

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser **XIV**, 7.

---

KLEINERE BEITRÄGE ZUR  
THEORIE DER FASTPERIODISCHEN  
FUNKTIONEN

VII—VIII

VON

HARALD BOHR



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1936

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

## VII.

### Stark stationäre und schwach stationäre Funktionen.

Die Untersuchungen dieser Note sind durch die schöne und wichtige Arbeit von R. CAMERON "Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients" (Journal of Mathematics and Physics, Vol. XV (1936) pag. 73—81) angeregt worden. Es sollen hier einige Begriffe, die als wesentliche Hilfsmittel in der CAMERONSchen Arbeit benutzt werden (und im Prinzip auf FAVARD zurückgehen), in ihrem gegenseitigen Zusammenhang näher analysiert werden, was vor allem durch die Konstruktion und Erörterung einiger »Gegenbeispiele« geschieht; diese Konstruktion schliesst sich übrigens eng einem interessanten Verfahren an, welches TOEPLITZ in der Abhandlung »Ein Beispiel zur Theorie der fastperiodischen Funktionen« (Mathematische Annalen, Bd. 98 (1927) pag. 281—295) zu anderen Zwecken verwendet hat.

Sämtliche auftretenden Funktionen  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ , ... sollen komplexwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen  $x$  sein, von denen wir überall stillschweigend voraussetzen werden, dass sie im ganzen unendlichen Intervalle  $-\infty < x < \infty$  definiert und stetig sind. Wir werden oft mit Funktionenfolgen  $f_n(x)$  zu tun haben, die in  $-\infty < x < \infty$  gegen eine Grenzfunktion  $f(x)$  konvergieren. Hierbei wer-

den für uns nur zwei Arten von Konvergenz in Frage kommen, die wir abkürzungsweise als »starke« bzw. »schwache« Konvergenz bezeichnen werden. Die Konvergenz von  $f_n(x)$  gegen  $f(x)$  soll stark genannt werden, falls sie gleichmässig im ganzen unendlichen Intervalle  $-\infty < x < \infty$  gilt, und sie soll schwach heissen, wenn von ihr nur vorausgesetzt wird, dass sie gleichmässig in jedem endlichen Intervall stattfindet. Zunächst wollen wir uns mit starker Konvergenz beschäftigen; es ist bekanntlich diese Art von Konvergenz, welche in der Theorie der fastperiodischen Funktionen die entscheidende Rolle spielt.

1°. Von einer beliebigen (stetigen) Funktion  $\varphi(x)$  ausgehend, bilden wir die Funktionenmenge  $\{\varphi(x+h)\}$ , wo  $h$  ein reeller Parameter ist, welcher das Intervall  $-\infty < h < \infty$  durchläuft, und erweitern sie im Sinne der starken Konvergenz zur abgeschlossenen Hülle  $\mathbf{H}\{\varphi(x+h)\}$ , welche also aus allen Funktionen  $\psi(x)$  besteht, die als Grenzfunktionen von stark konvergierenden Funktionenfolgen  $\varphi(x+h_n)$  auftreten können. Jede Funktion  $\psi(x)$  dieser Hülle  $\mathbf{H}\{\varphi(x+h)\}$  werden wir als eine starke Transformierte der Ausgangsfunktion  $\varphi(x)$  bezeichnen. Durch die Bildung dieser abgeschlossenen Hüllen wird, wie unmittelbar zu ersehen, eine gewisse Klasseneinteilung aller stetigen Funktionen vorgenommen; denn, falls  $\psi(x)$  eine starke Transformierte von  $\varphi(x)$  ist, wird umgekehrt  $\varphi(x)$  eine starke Transformierte von  $\psi(x)$  sein, und falls  $\psi(x)$  eine starke Transformierte von  $\varphi(x)$  und  $\chi(x)$  eine starke Transformierte von  $\psi(x)$  ist, wird auch  $\chi(x)$  eine starke Transformierte von  $\varphi(x)$  sein.

In dem Falle, wo die Ausgangsfunktion  $\varphi(x)$  eine fastperiodische Funktion ist, habe ich in einer meiner ersten

Arbeiten über diesen Funktionentypus diese abgeschlossene Hülle  $H\{\varphi(x+h)\}$  näher studiert; hier ist auch jede starke Transformierte von  $\varphi(x)$  wieder fastperiodisch (übrigens mit denselben Fourierexponenten wie  $\varphi(x)$ ), und wir haben es also hier mit einer Klasseneinteilung innerhalb der Gesamtheit der fastperiodischen Funktionen zu tun.

Ein interessantes Kriterium im Rahmen der obigen Begriffe für die Fastperiodizität einer (wie immer) stetigen Funktion  $\varphi(x)$  — welches übrigens für die Ausdehnung der Theorie der fastperiodischen Funktion auf beliebige Gruppen von ausschlaggebender Bedeutung gewesen ist — rührt bekanntlich von BOCHNER her. Es besagt, dass es für die Fastperiodizität einer Funktion  $\varphi(x)$  notwendig und hinreichend ist, dass die Funktionenmenge  $\{\varphi(x+h)\}$  im Sinne starker Konvergenz kompakt ist, d. h. dass jede Funktionenfolge  $\varphi(x+h_n)$  eine Teilfolge  $\varphi(x+h_{n'})$  enthält, welche stark gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Indem wir eine Funktion  $\varphi(x)$  mit dieser starken Kompaktheitseigenschaft eine stark normale Funktion nennen (gewöhnlich wird sie einfach als »normal« bezeichnet) besagt also der BOCHNERSche Satz, *dass die Funktion  $\varphi(x)$  dann und nur dann fastperiodisch ist, wenn sie stark normal ist.*

