Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV**, 1.

# EIN SATZ ÜBER STABILE BEWEGUNGEN IN DER EBENE

VON

H. BOHR UND W. FENCHEL

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

1. Es bezeichne $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einen Punkt des $n$-dimensionalen Raumes $E_n$. Ist $x(t)$ für $-\infty < t < \infty$ stetig von $t$ abhängig, so sprechen wir von einer Bewegung in $E_n$. Eine Bewegung heisst nach LIAPOUNOFF stabil oder kurz stark stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass aus

$$\varrho[x(\tau'),\ x(\tau'')] \leqq \delta$$

die Ungleichung

$$\varrho[x(\tau'+t),\ x(\tau''+t)] \leqq \varepsilon$$

für alle $t$ $(-\infty < t < \infty)$ folgt. Hierbei bedeutet $\varrho[x,y]$ den euklidischen Abstand der Punkte $x$ und $y$. A. MARKOFF hat nun gezeigt, dass jede stark stabile, beschränkte Bewegung fastperiodisch ist[1]. Im folgenden soll u. a. bewiesen werden, dass jede stark stabile, beschränkte Bewegung in der Ebene $E_2$ sogar periodisch ist.

2. Dies gilt, wie der unten angegebene Beweis lehrt, auch schon unter sehr viel schwächeren Voraussetzungen, nämlich falls die betrachtete Bewegung nur nach POISSON positiv stabil ist. Das soll folgendes heissen:

[1] A. MARKOFF: Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität [Math. Zeitschr. **36**, 708—738 (1933)], insbes. § 3. In der obigen Formulierung ist der Satz von H. BOHR in der Note »Stabilitet og Næstenperiodicitet« [Matematisk Tidsskr. B **1933**, 21—25] ausgesprochen worden.

a) Zu jedem $l > 0$, jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\tau_0$ soll es ein $\delta = \delta(l, \varepsilon, \tau_0) > 0$ derart geben, dass aus

$$\varrho\,[x(\tau_0),\ x(\tau)] \leqq \delta \tag{1}$$

die Ungleichung

$$\varrho\,[x(\tau_0 + t),\ x(\tau + t)] \leqq \varepsilon \tag{2}$$

für $-l \leqq t \leqq l$ folgt.

b) Ferner soll es ein $t_0$ und eine Folge $t_1, t_2, \ldots \to \infty$ geben, so dass die Punktfolge $x(t_\nu)$ für $\nu \to \infty$ gegen $x(t_0)$ konvergiert.

Unsere Behauptung lautet dann: *Jede nach* Poisson *positiv stabile Bewegung in der Ebene ist periodisch.*

Dass dies tatsächlich die obige Behauptung enthält, folgt einfach daraus, dass jede beschränkte, stark stabile Bewegung die Eigenschaften a) und b) besitzt. Für a) ist dies klar, und b) kann man z. B. daraus entnehmen, dass die Bewegung nach Markoff fastperiodisch ist.

**3.** Wenn die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \tag{3}$$

in einem Gebiet $\Gamma$ der $x_1, x_2$-Ebene stetig sind und in der Umgebung eines jeden Punktes von $\Gamma$ einer Lipschitz-Bedingung genügen, so besitzt jede Lösung $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ von (3), die für $-\infty < t < \infty$ in $\Gamma$ verläuft, von selbst die Eigenschaft a), wie man aus der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten entnimmt. In diesem Spezialfall besagt der genannte Satz: Ist $x(t)$ eine für $-\infty < t < \infty$ in $\Gamma$ verlaufende Lösung von (3) und existiert eine Folge

$t_1, t_2, \ldots \to \infty$ derart, dass die Punkte $x(t_\nu)$ gegen einen Punkt $x(t_0)$ der Integralkurve konvergieren, so ist $x(t)$ periodisch, also die Integralkurve geschlossen. Dies ist schon von BENDIXSON[1] gezeigt worden.

