Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV**, 13.

ÜBER DIE THEORIE DES ABSOLUTEN MANOMETERS VON MARTIN KNUDSEN

VON

SOPHUS WEBER

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1937

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

§ 1. In den letzten Jahren sind viele Fragen über die Wirkung des Radiometers geklärt worden, einerseits durch die grundlegenden Arbeiten von MARTIN KNUDSEN[1] über den »Knudsen-Zustand« der Gase, andererseits durch die theoretischen Untersuchungen über die bei grösserer Dichte im Gase entstehenden Strömungen, herrührend von den Temperaturunterschieden in der Oberfläche der Radiometerflügel; diese Strömungen und die hierdurch entstehenden Druckspannungen werden beherrscht von der Grenzbedingung an der Oberfläche, worin die Temperaturunterschiede vorkommen. MAXWELL[2] hat in seiner Arbeit über die hydrodynamischen Gleichungen in einem ungleichmässig erwärmten Gase diese Grenzbedingung untersucht und formuliert; er findet, wenn die mittlere freie Weglänge im Gase, λ, klein ist im Verhältniss zu den Abmessungen, dass ein Temperaturgradient, $\frac{dT}{dx_2}$, in der Oberfläche eines festen Körpers eine tangentiale Strömung hervorruft, so dass eine tangentiale Gleitgeschwindigkeit, u_2, an der Oberfläche entsteht; diese ist nach MAXWELL bestimmt durch die Gleichung:

$$u_2 - \gamma_M \cdot \frac{du_2}{dx_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot T} \cdot \frac{dT}{dx_2}, \qquad (1)$$

[1] MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Ph., Bd. 28, 1909, p. 75, Bd. 32, 1910, p. 809.

[2] I. CLERK-MAXWELL: Phil. Trans., 170, I, 1879, p. 231.

wo $\gamma_M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{p\sqrt{1\varrho}}$ der gewöhnliche Gleitungskoefficient des Gases ist; η und ϱ sind die innere Reibung und die Dichte des Gases, während $\frac{du_2}{dx_1}$ die Variation der Geschwindigkeit in der Richtung der Normale des Oberflächenelementes ist.

HETTNER[1] hat später die Berechnung wiederholt und hat die Bezeichnung »thermische Gleitung« für das Glied in der rechten Seite der Gleichung (I) eingeführt.

In einer Untersuchung über die thermomolekulare Druckdifferenz haben wir[2] die Grenzbedingung näher untersucht und experimentell gefunden, dass diese geschrieben werden muss:

$$u_2 - k_2 \cdot \gamma_M \cdot \frac{du_2}{dx_1} = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot T} \cdot \frac{dT}{dx_2}, \qquad \text{(II)}$$

wo $k_1 = k_2 = \text{ca.}\frac{4}{3}$; ausserdem muss, wenn λ nicht mehr klein den Abmessungen gegenüber ist, das Glied für die thermische Gleitung mit einem Faktor, A, multipliciert werden. A ist bestimmt durch das Verhältniss zwischen der freien Weglänge, λ, und den Abmessungen des Apparates; für ein kreisförmiges Rohr mit Radius R und ein Temperaturgefälle $\frac{dT}{dx_2}$ in der Richtung der Achse wird die Grenzbedingung:

$$u_2 - k_2 \cdot \gamma_M \cdot \frac{du_2}{dx_1} = k_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{dT}{dx_2} \cdot A \qquad \text{(III)}$$

oder annäherungsweise:

$$u_2 - \frac{4}{3} \cdot \gamma_M \cdot \frac{du_2}{dx_1} = \frac{\eta}{\varrho T} \cdot \frac{dT}{dx_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{R}};$$

[1] G. HETTNER: Z. f. Ph., Bd. 30, 1924, p. 258.

[2] SOPHUS WEBER, W. H. KEESOM und G. SCHMIDT: Comm. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, No. 246[a], p. 9 und SOPHUS WEBER: Comm. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, No. 246[b], p. 7.

für parallele Platten mit dem Abstand, d, wird mit derselben Annäherung: $A = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{d}}$.

Diese einfache Form für A kann nur betrachtet werden als eine erste Annäherung von einem komplicierten Ausdruck, der aber mathematisch nicht einfach zu behandeln ist.

§ 2. Beim Durchlesen der Literatur stellt es sich heraus, dass das Verständniss von der Wirkung des Radiometers im Allgemeinen sehr erschwert worden ist, weil die experimentell untersuchten Radiometer früher so wenig rationell konstruiert worden sind. Hierdurch wird der Einfluss von den festen Wänden, welche den beweglichen Teil des Radiometers umgeben, sehr unübersichtlich, so dass der Einfluss von den bei grösserer Dichte des Gases entstehenden Strömungen nicht mathematisch zu berechnen ist; die meisten früheren experimentellen Untersuchungen über das Radiometer sind darum nicht für die Vergleichung zwischen Theorie und Experiment zu verwenden.

Die verschiedenen Radiometererscheinungen können wir am besten in fünf Hauptgruppen einteilen:

1) Untersuchungen über das absolute Manometer von Martin Knudsen und das Zweiplattenradiometer von Hettner.
2) Untersuchungen über das Flügelradiometer, bezw. das Einplattenradiometer.
3) Untersuchungen über das Quarzfadenradiometer von Westphal.
4) Untersuchungen über die Knudsen'sche Radiometerkraft, welche in verschiedenen Werten des Akkom-

modationskoefficienten der Gasmoleküle an den beiden Seiten des Radiometersystems ihre Ursache hat.

5) Untersuchungen über Photophorese oder Radiometerwirkungen an kleinen Körpern, z. B. Kugeln, und verwandten Erscheinungen.

§ 3. In dem Folgenden werden wir die Gruppen 1 und 2, besonders das absolute Manometer von Martin Knudsen, betrachten, weil das absolute Manometer von Knudsen in der Ausführung, welche Knudsen die rationelle absolute Manometerform genannt hat, das einfachste, rationelle Radiometer ist; in dieser Ausführung sind alle physikalischen Verhältnisse genau festgelegt, und jede Grösse von Bedeutung für die theoretische Diskussion kann experimentell gemessen werden; in der Knudsen'schen Konstruktion haben wir eine dicke, flache, cirkulare Kupferplatte A (das Ende von einem Kupfercylinder mit inwendiger elektrischer Heizung) mit einer bekannten konstanten Temperatur T_1; dieser cirkulare Cylinder ist von einem dicken kupfernen Schutzringcylinder, C, mit der Temperatur, T_3, umgeben. T_1 und T_3 können genau gemessen werden; gegenüber der warmen Platte A, umgeben von dem Schutzringcylinder, C, ist die schwere kupferne Platte B drehend aufgehängt, und die Temperatur, T_2, von B kann genau gemessen werden; sind $T_1 = T_2 = T_3$, ist die Oberfläche von B genau parallel mit den Oberflächen von A und C, die in einem Plan liegen. — Die Aussenseite von B ist berusst, während die Innenseite von B, wie auch die Oberfläche von A und C, blanke Kupferplatten sind.

Wir dürfen also annehmen, dass der Akkommodationskoefficient für diese Oberfläche derselbe ist; ausserdem

dürfen wir annehmen, dass die Platte B, wie auch die Oberfläche von A und C, überall dieselbe Temperatur bezw. T_2, T_1 und T_3 haben, und dass keine Temperaturgradienten in diesen Metallmassen anwesend sind; in diesem System ist also nur ein Temperaturgradient vorhanden, am Rande der Oberfläche A bei dem Übergang zwischen A und dem Schutzring C; dieses ist erläutert in Fig. 1.

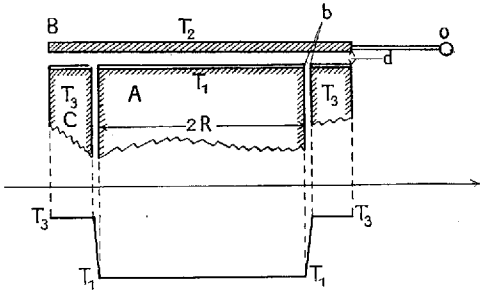

Fig. 1.

In den Versuchen waren die Temperaturen T_2 und T_3 nur sehr wenig verschieden, jedenfalls bei kleinen Temperaturunterschieden, und dieselbe wie die Temperatur des umgebenden Gases.

Für das absolute Manometer ist der Zustand und die Radiometerkraft, K, sowohl theoretisch als experimentell ausführlich von Martin Knudsen behandelt für den Fall, dass die freie mittlere Weglänge des Gases, λ, sehr gross gegenüber dem Abstand, d, zwischen den Platten A und B ist, also für den Fall: $\frac{d}{\lambda} \geqq 0$.

In diesem Falle erhält man, jedenfalls wenn der Akkommodationskoefficient $a = 1$ ist, dass unabhängig von den Eigenschaften des Gases die Radiometerkraft, K, per cm^2, ist gegeben durch:

$$K = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right),$$

wo p_1 der Druck zwischen den Platten A und B ist, während p_2 der Druck von dem umgebenden Gase ist; ausserdem muss für die strenge Gültigkeit dieser Formel der Akkommodationskoefficient für die inneren Oberflächen von A und B, $a = 1$ sein; ist aber der Temperaturunterschied, $T_1 - T_2$, sehr klein den Temperaturen T_1 und T_2 gegenüber, ist die Korrektion wegen des Einflusses des Akkommodakoefficient unbedeutend[1]; für kleine Werte von $T_1 - T_2$ erhalten wir für die Radiometerkraft pro cm^2:

$$K = \frac{1}{2} p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) = \frac{1}{4} \cdot p_2 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2} .$$

Diese einfache Lösung ist aber nur gültig für den Fall, $\frac{d}{\lambda} \gtrsim 0$; die allgemeine Lösung der Radiometerkraft für dieses System muss untersucht werden um zu bestimmen, wie die Radiometerkraft, K, in dem ganzen Gebiet $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$ verlauft.