Bei verschiedenen Untersuchungen, z. B. bei Problemen über Differentialgleichungen mit fastperiodischen Koeffizienten, ist es nützlich, im Rahmen unserer Begriffsbildungen auch ein Kriterium dafür zur Verfügung zu haben, dass eine Funktion  $\varphi(x)$  nicht nur fastperiodisch ist, sondern derart fastperiodisch ist, dass ihre Fourierexponenten alle einem vorgegebenen abzählbaren Zahlenmodul  $M$  angehören. Ein solches Kriterium ist dem klassischen Tatbestand der Theorie der fastperiodischen Funktionen leicht zu entnehmen und wird z. B. in

der zitierten Arbeit von CAMERON verwendet. Wir werden von einer reellen Zahlenfolge  $h_n$  sagen, dass sie an einen vorgegebenen (immer als abzählbar angenommenen) Modul  $M$  »angepasst« ist, wenn für jede Zahl  $\mu$  dieses Moduls  $M$  die Kongruenzgrenzbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \cdot h_n = 0 \pmod{2\pi}$$

gilt, und wir werden eine Funktion  $\varphi(x)$  stark stationär in bezug auf  $M$  nennen, falls für jede an den Modul  $M$  angepasste Zahlenfolge  $h_n$  die entsprechende Funktionenfolge  $\varphi(x+h_n)$  stark gegen  $\varphi(x)$  selbst konvergiert. Das erwähnte Kriterium besagt dann einfach: *Damit eine Funktion  $\varphi(x)$  fastperiodisch mit lauter Fourierrexponeuten aus dem Modul  $M$  sei, ist notwendig und hinreichend, dass sie stark stationär in bezug auf  $M$  ist.*

Da jede starke Transformierte  $\psi(x)$  einer fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  wieder fastperiodisch ist und dieselben Exponenten wie  $\varphi(x)$  besitzt, folgt z. B. aus dem angegebenen Kriterium sofort, dass jede starke Transformierte einer in bezug auf  $M$  stark stationären Funktion wiederum stark stationär in bezug auf  $M$  ist. Ferner ist nach diesem Kriterium (in Verbindung mit dem Satz von BOCHNER) klar, dass eine in bezug auf einen Modul  $M$  stark stationäre Funktion  $\varphi(x)$  von selbst stark normal sein muss.

2°. Wir gehen nun dazu über, ähnliche Begriffe wie die unter 1° aufgestellten einzuführen, indem wir nur überall starke Konvergenz durch schwache Konvergenz ersetzen. Ausgehend von einer Funktion  $\varphi(x)$  bilden wir wiederum die Funktionenmenge  $\{\varphi(x+h)\}$  und erweitern sie zur abgeschlossenen Hülle  $\mathbf{h}\{\varphi(x+h)\}$ , diesmal aber im Sinne der schwachen Konvergenz, und wir bezeichnen jede Funktion  $\psi(x)$  dieser Hülle  $\mathbf{h}\{\varphi(x+h)\}$  als eine

schwache Transformierte von  $\varphi(x)$ . Zur Orientierung sei hervorgehoben, dass diese Bildung — im Gegensatz zu der Bildung  $\mathbf{H}\{\varphi(x+h)\}$  — nicht zu einer Klasseneinteilung der stetigen Funktion führt; es gilt wohl, wie leicht zu sehen, dass, falls  $\psi(x)$  eine schwache Transformierte von  $\varphi(x)$  und  $\chi(x)$  eine schwache Transformierte von  $\psi(x)$  ist, auch  $\chi(x)$  eine schwache Transformierte von  $\varphi(x)$  ist; dagegen gilt nicht allgemein, dass  $\varphi(x)$  eine schwache Transformierte von  $\psi(x)$  ist, wenn  $\psi(x)$  eine schwache Transformierte von  $\varphi(x)$  ist. (Z. B. ist die Funktion  $\psi(x) = 0$  für alle  $x$  eine schwache Transformierte der Funktion  $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x \leq 0 \\ \sin x & \text{für } 0 \leq x < \infty \end{cases}$ ; dagegen ist  $\varphi(x)$  keine schwache Transformierte von  $\psi(x)$ , da diese letzte, konstante, Funktion natürlich nur sich selbst als schwache Transformierte besitzt.)

Wenn man speziell von einer fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  ausgeht, sind die beiden Hüllen  $\mathbf{H}\{\varphi(x+h)\}$  und  $\mathbf{h}\{\varphi(x+h)\}$  mit einander identisch, denn bei einer fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  gilt bekanntlich, dass jede Funktionenfolge  $\varphi(x+h_n)$ , die schwach gegen eine Grenzfunktion  $\psi(x)$  konvergiert, von selbst — wegen der relativen Dichte der Verschiebungszahlen — stark gegen  $\psi(x)$  konvergiert.

Eine Funktion  $\varphi(x)$  soll schwach normal (bei CAMERON semi-normal) heißen, wenn die Funktionenmenge  $\{\varphi(x+h)\}$  im Sinne der schwachen Konvergenz kompakt ist, wenn also jede Funktionenfolge  $\varphi(x+h_n)$  eine schwach konvergente Teilfolge  $\varphi(x+h_{n'})$  enthält. Im Gegensatz zu dem Begriff stark normal, der eine eingreifende und eigenartige Forderung, nämlich die der Fastperiodizität, an die Funktion  $\varphi(x)$  stellt, ist die Eigenschaft der schwachen

Normalität an sich keine aufregende, indem sie, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, einfach damit gleichwertig ist, dass die Funktion  $\varphi(x)$  im ganzen unendlichen Intervall beschränkt und gleichmässig stetig ist. Uebrigens ersehen wir sofort aus dieser letzten Charakterisierung einer schwach normalen Funktion, dass jede schwache Transformierte einer solchen Funktion wiederum schwach normal ist.

