Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV,** 4.

ÜBER DIE WERTEVERTEILUNG DER CHARAKTERE ABELSCHER GRUPPEN

VON

SVEND B. E. BUNDGAARD

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Den Inhalt dieser Arbeit bilden gewisse Verallgemeinerungen klassischer Sätze von KRONECKER [3] über diophantische Approximationen und hieran anschliessender Sätze von H. WEYL [5] über Gleichverteilung[1].

Zunächst sollen einige zu benutzende Hilfsmittel kurz besprochen werden.

$\mathfrak{G}$ bezeichne überall im folgenden eine willkürliche (abstrakte) abelsche Gruppe. Das Gruppenprodukt der Elemente $a \varepsilon \mathfrak{G}$ und $b \varepsilon \mathfrak{G}$ wird wie gewöhnlich mit ab bezeichnet; 1 sei das Einselement der Gruppe.

Ich erinnere an den Begriff des Mittelwertes einer in $\mathfrak{G}$ definierten, komplexwertigen, in v. NEUMANNschem Sinne [4] fastperiodischen (f. p.) Funktion $f(t)$: Es existiert eine und nur eine komplexe Zahl, die gleichmässig approximiert werden kann durch Summen der Form

$$\alpha_1 f(a_1 t) + \alpha_2 f(a_2 t) + \dots + \alpha_n f(a_n t),$$

wo die a_i feste Elemente von $\mathfrak{G}$, die α_i reelle positive Zahlen mit der Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ sind und t die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft. Diese Zahl wird mit $M\{f\}$ oder ausführlicher mit $\underset{t}{M}\{f(t)\}$ bezeichnet und der Mittelwert von f genannt.

[1] Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Für das Funktional $M\{f\}$ gilt:

1°. $M\{1\} = 1$.
2°. $M\{f+g\} = M\{f\} + M\{g\}$.
3°. $M\{\alpha f\} = \alpha M\{f\}$, wo α eine komplexe Zahl ist.
4°. Wenn $f(t)$ nur reelle nichtnegative Werte annimmt, dann ist $M\{f\} \geqq 0$, und in dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $f(t) \equiv 0$.
5°. $\underset{t}{M}\{f(at)\} = \underset{t}{M}\{f(t)\}$, wo a ein willkürliches Gruppenelement ist.

Eine nicht identisch verschwindende, in $\mathfrak{G}$ definierte komplexwertige Funktion $\varphi(t)$, die der Funktionalgleichung

$$\varphi(t_1 t_2) = \varphi(t_1)\,\varphi(t_2)$$

genügt, heisst ein Charakter der Gruppe. $\varphi(t) \equiv 1$ heisst der Hauptcharakter. Im folgenden werden nur beschränkte Charaktere $\varphi, \psi, \ldots$ betrachtet. Diese spielen in der v. Neumannschen Theorie der in $\mathfrak{G}$ f. p. Funktionen eine Rolle, die der Rolle der reinen Schwingungen $e^{2\pi i \lambda t}$ (der stetigen, beschränkten Charaktere der additiven Gruppe der reellen Zahlen) in der Bohrschen Theorie der f. p. Funktionen entspricht, und haben ähnliche Eigenschaften, nämlich:

1°. $\varphi(1) = 1$.
2°. $|\varphi(t)| = 1$ und $\varphi(t^{-1}) = \overline{\varphi(t)}$ für alle $t \varepsilon \mathfrak{G}$.
3°. Das Produkt von endlich vielen beschränkten Charakteren ist ein beschränkter Charakter.
4°. Jeder beschränkte Charakter ist f. p.
5°. Für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen, beschränkten Charakter $\varphi(t)$ ist $M\{\varphi\} = 0$.

Weiter sei bemerkt: Ist

$$P(t) = c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t) + \dots + c_s\,\varphi_s(t),$$

wo $c_1, c_2, \dots, c_s$ willkürliche komplexe Zahlen, und $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ untereinander verschiedene beschränkte Charaktere sind, dann ist

$$c_\sigma = \underset{t}{M}\{P(t)\,\overline{\varphi_\sigma(t)}\}. \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, s.)$$

Dieses folgt unmittelbar aus 1°—5°.

N beschränkte Charaktere $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$ heissen unabhängig, wenn eine Relation

$$\{\varphi_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \{\varphi_2(t)\}^{\nu_2} \cdots \{\varphi_N(t)\}^{\nu_N} \equiv 1$$

mit ganzzahligen $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ nur stattfindet, sofern $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_N = 0$.

Für stetige Charaktere

$$\varphi_1(t) = e^{2\pi i \lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{2\pi i \lambda_2 t}, \dots, \varphi_N(t) = e^{2\pi i \lambda_N t}$$

in der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist Unabhängigkeit gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit der N Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

$\mathfrak{G}$ bezeichne die Produktgruppe $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_M)$ der M abelschen Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_M$ und $t = (t_1, t_2, \dots, t_M)$ ein Gruppenelement von $\mathfrak{G}$. Ist $\varphi_\mu(t_\mu)$ ein beschränkter Charakter von $\mathfrak{G}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \dots, M)$, dann ist die Funktion $\varphi(t) = \varphi_1(t_1) \cdot \varphi_2(t_2) \dots \varphi_M(t_M)$ ein Charakter von $\mathfrak{G}$. Die Funktion $\varphi(t)$ ist dann und nur dann der Hauptcharakter von $\mathfrak{G}$, wenn $\varphi_\mu(t_\mu)$ für alle μ der Hauptcharakter von $\mathfrak{G}_\mu$ ist.

Die Menge der komplexen Vorzeichen — geometrisch: die Menge der Punkte auf dem Einheitskreis — bildet eine Gruppe C mit der gewöhnlichen Multiplikation als Gruppenoperation. Die Produktgruppe

$$Q_N = (C, C, \ldots, C)$$

von N Einheitskreisen nennt man den N-dimensionalen Torusraum. Ein Punkt z aus Q_N ist also ein N-tupel

$$(1) \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$$

von N komplexen Vorzeichen. Eine Folge $z', z'', \ldots$ von Punkten aus Q_N heisst konvergent, wenn Konvergenz in gewöhnlichem Sinne in jeder der N Koordinaten stattfindet. Die Begriffe: Häufungspunkt einer Punktmenge, abgeschlossene und offene Punktmenge, abgeschlossene Hülle einer Punktmenge, stetige Funktion u. s. v. werden wie gewöhnlich definiert. Speziell sei erwähnt, dass eine Punktmenge E überall dicht in Q_N heisst, wenn Q_N mit der abgeschlossenen Hülle von E identisch ist.