Wir werden nun zuerst untersuchen, wie der Zustand wird, wenn $\frac{d}{\lambda} \to \infty$, wobei wir aber voraussetzen, dass der Abstand, d, immer so klein bleibt, dass sich zwischen den Platten A und B nur laminare und keine Konvektionsströmungen ausbilden werden, weil hierdurch das ganze Bild von dem Verlauf der Radiometerkraft vollständig geändert werden kann.

§ 4. Betrachten wir nun das absolute Manometer in der rationellen Ausführung (Fig. 1), dann erhalten wir die Temperaturverteilung für die Oberfläche CAC, wie diese in dem Temperaturdiagram (Fig. 1) angegeben ist; wir haben nur

[1] Vgl. J. H. A. TER HEERDT: Dissertation, Utrecht 1924, p. 204.

einen Temperaturgradienten[1] $\frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{b}$ am Rande der Oberfläche A; b ist der Abstand zwischen dem Kupfercylinder A und dem Schutzringcylinder C; durch diesen Temperaturgradienten entsteht eine thermische Gleitströmung am Rande der Platte A, der Oberfläche CAC entlang und in der entgegengesetzten Richtung von dem Temperaturgefälle, also von dem Rande nach der Mitte der Platte A; bei der Oberfläche der Platte B geht die Strömung in die entgegengesetzte Richtung. Hier strömt die einströmende Gasmenge wieder zurück, so dass die gesammte durch den Rand strömende Gasmenge gleich an Nul sein muss.

Infolge der inneren Reibung im Gase entsteht durch diese Strömung ein Druckunterschied, so dass der Druck im Gase zwischen den Platten grösser wird als im Gasraum ausserhalb der Platten; die Platten werden sich also abstossen.

Weil der Diameter von der Platte A, $2R = 1{,}63$ cm, im Verhältniss zu dem Abstand $b = 0{,}0174$ cm, zwischen A und C sehr gross ist, können wir bei der Berechnung von der entstandenen Strömung von der Krümmung des Randes von A wegsehen und ein Randelement der Platte A als geradlinig ansehen; wir betrachten also den Strömungszustand am Rande von zwei parallelen Platten A_I und B_I, wenn in der Platte A_I ein Temperaturgefälle auf einer Stelle, R, vorhanden ist (vgl. Fig. 2).

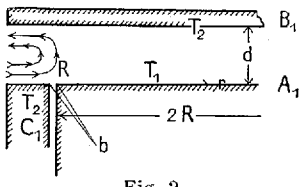

Fig. 2.

[1] T_1 und T_2 sind die Temperaturen von der Gasschicht an der Oberfläche der Kupferplatten; bei grösserer Dichte sind sie dieselben wie von den Kupferplatten selbst. (Vgl. pag. 28, Fussnote 1).

Nennen wir die Strömungsgeschwindigkeit w, so erhalten wir ein Geschwindigkeitsdiagram, wie in der Zeich-

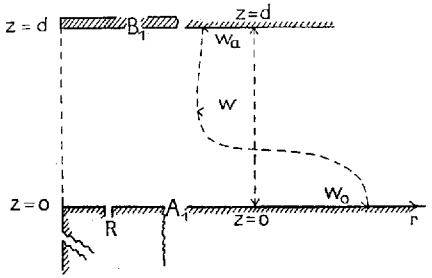

Fig. 3.

nung, Fig. 3, angegeben, mit der Bedingung, wenn der Abstand zwischen den Platten, d, ist, dass:

$$d \cdot \int_0^d w \cdot dz = 0 . \qquad \text{(IV)}$$

Für diese laminare Strömung haben wir nach Lamb[1], wenn η die innere Reibung und p der Druck des Gases sind:

$$\eta \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{dp}{dr},$$

oder nach Integration:

$$w = A_0 + B_0 z + C_0 z^2 \quad \text{mit} \quad C_0 = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dr}.$$

Berücksichtigen wir die Gleitung des strömenden Gases bei den Oberflächen von A_I und B_I, erhalten wir die folgenden Grenzbedingungen:

$$w_0 - k_2 \cdot \gamma_M \cdot \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = \frac{3}{4} \cdot k_1 \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot T} \cdot \frac{dT}{dr} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{d}} = c_1, \qquad \text{(V)}$$

[1] H. Lamb: Hydrodynamics, Cambridge 1906, p. 542.

und weil kein Temperaturgradient in der Platte B vorhanden ist:

$$w_a + k_2 \cdot \gamma_M \cdot \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=d} = 0, \quad \text{wo} \quad \gamma_M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{p\sqrt{{}_1\varrho}}. \qquad \text{(VI)}$$

In diesen Ausdrücken sind k_1 und k_2 Konstanten, die einander gleich sind und unabhängig von den Eigenschaften und Temperatur des Gases; $\varrho = {}_1\varrho_0 \cdot p \cdot \frac{273{,}1}{T}$ ist die Dichte des Gases, während nach S. CHAPMAN[1]:

$$p \cdot \lambda = \frac{1}{0{,}499} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{{}_1\varrho_0}} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1+n},$$

oder praktisch gesprochen:

$$p \cdot \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{{}_1\varrho_0}} \left(\frac{T}{273{,}1}\right)^{1+n} = {}_1\lambda = {}_1\lambda_0 \left(\frac{T}{273{,}1}\right)^{1+n}$$

weil

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}+n}.$$

Hierzu kommt also die Bedingung (IV), dass die totale Gasmenge, welche durch den Rand zwischen $z = 0$ und $z = d$ strömt, gleich Null sein muss, woraus:

$$\int_0^d (A_0 + B_0 z + C_0 z^2)\, dz = 0.$$

Hieraus erhalten wir nach einfacher Umstaltung:

$$c_1 = \frac{1}{3} c_0 \cdot d \left(1 + 6 k_2 \cdot \frac{\gamma_M}{d}\right)$$

oder:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{9}{2} k_1 \frac{\eta^2}{{}_1\varrho \cdot p \cdot d^2 \left(1 + 6 k_2 \cdot \frac{\gamma_M}{d}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)} \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \qquad \text{(VII)}$$

[1] Vergl. J. H. JEANS: The dynamical Theory of Gases, 1925, p. 276.

woraus:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \frac{1}{\frac{\pi}{18 k_1}\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2 + \frac{\pi}{3 k_1}\left(k_2 + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) p + \frac{\pi}{3}\frac{k_2}{k_1}}. \quad \text{(VIII)}$$

Die analoge Formel für die thermomolekulare Druckdifferenz war[1]:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{24 k_1}\left(\frac{R}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2 + \frac{\pi}{6 k_1}\left(k_2 + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{R}{{}_1\lambda}\right) p + \frac{\pi}{6}\frac{k_2}{k_1}}.$$

Nach Vergleichung mit den Experimenten wurden $k_1 = k_2 =$ ca. $\frac{4}{3}$ und $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{k_2}{k_1} = \mu =$ ca. 1,25 gefunden, so dass die numerische Übereinstimmung für den Wert von μ nicht befriedigend ist; es ist also auch nicht zu erwarten, dass dies der Fall für den Wert von $\frac{\pi}{3}\frac{k_2}{k_1} = \mu_1 = 2\mu$ in der Formel (VIII) sein wird. Vorläufig werden wir die Formel (VIII) schreiben:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \frac{1}{\alpha_1\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p^2 + \beta_1\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) \cdot p + \mu_1}, \quad \text{(IX)}$$

worin wir annehmen dürfen, dass α_1 und β_1 bekannt sind, und $\alpha_1 = \frac{\pi}{18 k_1} = \frac{\pi}{24}$, während $\beta_1 = \frac{\pi}{3 k_1}\left(k_2 + \frac{1}{6}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

§ 5. Um die totale Radiometerkraft, K, zwischen den Platten A und B zu bestimmen, müssen wir durch Integration von (VIII) den Wert von p bestimmen; da in diesem Falle das Temperaturgefälle nur am Rande der Oberfläche, $O = \pi R^2$, liegt, und in der Platte A kein Temperaturgefälle vorkommt, dürfen wir annehmen, dass die

[1] Comm. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, No. 246[b], p. 7.

thermische Gleitströmung praktisch gesprochen nur am Rande der Platte A liegt, so dass der Druck p_1 zwischen A und B überall konstant ist, weil die Gleitströmung praktisch gesprochen, jedenfalls wenn der Abstand d klein ist, nicht zwischen den Platten A und B durchdringen wird; anders wäre es aber, wenn in der Platte A ein Temperaturgefälle von der Mitte bis zum Rande der Platte vorliegen würde (vgl. später § 11). In unserem Falle erhalten wir also, auch weil b sehr klein gegenüber R ist:

$$K_{\text{total}} = \pi R^2 (p_1 - p_2),$$

wo p_1 aus (VIII) bestimmt werden kann.