Bei dem Studium der Lösungen von linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten fastperiodisch, d. h. stark normal sind, wird man zwangsläufig nicht nur auf schwach normale Funktionen geführt, sondern auch auf Funktionen  $\varphi(x)$ , die in bezug auf einen gegebenen Modul  $M$  schwach stationär sind, d. h. welche die Eigenschaft besitzen, dass für jede Zahlenfolge  $h_n$ , die im obigen Sinne an den Modul  $M$  angepasst ist, die entsprechende Funktionenfolge  $\varphi(x+h_n)$  schwach gegen die Funktion  $\varphi(x)$  selbst konvergiert. Man möchte daher natürlich gern einen Satz zur Verfügung haben, welcher erlaubt, von der schwachen Stationarität einer Funktion  $\varphi(x)$  etwa durch Hinzufügung weiterer Forderungen an  $\varphi(x)$  auf ihre starke Stationarität zu schliessen, um dadurch nachweisen zu können, dass die Funktionen, auf welche man bei den Differentialgleichungsproblemen gestossen ist, von fastperiodischem Charakter sind. Ein diesbezüglicher Satz ist von CAMERON in der anfangs zitierten Arbeit bewiesen und bildet gewissermassen die Grundlage seiner weiteren wichtigen Ueberlegungen. Dieser Satz, welcher sich dadurch auszeichnet, dass sämtliche Voraussetzungen, die über die Funktion  $\varphi(x)$  gemacht werden, nur von schwacher Konvergenz handeln, besagt:

*Damit eine in bezug auf den Modul  $M$  schwach stationäre*



*Funktion  $\varphi(x)$  in bezug auf  $M$  stark stationär sei (d. h. also fastperiodisch mit Exponenten aus  $M$ ), ist notwendig und hinreichend, dass sie schwach normal ist, und dass nicht nur  $\varphi(x)$  selbst, sondern auch jede schwache Transformierte von  $\varphi(x)$  ebenfalls schwach stationär in bezug auf  $M$  ist.*

Dass die angegebenen Bedingungen notwendig sind, ist nach dem vorangehenden trivial. Der Inhalt des CAMERONschen Satzes ist, dass sie auch hinreichend sind.

Nun ist aber die schwache Stationarität einer Funktion  $\varphi(x)$  in bezug auf einen Modul  $M$  eine an sich recht undurchsichtige Eigenschaft, und es entsteht von selbst die Frage, ob nicht vielleicht bei »schwacher« Konvergenz die Sachlage tatsächlich eine ganz analoge ist wie bei »starker« Konvergenz in dem Sinne, dass auch jede in bezug auf einen Modul  $M$  schwach stationäre Funktion  $\varphi(x)$  von selbst schwach normal ist, und dass jede schwache Transformierte einer solchen Funktion  $\varphi(x)$  wiederum schwach stationär in bezug auf  $M$  ausfällt. Dies würde bedeuten, dass der CAMERONSche Satz dahin vereinfacht werden könnte, dass jede in bezug auf  $M$  schwach stationäre Funktion immer in bezug auf  $M$  auch stark stationär wäre. Das dem nicht so ist, soll im Folgenden gezeigt werden, und zwar wollen wir durch die Konstruktion zweier »Gegenbeispiele« nachweisen:

**I.** *Es gibt eine Funktion  $\varphi_1(x)$ , die in bezug auf einen Modul  $M$  schwach stationär ist, ohne schwach normal zu sein, und ferner, was wichtiger ist,*

**II.** *Es gibt eine Funktion  $\varphi_2(x)$ , die in bezug auf einen Modul  $M$  schwach stationär und ausserdem schwach normal ist, die aber eine schwache Transformierte besitzt, welche nicht schwach stationär in bezug auf  $M$  ist.*

Vorbemerkung: Wenn wir den CAMERONSchen Satz heranziehen, ist die Aussage II mit der folgenden Aussage gleichwertig: *Es gibt eine schwach normale und in bezug auf einen Modul  $M$  schwach stationäre Funktion  $\varphi_2(x)$ , welche nicht in bezug auf  $M$  stark stationär ist.* Es wird uns bequem sein, II in dieser Form darzutun.

Bevor wir an die Konstruktion der Funktionen  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  herangehen, müssen wir zunächst einen bestimmten Modul  $M$  wählen, den wir unseren Betrachtungen zugrundelegen werden. Am bequemsten wäre es natürlich, den einfachst möglichen Modul zu benutzen, nämlich einen solchen, der aus lauter ganzzahligen Multipla einer einzigen Zahl, etwa der Zahl  $2\pi$ , besteht. Dieser Modul  $M_0$  ist aber zu einfach, um das Gewünschte leisten zu können; denn wie wir sofort zeigen können, wird jede Funktion  $\varphi(x)$ , die in bezug auf  $M_0$  schwach stationär ist, notwendigerweise auch stark stationär in bezug auf  $M_0$  sein. In der Tat kommt offenbar jede Folge von lauter ganzen Zahlen unter den an  $M_0$  angepassten Zahlenfolgen  $h_n$  vor, speziell also die Folge  $h_n = 1$  für alle  $n$ , und die Forderung der schwachen Konvergenz der Funktionenfolge  $\varphi(x + h_n) = \varphi(x + 1)$  gegen  $\varphi(x)$  involviert natürlich, dass  $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$  ist für alle  $x$ , so dass  $\varphi(x)$  eine (stetige) rein periodische Funktion der Periode 1 ist, d. h. in der Sprache der fastperiodischen Funktionen, eine fastperiodische Funktion mit lauter Exponenten aus  $M_0$ , also tatsächlich eine in bezug auf  $M_0$  stark stationäre Funktion.