In Q_N gilt der Weierstrasssche Approximationssatz:

Für eine willkürliche in Q_N stetige, komplexwertige Funktion $g(z)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom

$$S(z) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} c_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_N^{\nu_N},$$

so dass

$$|g(z) - S(z)| \leqq \varepsilon$$

für alle $z \varepsilon Q_N$.

Auf dem Einheitskreis C soll die Bogenlänge mit der Länge der Kreisperipherie als Einheit gemessen werden. $b_1, b_2, \ldots, b_N$ seien N Bogen; die Länge von b_i sei ebenfalls mit b_i bezeichnet. Die Menge der Punkte (1) mit

$z_1 \varepsilon b_1, z_2 \varepsilon b_2, \ldots, z_N \varepsilon b_N$ heisst ein Intervall in Q_N. Das Produkt

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_N$$

wird der Inhalt des Intervalles genannt. Speziell ist Q_N ein Intervall, dessen Inhalt gleich 1 ist.

Hiernach können die Begriffe: Riemann-integrierbare Funktion und Jordan-messbare Punktmenge auf gewöhnliche Weise eingeführt werden. Das Integral der in Q_N Riemann-integrierbaren Funktion $f(z)$ bezeichnen wir mit

$$\int_{Q_N} f(z)\, d w_N .$$

Hierzu sei bemerkt: zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ lässt sich ein δ derart bestimmen, dass jede zu einer Intervalleinteilung des Q_N von der »Feinheit« $\leqq \delta$ gehörige Näherungssumme σ der Relation

$$\left| \sigma - \int_{Q_N} f(z)\, d w_N \right| \leqq \varepsilon$$

genügt. Es seien $I_1, I_2, \ldots, I_n$ die Intervalle einer bestimmten Einteilung von der Feinheit $\leqq \delta$; der Inhalt von I_ν sei α_ν, und z_ν sei ein willkürlicher Punkt von I_ν. Dann ist also

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f(z_\nu) - \int_{Q_N} f(z)\, d w_N \right| \leqq \varepsilon.$$

Ist nun u ein willkürlicher Punkt von Q_N, so ist, wie leicht einzusehen, $\sum \alpha_\nu f(z_\nu u)$ eine Näherungssumme, die ebenfalls zu einer (im allgemeinen neuen) Einteilung von der Feinheit $\leqq \delta$ gehört, so dass also die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f(z_\nu u) - \int_{Q_N} f(z)\, d w_N \right| \leqq \varepsilon$$

für jedes $u \varepsilon Q_N$ gilt.

I. Approximationssätze.

§ 1. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ reelle, linear unabhängige Zahlen; wir betrachten die Punktmenge

$$(\lambda_1 t + \gamma_1, \lambda_2 t + \gamma_2, \ldots, \lambda_N t + \gamma_N)$$

im N-dimensionalen Zahlenraum R_N, wo t die Menge aller reellen Zahlen und $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$ die Menge aller Punkte in R_N mit ganzzahligen Koordinaten durchlaufen. Ein bekannter Satz von Kronecker besagt, dass diese Punktmenge überall dicht in R_N liegt, oder anders ausgedrückt: Die Menge der Punkte

$$\zeta(t) = \left(e^{2\pi i \lambda_1 t}, e^{2\pi i \lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_N t}\right)$$

liegt in Q_N überall dicht.

Es zeigt sich nun, dass dieser Satz seine Gültigkeit behält, wenn die beschränkten, unabhängigen, stetigen Charaktere $e^{2\pi i \lambda_1 t}, e^{2\pi i \lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_N t}$ der additiven Gruppe der reellen Zahlen durch N unabhängige Charaktere von $\mathfrak{G}$ ersetzt werden. Es gilt nämlich der

Satz 1. *Sind $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)$ unabhängige beschränkte Charaktere in $\mathfrak{G}$, dann liegt die Menge der Punkte*

$$\zeta(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t))$$

überall dicht in Q_N.

Wir betrachten ferner die Menge E der Punkte

$$(\lambda_1 t+\gamma_1, \lambda_2 t+\gamma_2, \ldots, \lambda_N t+\gamma_N)$$

in R_N, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ nun willkürliche, also nicht mehr als linear unabhängig vorausgesetzte, feste reelle Zahlen sind; t ist eine freie reelle Variable, und $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$ durchläuft die Menge aller »ganzen« N-tupel. Ein allgemeinerer Satz von KRONECKER besagt: Die abgeschlossene Hülle von E ist identisch mit der Menge derjenigen Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, für welche

$$g_1 a_1+g_2 a_2+\ldots+g_N a_N$$

für alle ganzzahligen N-tupeln $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ mit

$$g_1\lambda_1+g_2\lambda_2+\ldots+g_N\lambda_N = 0$$

eine ganze Zahl ist.

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren: Die abgeschlossene Hülle der Menge der Punkte

$$\zeta(t) = \left(e^{2\pi i\lambda_1 t}, e^{2\pi i\lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i\lambda_N t}\right)$$

in Q_N, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ willkürliche reelle Zahlen sind und t eine freie reelle Variable ist, ist identisch mit der Menge der Punkte

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_N),$$

für welche

$$z_1^{g_1}\cdot z_2^{g_2}\cdot\ldots\cdot z_N^{g_N} = 1$$

bei allen N-tupeln $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ von ganzen Zahlen mit

$$\left\{e^{2\pi i\lambda_1 t}\right\}^{g_1}\cdot\left\{e^{2\pi i\lambda_2 t}\right\}^{g_2}\cdot\ldots\cdot\left\{e^{2\pi i\lambda_N t}\right\}^{g_N} \equiv 1.$$

Auch dieser Satz bleibt richtig, wenn $e^{2\pi i\lambda_1 t}$, $e^{2\pi i\lambda_2 t}$, ..., $e^{2\pi i\lambda_N t}$ durch N willkürliche beschränkte Charaktere von $\mathfrak{G}$ ersetzt werden:

Satz 2. Es seien $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)$ beschränkte Charaktere in $\mathfrak{G}$. Dann ist die abgeschlossene Hülle der Punktmenge

$$\zeta(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t))$$

in Q_N identisch mit der Menge der Punkte

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_N),$$

für welche

$$z_1^{g_1} \cdot z_2^{g_2} \cdot \ldots \cdot z_N^{g_N} = 1$$

für jedes ganzzahlige N-tupel $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ mit

$$\{\varphi_1(t)\}^{g_1} \cdot \{\varphi_2(t)\}^{g_2} \cdot \ldots \cdot \{\varphi_N(t)\}^{g_N} \equiv 1$$

gilt.