**4.** Zum Beweis unseres Satzes genügt es zu zeigen, dass die von $x(t)$ beschriebene Kurve wenigstens einen Doppelpunkt hat. Ist nämlich für zwei verschiedene Werte $\tau_0$ und $\tau$ von $t$

$$x(\tau_0) = x(\tau),$$

so ist (1) für jedes $\delta > 0$, folglich auch (2) für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $l > 0$ erfüllt. Also ist in der Tat

$$x(\tau_0 + t) = x(\tau + t)$$

für alle $t$. Die Existenz eines Doppelpunktes der Kurve $x(t)$ ergibt sich nun unter noch schwächeren Voraussetzungen: Wir werden a) nur für ein festes, willkürliches $l$ und ein festes $\tau_0$, nämlich $\tau_0 = t_0$ gebrauchen und zeigen, dass der Teil $t \geqq t_0 - l$ der Kurve einen Doppelpunkt besitzt. Periodizität der Bewegung lässt sich dann natürlich nicht mehr behaupten. Nach Einführung eines neuen Parameters, für den $t_0 = 0$ und $l = 1$ wird und den wir wieder mit $t$ bezeichnen, können wir also unsere endgültige Behauptung folgendermassen formulieren:

[1] I. BENDIXSON: Sur les courbes définies par des équations différentielles [Acta math. **24,** 1—88 (1901)], insbes. S. 11—12. Vgl. auch L. BIEBERBACH: Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl. Berlin: J. Springer, 1930, S. 82—83.

Dass der BENDIXSONsche Beweis erheblich einfacher als der folgende ist, beruht darauf, dass bei Selbstapproximation einer Integralkurve von (3) zugleich die Richtungen approximiert werden, worüber hier nichts vorausgesetzt wird.

**Satz:** Der Punkt $x(t)$ der Ebene sei für $t \geqq -1$ stetig von $t$ abhängig, und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

A) Es gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass aus

$$\varrho[x(0),\ x(\tau)] \leqq \delta \qquad (\tau > 0) \tag{4}$$

die Ungleichung

$$\varrho[x(t),\ x(\tau + t)] \leqq \varepsilon \tag{5}$$

für $-1 \leqq t \leqq 1$ folgt.

B) Ferner existiere eine Folge $t_1, t_2, \ldots \rightarrow \infty$ derart, dass $x(t_\nu)$ für $\nu \rightarrow \infty$ gegen $x(0)$ konvergiert.

Dann besitzt die von $x(t)$ beschriebene Bahnkurve wenigstens einen Doppelpunkt.

5. Wir bemerken zunächst, dass Voraussetzungen und Behauptung dieses Satzes — übrigens auch der beiden in 1. und 2. formulierten Sätze — gegenüber topologischen Abbildungen der Ebene auf sich invariant sind.

Wir nehmen nun an, dass die Behauptung falsch, dass also die Bahnkurve $x(t)$ doppelpunktfrei ist. Um uns einfacher ausdrücken zu können, wollen wir durch eine topologische Abbildung der Ebene auf sich den Kurvenbogen $x(t), -1 \leqq t \leqq 1$, in eine Strecke der Länge 2 überführen, und zwar so, dass der Parameter $t$ die Länge auf dieser Strecke wird[1]. Alsdann sind unsere Voraussetzungen [viel-

[1] Dass dies möglich ist, kann man etwa so einsehen: Man ergänze den Bogen $x(t), -1 \leqq t \leqq 1$, und eine beliebige Strecke der Länge 2 zu je einer einfach geschlossenen Kurve und bilde diese geschlossenen Kurven topologisch so auf einander ab, dass dem Punkt $x(t), -1 \leqq t \leqq 1$, derjenige Punkt der Strecke entspricht, der von ihrem einen Endpunkt den Abstand $t+1$ hat. Diese Abbildung der Kurven lässt sich zu einer topologischen Abbildung der ganzen Ebene auf sich erweitern. (Vgl. B. v. Kerékjártó: Vorlesungen über Topologie. Berlin: J. Springer 1923, S. 69.)

leicht mit anderem $\delta(\varepsilon)$] auch für die neue Bewegung erfüllt, und ihre Bahnkurve ist nach unserer (zu widerlegenden) Annahme ebenfalls doppelpunktfrei. Mit anderen Worten: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu den obigen Voraussetzungen hinzufügen, dass das Stück $-1 \leqq t \leqq 1$ der Bahnkurve eine Strecke der Länge 2 ist und mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.