Wir sind also genötigt, bei der Konstruktion unserer Gegenbeispiele einen Modul komplizierterer Art als  $M_0$  zugrundelegen; wie wir sehen werden, kommen wir aber mit einem relativ sehr einfachen Modul aus, nämlich einem solchen, der aus lauter rationalen Multipla einer einzigen

Zahl besteht, und zwar werden wir den Modul  $M^*$  betrachten, welcher aus allen Zahlen der Form  $2\pi \cdot r$  besteht, wo  $r$  eine rationale Zahl ist, deren Nenner eine Potenz von 2 ist. Machen wir uns zunächst klar, was eigentlich die Forderung besagt, dass eine Funktion  $\varphi(x)$  in bezug auf diesen Modul  $M^*$  schwach stationär ist. Wir nennen eine Zahlenfolge  $h_n$  »pseudoganz«, wenn sie die Bedingung  $\lim h_n = 0 \pmod{1}$  erfüllt. Da unser Modul  $M^*$  speziell die Zahl  $\mu = 2\pi$  enthält, ist evident, dass jede an  $M^*$  angepasste Zahlenfolge  $h_n$  pseudoganz sein muss. Indem wir bei einer pseudoganz Zahlenfolge  $h_n$  diejenige ganzzahlige Zahlenfolge  $k_n$  als die zu  $h_n$  gehörige bezeichnen, für welche bei jedem  $n$  die ganze Zahl  $k_n$  der Zahl  $h_n$  am nächsten liegt, d. h. für welche  $h_n - \frac{1}{2} < k_n \leq h_n + \frac{1}{2}$ , ist ferner klar (wegen  $\lim (h_n - k_n) = 0$ ), dass eine pseudoganze Zahlenfolge  $h_n$  und ihre zugehörige ganzzahlige Zahlenfolge  $k_n$  gleichzeitig an  $M^*$  angepasst sind, und dass die beiden Aussagen: » $\varphi(x + h_n)$  konvergiert schwach gegen  $\varphi(x)$ « und » $\varphi(x + k_n)$  konvergiert schwach gegen  $\varphi(x)$ « gleichwertig sind. Hieraus folgt, dass wir uns bei der Entscheidung, ob eine Funktion  $\varphi(x)$  in bezug auf  $M^*$  schwach stationär ist, ohne weiteres auf die Betrachtung von ganzzahligen an  $M^*$  angepassten Zahlenfolgen  $h_n$  beschränken können. Wann aber eine ganzzahlige Zahlenfolge  $h_n$  an  $M^*$  angepasst ist, ist unmittelbar zu sehen. Statt alle Zahlen  $\mu$  des Moduls  $M^*$  zu berücksichtigen, brauchen wir nämlich offenbar nur die Zahlen  $\mu = \frac{2\pi}{2^m}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) zu betrachten (weil jede Zahl  $\mu$  aus  $M^*$  ein ganzzahliges Multiplum einer dieser Zahlen  $\frac{2\pi}{2^m}$  ist); dass aber bei festem  $m$  eine ganzzahlige Zahlenfolge  $h_n$  die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2^m} \cdot h_n = 0 \pmod{2\pi}$

erfüllen soll, ist einfach damit gleichwertig, dass die Zahlen  $h_n$  alle von einer gewissen Stelle  $n \geq n_0 = n_0(m)$  ab durch  $2^m$  teilbar sind. Zusammenfassend haben wir also gesehen: Die Forderung, dass eine Funktion  $\varphi(x)$  in bezug auf  $M^*$  schwach stationär ist, ist mit der folgenden Forderung gleichwertig: Für jede ganzzahlige Zahlenfolge  $h_n$ , für welche bei jedem festen  $m$  alle Elemente  $h_n$  von einer gewissen Stelle an durch  $2^m$  teilbar sind, soll die entsprechende Funktionenfolge  $\varphi(x + h_n)$  schwach gegen  $\varphi(x)$  konvergieren.

Um bei der nunmehr folgenden Konstruktion der beiden in den Aussagen I bzw. II erwähnten Funktionen  $\varphi_1(x)$  bzw.  $\varphi_2(x)$  Wiederholungen zu ersparen, werden wir erst eine einzige Funktion  $\varphi(x)$  konstruieren, die aber von gewissen Parametern  $s_1, s_2, \dots$  abhängt, und danach durch spezielle Wahl dieser Parameter einerseits zu  $\varphi_1(x)$  und andererseits zu  $\varphi_2(x)$  gelangen.

Zunächst teilen wir die Menge aller ganzen Zahlen in abzählbar viele Klassen  $E_1, E_2, E_3, \dots$  ein und zwar folgendermassen. In  $E_1$  nehmen wir jede zweite ganze Zahl auf (also entweder alle geraden oder alle ungeraden Zahlen), in  $E_2$  wird jede zweite der übrig gebliebenen Zahlen aufgenommen, in  $E_3$  jede zweite der nunmehr übrig gebliebenen usw.; die Menge  $E_q$  besteht also aus allen ganzen Zahlen einer gewissen arithmetischen Progression der Differenz  $2^q$ . Hierbei haben wir nur dafür Sorge zu tragen, dass tatsächlich jede ganze Zahl in einer unserer Klassen untergebracht wird; dies kann in mannigfacher Weise erreicht werden, z. B. in der folgenden: Als  $E_1$  wählen wir die Menge der geraden Zahlen, so dass also 0 schon beim ersten Schritt aufgenommen wird; als  $E_2$  wählen wir diejenige der beiden nunmehr zur Verfügung stehenden arithmetischen Progressionen der Differenz  $2^2$ , welche die kleinste übrig ge-