Wenn wir nur kleine Temperaturdifferenzen haben, und also nur kleine Druckunterschiede erhalten, können wir (VIII) schreiben:

$$\frac{dp}{dr} = M \cdot \frac{dT}{dr}.$$

Integrieren wir also über die Strecke, b, wo das ganze Temperaturgefälle liegt, und setzen wir in diesem Gebiet voraus, dass M als eine Konstante angesehen werden kann, so erhalten wir:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2} = M$$

oder:

$$\frac{K_{\text{tot.}}}{\pi R^2} = K = p_1 - p_2 = \frac{1}{2T} \frac{T_1 - T_2}{\alpha_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p + \beta_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) + \mu_1 \cdot \frac{1}{p}}$$

oder:

$$\frac{K}{T_1 - T_2} = \frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p + \beta_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) + \mu_1 \cdot \frac{1}{p}}.$$

Wir ersehen hieraus, dass die Grösse $\frac{K}{T_1 - T_2}$ ein Maximun bei einem bestimmten Druck, $p_{\max}$, haben muss. Wir

finden leicht die Werte für die Lage und für die Grösse des Maximums:

$$p_{\max} = \frac{{}_1\lambda}{d}\sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} \text{ und } \left(\frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2}\right)_{\max} = \frac{1}{2\,T}\cdot\frac{{}_1\lambda}{d}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mu_1\,\alpha_1}+\beta_1}. \quad \text{(X)}$$

Ausserdem haben wir auch für das Maximum: $p_{\max}\cdot\lambda_{\max} = {}_1\lambda$ und also:

$$\frac{d}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} \quad \text{oder} \quad \lambda_{\max} = d\sqrt{\frac{\alpha_1}{\mu_1}}. \quad \text{(XI)}$$

In seinen experimentellen Versuchsreihen hat Martin Knudsen für bekannte Werte von p_2, dem Druck des Gases, die Werte von der abstossenden Radiometerkraft, K, sowohl für Wasserstoff als auch für Sauerstoff gemessen.

Nennen wir:

$$P' = 4\,T_2\cdot\frac{K}{T_1 - T_2},$$

haben wir aus Gleichung (IX)

$$P' = 4\,T_2\cdot\frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2} = \frac{2}{\alpha_1\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2\cdot p + \beta_1\left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) + \mu_1\cdot\frac{1}{p}}.$$

Aus dem obenstehenden Wert von $\left(\frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2}\right)_{\max}$ erhalten wir:

$$P'_{\max} = 2\cdot\frac{{}_1\lambda}{d}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha_1\,\mu_1}+\beta_1};$$

woraus:

$$\frac{P'}{P'_{\max}} = \frac{2+\delta}{\frac{p}{p_{\max}}+\frac{p_{\max}}{p}+\delta} = \frac{2+\delta}{e^x + e^{-x} + \delta}, \quad \text{(XII)}$$

wo $\delta = \frac{\beta_1}{\sqrt{\mu_1\cdot\alpha_1}}$ und $ln\cdot x = \frac{p}{p_{\max}}$.

Wir ersehen hieraus, dass der Ausdruck für $\frac{P'}{P'_{\max}}$ im Bezug auf sein Maximum bei $x = 0$ symmetrisch ist, weil der Wert von $\frac{P'}{P'_{\max}}$ für $x = m$ und $x = -m$ derselbe ist.[1]

§ 6. Wir gehen nun dazu über das experimentelle Versuchsmaterial für das rationelle absolute Manometer zu betrachten; das einzigste vorliegende Material[2] ist eine ausgebreitete Versuchsreihe mit Wasserstoff und eine kleinere mit Sauerstoff (MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Ph., Bd. 32, 1910, p. 831 u. w.); diese sind wiedergegeben in den Tabellen I und II; $T_1 - T_2$ ist die Temperaturdifferenz der Platten A und B; α der durch Spiegelablesung beobachtete Ausschlag in cm (ein Centimeter hat eine Veränderung des mittleren Abstandes der warmen und kalten Platte von 0.005 cm zu Folge).[3]

p_2 ist der mit MACLEOD's Gauge gemessene Druck zuzüglich des Druckes der Quecksilberdämpfe und P' der aus der Formel:

$$K = \frac{P'}{4} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2} \quad \text{oder} \quad P' = 4\,T_2 \cdot \frac{K}{T_1 - T_2}$$

berechnete Druck, wo K die gemessene Radiometerkraft per cm^2 bedeutet. In der vierten Kolonne der Tabelle ist $\log_{10} p_2$ angegeben und in Fig. 4 und Fig. 5 ist P' als Funk-

[1] Für die vollständige mathematische Behandlung, auch für den Fall, dass die Gleichung (VIII) integriert werden muss, verweise ich nach den Rapporten 6, 7 und 8 von dem 7. internationalen Kälte-Kongres 1936. (La Haye — Amsterdam, Juin 1936).

[2] Vgl.: E. FREDLUND: Ann. d. Ph., Bd. 13, 1932, p. 802 und 808.

[3] Bei neuen Versuchsreihen würde man sich so einrichten, dass die Lage von B und also der Abstand zwischen A und B sich nicht änderte, z. B. durch eine kompensierende Torsionskraft; während der Messung würden also B und A genau parallel sein, und der Abstand konstant bleiben.

Tabelle 1.

Wasserstoff, H_2, Temperatur T_2 = ca. 22° C.

(Die Drücke sind in Dyn/cm² = Bar angegeben.)

$T_1 - T_2$	α	p_2	$\log_{10} p_2$	$P' = 4\,T_2 \cdot \frac{K}{T_1 - T_2}$	$\frac{P'}{P'_{max}}$	$\log_{10} \frac{p_2}{p_{2,max}}$
46.1	0.40	2.60	0.415	2.57	0.01115	— 2.685
46.4	0.45	2.89	.461	2.87	0.01248	— 2.639
45.4	0.58	3.95	.597	3.78	0.01645	— 2.503
44.1	0.68	4.87	.688	4.57	0.01985	— 2.412
42.8	0.86	6.51	.814	5.95	0.02585	— 2.286
40.5	1.03	8.35	.922	7.53	0.03270	— 2.178
37.5	1.24	11.03	1.043	9.80	0.0425	— 2.057
31.4	1.40	15.5	1.190	13.2	0.0575	— 1.910
40.7	2.62	23.1	1.364	19.1	0.0830	— 1.736
13.9	0.88	23.5	1.371	19.2	0.0835	— 1.729
9.6	0.92	36.7	1.565	29.0	0.1260	— 1.535
6.6	0.84	52.0	1.716	38.0	0.1650	— 1.384
4.8	0.88	82	1.914	56	0.2435	— 1.186
4.3	0.87	83	1.919	55	0.2390	— 1.181
3.0	0.96	138	2.140	88	0.383	— 0.960
3.5	1.38	191	2.281	118	0.513	— 0.819
3.2	1.50	250	2.398	141	0.613	— 0.702
3.0	1.50	309	2.490	148	0.643	— 0.610
3.0	1.67	381	2.581	165	0.717	— 0.519
3.1	1.93	476	2.678	185	0.805	— 0.422
3.1	2.05	576	2.760	196	0.852	— 0.340
2.5	1.83	945	2.975	217	0.945	— 0.125
2.4	1.80	1366	3.136	222	0.966	+ 0.036
2.2	1.43	2185	3.340	242	1.050	+ 0.240
2.1	1.10	3353	3.526	155	0.675	+ 0.426
2.2	1.00	5016	3.700	135	0.587	+ 0.600
1.5	0.40	11706	4.070	79	0.343	+ 0.970

$P'_{max} = 230$, $\log_{10} p_{2,max} = 3.100$, $p_{2,max} = 1250$.

tion von $\log_{10} p_2$ graphisch dargestellt, bezw. für die Wasserstoff- und Sauerstoff-reihe. Wir ersehen hieraus, dass mit beiden Gasen eine symmetrische Kurve für grössere Werte von p_2 gefunden wird; leider ist die Anzahl von observier-

Tabelle 2.

Sauerstoff, O_2, Temperatur T_2 = ca. 22° C.

(Die Drücke sind in Dyn/cm² = Bar angegeben.)

$T_1 - T_2$	α	p_2	$\log_{10} p_2$	$P' = 4\,T_2 \cdot \frac{K}{T_1 - T_2}$	$\frac{P'}{P'_{max}}$	$\log_{10} \frac{p_2}{p_{2,max}}$
44.9	0.42	2.77	0.443	2.77	0.0425	— 2.107
40.7	0.46	3.56	0.551	3.55	0.0515	— 1.999
47.0	0.70	4.79	0.680	4.41	0.0680	— 1.870
41.3	0.77	6.47	0.811	5.52	0.0850	— 1.739
40.1	0.87	7.85	0.895	6.43	0.0990	— 1.655
38.5	1.05	10.52	1.022	8.08	0.1240	— 1.528
38.2	1.30	14.0	1.146	10.1	0.1555	— 1.404
33.1	1.56	21.1	1.324	14.0	0.216	— 1.226
27.4	1.65	28.2	1.449	17.8	0.274	— 1.101
21.4	1.82	43.9	1.643	25.2	0.388	— 0.907
16.6	2.22	84.0	1.924	39.6	0.610	— 0.626
10.4	1.98	139	2.143	56.4	0.868	— 0.407
8.0	1.85	603	2.780	69.0	1.061	+ 0.230
4.4	0.36	2013	3.304	24.0	0.369	+ 0.754
4.8	0.17	4921	3.633	14.3	0.218	+ 1.083

$P'_{max} = 65$, $\log_{10} p_{2,max} = 2.550$, $p_{2,max} = 355$.

ten Punkten bei den höheren Drücken nicht sehr zahlreich, wodurch die Grösse und die Lage des Maximums nicht so genau, wie zu erwünschen wäre, bestimmt werden können.

Wir erhalten aus den experimentellen Kurven (P', $\log_{10} p_2$):

für Wasserstoff: $p_{2,max} = 1250$ Bar; $P'_{max} = 230$,

für Sauerstoff: $p_{2\,max} = 355$ „ ; $P'_{max} = 65$,

woraus für H_2: $\frac{P'_{max}}{p_{2,max}} = 0.184$, und für O_2: $\frac{P'_{max}}{p_{2,max}} = 0.183^5$.