Ausserdem erwähne ich einen noch allgemeineren Kroneckerschen Satz: Von den N Linearformen

$$L_\nu = \lambda_{\nu 1} t_1 + \lambda_{\nu 2} t_2 + \ldots + \lambda_{\nu M} t_M \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

wo die λ willkürliche feste reelle Zahlen und $t_1, t_2, \ldots, t_M$ freie reelle Variable sind, ausgehend, bilden wir die Menge E der Punkte

$$(L_1 + \gamma_1, L_2 + \gamma_2, \ldots, L_N + \gamma_N),$$

wo $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$ die Menge aller ganzen N-tupel durchläuft. Die abgeschlossene Hülle von E ist dann identisch mit der Menge derjenigen Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, für welche die Zahl

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_N g_N$$

ganz ist für alle ganzzahligen $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ mit der Eigenschaft, dass

$$L_1 g_1 + L_2 g_2 + \ldots + L_N g_N$$

identisch in den M Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_M$ verschwindet.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion ausgedrückt lautet dieser Satz: Die abgeschlossene Hülle der Menge der Punkte

$$\zeta(t_1, t_2, \ldots, t_M)$$
$$= \left(e^{2\pi i \lambda_{11} t_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i \lambda_{1M} t_M}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_{N1} t_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i \lambda_{NM} t_M}\right)$$

in Q_N ist identisch mit der Menge derjenigen Punkte

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_N),$$

für welche

$$z_1^{g_1} \cdot z_2^{g_2} \cdot \ldots \cdot z_N^{g_N} = 1$$

gilt für jedes ganzzahlige $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$\left\{e^{2\pi i \lambda_{11} t_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i \lambda_{1M} t_M}\right\}^{g_1} \cdot \ldots \cdot \left\{e^{2\pi i \lambda_{N1} t_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i \lambda_{NM} t_M}\right\}^{g_M} = 1$$

identisch in den Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_M$ erfüllt ist.

Auch dieser Satz, der ebenfalls ein Satz über beschränkte Charaktere der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist, lässt sich auf abelsche Gruppen verallgemeinern; in dieser Verallgemeinerung wird jede der Variabeln t_μ ihre eigene Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ durchlaufen:

Satz 3. Es seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_M$ abelsche Gruppen und $\varphi_{1\mu}(t_\mu), \varphi_{2\mu}(t_\mu), \ldots, \varphi_{N\mu}(t_\mu)$ N beschränkte Charaktere von $\mathfrak{G}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, M)$. Die abgeschlossene Hülle der Menge der Punkte

$$\zeta(t_1, t_2, \ldots, t_M)$$
$$= (\varphi_{11}(t_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{1M}(t_M), \ldots, \varphi_{N1}(t_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{NM}(t_M))$$

ist identisch mit der Menge der Punkte

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_N),$$

für welche

$$z_1^{g_1} \cdot z_2^{g_2} \cdot \ldots \cdot z_N^{g_N} = 1$$

für jedes ganzzahlige N-tupel $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\{\varphi_{11}(t_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{1M}(t_M)\}^{g_1} \cdot \ldots \cdot \{\varphi_{N1}(t_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{NM}(t_M)\}^{g_N} = 1$$

identisch in $t_1, t_2, \ldots, t_M$ gilt.

§ 2. Für die angeführten klassischen KRONECKERschen Sätze sind im Laufe der Zeit viele Beweise, teils von analytischer, teils von geometrischer Natur gegeben worden. Mehrere von ihnen — z. B. einige von H. BOHR und H. BOHR- B. JESSEN gegebene analytische Beweise — lassen sich in einfacher Weise zu Beweisen für die entsprechenden Sätze 1—3 verallgemeinern. Beispielsweise will ich im folgenden Paragraphen den Beweis für Satz 1 durch Übertragung eines BOHRschen Beweises [1] führen und in § 4 zeigen, wie eine geometrische Beweismethode von M. RIESZ[1] sich zur Herleitung des Satzes 2 verwenden lässt. Zuletzt zeige ich, dass der Satz 3 schon im Satz 2 enthalten ist.

§ 3. Bei den genannten analytischen Beweisen — die ihren Ausgangspunkt in der früher erwähnten Arbeit von

[1] Dieser Beweis wurde von M. RIESZ in einem Vortrag in Matematisk Forening in Kopenhagen am 26. Mai 1935 mitgeteilt.

H. WEYL haben — ist die Bildung des Integralmittelwertes $\lim\limits_{T=\infty} \frac{1}{T}\int_0^T$ ein wesentliches Hilfsmittel. Entsprechend beruhen die auf Gruppen übertragenen Beweise auf der Bildung des v. NEUMANNschen Mittelwertes.

Der angekündigte Beweis für den Satz 1 verläuft so: Wir betrachten die in $\mathfrak{G}$ f. p. Funktion

$$F(t) = 1 + z_1\varphi_1(t) + z_2\varphi_2(t) + \ldots + z_N\varphi_N(t),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ die in $\mathfrak{G}$ unabhängigen Charaktere des Satzes 1 sind und $z_1, z_2, \ldots, z_N$ willkürliche komplexe Vorzeichen bezeichnen. Der Satz 1 ist — wie leicht einzusehen — bewiesen, wenn wir gezeigt haben, dass die obere Grenze Γ der Funktion $|F(t)|$ gleich $N+1$ ist; da offenbar $\Gamma \leqq N+1$ ist, ist alles gezeigt, wenn die Gültigkeit der Relation

$$\Gamma \geqq N+1 \tag{2}$$

bewiesen wird.