bliebene positive Zahl enthält, d. h.  $E_2$  ist die Menge der Zahlen  $4n + 1$ ; danach wählen wir für  $E_3$  diejenige der beiden zur Verfügung stehenden arithmetischen Progressionen der Differenz  $2^3$ , welche die absolut kleinste übrig gebliebene negative Zahl enthält, also die Menge der Zahlen  $8n - 1$ , und so fort, indem wir abwechselnd das Augenmerk auf die kleinste ledig gebliebene positive und die kleinste ledig gebliebene negative Zahl richten. (Man könnte unmittelbar, z. B. durch Betrachtung der Dualentwicklung der ganzen Zahlen, explizite diejenigen Zahlen charakterisieren, welche bei dem soeben angegebenen Prozess in die Klasse  $E_q$  fallen; wir werden aber nicht dabei verweilen, da es für das weitere belanglos ist, in welcher Weise wir die Klassen  $E_1, E_2, \dots$  gewählt haben, falls sie nur die angegebenen allgemeinen Bedingungen erfüllen).<sup>1</sup> Wir werden sagen, dass auf der ganzen Zahl  $m$  ein Hügel der Höhe  $s$  ( $\geq 0$ ) angebracht ist, wenn auf das Intervall  $\left(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right)$  als Basis ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe  $|s|$  aufgesetzt ist, und zwar nach oben oder unten, je nachdem  $s$  positiv oder negativ ist. Es sei nun  $s_1, s_2, s_3, \dots$  eine zunächst völlig beliebige Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen. Auf jeder Zahl der Klasse  $E_1$  bringen wir einen Hügel der Höhe  $s_1$  an, auf jeder Zahl der Klasse  $E_2$  einen Hügel der Höhe  $s_2$ , usw. Hierdurch wird die ganze Abszissenachse mit einer gewissen Hügelkette bedeckt; die in  $-\infty < x < \infty$  definierte und stetige Funktion, welche diese Hügelkette darstellt, soll mit  $\varphi(x)$  bezeichnet werden (siehe Fig.). Wir werden zeigen,

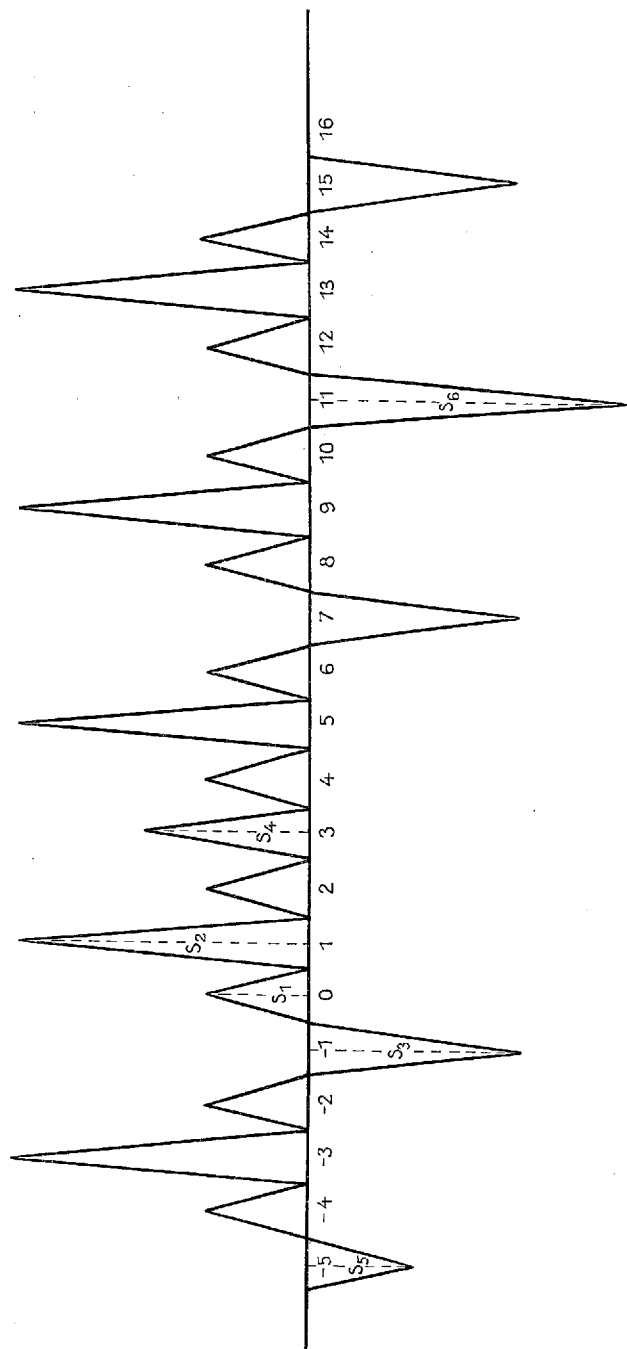
<sup>1</sup> In der anfangs zitierten Arbeit von TOEPLITZ wird eine ähnliche Einteilung der ganzen Zahlen in Klassen  $E_1, E_2, \dots$  vorgenommen, wobei aber — im Gegensatz zu unserem Verfahren — die Einteilung so gewählt wird, dass eine einzige Zahl (übrigens die Zahl 0) in keine der Klassen untergebracht wird.