In der Voraussetzung A) wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und legen um den Punkt $x(0)$ die abgeschlossene Kreisscheibe $K_0$ vom Radius $\operatorname{Min}\left(\frac{1}{4}, \delta\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ und um $x(-1)$ und $x(1)$ die abgeschlossenen Kreisscheiben $K_{-1}$ und $K_1$ vom Radius $\frac{1}{4}$. Ist nun $\tau$ irgend ein Wert $> 1$, für den der Punkt $x(\tau)$ zu $K_0$ gehört, so dass also (4) besteht, so folgt (5), d. h.

$$\varrho\,[x(t),\ x(\tau + t)] \leqq \tfrac{1}{4} \quad \text{für } -1 \leqq t \leqq 1. \tag{6}$$

Hieraus schliesst man: $x(\tau - 1)$ liegt in $K_{-1}$ und $x(\tau + 1)$ in $K_1$. Ferner, dass der Bogen $x(\tau - \frac{1}{2})$, $x(\tau + \frac{1}{2})$ weder mit $K_{-1}$ noch mit $K_1$ Punkte gemein hat, und schliesslich, dass der Bogen $x(\tau - 1)$, $x(\tau + \frac{1}{2})$ zu $K_1$ und der Bogen $x(\tau - \frac{1}{2})$, $x(\tau + 1)$ zu $K_{-1}$ punktfremd sind. Etwas weniger präzis können wir dies so ausdrücken: Jedesmal, wenn der Punkt $x(t)$ nach $K_0$ gelangt, kommt er notwendig von $K_{-1}$ ohne $K_1$ zu treffen, und geht nach $K_1$, ohne $K_{-1}$ zu treffen.

Es bezeichne nun $\tau'$ den kleinsten Wert $> 1$, für welchen $x(\tau')$ zu $K_0$ gehört. Ein solcher existiert auf Grund der Voraussetzung B). Dann liegt $x(\tau' + 1)$ in $K_1$ und $x(\tau' - 1)$ in $K_{-1}$. Wir verbinden $x(\tau')$ mit $x(0)$ geradlinig. Es sei $x(\tau)$ der $x(0)$ nächste Schnittpunkt dieser Strecke mit dem Kurvenbogen $x(\tau' - 1)$, $x(\tau' + 1)$ (vgl. Abb. 1). Dann ist

