^5 + 134^5 + 109^5 + 75^5.$$
$$221^5 + 29^5 = 200^5 + 160^5 + 157^5 + 93^5.$$

$$107^5 = 100^5 + 80^5 + 57^5 + 43^5 + 7^5.$$

Færdig fra Trykkeriet den 13. Februar 1937.