dass diese Funktion — wie auch die Hugelhohen  $s_q$  gewählt sind — eine in bezug auf den Modul  $M^*$  schwach stationäre Funktion ist. Hierzu genügt es nach dem oben festgestellten zu zeigen, dass für jede ganzzahlige Folge  $h_n$  von der Art, dass bei beliebig gegebenem  $m$  die sämtlichen Zahlen  $h_n$  der Folge von einer gewissen Stelle an durch  $2^m$  teilbar sind, gilt, dass die entsprechende Funktionenfolge  $\varphi(x+h_n)$  schwach (also gleichmässig in jedem endlichen Intervall  $I$ ) gegen  $\varphi(x)$  konvergiert. Es sei also  $h_n$  eine beliebige Folge dieser Art und  $I$  ein beliebig gegebenes endliches Intervall, das wir von der Form  $\left(-l-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}\right)$  ( $l$  positiv ganz) annehmen können. Es sei  $Q$  so gewählt, dass jede der (endlich vielen) Zahlen  $-l, -l+1, \dots, l-1, l$  einer der Klassen  $E_1, \dots, E_Q$  angehört, und es sei  $N$  so gross gewählt, dass jedes  $h_n$  mit  $n > N$  durch  $2^Q$  teilbar ist. Dann gilt für jedes  $n > N$ , dass im ganzen Intervall  $I$  die Funktion  $\varphi(x+h_n)$  sogar mit  $\varphi(x)$  identisch ist. Denn durch eine Verschiebung um  $h_n$ , also um ein Multiplum von  $2^Q$  geht ja sowohl die Zahlenklasse  $E_1$  wie die Zahlenklasse  $E_2, \dots$  wie die Zahlenklasse  $E_Q$  in sich über.

Wir verfügen nun über die bisher völlig beliebigen Zahlen  $s_q \neq 0$  und können dadurch sofort zu einer Funktion  $\varphi_1(x)$  bzw. zu einer Funktion  $\varphi_2(x)$  gelangen.

1). Wählen wir die Hugelhohen  $s_q$  derart, dass  $|s_q|$  für  $q \rightarrow \infty$  gegen Unendlich strebt, so erhalten wir eine Funktion  $\varphi_1(x)$ , die in bezug auf  $M^*$  schwach stationär, aber offenbar nicht schwach normal, sogar weder beschränkt, noch gleichmässig stetig in  $-\infty < x < \infty$  ist.

2). Wählen wir etwa  $s_q = (-1)^q$ , so erhalten wir eine in bezug auf  $M^*$  schwach stationäre Funktion  $\varphi_2(x)$ , die natürlich in  $-\infty < x < \infty$  beschränkt und gleichmässig



stetig, also schwach normal ist, die aber nicht stark stationär in bezug auf  $M^*$  ist. Denn wäre dies der Fall, so müsste z. B. die Funktionenfolge  $\varphi_2(x + 2^n)$  stark gegen  $\varphi_2(x)$  konvergieren, da ja die Zahlenfolge  $h_n = 2^n$  an den Modul  $M^*$  angepasst ist, und dies ist gewiss nicht der Fall; es hat sogar bei jedem  $n$  die obere Grenze von

$$|\varphi_2(x + 2^n) - \varphi_2(x)|$$

in  $-\infty < x < \infty$  ihren grösstmöglichen Wert 2; betrachten wir nämlich die Menge  $R_n = E_{n+1} + E_{n+2} + \dots$  aller ganzen Zahlen, welche nicht zu einer der  $n$  ersten Klassen  $E_1, E_2, \dots, E_n$  gehören, so bilden diese eine arithmetische Progression der Differenz  $2^n$ , und unter den Zahlen dieser Menge  $R_n$  gibt es sowohl solche, die »positive« als auch solche, die »negative« Hügel tragen (z. B. sind ja die Hügel auf den Zahlen von  $E_{n+1}$  und von  $E_{n+2}$  entgegengesetzt gerichtet), also gibt es auch zwei auf einanderfolgende Zahlen in  $R_n$ , etwa  $x_0$  und  $x_0 + 2^n$ , für welche  $|\varphi_2(x_0 + 2^n) - \varphi_2(x_0)| = 2$  ist.

---



## VIII.

### Über den Logarithmus einer positiven fastperiodischen Funktion.

1°. Es sei  $f(x)$  eine für alle  $x$  positive, fastperiodische Funktion. Wir bilden die in  $-\infty < x < \infty$  reelle stetige Funktion

$$g(x) = \log f(x)$$

und fragen, unter welchen Bedingungen  $g(x)$  wiederum fastperiodisch wird.

Eine erste triviale Antwort auf diese Frage lautet:

Damit  $g(x) = \log f(x)$  fastperiodisch sei, ist notwendig und hinreichend, dass die untere Grenze  $m$  von  $f(x)$  grösser als Null (und nicht gleich Null) ist. In der Tat ist die Bedingung  $m > 0$  selbstverständlich notwendig, weil sonst  $f(x)$  beliebig kleine positive Werte, also  $g(x)$  beliebig grosse negative Werte annähme, was mit der Fastperiodizität, also a fortiori Beschränktheit, von  $g(x)$  nicht verträglich ist. Und sie ist auch hinreichend, denn für  $m > 0$  ist ja  $\log y$  in dem abgeschlossenen Intervall  $m \leq y \leq M$ , wo  $M$  die obere Grenze von  $f(x)$  bezeichnet, stetig, und nach einem bekannten, unmittelbar zu beweisenden Satz ist daher die Fastperiodizität von  $\log f(x)$  eine Folge der Fastperiodizität von  $f(x)$  selbst.

Diese triviale Bedingung für die Fastperiodizität von

$g(x) = \log f(x)$  lässt sich natürlich auch als eine Bedingung über die Funktion  $g(x)$  statt über die Funktion  $f(x)$  aussprechen, und zwar lautet sie dann, dass  $g(x)$  nach unten beschränkt sein muss.