$$\tau' \leqq \tau < \tau' + 1, \tag{7}$$

da die Strecke in $K_0$ liegt und $x(\tau')$ der erste auf $x(1)$

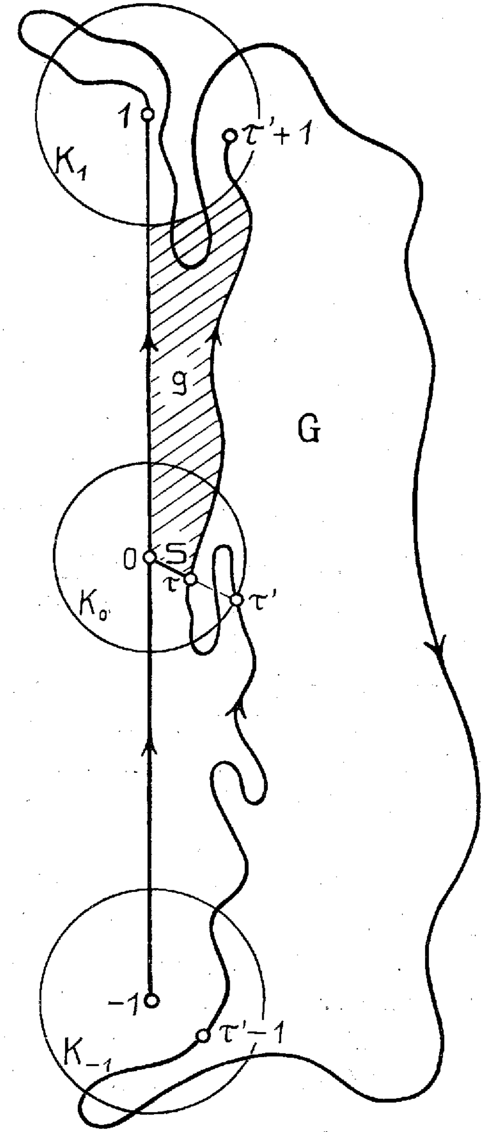


Abb. 1.

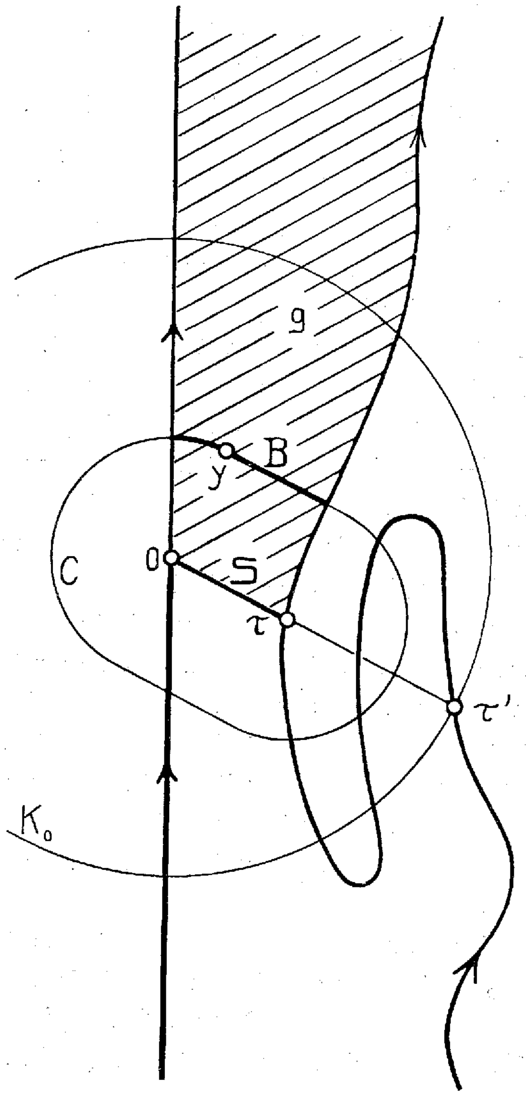


Abb. 2.

folgende Bahnpunkt in $K_0$ ist. Das Stück der (ja als doppelpunktfrei angenommenen) Bahnkurve von $x(0)$ bis $x(\tau)$ bildet zusammen mit der Strecke $x(\tau)$, $x(0)$, die wir kurz mit $S$ bezeichnen, eine einfach geschlossene Kurve. Dadurch werden in der Ebene zwei Gebiete bestimmt. Der Bogen $x(\tau)$, $x(\tau'+1)$ hat mit dieser geschlossenen Kurve wegen der Konstruktion von $x(\tau)$ und der Doppelpunktfreiheit der Bahnkurve nur den Punkt $x(\tau)$ gemein, verläuft also vollständig in einem der beiden Gebiete. Dieses Gebiet heisse $G$ (in Abb. 1 ist der Rand von $G$ rot gezeichnet). Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Bahnkurve in ihrem weiteren Verlauf das Gebiet $G$ nicht verlassen kann und dass andererseits der Punkt $x(-1)$ nicht zu $G$ gehört. Dadurch werden wir nämlich auf einen Widerspruch geführt; denn nach der Voraussetzung B) muss die Bahn dem Punkt $x(0)$ und daher nach A) auch dem Punkt $x(-1)$ beliebig nahe kommen.