Wir setzen, indem $x_1, x_2, \ldots, x_N$ Unbestimmte bezeichnen,

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_N,$$

und

$$\{G(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}^p = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} \alpha^{(p)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \ldots x_N^{\nu_N}. \tag{3}$$

Dann ist

$$\{F(t)\}^p$$
$$= \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_N} \alpha^{(p)}_{\nu_1, \ldots, \nu_N} \cdot z_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot z_N^{\nu_N} \cdot \{\varphi_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \{\varphi_N(t)\}^{\nu_N}.$$

Die Funktionen $\{\varphi_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \{\varphi_2(t)\}^{\nu_2} \ldots \{\varphi_N(t)\}^{\nu_N}$ sind als Produkte von beschränkten Charakteren wieder beschränkte

Charaktere, und sie sind paarweise verschieden, da φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_N$ unabhängig sind. Daher ist (vergl. Bemerkung auf Seite 5)

$$\alpha^{(p)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} z_1^{\nu_1} \cdot z_2^{\nu_2} \ldots z_N^{\nu_N}$$
$$= \underset{t}{M}\left\{\left\{F(t)\right\}^p \left\{\varphi_1(t^{-1})\right\}^{\nu_1} \left\{\varphi_2(t^{-1})\right\}^{\nu_2} \ldots \left\{\varphi_N(t^{-1})\right\}^{\nu_N}\right\},$$

woraus folgt, dass

$$\alpha^{(p)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} \leqq M\left\{\Gamma^p\right\} = \Gamma^p.$$

Die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite von (3) ist, wie man durch eine grobe Abschätzung sieht, höchstens $(p+1)^N$; also ist

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} \alpha^{(p)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} \leqq (p+1)^N \Gamma^p.$$

Da aber

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} \alpha^{(p)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N} = (N+1)^p$$

ist, gilt für jedes p die Relation

$$\Gamma \geqq \frac{N+1}{(p+1)^{\frac{N}{p}}}.$$

Der Grenzübergang $p \to \infty$ zeigt danach die Gültigkeit von (2).

§ 4. Obzwar der eben mitgeteilte Beweis sehr einfach erscheint, muss man doch bedenken, dass die Mittelwertbildung ein entscheidendes Hilfsmittel des Beweises bildet. In dem jetzt zu besprechenden Beweis für Satz 2 wird dieses Hilfsmittel nicht benutzt. Dagegen wird der folgende Satz von M. Riesz über Vektormoduln zur Anwendung kommen:

Es bezeichne V einen Vektormodul in R_N. Die Menge der Vektoren $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, für welche das innere Produkt

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_N v_N$$

für alle zu V gehörigen Vektoren $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ ganz ist, ist ein Modul, der mit V^{-1} bezeichnet und der zu V reziproke Modul genannt wird. $\overline{V}$ bezeichne die abgeschlossene Hülle von V. Dann ist

$$(V^{-1})^{-1} = \overline{V}. \tag{4}$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann der Beweis folgendermassen geführt werden: Wir verlegen die Betrachtungen von Q_N nach R_N, indem wir für jede der in Satz 2 auftretenden Funktionen $\varphi_\nu(t)$ eine reellwertige Funktion $\lambda_\nu(t)$ durch die Festsetzung:

$$\varphi_\nu(t) = e^{2\pi i \lambda_\nu(t)} \quad 0 \leqq \lambda_\nu(t) < 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

definieren. Dann ist für jedes Paar von Elementen $t_1 \varepsilon \mathfrak{G}$ und $t_2 \varepsilon \mathfrak{G}$

$$\lambda_\nu(t_1 t_2^{-1}) \equiv \lambda_\nu(t_1) - \lambda_\nu(t_2) \pmod 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Hieraus folgt, dass die Menge der Vektoren

$$v(t, \gamma) = \big(\lambda_1(t) + \gamma_1,\ \lambda_2(t) + \gamma_2,\ \ldots,\ \lambda_N(t) + \gamma_N\big),$$

wo t die Gruppe $\mathfrak{G}$, und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$ die Menge der »ganzen« Vektoren von R_N durchlaufen, ein Modul V ist. Der Satz 2 lässt sich hiernach so formulieren: Der Modul $\overline{V}$ ist identisch mit der Menge derjenigen Vektoren $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, für welche

$$g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_N a_N$$

eine ganze Zahl ist, sobald $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ ein »ganzer« Vektor ist mit der Eigenschaft, dass

$$g_1\lambda_1(t)+g_2\lambda_2(t)+\ldots\ldots+g_N\lambda_N(t)$$

für alle $t\varepsilon\mathfrak{G}$ ganz ausfällt. $\overline{V}$ ist aber zufolge der Relation (4) mit $(V^{-1})^{-1}$ identisch. V^{-1} besteht aus den Vektoren $g=(g_1, g_2, \ldots\ldots, g_N)$, für welche das innere Produkt

$$(g, v(t,\gamma))$$
$$=g_1\lambda_1(t)+g_2\lambda_2(t)+\ldots+g_N\lambda_N(t)+g_1\gamma_1+g_2\gamma_2+\ldots+g_N\gamma_N$$

für alle $t\varepsilon\mathfrak{G}$ und alle ganzen Vektoren γ eine ganze Zahl ist. Notwendig hierfür ist aber, dass $g_1, g_2, \ldots\ldots, g_N$ ganze Zahlen sind, denn für $t=1$ und dasjenige γ für welches $\gamma_\nu=1$ und alle übrigen Koordinaten gleich Null sind, ist $(g, v)=g_\nu$. Der Modul V^{-1} ist also identisch mit der Menge derjenigen Vektoren $(g_1, g_2, \ldots\ldots, g_N)$ mit ganzen Koordinaten, für welche die Zahl

$$g_1\lambda_1(t)+g_2\lambda_2(t)+\ldots\ldots+g_N\lambda_N(t)$$

für alle $t\varepsilon\mathfrak{G}$ ganz ist. $(V^{-1})^{-1}$ besteht also aus allen Vektoren $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_N)$, für welche die Zahl

$$g_1a_1+g_2a_2+\ldots\ldots+g_Na_N$$

ganz ist, sobald

$$g_1\lambda_1(t)+g_2\lambda_2(t)+\ldots\ldots+g_N\lambda_N(t)$$

für jedes $t\varepsilon\mathfrak{G}$ ganz ist. Hiermit haben wir den Satz 2 bewiesen.