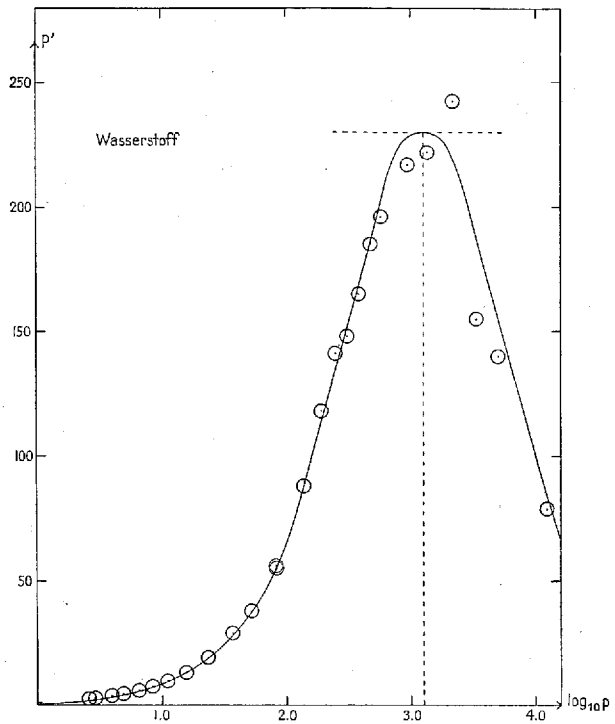
p'
250
200
150
100
50
Wasserstoff
1.0
2.0
3.0
4.0
log10p

Fig. 4.

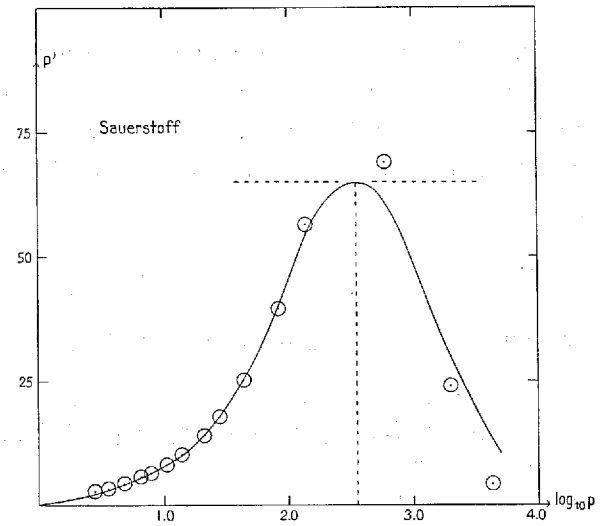
p'
75
50
25
Sauerstoff
1.0
2.0
3.0
4.0
log10p

Fig. 5.

Wir haben aber nach der obenstehenden Theorie:

$$p_{2,\max} = \tfrac{1}{4}\frac{\lambda}{d}\sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}}$$

und

$$P'_{\max} = 4\,T_2\left(\frac{p_1-p_2}{T_1-T_2}\right)_{\max} = \tfrac{1}{4}\frac{\lambda}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_1\alpha_1}+\frac{\beta_1}{2}},$$

woraus:

$$\frac{P'_{\max}}{p_{2,\max}} = 0.184 = \frac{1}{\mu_1+\frac{1}{2}\beta_1\sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}}}.$$

Mit:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{18\,k_1} = \frac{\pi}{24} = 0.1309 \text{ und } \beta_1 = \frac{3\pi}{8} = 1.1781$$

finden wir hieraus $\mu_1 = 2.70$, also praktisch gesprochen den Wert von $2\mu = 2\cdot 1.25 = 2.50$, den wir erwarten müssten nach dem Resultat, das wir für die thermomolekulare Druckdifferenz gefunden haben; bei dem absoluten Manometer haben wir also dieselbe Unübereinstimmung zwischen Theorie und Experiment wie in der thermomolekularen Druckdifferenz.[1]

Aus den Werten für α_1 und μ_1 können wir den mittleren Plattenabstand, d, für die Wasserstoffserie bestimmen und erhalten:

[1] Die Ursache der Unübereinstimmung zwischen dem experimentellen und theoretischen Wert von μ muss ohne Zweifel darin gesucht werden, dass der verwendete Ausdruck:

$$A = \frac{1}{1+\varphi\left(\frac{\lambda}{d}\right)} = \frac{1}{1+q\cdot\frac{\lambda}{d}}, \text{ mit } q = 1.$$

in dem Gebiet $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ nur eine grobe Annäherung für den Faktor A in der MAXWELL'schen Grenzbedingung (III) gibt; für $\frac{d}{\lambda} \to 0$ muss $q = 1$ sein; um aber Übereinstimmung zwischen $\mu_{\text{theor.}}$ und $\mu_{\text{beob.}}$ für $\frac{d}{\lambda} \to \infty$ zu erhalten, musste $q =$ ca. 2 sein (Vgl. SOPHUS WEBER: Comm. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, No. 246^b, p. 7 und auch MARTIN KNUDSEN und SOPHUS WEBER: Ann. d. Ph. 1911, Bd. 36, p. 981).

$$d_{H_2} = \lambda'_{max} \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = \frac{11.32}{1250} \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = 0.041 \text{ cm},$$

während wir in derselben Weise für die Sauerstoffreihe finden:

$$d_{O_2} = \lambda''_{max} \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = \frac{6.36}{355} \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = 0.081 \text{ cm}.$$

Diese Abstände, die leider nicht in den Versuchsreihen während der Messung bestimmt sind, und vielleicht auch nicht in derselben Messungsreihe ganz konstant gewesen sind, werden aber von der richtigen Grössenordnung sein (vgl. M. KN. loc. cit. p. 834); bei neuen Messungen ist diese Abstandsmessung während des Versuches von grösster Bedeutung; bei den Abständen, bezw. 0.041 cm und 0.081 cm, ist aber zu erwarten, dass die Bestimmungen bei grösserer Dichte, besonders in der Sauerstoffreihe, etwas von Konvektionsströmungen beeinflüsst sein können; der letzte Punkt, bezw. die letzten Punkte, der Sauerstoffreihe sind wahrscheinlich nicht ganz frei von diesem Einfluss.

§ 7. Wenn wir die obengefundenen Werte für $p_{2,\,max}$ und P'_{max} für die Wasserstoff- und Sauerstoffreihe als Einheiten für die gemessenen Werte von p_2 und P' nehmen, können wir die »reducierten« Werte von $\frac{P'}{P'_{max}}$ als Funktion von $\log_{10}\frac{p_2}{p_{2,\,max}}$ darstellen und erhalten hierdurch eine reducierte Kurve; diese Werte sind angegeben in den Kolonnen 6 und 7 von den Tabellen. Wenn die Messungen und die Theorie richtig sind, müssen diese reducierten Punkte liegen auf der theoretischen »reducierten« Kurve, nämlich:

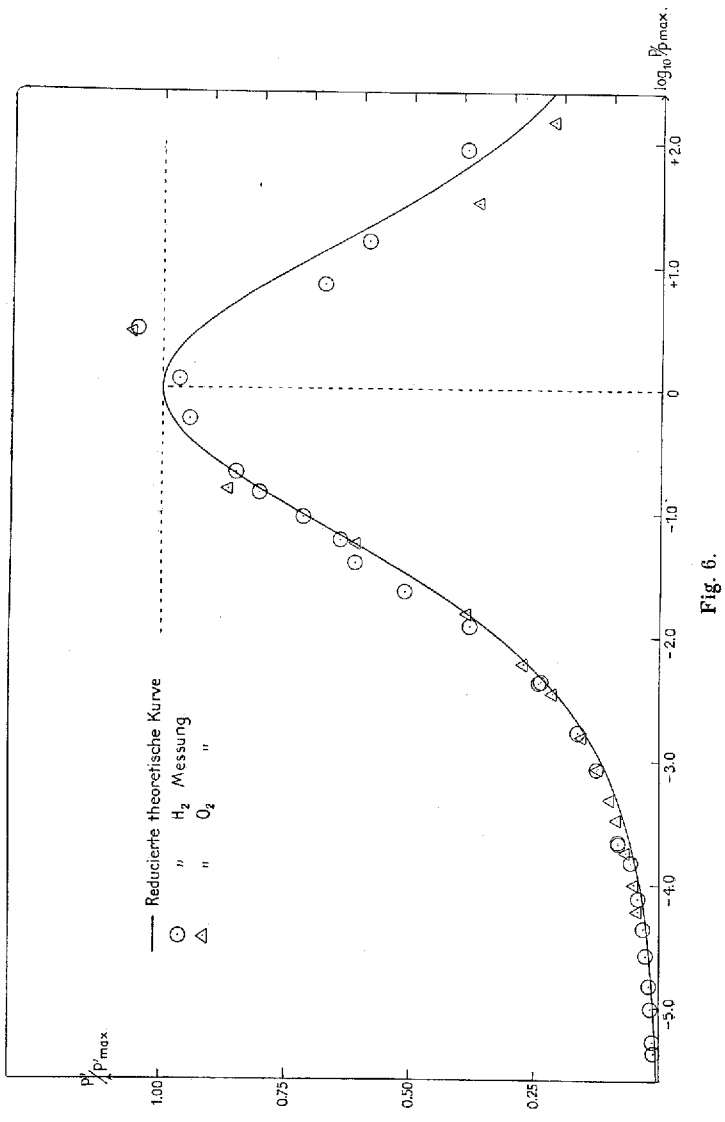
Reducierte theoretische Kurve
" H_2 Messung
" O_2 "
$P/P'_{max.}$
1.00
0.75
0.50
0.25
$\log_{10} P/P'_{max.}$
-5.0
-4.0
-3.0
-2.0
-1.0
0
+1.0
+2.0

Fig. 6.

$$\frac{P'}{P'_{\max}} = \frac{2+\delta}{e^{x}+e^{-x}+\delta} = \frac{2+\delta}{\dfrac{p_2}{p_{2,\max}}+\dfrac{p_{2,\max}}{p_2}+\delta},$$

wo $x = ln\dfrac{p_2}{p_{2,\max}}$ und $\delta = \dfrac{\beta_1}{\sqrt{\mu_1\alpha_1}} = 1.983.$

Diese reducierte theoretische Kurve, welche unabhängig von dem Abstand, d, zwischen den Platten A und B wird, ist in Fig. 6 eingezeichnet[1] (die gezogene Kurve), während die gemessenen reducierten Wasserstoffpunkte (Kreis mit Punkt) und die gemessenen reducierten Sauerstoffpunkte (Dreieck mit Punkt) eingetragen sind.