Von einer in  $-\infty < x < \infty$  definierten Funktion  $h(x)$  wollen wir sagen, dass sie eine beschränkte Aenderungstendenz besitzt, falls es zu jedem positiven  $k$  ein  $K = K(k)$  derart gibt, dass für ein beliebiges Punktepaar  $x', x''$  mit  $|x' - x''| < k$  die Ungleichung

$$|h(x') - h(x'')| < K$$

gilt. Natürlich bleibt diese Forderung an die Funktion  $h(x)$  ihrem Inhalte nach ungeändert, wenn nur für ein einziges  $k$ , etwa  $k = 1$ , die Existenz eines entsprechenden  $K$  verlangt wird.

Wir wollen nun den Satz beweisen:

*Damit der Logarithmus  $g(x) = \log f(x)$  einer positiven fastperiodischen Funktion  $f(x)$  wiederum fastperiodisch sei, ist notwendig und hinreichend, dass  $g(x)$  eine beschränkte Aenderungstendenz besitzt.*

Dass die Bedingung notwendig ist, ist klar; denn falls die Funktion  $g(x)$  fastperiodisch ist, ist sie ja auch beschränkt, also selbstverständlich von beschränkter Aenderungstendenz. Dass die Bedingung auch hinreichend ist, erfordert eine kleine Ueberlegung. Nach dem obigen kommt es darauf an zu zeigen, dass das Erfülltsein der Bedingung zur Folge hat, dass  $g(x)$  nach unten beschränkt ist. Wäre dieses letztere nun nicht der Fall, d. h. gäbe es Punkte, in denen  $g(x)$  beliebig grosse negative Werte annähme, so gäbe es infolge der beschränkten Aenderungstendenz von  $g(x)$  gewiss auch beliebig grosse Intervalle, in denen  $g(x)$  überall beliebig gross negativ wäre, d. h. in welchen

$f(x) = e^{g(x)}$  überall beliebig nahe an Null herankäme, genau gesprochen: Es liessen sich zu einer vorgegebenen Folge positiver Zahlen  $\varepsilon_n$  mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  entsprechende Intervalle  $(x_n, x_n + l_n)$  mit  $l_n \rightarrow \infty$  derart finden, dass

$$0 < f(x) < \varepsilon_n \text{ für } x_n < x < x_n + l_n.$$

Somit würde

$$\frac{1}{l_n} \int_{x_n}^{x_n + l_n} f(x) dx \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

also nach dem »gleichmässigen Mittelwertsatz« für fastperiodische Funktionen der Mittelwert  $M\{f(x)\} = 0$  sein. Dies ist aber bekanntlich — wegen der relativen Dichte der Verschiebungszahlen — nicht damit verträglich, dass  $f(x) > 0$  ist.

Corollar. Weiss man von dem Logarithmus  $g(x)$  einer positiven fastperiodischen Funktion, dass er differenzierbar mit einer beschränkten Ableitung ist, so kann man schliessen, dass  $g(x)$  fastperiodisch ist. Denn in diesem Fall ist  $g(x)$  natürlich eine Funktion mit beschränkter Aenderungstendenz.

2°. Als eine Anwendung der vorangehenden Ueberlegungen werden wir zeigen, wie aus dem obigen Corollar sich sofort ein Satz ergibt, welchen BOCHNER in einer Note "On the integration of almost periodic functions" (Journal of the London Math. Soc. Bd. VIII (1933), S. 250—254) mit Hilfe der Normalitätseigenschaften fastperiodischer Funktionen bewiesen hat, und welcher lautet:

*Es sei  $\varphi(x)$  eine reelle fastperiodische Funktion. Dann ist die Funktion*

$$f(x) = e^{\int_0^x \varphi(x) dx}$$

nur in dem (trivialen) Fall fastperiodisch, wo schon das Integral  $\int_0^x \varphi(x) dx$  fastperiodisch ist.

In der Tat, falls  $f(x)$  fastperiodisch ist, muss nach dem Corollar auch  $g(x) = \log f(x) = \int_0^x \varphi(x) dx$  fastperiodisch sein, weil ja  $g(x)$  die beschränkte (sogar fastperiodische) Ableitung  $\varphi(x)$  besitzt.

3°. Nunmehr gehen wir zu einer Anwendung des Satzes in 1°, oder vielmehr des aus ihm unmittelbar folgenden BOCHNERSCHEN Satzes in 2°, über, welche Differentialgleichungen betrifft.

Als Verallgemeinerung des fundamentalen Satzes, dass das Integral einer fastperiodischen Funktion immer fastperiodisch ist, falls es nur beschränkt bleibt, haben NEUGEBAUER und der Verfasser bewiesen, dass jede beschränkte Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite

$$\frac{d^n y}{dx^n} + k_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + k_{n-1} \frac{dy}{dx} + k_n y = \varphi(x)$$

von selbst fastperiodisch ist. Für den allgemeinen Fall einer linearen Differentialgleichung mit fastperiodischen — statt konstanten — Koeffizienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + \varphi_n(x) y = \varphi(x)$$

gilt bekanntlich kein entsprechender Satz. Für diese letzte wichtige Tatsache hat BOCHNER in seiner interessanten Arbeit "Homogeneous systems of differential equations with almost periodic coefficients" (Journal of the London Math.