§ 5. Endlich soll gezeigt werden, dass der Satz 3 schon im Satz 2 enthalten ist. Es bezeichne $t=(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_M)$ ein Gruppenelement der Produktgruppe $\mathfrak{G}=(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{G}_M)$ der im Satz 3 genannten abelschen Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{G}_M$. Die Funktion

$$\varphi_\nu(t) = \varphi_{\nu_1}(t_1) \cdot \varphi_{\nu_2}(t_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\nu M}(t_M) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots N)$$

ist dann (vergl. Bemerkung auf Seite 5) ein Charakter in $\mathfrak{G}$ und Satz 3 die wörtliche Wiederholung des Satzes 2.

II. Verteilungssätze.

§ 6. Wir betrachten wieder die Funktion

$$\zeta(t) = \left(e^{2\pi i \lambda_1 t},\ e^{2\pi i \lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{2\pi i \lambda_N t}\right),$$

deren Definitionsbereich die reelle t-Achse ist, und deren Werte Q_N angehören. Der erste in I erwähnte KRONECKERsche Satz besagt, dass die Wertmenge von $\zeta(t)$ überall dicht in Q_N verteilt ist, wenn die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ linear unabhängig sind. Dieses Resultat ist von H. WEYL [5] folgendermassen verschärft worden:

Satz A: $\zeta(t)$ ist in Q_N gleichverteilt.

Die genaue Bedeutung des Wortes »gleichverteilt« wird weiter unten angeführt.

Die genannte Verschärfung wird erst durch Einführung eines Masses für Punktmengen auf der reellen Achse ermöglicht. Es bezeichne E eine solche Menge und $h(t)$ ihre charakteristische Funktion, d. h. die Funktion, die in den Punkten von E gleich 1 und sonst gleich 0 ist. E heisst relativ messbar, wenn der Grenzwert

$$\mu(E) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_x^{x+T} h(t)\, dt$$

gleichmässig in x existiert, sowohl wenn das Integral als das obere wie als das untere DARBOUXsche Integral gedeutet wird. Der Menge E wird der relative Inhalt $\mu(E)$ zugeschrieben.

Es bezeichne hiernach $z(t) = \left(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_N(t)\right)$ eine auf der t-Achse definierte Funktion, deren Werte Q_N angehören. $z(t)$ heisst in Q_N gleichverteilt, wenn folgendes gilt: Für jedes Intervall I in Q_N ist die Menge E_I der t-Werte, für welche $z(t)$ dem Intervall I angehört, relativ messbar und

$$\mu(E_I) = \text{Inhalt von } I.$$

(Ersetzt man in dieser Definition »Intervall I« durch »Jordan-messbare Menge I«, bekommt man wiederum einen Gleichverteilungsbegriff; dieser ist nur scheinbar vom hier genannten verschieden).

Der Beweis des Satzes A kann bekanntlich [5] mittels des folgenden Weylschen Kriteriums geführt werden: Notwendig und hinreichend dafür, dass $z(t) = \left(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_N(t)\right)$ gleichverteilt ist, ist dass die Relation

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_x^{x+T} \left\{z_1(t)\right\}^{\nu_1} \cdot \left\{z_2(t)\right\}^{\nu_2} \ldots \left\{z_N(t)\right\}^{\nu_N} dt = 0,$$

wo $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, gleichmässig in x gilt sowohl wenn das Integral als oberes wie als unteres Darbouxsches Integral verstanden wird. Bei Herleitung dieses Kriteriums ist der (auf Seite 6 formulierte) Weierstrasssche Approximationssatz ein wesentliches Hilfsmittel.

Dass der Satz A in der Tat eine Verschärfung des Kroneckerschen Satzes ist, ist klar; denn wenn eine Funktion $z(t)$ gleichverteilt ist, dann liegt ihre Wertmenge in Q_N überall dicht.

§ 7. H. Bohr und R. Courant [2] haben einen vom Weylschen wesentlich verschiedenen Beweis für den Satz A gegeben. WEYL benutzt, wie schon bemerkt, den WEIERSTRASSschen Approximationssatz. Dass die Wertemenge von $\zeta(t)$ in Q_N überall dicht liegt, wird bei ihm gleichzeitig bewiesen. Das Überalldichtliegen von $\zeta(t)$ ist dagegen der Ausgangspunkt des BOHR-COURANTschen Beweises, der insofern einfacher erscheint, als er ausser dem KRONECKERSchen Satz nur solche Eigenschaften des relativen Inhaltes $\mu(E)$ benutzt, welche schon in der Definition des Inhaltes als Integralmittelwert ausgesprochen sind.

In den folgenden Paragraphen wollen wir zeigen, wie sich der Satz A zu einem Satz über unabhängige Charaktere in $\mathfrak{G}$ — dem Hauptsatz dieses Abschnittes — verallgemeinern lässt. In § 8 definieren wir einen Massbegriff für Teilmengen in $\mathfrak{G}$; dieser soll den oben definierten Inhalt $\mu(E)$ ersetzen. Hieran anschliessend wird dann die Gleichverteilung einer in $\mathfrak{G}$ definierten Funktion $z(t)$ definiert, und nach dem Vorbild von WEYL einige Kriterien für die Gleichverteilung angeführt. Für den Hauptsatz, der in § 10 formuliert wird, gebe ich zwei Beweise. Der erste (in § 11) ist eine Übertragung des WEYLschen Beweises für Satz A. Im zweiten werden wie im erwähnten BOHR-COURANTschen Beweis für Satz A ausser dem Satz 1 nur unmittelbare Konsequenzen der Definition des Masses benutzt.

§ 8. Es sei $f(x)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ beschränkte reellwertige Funktion; $\alpha(x)$ bzw. $\beta(x)$ durchlaufe die Menge der in $a \leqq x \leqq b$ stetigen, reellwertigen Funktionen, für welche $\alpha(x) \leqq f(x)$ bzw. $f(x) \leqq \beta(x)$. Die DARBOUXschen Integrale $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ haben dann, wie unmittelbar zu sehen, die Werte

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{Untere Grenze aller} \int_a^b \beta(x)\,dx$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{Obere Grenze aller} \int_a^b \alpha(x)\,dx.$$

Mit dieser Bemerkung als Ausgangspunkt werden wir die v. Neumannsche Mittelwertbildung folgendermassen verallgemeinern:

Für eine in $\mathfrak{G}$ definierte, beschränkte, reelwertige Funktion $f(t)$ setzen wir

$$\overline{M}\{f\} = \text{Untere Grenze aller } M\{\beta\}$$

$$\text{bzw. } \underline{M}\{f\} = \text{Obere Grenze aller } M\{\alpha\},$$

wo $\beta(t)$ bzw. $\alpha(t)$ die Menge der reellwertigen in $\mathfrak{G}$ f. p. Funktionen, für welche $f(t) \leqq \beta(t)$ bzw. $\alpha(t) \leqq f(t)$, durchläuft.