Wenn die Genauigkeit, womit diese experimentellen Bestimmungen ausgeführt sind, in Betracht gezogen wird, ist die Übereinstimmung befriedigend und eine Stütze für die entwickelte Theorie; die vorliegenden Abweichungen bei den niedrigen Drücken sind dadurch zu erklären, dass μ_1 bei den niedrigen Drücken keine Konstante bleibt, sondern kleiner wird. Um die Grenzbedingung für $\dfrac{d}{\lambda} \to 0$ zu befriedigen, muss μ_1 zwischen $\mu_1 = 2$ für $\dfrac{d}{\lambda} \geqq 0$ und $\mu_1 = 2{,}70$ für $\dfrac{d}{\lambda} \leqq \infty$ variieren.

Die einfachste Interpolationsformel für diesen Fall ist:

$$\mu_1 = 2\cdot\frac{1+m\cdot\dfrac{d}{\lambda}}{1+n\cdot\dfrac{d}{\lambda}}, \text{ mit } 2\cdot\frac{m}{n} = 2.70 = \mu_{1,\infty}.$$

Die Abweichungen bei den grösseren Drücken sind wohl entweder durch einsetzende Konvektionsströmungen — be-

[1] Einfachkeitshalber haben wir nicht $ln\dfrac{p_2}{p_{2,\max}}$, sondern $\log_{10}\dfrac{p_2}{p_{2,\max}}$ als Abscisse verwendet.

sonders in der Sauerstoffreihe — zu erklären, oder vielleicht auch dadurch, dass der Abstand zwischen den Platten A und B sich während der Versuchsreihe etwas geändert hat; dies wäre wohl möglich, weil für die drehbare Platte ein Platinaufhängungsdraht und kein Quarzdraht gebraucht wurde; im Allgemeinen muss aber festgestellt werden, dass die zwei Versuchsreihen eine befriedigende Bestätigung von der entwickelten Theorie geben.

§ 8. Wie bereits oben erwähnt, befriedigt die Formel:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}\frac{1}{\mu_1 + \beta_1\left(\frac{d}{\lambda}\right) + \alpha_1\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}$$

nicht die Grenzbedingung für $\frac{d}{\lambda} \doteq 0$, weil wir in diesem Falle die Grenzformel:

$$K = p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\cdot p_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{4}\cdot\frac{dT}{T}$$

erhalten müssen; wir verwenden am einfachsten, wie oben erwähnt, in diesem Falle die Interpolationsformel:

$$\mu_1 = 2\frac{1 + m\cdot\frac{d}{\lambda}}{1 + n\cdot\frac{d}{\lambda}}, \quad \text{mit} \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{2}\mu_{1,\infty} = 1.35$$

und erhalten hierdurch aus Formel (VIII) für $\frac{d}{\lambda} \to 0$:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dT}{T}\frac{1}{2\left[1 + (m-n)\right]\cdot\frac{d}{\lambda} + \beta_1\frac{d}{\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{dT}{T}\frac{1}{1 + \left(m - n + \frac{1}{2}\beta_1\right)\frac{d}{\lambda}}.$$

Es wird nun, weil β_1 und $\frac{m}{n}$ bekannt sind, von Interesse zu untersuchen, ob man durch theoretische Überlegungen den Faktor, $m-n+\frac{1}{2}\beta_1$, bestimmen kann; dieses ist bereits annäherungsweise ausgeführt von P. DEBYE[1], der laut seiner angenäherten Berechnung fand:

$$K = \frac{1}{2} p_2 \left\{ \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} - 1 \right\} \frac{1}{1+\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2 \left(e^{\frac{d}{\lambda}} - 1\right)},$$

oder in erster Annäherung und für kleine Temperaturunterschiede:

$$K = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \frac{\Delta T}{1+\frac{d}{\lambda}\left(1-2\frac{\Delta T}{T}\right)+\cdots} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{\Delta T}{1+\frac{d}{\lambda}}.$$

Hieraus würde folgen, dass $m-n+\frac{1}{2}\beta_1 =$ ca. 1; es ist aber möglich die Berechnung mit etwas grösserer Annäherung, als von DEBYE verwendet, durchzuführen; wir finden hierdurch:

$$m-n+\frac{1}{2}\beta_1 = \frac{3}{4}.$$

§ 9. Betrachten wir zu diesem Zweck (Fig. 7) zwei grosse planparallele Platten A und B mit dem Abstand, d, und den Temperaturen T_1 und T_2; der Abstand, d, ist sehr klein im Vergleich mit den Abmessungen der Platten; wir setzen weiter voraus, dass die Platten A und B sich befinden in einem unendlich grossen Behalter, in welchem die Anzahl der Moleküle in der Raumeinheit N, der Druck p_2 und die Temperatur T_2 sind. Einfachkeitshalber neh-

[1] P. DEBYE: Phys. Zeitschrift 32, p. 809, 1910.

men wir an, dass der Akkommodationskoefficient a des Gases gegenüber den Platten A und B ist: $a = 1$. Wir werden nun zuerst den stationären KNUDSEN-Zustand untersuchen; in diesem Falle ist $\frac{d}{\lambda} = 0$. Ein Element dS von der Platte B empfängt eine totale Bewegungsmenge, M, in der Richtung der Normale; ein Teil, M_1, dieser Bewegungsmenge rührt von den einfallenden Molekülen her und diese kommen alle direkt von der Platte A; ein anderer Teil der

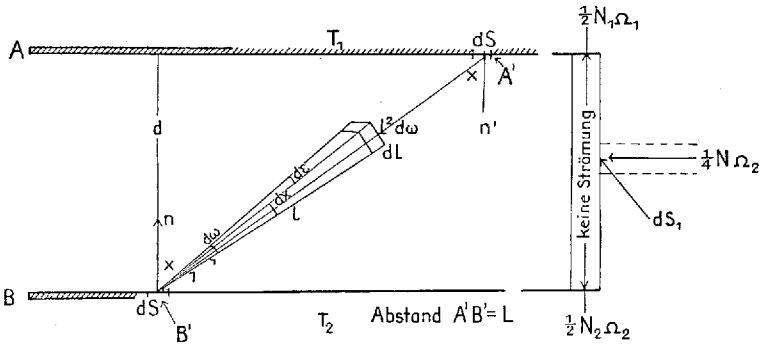

Fig. 7.

Bewegungsmenge, M_2, empfängt dS dadurch, dass die einfallenden Moleküle von dem Element dS nach dem Cosinusgesetz und mit der mittleren Geschwindigkeit Ω_2 zurückgeworfen werden; ausserdem empfängt die andere Seite des Elementes, dS, von dem Aussenraum eine Bewegungsmenge, M_3.

Verwenden wir die Terminologie von KNUDSEN und TER HEERDT[1], dann erhalten wir, wenn in der Raumeinheit zwischen den Platten N_1 Moleküle mit der Geschwindigkeit, Ω_1, und Richtung von der Platte A hinweg, und N_2 Moleküle mit der Geschwindigkeit, Ω_2, und Richtung von

[1] MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Ph., Bd. 28, 1909, p. 103 und J. H. A. TER HEERDT: Dissertation, Utrecht, 1923.

der Platte B hinweg, sich befinden, dass die totale Bewegungsmenge, welche das Element dS von beiden Seiten empfängt, wird $M_1 + M_2 + M_3$, wo:

$$M_1 = \int \frac{1}{2\pi} \cdot N_1 \Omega_1 \cos x \, d\omega \cdot m \Omega_1 \cdot \cos x$$

$$M_2 = \int \frac{1}{2\pi} \cdot N_2 \Omega_2 \cos x \, d\omega \cdot m \Omega_2 \cdot \cos x$$

$$M_3 = -\int \frac{1}{2\pi} \cdot N \Omega_2 \cos x \, d\omega \cdot m \Omega_2 \cdot \cos x .$$

Weil $d\omega = \sin x \, dx \, d\varepsilon$ und $p_2 = \frac{1}{3} mN \overline{\Omega}_2^2$, wird:

$$M_1 + M_2 + M_3 = \text{die Radiometerkraft } K =$$
$$= \frac{1}{3} mN_1 \overline{\Omega}_1^2 + \frac{1}{3} mN_2 \overline{\Omega}_2^2 - \frac{1}{3} mN \overline{\Omega}_2^2 .$$

Betrachten wir ein Randelement, dS_1, erhalten wir in dem stationären Zustand, dass die Gleichgewichtsbedingung für den Massentransport gibt:

$$\frac{1}{2} \cdot N_1 \Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot N_2 \Omega_2 = \frac{1}{4} \cdot N \Omega_2 .$$

Wir finden hieraus:

$$K = \frac{1}{3} mN_2 \overline{\Omega}_2^2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right),$$

also die bekannte Formel von MARTIN KNUDSEN für das absolute Manometer, wenn $\frac{d}{\lambda} = 0$ ist.