Soc. Bd. VIII (1933), S. 283—288) ein einfaches explizites Beispiel sogar einer Differentialgleichung erster Ordnung angeben, und zwar das folgende, in welchem aber zu beachten ist, dass komplexwertige fastperiodische Funktionen zugelassen werden. Es wird die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + i \cdot a(x) \cdot y = 0$$

betrachtet, wo  $a(x)$  eine reelle fastperiodische Funktion ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist durch

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_0^x i \cdot a(x) dx}$$

gegeben, wo  $C$  eine komplexe Konstante bedeutet. Wie auch die reelle fastperiodische Funktion  $a(x)$  gewählt wird, ist offenbar die Funktion

$$b(x) = e^{-i \int_0^x a(x) dx}$$

beschränkt; sie hat ja den absoluten Betrag 1. Es handelt sich also nur darum,  $a(x)$  so zu wählen, dass  $b(x)$  nicht fastperiodisch ausfällt. Zu diesem Zwecke wird die fastperiodische Funktion  $a(x)$  so gewählt, dass sie die beiden folgenden — bekanntlich mit einander verträglichen — Bedingungen erfüllt.

1) Die Fourierreihe der Funktion  $a(x)$  besitzt kein konstantes Glied, d. h. es ist der Mittelwert  $M\{a(x)\} = 0$ , also  $\int_0^x a(x) dx = o(|x|)$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .

2) Das Integral  $\int_0^x a(x) dx$  bleibt aber nicht beschränkt.

Es wird nun ein Satz des Verfassers herangezogen, nach

welchem eine Funktion der Gestalt  $e^{iF(x)}$ , wo  $F(x)$  eine stetige reelle Funktion ist, nur dann fastperiodisch sein kann, falls  $F(x)$  die Form  $c \cdot x + r(x)$  besitzt, wo  $c$  eine Konstante (die sogenannte Säkularkonstante) und das Restglied  $r(x)$  beschränkt, sogar fastperiodisch ist. Dieser Satz zeigt unmittelbar, dass unsere Funktion  $b(x)$  tatsächlich nicht fastperiodisch ist. Denn die im Exponenten dieser Funktion  $b(x) = e^{-i \int_0^x a(x) dx}$  auftretende Funktion  $-\int_0^x a(x) dx$  hat sicher nicht die Form  $c \cdot x + r(x)$  mit beschränktem  $r(x)$ , denn wegen  $\int_0^x a(x) dx = o(|x|)$  müsste  $c$  gleich 0 sein, also müsste  $\int_0^x a(x) dx$  selbst beschränkt sein, was ja nicht der Fall ist.

Das soeben angegebene »Gegenbeispiel« von BOCHNER beruht in seinem ganzen Aufbau prinzipiell darauf, dass in der betrachteten Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} + \varphi(x) \cdot y = 0$  für die fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  eine nicht reelle Funktion gewählt wurde. Es mag daher von Interesse sein, auch ein einfaches Beispiel einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} + \varphi(x) \cdot y = 0$$

mit einem reellen fastperiodischen Koeffizienten  $\varphi(x)$  zu bilden, deren Lösungen beschränkt, aber nicht fastperiodisch sind. Wir werden zeigen, dass der in 2° aufs neue bewiesene Satz von BOCHNER zur Konstruktion eines solchen »Gegenbeispiels« verwendet werden kann. Die Lösungen von (\*) werden durch

$$y(x) = c \cdot e^{-\int_0^x \varphi(x) dx}$$

gegeben. Es handelt sich also darum, eine reelle fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  so zu bestimmen, dass die Funktion

$$\psi(x) = e^{-\int_0^x \varphi(x) dx}$$

beschränkt, aber nicht fastperiodisch ausfällt. Eine solche Funktion  $\varphi(x)$  wird, behaupte ich, durch die unendliche Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} \sin \delta_{\nu} x$$

geliefert, wo  $\varepsilon_{\nu}$  und  $\delta_{\nu}$  positive Zahlenfolgen sind, welche nur den beiden Bedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} \text{ konvergent, } \frac{\delta_{\nu}}{\varepsilon_{\nu}} \rightarrow 0 \text{ für } \nu \rightarrow \infty$$

genügen. (Es können also z. B.  $\varepsilon_{\nu} = \frac{1}{2^{\nu}}$ ,  $\delta_{\nu} = \frac{1}{\nu \cdot 2^{\nu}}$  verwendet werden.) Zunächst ist  $\varphi(x)$  fastperiodisch, da die Reihe  $\sum \varepsilon_{\nu} \sin \delta_{\nu} x$  wegen der Konvergenz von  $\sum \varepsilon_{\nu}$  für alle  $x$  gleichmässig konvergiert. Bezeichnen wir das Integral  $\int_0^x \varphi(x) dx$  mit  $\chi(x)$ , so gilt für jedes feste  $x$  die Ungleichung

$$\chi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\nu}}{\delta_{\nu}} (1 - \cos \delta_{\nu} x) \geq 0,$$

da die sämtlichen Glieder der Reihe nicht negativ sind. Also ist  $\psi(x) = e^{-\chi(x)}$  sicher beschränkt, nämlich  $0 < \psi(x) \leq 1$ . Um schliesslich die Nicht-Fastperiodizität von  $\psi(x) = e^{-\chi(x)}$  darzutun, genügt es, nach dem Satz in 2° zu zeigen, dass das im Exponenten von  $\psi(x)$  auftretende Integral

$\chi(x) = \int_0^x p(x) dx$  nicht fastperiodisch, d. h. nicht beschränkt ist. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall, denn bei jedem festen  $n$  gilt (indem wir nur ein einziges Glied in der obigen Reihe von  $\chi(x)$  berücksichtigen)

$$\chi\left(\frac{\pi}{2\delta_n}\right) \geq \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} \left(1 - \cos \delta_n \frac{\pi}{2\delta_n}\right) = \frac{\varepsilon_n}{\delta_n},$$

und  $\frac{\varepsilon_n}{\delta_n}$  wächst ja nach Annahme für  $n \rightarrow \infty$  über alle Grenzen.