Aus trivialen Gründen ist dann $\underline{M}\{f\} \leqq \overline{M}\{f\}$.

Definition: Die Menge der in $\mathfrak{G}$ definierten beschränkten Funktionen $f(t) = u(t) + iv(t)$, für welche $\underline{M}\{u\} = \overline{M}\{u\}$ und $\underline{M}\{v\} = \overline{M}\{v\}$, bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$. Einer der Klasse $\mathfrak{R}$ angehörigen Funktion f soll der Mittelwert $M\{f\} = \underline{M}\{u\} + i\underline{M}\{v\} = \overline{M}\{u\} + i\overline{M}\{v\}$ zugeordnet werden.

Man sieht unmittelbar, dass jede f. p. Funktion $\mathfrak{R}$ angehört.

Die Klasse $\mathfrak{R}$ hat folgende Eigenschaften:

1°. Aus $f \varepsilon \mathfrak{R}$ und $g \varepsilon \mathfrak{R}$ folgt $(f+g) \varepsilon \mathfrak{R}$ und $M\{f+g\} = M\{f\} + M\{g\}$.

2°. Aus $f \varepsilon \mathfrak{R}$ folgt $(kf) \varepsilon \mathfrak{R}$ und $M\{kf\} = kM\{f\}$, wo k eine willkürliche komplexe Zahl ist.

3°. Aus $f \varepsilon \mathfrak{R}$ und $g \varepsilon \mathfrak{R}$ folgt $(f \cdot g) \varepsilon \mathfrak{R}$.

4°. $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ sei eine in $\mathfrak{G}$ gleichmässig konvergente Folge von Funktionen, die $\mathfrak{R}$ angehören; dann gehört auch die Grenzfunktion $f(t)$ der Klasse $\mathfrak{R}$ an und $M\{f_n\} \to M\{f\}$.

5°. $f_1, f_2, \ldots, f_N$ seien Funktionen, die $\mathfrak{R}$ angehören, $g(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ eine Funktion der N komplexen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_N$, die in einem abgeschlossenen Intervall, welches $(f_1(t), \ldots, f_N(t))$ für jedes $t \varepsilon \mathfrak{G}$ enthält, stetig ist. Dann gehört $F(t) = g(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t))$ der Klasse $\mathfrak{R}$ an.

Um die in den angeführten Eigenschaften 1°—5° hervortretende Analogie zwischen $\mathfrak{R}$ und der Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen weiter zu beleuchten, sei noch bemerkt:

6°. Zu jeder der Klasse $\mathfrak{R}$ angehörigen Funktion f gibt es eine und nur eine komplexe Zahl, die durch Summen der Form

$$\alpha_1 f(a_1 t) + \alpha_2 f(a_2 t) + \ldots + \alpha_n f(a_n t),$$

wo α_i eine reelle positive Zahl und $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ist, gleichmässig approximiert werden kann, und diese Zahl ist $M\{f\}$.

7°. Eine reelle Funktion $f(t)$ gehört dann und nur dann $\mathfrak{R}$ an, wenn

$$\text{Obere Grenze aller } M\{\gamma\} = \text{Untere Grenze aller } M\{\delta\},$$

wo $\gamma(t)$ bzw. $\delta(t)$ die Menge aller $\mathfrak{R}$ angehörigen Funktionen durchläuft, für welche $\gamma(t) \leqq f(t)$ bzw. $f(t) \leqq \delta(t)$ ist.

Analog der Definition der auf einem Intervall Jordan-messbaren Mengen wird nun die Messbarkeit von Teilmengen von $\mathfrak{G}$ definiert.

Definition. E sei eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$ mit der charakteristischen Funktion $H(t)$. Wir wollen E messbar nennen, wenn $H \varepsilon \mathfrak{R}$. Die nicht negative Zahl $M\{H\}$ nennen wir den Inhalt (oder ausführlicher: den relativen Inhalt) von E, und wir bezeichnen diesen mit $m(E)$.

Für das System der in $\mathfrak{G}$ messbaren Mengen gilt:

Sind E_1 und E_2 messbare Mengen, dann sind $E_1 + E_2$ und $E_1 \cdot E_2$ messbar, und es ist $m(E_1 + E_2) + m(E_1 \cdot E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

Die Beweise für die oben angeführten Tatsachen liegen auf der Hand; daher führe ich sie hier nicht aus.

Bezüglich des Spezialfalles, wo $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen ist, bemerken wir folgendes:

Es sei E eine Menge auf der reellen Achse und $H(t)$ ihre charakteristische Funktion; $H(t)$ habe die folgende Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei stetige, reellwertige, f. p. Funktionen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ mit $\alpha(t) \leqq H(t) \leqq \beta(t)$ und $M\{\beta\} - M\{\alpha\} \leqq \varepsilon$. Dann ist E sowohl in dem in § 6, wie auch in dem soeben auseinandergesetzten Sinne messbar, und es ist

$$\mu(E) = m(E).$$

Für eine stetige f. p. Funktion auf der reellen Achse stimmt nämlich der v. Neumannsche Mittelwert mit dem Integralmittelwert überein.

§ 9. Da wir jetzt ein Mass für Teilmengen in $\mathfrak{G}$ zur Verfügung haben, können wir wie oben die Gleichverteilung einer in $\mathfrak{G}$ definierten Funktion $z(t)$, deren Werte Q_N angehören, definieren:

$z(t)$ soll gleichverteilt heissen, wenn für jedes

Interval I in Q_N die Menge E_I derjenigen Elemente $t \varepsilon \mathfrak{G}$, für welche $z(t)$ dem Intervall I angehört, messbar ist und

$$m(E_I) = \text{Inhalt von } I.$$

Für die Gleichverteilung gelten die folgenden Kriterien:

Hilfssatz 1. Notwendig und hinreichend für die Gleichverteilung von $z(t)$ ist, dass für eine willkürliche in Q_N Riemann-integrierbare Funktion $f(z)$ die Funktion $f(z(t))$ der Klasse $\mathfrak{R}$ angehört und dass

$$\int_{Q_N} f(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\{f(z(t))\} \tag{5}$$

ist.