Wenn die Dichte des Gases zwischen den Platten A und B so gross wird, dass die Zusammenstösse zwischen den Molekülen einsetzen, erreichen also nicht alle Moleküle, die von der Platte A ausgehen, die Platte B ohne Zusam-

menstoss gelitten zu haben; nennen wir die mittlere freie Weglänge von den Molekülen der Gruppe N_1, λ_1, wird die Anzahl, n_1, die zwischen den Platten Zusammenstoss gelitten haben:

$$\int dn_1 = \int \frac{1}{2\pi} N_1 \Omega_1 \left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda_1}}\right) \cos x \, d\omega, \quad \text{wo} \quad L = \frac{d}{\cos x}.$$

Die Korrektion, die hierdurch für die obengenannte Bewegungsmenge, M_1, entsteht, wird also:

$$dM_1 = \int (-dn_1 \cdot m \Omega_1 \cos x + dn_1 \cdot m \Omega_x \cos x)$$

oder, wenn $\frac{d}{\lambda_1} \to 0$:

$$dM_1 = -\frac{1}{2\pi} N_1 \Omega_1 \cdot m (\Omega_1 - \Omega_x) \cdot \frac{d}{\lambda_1} \int \left(\cos x \sin x - \frac{1}{2} \frac{d}{\lambda_1} \sin x \ldots\right) dx \, d\varepsilon$$

$$= -\frac{1}{2} N_1 \Omega_1 \cdot m (\Omega_1 - \Omega_x) \frac{d}{\lambda_1} \left(1 - \frac{d}{\lambda_1} \cdots\right).$$

In derselben Weise finden wir, wenn wir ein Element dS' in der Platte A betrachten, und wenn M_1' die Bewegungsmenge bezeichnet, die dS' von den einfallenden Molekülen der Gruppe, N_2, empfängt, dass die Korrektion für die Bewegungsmenge M_1' wird:

$$dM_1' = \frac{1}{2} N_2 \Omega_2 \cdot m (\Omega_2 - \Omega_x) \frac{d}{\lambda_2} \left(1 - \frac{d}{\lambda_2} + \cdots\right).$$

Hieraus erhalten wir, weil in dem stationären Zustand $dM_1 - dM_1' = 0$ und weil $\lambda_1 = \lambda_2$, welches z. B. sehr leicht aus dem Ausdruck für die mittleren freien Weglängen in diffundierenden Gasen gesehen wird:

$$N_1 \Omega_1 (\Omega_1 - \Omega_x) + N_2 \Omega_2 (\Omega_2 - \Omega_x) = 0,$$

woraus:

$$\Omega_x = \frac{N_1 \Omega_1^2 + N_2 \Omega_2^2}{N_1 \Omega_1 + N_2 \Omega_2}$$

und also die Korrektion für die Radiometerkraft, K:

$$dK = -\frac{1}{2} m \cdot N_1 \Omega_1 (\Omega_1 - \Omega_x) \frac{d}{\lambda} \left(1 - \frac{d}{\lambda} \cdots\right).$$

Wenn wir sehr dicht in der Nähe von der Grenzbedingung $K = \frac{1}{2} p \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right)$ sind, dann können wir in dem Ausdruck für die Korrektion dK als Annäherung die Grenzbedingung für $\frac{d}{\lambda} = 0$, $N_1 \Omega_1 = N_2 \Omega_2$, einsetzen und erhalten hieraus:

$$\Omega_x = \frac{1}{2} (\Omega_1 + \Omega_2)^{1}$$

[1] In diesem Falle kann man also die Gasmasse zwischen den Platten auffassen als eine Gasmasse mit der Temperatur T_x und mit N_x Molekülen pr. cm^3. T_x ist bestimmt durch:

$$\Omega_x = \frac{1}{2} (\Omega_1 + \Omega_2),$$

oder:

$$\sqrt{T_x} = \frac{1}{2} (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}).$$

Betrachten wir ein Randelement, dS_1, zwischen den Platten, so muss in dem Grenzzustand $\frac{d}{\lambda} \rightrightarrows 0$ die Gleichgewichtsbedingung sein:

$$\frac{1}{4} N_x \Omega_x = \frac{1}{4} N \Omega_2,$$

woraus

$$\frac{p_x}{p_2} = \frac{\Omega_x}{\Omega_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + 1\right)$$

oder

$$K = p_x - p_2 = \frac{1}{2} \cdot p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right),$$

in Übereinstimmung mit der Formel von KNUDSEN.

und

$$dK = -\frac{1}{2} m \cdot N_2 \Omega_2 \left(\frac{\Omega_1}{2} - \frac{\Omega_2}{2}\right) \cdot \frac{d}{\lambda}\left(1 - \frac{d}{\lambda} + \cdots\right)$$
$$= -\frac{3}{8} p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) \cdot \frac{d}{\lambda}\left(1 - \frac{d}{\lambda} + \cdots\right).$$

Wir erhalten hieraus für die Radiometerkraft K':

$$K' = K + dK = \frac{1}{2} p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right)\left[1 - \frac{3}{4}\frac{d}{\lambda} + \frac{3}{4}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \cdots\right]$$

oder in erster Annäherung:

$$K' = \frac{1}{2} p_2 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{d}{\lambda}}.$$

Diesen Ausdruck können wir durch die Präcisionsmessungen von Martin Knudsen[1] für das absolute Manometer nachprüfen; wir sehen in der Tabelle 3 in der ersten Kolonne den wahren und gemessenen Wert des Druckes, p, und in der zweiten Kolonne den Wert p', berechnet aus den gemessenen Werten von K durch die Formel:

$$K = \frac{1}{2} p' \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right), \qquad \text{(b)}$$

während wir den Wert p'' in Kolonne 3 berechneten aus:

$$K = \frac{1}{2} p'' \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{d}{\lambda}}, \qquad \text{(a)}$$

wo K die gemessene Radiometerkraft per cm^2 bezeichnet.

Wir ersehen hieraus, dass die in dieser Weise theoretisch abgeleitete Radiometerkraft in befriedigender Übereinstim-

[1] Martin Knudsen: Ann. d. Ph., Bd. 32, 1910, p. 835.

Tabelle 3.

Der Abstand zwischen den Platten in den Versuchsreihen: $d = 0.07$ cm.

Wahrer Wert für p	berechnet nach Formel (b)	berechnet nach Formel (a)
Versuch Nr. 1. Wasserstoff. $p\lambda = 11.5$.[1]		
$p =$ 2.46 Bar.	$p' =$ 2.46 Bar.	$p'' =$ 2.46 Bar.
4.88 —	4.86 —	4.95 —
6.23 —	6.25 —	6.38 —
8.54 —	8.37 —	8.65 —
10.58 —	9.95 —	10.40 —
11.74 —	11.11 —	11.70 —
Versuch Nr. 2. Sauerstoff. $p\lambda = 6.45$.		
$p =$ 2.45 Bar.	$p' =$ 2.45 Bar.	$p'' =$ 2.45 Bar.
4.80 —	4.70 —	4.88 —
7.13 —	6.74 —	7.13 —
8.97 —	8.24 —	8.84 —
11.25 —	9.92 —	10.82 —
11.70 —	10.21 —	11.18 —
Versuch Nr. 3. Kohlensäure. $p\lambda = 4.0$.		
$p =$ 2.33 Bar.	$p' =$ 2.33 Bar.	$p'' =$ 2.33 Bar.
3.74 —	3.63 —	3.79 —
6.09 —	5.78 —	6.20 —
7.93 —	7.24 —	7.96 —
9.31 —	8.23 —	9.24 —
10.68 —	9.13 —	10.41 —

mung mit der experimentellen Untersuchung von Knudsen ist, und dass hierdurch die Abhängigkeit des absoluten Manometers von dem benutzten Gase in der Nähe der

[1] Hier wird verwendet die mittlere Weglänge nach S. Chapman; die Änderung von λ mit der Temperatur kann in dieser Berechnung vernachlässigt werden, jedenfalls wenn T_1 und T_2 nur wenig verschieden sind.

Grenzbedingung bekannt ist, so dass unter Umständen das »absolute« Manometer in einem grösseren Druckgebiet verwendet werden kann. Wenn der Akkommodationskoeffizient für die Innenseite der zwei Platten A und B verschieden von $a = 1$ ist, muss dieses in bekannter Weise berücksichtigt werden.[1]

Aus den Werten $2\frac{m}{n} = \mu_{1,\infty} = 2.70$ und $m - n - \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{3}{4}$ erhalten wir für die Formel (IX):

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1+0.621\frac{d}{\lambda}}{1+0.460\frac{d}{\lambda}} + 1.1781\frac{d}{\lambda} + 0.1309\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}$$

oder für kleine Temperaturdifferenzen in erster Annäherung:

$$p_2 = 4\,T_2 \frac{K}{T_1 - T_2}\left\{\frac{1+0.621\frac{d}{\lambda}}{1+0.460\frac{d}{\lambda}} + 0.589\frac{d}{\lambda} + 0.0655\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2\right\}$$

worin, $K = p_1 - p_2$, die gemessene Radiometerkraft per cm^2 ist; dieser Ausdruck für p_2 ist leider nicht explizit, weil p_2 auch in λ eingeht, und die Gleichung kann also nur durch sukzessive Annäherungen gelöst werden.

Die Messungsreihen von Martin Knudsen mit Wasserstoff und Sauerstoff, Tabelle 1 und 2, sind mit dieser Formel in befriedigender Übereinstimmung, wenn für Wasserstoff $d = 0.041$ cm und für Sauerstoff $d = 0.081$ cm verwendet werden; bei niedrigen Drücken sind aber die berechneten Werte aus der Formel etwas zu gross, weil in diesen Versuchsreihen mit einer Mischung von Gas und Quecksilberdampf gearbeitet ist, wodurch der Wert von λ nicht so ganz

[1] E. Fredlund: Ann. d. Ph., Bd. 13, 1932, p. 802, Ann. d. Phys., Bd. 14, 1932, p. 617.

gut bekannt ist; dieses ist auch die Erklärung dafür, dass diese Messungsreihen in dem niedrigen Druckgebiet nicht ganz in Übereinstimmung sind mit den späteren, oben benutzten Präcisionsmessungen von KNUDSEN, in welchen der Quecksilberdampf ausgefroren war; es wäre aber sehr wünschenswert neue Versuchsreihen, worin alle Dämpfe ausgefroren wurden, zu unternehmen, und worin die Aufmerksamkeit besonders auf die Abstandsmessung zwischen den Platten gelenkt wurde, bezw. diese Versuche so einzurichten, dass der Abstand, d, während der Versuchen konstant gehalten wurde (System BRÜCHE und LITTWIN).

§ 10. Aus dem vorhergehenden geht deutlich die grosse Analogie zwischen dem absoluten Manometer von KNUDSEN und der thermomolekularen Druckdifferenz hervor, und dass diese Erscheinungen von analogen Formeln beherrscht werden; dasselbe ist auch der Fall für andere Radiometer und Radiometererscheinungen, wenn diese so eingerichtet sind, dass die physikalischen Zustände in dem Versuch hinreichend festgelegt sind und so eingerichtet, dass der entstehende Strömungszustand übersehen werden kann. In dem folgenden werde ich noch kurz ein Paar von den bekannten Radiometerausführungen besprechen und besonders das Flügelradiometer oder Einplattenradiometer im Wärmestrom.

Die angemessene rationelle Ausführung von diesem Radiometer ist m. E. von E. BRÜCHE und W. LITTWIN[1] angegeben; in dieser Untersuchung war ein kleiner Radiometer-flügel oder -platte, F, drehend aufgehängt zwischen zwei grossen parallelen Platten, W und K, mit den Temperaturen T_1 und T_2; die auf der Platte, F, ausgeübte

[1] E. BRÜCHE und W. LITTWIN: Z. f. Ph., Bd. 67, 1931, p. 333. — Vgl. auch: E. FREDLUND, loc. cit.

Radiometerkraft wurde kompensiert durch eine bekannte Torsionskraft, so dass die Platte, F, ihre Lage zwischen W und K und also ihre Abstände von W und K nicht änderte; ausserdem war der Radiometerflügel, F, in einigen von den Versuchen von einem Schutzring, S, umgeben; der Apparat ist in Fig. 8 zu sehen. Wir können annehmen, dass die Platte F gut wärmeleitend ist, so dass die zwei Seiten dieser dünnen Platte dieselbe Temperatur haben, oder jedenfalls nur eine ganz kleine Temperaturdifferenz. Weiter nehmen wir an, in Übereinstimmung mit den Versuchen, dass der Akkommodationskoefficient für alle Oberflächen derselbe ist.

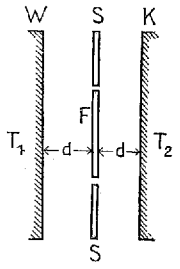

Fig. 8.

Es stellte sich in dieser Untersuchung experimentell heraus, dass der Einfluss von dem Schutzring des drehbaren Flügels F sehr klein war, und dass die Messresultate mit und ohne Schutzring praktisch gesprochen dieselben waren, woraus folgt, dass die thermische Gleitströmung zwischen F und W und zwischen F und K mit und ohne Schutzring praktisch gesprochen dieselben waren. Wir können also auch für das Einplattenradiometer im Wärmestrom die oben entwickelte Theorie für das absolute Manometer verwenden. Nennen wir die Temperaturen der zwei Seiten von F für X und Y, so erhalten wir für $\frac{d}{\lambda} \gtrless 0$:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{p_2}{4} \cdot \frac{T_1 - Y}{T_2} + \frac{p_2}{4} \frac{X - T_2}{T_2}$$
$$= \frac{p_2}{4} \left\{ \frac{T_1 - T_2}{T_2} - \frac{Y - X}{T_2} \right\}.$$

Da wir laut der Experimente bei allen Drücken des Gases $Y = X$ setzen können, werden wir also für die Radiometerkraft in dem ganzen Gebiet, $0 \leqq \frac{d}{\lambda} \leqq \infty$, schreiben können:

$$\frac{K}{T_1-T_2}=\frac{K_1+K_2}{T_1-T_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_2}{T_2}\cdot\frac{1}{\mu_1+\beta_1\left(\frac{d}{\lambda}\right)+\alpha_1\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}$$

in Übereinstimmung mit dem absoluten Manometer, wo α_1 und β_1 bekannte Konstanten sind, während μ_1 eine bekannte Funktion von $\frac{d}{\lambda}$ ist.

BRÜCHE und LITTWIN haben mit verschiedenen Gasen eine grosse Menge Messungen im ganzen Druckgebiet ausgeführt und besonders die Grösse, R_{max}, und die Lage, λ_{max}, des Maximums untersucht; sie haben die erhaltenen Resultate für alle Gase in der Radiometergleichung:

$$2\cdot\frac{R_{max}}{R}=\frac{\lambda}{\lambda_{max}}+\frac{\lambda_{max}}{\lambda},$$

zusammengefasst.

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$\frac{R}{R_{max}}=\frac{2}{\frac{\lambda}{\lambda_{max}}+\frac{\lambda_{max}}{\lambda}}.$$

Die Übereinstimmung mit meiner Formel (XII):

$$\frac{R}{R_{max}}=\frac{P'}{P'_{max}}=\frac{2+\delta}{\frac{p}{p_{max}}+\frac{p_{max}}{p}+\delta},\quad\text{worin}\quad\delta=\frac{\beta_1}{\sqrt{\mu_1\alpha_1}}=1.983,$$

welche für das absolute Manometer abgeleitet ist, ist in diesem Falle einleuchtend; für $\delta=0$ geht Gleichung (XII) in die von LITTWIN und BRÜCHE gefundene Gleichung über. Leider haben B. & L. die Temperaturdifferenz zwischen den Platten K und W nicht direkt und während den Versuchen gemessen; dieses hat aber P. SCHMUDDE[1] in seiner Arbeit

[1] P. SCHMUDDE: Z. f. Ph., Bd. 53, 1929, p. 331.

gemacht, aber in dieser Untersuchung hat die Platte, F, ihre Lage geändert, weil die Radiometerkraft nicht kompensiert wurde.

Brüche und Littwin haben mit den folgenden Gasen: He, Ne, Ar, Kr, H_2, O_2, N_2, CO_2 und CH_4, gearbeitet, und die Lage, p_{max}, von der maximalen Radiometerkraft, R_{max}, experimentell bestimmt. Aus der Formel:

$$p_{max} \cdot \lambda_{max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{{}_1\varrho_0}} \left(\frac{T}{273.1}\right)^{1+n} = {}_1\lambda$$

können die Werte von λ_{max} für die gefundenen Werte von p_{max} berechnet werden, und es stellte sich heraus:

Dass für alle Gase das Maximum des Radiometereffektes gerade dann auftritt, wenn die freie Weglänge die bestimmte Grösse, λ'_{max} = konstant, erreicht hat; dieses ist in Übereinstimmung damit, dass wir gefunden haben:

$$p_{max} = \frac{{}_1\lambda}{d} \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}}; \text{ wo aber } p_{max} \cdot \lambda_{max} = {}_1\lambda,$$

erhalten wir für alle Gase mit $\mu_1 = 2.70$ und $\alpha_1 = 0.1309$:

$$\lambda_{max} = d \sqrt{\frac{\alpha_1}{\mu_1}} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{\lambda_{max}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = 4.54,$$

unabhängig von den Eigenschaften des Gases.[1]

B. & L. fanden für den Abstand $WF = WK = d$ und für alle Gase:

1) $d' = 9.5$ mm, $\lambda'_{max} = 1.9$ mm (Platin blank)
2) $d' = 9.5$ mm, $\lambda'_{max} = 1.9$ mm (Platin schwarz)
3) $d'' = 2.0$ mm, $\lambda''_{max} = 0.5$ mm (Platin blank),

[1] Wenn man die Variation von μ_1 mit $\frac{d}{\lambda}$ in Betracht zieht, wird $\frac{d}{\lambda_{max}} =$ ca. 4.35.

woraus $\frac{d'}{\lambda'_{max}} = 5.0$ und $\frac{d''}{\lambda''_{max}} = 4.0$, oder im Mittel: $\frac{d}{\lambda_{max}} =$ $=$ ca. 4.5, in befriedigender Übereinstimmung[1] mit unserem theoretischen Resultat.

Bei den meisten vorliegenden experimentellen Untersuchungen über das Flügelradiometer kann man aber nicht eine so befriedigende Übereinstimmung erwarten, weil diese Messungen durch die weniger gut definierten Verhältnisse der umgebenden und begrenzenden Oberflächen so beeinflüsst sind, dass die mathematische Behandlung von den bei grösserer Dichte entstehenden Strömungen nicht durchzuführen ist.

§ 11. In § 4 haben wir bei der Berechnung von dem Strömungszustande am Rande der Platte A angenommen, dass die entstehende thermische Gleitströmung nicht zwischen den Platten A und B durchdringt, weil der Temperaturunterschied, $T_1 - T_2$, nur am Rande der Platte A in dem absoluten Manometer liegt; in dem Falle der Knudsen'schen Konstruktion in der rationellen Ausführung wird dieses auch richtig sein, wenn der Abstand zwischen den Platten A und B hinreichend klein ist; experimentell könnte dieses durch gleichzeitige Messung von der Radiometerkraft, K, und von dem Abstand, d, zwischen den Platten untersucht werden, weil man dann die gemessene und berechnete Radiometerkraft mit einander vergleichen könnte.

[1] Vgl. auch Ernst Fredlund: Ann. d. Ph., Bd. 13, 1937, p. 808. Fredlund findet mit einem ähnlichen Radiometer in Wärmestrom für Wasserstoff:

$$\frac{\lambda_{max}}{L} = 0.13,$$

wo $L = 2d$;

also:

$$\frac{d}{\lambda_{max}} = \frac{L}{2\lambda_{max}} = \text{ca. } 4.$$

Für atm. Luft und CO_2 wurde $\frac{d}{\lambda_{max}} =$ ca. 2,8 gefunden.