Beim Beweis können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass f reellwertig ist.

Dass die genannte Bedingung hinreichend ist, ist klar. Dass sie notwendig ist, können wir folgendermassen zeigen: $z(t)$ sei in Q_N gleichverteilt; also gilt sicher die Relation (5), wenn $f(z)$ die charakteristische Funktion eines willkürlichen Intervalles von Q_N bezeichnet; also auch wenn $f(z)$ eine willkürliche in Q_N intervallweise konstante Funktion ist. Es bezeichne jetzt $f(z)$ eine willkürliche (reellwertige) Riemann-integrierbare Funktion in Q_N; dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei intervallweise konstante, reellwertige Funktionen $h_1(z)$ und $h_2(z)$, für welche

$$h_1(z) \leqq f(z) \leqq h_2(z)$$

und

$$\int_{Q_N} h_2(z)\, dw_N - \int_{Q_N} h_1(z)\, dw_N \leqq \varepsilon.$$

Die Funktionen $h_1(z(t))$ und $h_2(z(t))$ gehören der Klasse $\mathfrak{R}$ an und genügen den Relationen

$$h_1\big(z(t)\big) \leqq f\big(z(t)\big) \leqq h_2\big(z(t)\big)$$

und

$$\int_{Q_N} h_1(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\left\{h_1\big(z(t)\big)\right\} \text{ und } \int_{Q_N} h_2\big(z(t)\big) = \underset{t}{M}\left\{h_2\big(z(t)\big)\right\}.$$

Also ist

$$\underset{t}{M}\left\{h_2\big(z(t)\big)\right\} - \underset{t}{M}\left\{h_1\big(z(t)\big)\right\} \leqq \varepsilon,$$

woraus die Richtigkeit des Hilfssatzes 1 folgt.

Ersetzt man in der Definition der Gleichverteilung »Intervall I« durch »Jordan-messbare Menge I«, so erhält man wiederum einen Gleichverteilungsbegriff. Der eben besprochene Hilfssatz zeigt, dass die zwei Begriffe identisch sind.

Hilfssatz 2. Notwendig und hinreichend für die Gleichverteilung von $z(t)$ ist, dass für jede in Q_N stetige Funktion $g(z)$ die Funktion $g\big(z(t)\big)$ der Klasse $\mathfrak{R}$ angehört und dass

$$\int_{Q_N} g(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\left\{g\big(z(t)\big)\right\}. \tag{6}$$

Beweis: Wie oben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $g(z)$ reellwertig ist. — Dass die Bedingung notwendig ist, ist eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 1. Dass sie hinreichend ist, können wir folgendermassen einsehen: $z(t)$ sei eine in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion, welche der Relation (6) für alle stetigen $g(z)$ genügt, und $f(z)$ eine willkürliche in Q_N intervallweise konstante Funktion; dass $z(t)$ gleichverteilt ist, beweisen wir, indem wir die Gültigkeit der Relation (5) wie folgt nachweisen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei stetige Funktionen $g_1(z)$ und $g_2(z)$ so, dass

$$g_1(z) \leqq f(z) \leqq g_2(z)$$

und

$$\int_{Q_N} g_2(z)\, dw_N - \int_{Q_N} g_1(z)\, dw_N \leqq \varepsilon.$$

Die Funktionen $g_1\big(z(t)\big)$ und $g_2\big(z(t)\big)$ gehören der Klasse $\mathfrak{R}$ an, und wegen (6) gilt

$$\int_{Q_1} g_1(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\big\{g_1\big(z(t)\big)\big\} \text{ und } \int_{Q_N} g_2(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\big\{g_2\big(z(t)\big)\big\}.$$

Hieraus schliesst man, dass $f(z)$ der Klasse $\mathfrak{R}$ angehört, und dass die Relation (5) gilt.

Hilfssatz 3. Notwendig und hinreichend für die Gleichverteilung der Funktion $z(t) = \big(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_N(t)\big)$ ist, dass für jedes ganze N-tupel $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ die Funktion $\{z_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \{z_2(t)\}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \{z_N(t)\}^{\nu_N}$ der Klasse $\mathfrak{R}$ angehört, und dass

$$(7) \qquad \underset{t}{M}\Big\{\{z_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \{z_2(t)\}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \{z_N(t)\}^{\nu_N}\Big\} = 0.$$

Beweis: Dass die Bedingung notwendig ist, ist im Hilfssatz 2 enthalten, da die Funktion $z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_N^{\nu_N}$ eine in Q_N stetige Funktion ist. Auch beim Beweis dafür, dass die Bedingung hinreichend ist, wollen wir den Hilfssatz 2 benutzen. Es sei $g(z)$ eine willkürliche in Q_N stetige Funktion; dann gibt es zufolge des Weierstrassschen Approximationssatzes (vergl. Seite 6) eine Folge von Polynomen $S_1(z), S_2(z), \ldots$, die gleichmässig gegen $g(z)$ konvergiert. Nehmen wir an, dass $z(t)$ der Bedingung des Satzes genügt; dann gehört jede der Funktionen der Folge

$$(8) \qquad S_1\big(z(t)\big),\ S_2\big(z(t)\big), \ldots.$$

zu der Klasse $\mathfrak{R}$, und wegen (7) ist

$$\int_{Q_N} S_r(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\left\{S_r\big(z(t)\big)\right\} \qquad r = 1, 2, \ldots .$$

Die Folge (8) konvergiert natürlich gleichmässig gegen $g\big(z(t)\big)$; also gehört $g\big(z(t)\big)$ zu $\mathfrak{R}$, und wir haben

$$\int_{Q_N} g(z)\, dw_N = \lim \int_{Q_N} S_r(z)\, dw_N = \lim \underset{t}{M}\left\{S_r\big(z(t)\big)\right\} = \underset{t}{M}\left\{g\big(z(t)\big)\right\}.$$

Also ist nach dem Hilfssatz 2 die Funktion $z(t)$ gleichverteilt.