Leider sind die vorliegenden Messungen nicht hinreichend genau um dieses zu tun, und es ist darum nicht ohne Interesse ganz kurz zu überlegen, wie die Formel für die Radiometerkraft, K, sich gestalten würde, wenn der Temperaturunterschied $T_1 - T_2$ nicht am Rande liegt, sondern in der Platte A, z. B. dadurch, dass das Centrum, O, der Platte die Temperatur, T_1, hat, während die Temperatur am Rande, T_2, ist; in diesem Falle wird die Gleitströmung bei der Platte A vom Rande bis zum Centrum, O, durchdringen, während das einströmende Gas bei der Platte B in entgegengesetzter Richtung zurückströmen wird. Der Strömungszustand wird von dem Temperaturgradienten in der Platte A abhängig werden; einfachkeitshalber nehmen wir an, dass die Temperaturverteilung in der Platte A eine symmetrische, parabolische Temperaturverteilung wird (vgl. Fig. 9) und also geschrieben werden kann:

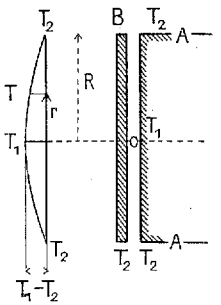

Fig. 9.

$$T = T_1 - \frac{r^2}{R^2}(T_1 - T_2), \quad \text{wo} \quad T_1 > T_2,$$

oder:

$$\frac{dT}{dr} = -2\frac{r}{R^2}(T_1 - T_2).$$

Um den Druckverlauf zwischen den Platten zu bestimmen, können wir wieder die Formel (VII), weil keiner Temperaturgradient in der Platte B anwesend ist, verwenden und erhalten also:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{9}{2} \cdot k_1 \cdot \frac{\eta^2}{p \cdot {}_1\varrho \cdot d^2 \left(1 + 6k_2 \frac{\gamma_M}{d}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dr}$$

$$= E \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{dT}{dr}.$$

Für kleine Temperaturunterschiede und also kleine Druckdifferenzen erhalten wir hieraus:

$$p - p_2 = E \cdot \frac{1}{\bar{p}} (T_1 - T_2) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \quad \bar{p} = \frac{1}{2}(p + p_2)$$

und also für die totale Radiometerkraft der Platte A mit der Oberfläche, πR^2:

$$K_1' = \int_0^R (p - p_2)\, 2\pi r dr = \frac{E}{\bar{p}} (T_1 - T_2) \frac{1}{2} \cdot \pi R^2,$$

oder:

$$K_1' = \frac{9}{4} k_1 \frac{\eta^2}{{}_1\varrho \cdot \bar{p} \cdot d^2 \left(1 + 6 k_2 \cdot \frac{\gamma_M}{d}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)} \cdot \frac{\pi R^2}{T} (T_1 - T_2).^1$$

Vergleichen wir diese Formel für K_1' mit dem Ausdruck für $\frac{dp}{dr}$, bezw. K, in § 4 (Formel VII), dann sehen wir, dass:

$$K_1' = \frac{1}{2} K,$$

also genau die Hälfte von dem Werte, den wir gefunden haben, wenn der ganze Temperaturunterschied am Rande der Platte liegt; ob die wahre Temperaturverteilung in der Platte A nicht genau unserer parabolischen Formel folgt, wird wahrscheinlich keinen grossen Einfluss haben.

In diesem Falle wird die vollständige Formel für die Radiometerkraft per cm^2 und per Grad Celsius, K_1, sein:

$$K_1 = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{K_1'}{T_1 - T_2} = \frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{4 T_2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p + \beta_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) + \mu_1 \cdot \frac{1}{p}}$$

[1] Dieser Ausdruck ist in Übereinstimmung mit dem Ausdruck, den Fanselau in anderer Weise berechnet hat (G. Fanselau: Dissertation, Berlin, 1927, p. 21).

oder

$$K_1 = \frac{1}{2\,T_2} \cdot \frac{1}{2\,\alpha_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right)^2 \cdot p + 2\,\beta_1 \left(\frac{d}{{}_1\lambda}\right) + 2\,\mu_1 \cdot \frac{1}{p}}.$$

Die Grösse und die Lage des Maximums sind also bestimmt durch:

$$p_{\max} = \frac{{}_1\lambda}{d}\sqrt{\frac{2\,\mu_1}{2\,\alpha_1}} \text{ und } P''_{\max} = 4\,T_2\left(\frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2}\right)_{\max} = \frac{{}_1\lambda}{d}\frac{1}{2\sqrt{\mu_1\alpha_1} + \beta_1}.$$

Würde man diese Formel verwenden für die vorliegenden Observationsreihen für Wasserstoff und Sauerstoff von MARTIN KNUDSEN, so würde man hieraus den Wert, $\mu_1 = 1.055$, finden, wodurch also $\delta = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1\mu_1}}$ etwas grösser sein würde.

Die Abstände zwischen den Platten d_{H_2} und d_{O_2} würden bezw. 0.026 und 0.052 werden, während die Relation: $\frac{d}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = 2.85$, wird; dieser Wert ist aber nicht in Übereinstimmung mit den Versuchen von BRÜCHE und LITTWIN.

Wir ersehen hieraus, dass eine gleichzeitige Messung von der Radiometerkraft, K, und dem Abstand, d, bei bekannter Temperaturdifferenz, $T_1 - T_2$, und Druck p_2 nach Vergleichung mit dem berechneten Ausdruck für die Kraft, K, eventuell angeben könnte, in wiefern die entstandene thermische Gleitströmung zwischen den Platten durchdringen würde.

§ 12. G. HETTNER[1] hat in einer interessanten Arbeit sein Zweiplattenradiometer beschrieben; dies ist in der Weise konstruiert, dass es ein einfaches, aber hochempfindliches

[1] G. HETTNER: Z. f. Ph., Bd. 47, 1928, p. 499.

Messinstrument für Wärmestrahlung geworden ist; das Zweiplattenradiometer von Hettner ist im Grunde genommen dasselbe Instrument wie das absolute Manometer von Martin Knudsen, nur mit dem Unterschiede, dass der Temperaturgradient in der Hettner'schen Konstruktion in der beweglichen Platte B liegt; dieser Temperaturgradient wird erzeugt durch Strahlung, und umgekehrt kann also das Radiometer für Strahlungsmessung verwendet werden; weil der Temperaturgradient nicht am Rande der Platte liegt, sondern in der Platte, B, selbst, werden die theoretischen Betrachtungen in § 11 für diesen Fall gelten und die Grösse der Radiometerkraft, K, wird also, wenn $\frac{d}{\lambda} \rightrightarrows \infty$:

$$K_1 = \frac{9}{4} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\pi R^2}{d^2} \Delta T,$$

wo $\Delta T = T_1 - T_2$ ist.

Weil der Temperaturgradient aber in der beweglichen Platte, welche eine dünne, kreisförmige Scheibe mit Radius R war, liegt, wird zu der Kraft, K_1, ausserdem die gewöhnliche Radiometerkraft, K', für eine kreisförmige Scheibe o h n e Gegenplatte hinzukommen; diese Kraft ist für $\frac{d}{\lambda} \rightrightarrows \infty$ nach Epstein[1]:

$$K' = k_1 \cdot 3\pi \frac{\eta^2}{\varrho T} \Delta T,$$

so dass die totale Radiometerkraft wird:

$$K = K_1 + K' = \frac{9}{4} k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\pi R^2}{d^2} \Delta T + k_1 \cdot 3\pi \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \Delta T,$$

woraus:

[1] Paul S. Epstein: Z. f. Ph., Bd. 54, 1929, p. 537.

$$K = 3\pi k_1 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T}\left[\frac{3}{4}\frac{R^2}{d^2} + 1\right] \cdot \Delta T,$$

oder genau die Formel, welche G. FANSELAU[1] abgeleitet hat.

Ist, d, gegenüber, R, klein, kann der Einfluss von dem Glied K' vernachlässigt werden; in diesem Falle ist die Änderung von K mit $\frac{d}{\lambda}$ durch die Berechnung in § 11 gegeben und wird also dieselbe wie für das absolute Manometer sein; die grösste Empfindlichkeit für das Zweiplattenradiometer wird man also erhalten, wenn:

$$\frac{d}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\alpha_1}} = \text{ca. } 4.3.$$

HETTNER hat in seinen Versuchen, in welchen das verwendete Zweiplattenradiometer mit Atm. Luft gefüllt war, gefunden, dass die maximale Empfindlichkeit bei dem Druck, $p_{\max}$ = ca. 0.2 mm Hg, erreicht wurde.

Für Atm. Luft ist $p\lambda = 6.5$, und also für p = ca. 0.2 mm Hg = ca. 265 Bar, $\lambda_{\max}$ = ca. 0.024 cm; hieraus würde erfolgen, dass der Abstand, d, in dem HETTNER-schen Versuch war, $d = 4.3 \cdot 0.024$ cm = ca. 0.1 cm; dies ist in guter Übereinstimmung mit der Angabe von HETTNER, dass der Abstand, d, von der Grössenordnung 0.5 bis 1 mm war.

Aus der in § 11 abgeleiteten Formel für die Änderung von K mit $\frac{d}{\lambda}$ geht hervor, dass die maximale Empfindlichkeit, $P''_{\max}$, des HETTNER'schen Messinstrument verdoppelt wird, wenn Wasserstofffüllung verwendet wird;

[1] G. FANSELAU, loc. cit., p. 21.

mit Heliumfüllung wird die maximale Empfindlichkeit für dasselbe Instrument dreimal so gross werden.

Der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds bin ich für gewährte Stütze sehr zu Dank verpflichtet; in einer folgenden Abhandlung beabsichtige ich einige andere Typen von dem Radiometer und insbesondere die photophoretischen Erscheinungen näher zu untersuchen.

Færdig fra Trykkeriet den 30. Juni 1937.