§ 10. Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun im Stande, den Hauptsatz zu formulieren und zu beweisen; der Hauptsatz lautet:

Satz 4. $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)$ seien in $\mathfrak{G}$ beschränkte unabhängige Charaktere. Dann ist die Funktion $\zeta(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)\big)$ in Q_N gleichverteilt.

Bevor wir in den zwei folgenden Paragraphen den Satz beweisen, bemerken wir:

Wenn eine in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $z(t)$ gleichverteilt ist, dann liegt natürlich ihre Wertemenge in Q_N überall dicht; also enthält der Hauptsatz den Satz 1.

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)$ seien stetige beschränkte Charaktere der additiven Gruppe der reellen Zahlen, I ein Intervall in Q_N mit der charakteristischen Funktion $h(z)$ und E_I die Menge derjenigen Zahlen t, für welche $\zeta(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)\big)$ dem Intervall I angehört. Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei stetige reellwertige Funktionen $h_1(z)$ und $h_2(z)$ mit $h_1(z) \leqq h(z) \leqq h_2(z)$ und $\int_{Q_N} h_2(z)\, dw_N - \int_{Q_N} h_1(z)\, dw_N \leqq \varepsilon$. Wir setzen $H(t) = h\big(\zeta(t)\big)$, $H_1(t) = h_1\big(\zeta(t)\big)$

und $H_2(t) = h_2(\zeta(t))$; $H(t)$ ist die charakteristische Funktion von E_I, und $H_1(t)$ und $H_2(t)$ sind stetige f. p. Funktionen, für welche $H_1(t) \leqq H(t) \leqq H_2(t)$; nach Satz 4 und Satz 2 ist $M(H_1) = \int_{Q_N} h_1(z)\, dw_N$ und $M(H_2) = \int_{Q_N} h_2(z)\, dw_N$, also $M\{H_2\} - M\{H_1\} \leqq \varepsilon$. Zufolge der Bemerkung auf Seite 22 ist also $\mu(E_I) = m(E_I)$. Hiermit ist gezeigt, dass der Satz 4 in der Tat eine Verallgemeinerung des Satzes A ist.

§ 11. Unter Benutzung des Hilfssatzes 3 kann der Satz 4 in wenigen Worten bewiesen werden. Sind nämlich φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_N$ unabhängige Charaktere in $\mathfrak{G}$, dann ist die Funktion

$$\{\varphi_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \{\varphi_2(t)\}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \{\varphi_N(t)\}^{\nu_N}$$

für jedes ganzzahlige N-tupel $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter. Also ist

$$\underset{t}{M}\left\{\{\varphi_1(t)\}^{\nu_1} \cdot \{\varphi_2(t)\}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \{\varphi_N(t)\}^{\nu_N}\right\} = 0;$$

also ist $\zeta(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t))$ gleichverteilt.

§ 12. Der zweite der in § 7 angekündigten Beweise hat Hilfssatz 2 zum Ausgangspunkt. Wir führen ihn dadurch, dass wir zeigen:

Hilfssatz 4. Bezeichnet $g(z)$ eine willkürliche in Q_N stetige Funktion, dann gilt für die in $\mathfrak{G}$ f. p. Funktion $G(t) = g(\zeta(t))$ die Relation

$$\int_{Q_N} g(z)\, dw_N = \underset{t}{M}\{G(t)\}.$$

Dieser Satz ist bewiesen, wenn nachgewiesen wird, dass zu einem willkürlichen $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{G}$ und ebenso viele positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ existieren, für welche

$$\left| \int_{Q_N} g(z)\, dw_N - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(a_i t) \right| \leqq \varepsilon$$

für alle $t \,\varepsilon\, \mathfrak{G}$.

Da $g(z)$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass alle Näherungssummen σ, die zu Intervalleinteilungen des Q_N von einer Feinheit $\leqq \delta$ gehören, der Ungleichung

$$\left| \sigma - \int_{Q_N} g(z)\, dw_N \right| \leqq \varepsilon$$

genügen[1]. $I_1, I_2, \ldots, I_n$ bezeichnen die Intervalle einer bestimmten Einteilung der Feinheit $\leqq \delta$; da $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ unabhängige Charaktere sind, gibt es zufolge des Satzes 1 ein Element $a_i \,\varepsilon\, \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ so, dass $z_i = \zeta(a_i)$ dem Intervalle I_i angehört. Bezeichnet α_i den Inhalt von I_i, so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ und

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(z_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(a_i)$$

eine zu einer Einteilung der Feinheit $\leqq \delta$ gehörige Näherungssumme; für jedes u in Q_N ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(z_i u)$ ebenfalls eine solche; speziell gilt dies für die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g\big(z_i \zeta(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g\big(\zeta(a_i t)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(a_i t).$$

Also ist

[1] Für das folgende beachte man die Bemerkung auf den Seiten 7—8.

$$\left| \int_{Q_N} g(z)\, dw_N - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, G(a_i t) \right| \leqq \varepsilon$$

für alle $t \varepsilon \mathfrak{G}$.

Die in dieser Arbeit bewiesenen Sätze wurden teilweise von Prof. H. BOHR und Prof. B. JESSEN als Vermutungen ausgesprochen; auch wurden Ansätze für die im ersten Teil geführten Beweise von ihnen angedeutet. — Ich danke den beiden Herren für ihre freundliche Anregung, die mich veranlasst hat, mich mit diesen Fragen zu beschäftigen, und für das freundliche Interesse, das sie dem Vorwärtsschreiten meiner Arbeit bezeugt haben.

LITERATURVERZEICHNIS

[1]. H. BOHR: Again the Kronecker Theorem. Journal of the London Math. Soc. Vol. 9.

[2]. H. BOHR und R. COURANT: Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion. Journal für reine und angewandte Matematik 1914. Bd. 144.

[3]. L. KRONECKER: Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. Werke Bd. III, S. 47—109.

[4]. J. v. NEUMANN: Almost periodic functions in a group I. Transactions of the american mathematical society 1934, Vol. 36.

[5]. H. WEYL: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Mathematische Annalen 1916 Bd. 77.

Færdig fra Trykkeriet den 26. August 1936.