Die beiden Stücke der Bahnkurve, die in den Punkten $x(0)$ und $x(\tau)$ beginnen, bis zu ihren ersten Schnittpunkten mit dem Kreis $K_1$ bilden zusammen mit einem beliebigen der beiden durch diese Schnittpunkte bestimmten Bögen von $K_1$ und mit der Strecke $S$ eine weitere einfach geschlossene Kurve. Deren Inneres bezeichnen wir mit $g$ (in Abb. 1 schraffiert). Diese ganze Kurve, und daher auch ihr Inneres $g$, liegt in einer Entfernung $\leqq \frac{1}{4}$ von dem geradlinigen Teil $x(0)$, $x(1)$ der Bahn. Dies gilt nämlich für die Strecke $S$, da sie zu $K_0$ gehört, für den Bogen des Kreises $K_1$, da er den Radius $\frac{1}{4}$ hat, und für den Bogen $x(\tau)$, $x(\tau'+1)$ wegen (6) und (7). Daraus folgt, dass der Teil $x(-1)$, $x(0)$ der Bahn, der mit dem Rand von $g$ nur den Punkt $x(0)$ gemein hat, ganz ausserhalb $g$ liegt. Dasselbe gilt auch für den Bogen $x(\tau'-1)$, $x(\tau)$; denn nach Konstruktion von $x(\tau)$ hat er mit dem Rand von $g$ nur den Punkt $x(\tau)$ gemein, und der Punkt $x(\tau'-1)$ kann nicht zu $g$ gehören, da er in $K_{-1}$ liegt.

Da $x(\tau')$ der erste auf $x(1)$ folgende Punkt der Bahn ist, der zu $K_0$ gehört, hat der Bogen $x(1)$, $x(\tau'-1)$ von $K_0$, also auch von der in $K_0$ enthaltenen Strecke $S$ einen positiven Minimalabstand. Wir betrachten nun einen beliebigen in $g$ gelegenen Punkt $y$, dessen Abstand von $S$ kleiner als dieser Minimalabstand und auch kleiner als $\frac{1}{4}$ ist. Es soll zunächst gezeigt werden, dass $y$ auch zu $G$ gehört, woraus dann sofort folgt, dass $g$ und $G$ auf derselben Seite der zu den Begrenzungen beider Gebiete gehörigen Strecke $S$ liegen. Um dies einzusehen, lege man durch $y$ die Kurve $C$ konstanten Abstandes von $S$, bestehend aus zwei parallelen Geradenstücken und zwei Halbkreisen (Abb. 2), und betrachte den grössten den Punkt $y$ enthaltenden Teilbogen $B$ dieser Kurve, der bis auf die Endpunkte in $g$ liegt. Dieser Bogen kann nicht aus der ganzen Kurve $C$ bestehen, d. h. er hat zwei verschiedene Endpunkte; denn $C$ hat von $x(0)$ einen Maximalabstand $\leqq \frac{1}{2}$, und die in den Endpunkten von $S$ endigenden Bögen $x(-1)$, $x(0)$ und $x(\tau'-1)$, $x(\tau)$, die nach dem früher Festgestellten nicht zu $g$ gehören, werden daher von $C$ geschnitten, da sie im Kreis $K_{-1}$ beginnen, dessen Abstand von $x(0)$ grösser als $\frac{1}{2}$ ist. $B$ hat also zwei verschiedene Endpunkte. Von diesen kann höchstens einer auf $x(0)$, $x(1)$ liegen; denn dieser geradlinige Teil der Bahn hat nur einen Schnittpunkt mit $C$. Mit $K_1$ hat $C$ keinen Schnittpunkt. Folglich liegt wenigstens ein Endpunkt von $B$ auf $x(\tau)$, $x(\tau'+1)$. Dieser Bogen liegt aber nach Definition von $G$ innerhalb $G$. Daraus folgt nun, dass der ganze Bogen $B$ und damit auch der Punkt $y$ in $G$ liegt. $B$ ist nämlich [abgesehen von höchstens einem Endpunkt auf $x(0)$, $x(1)$] zum Rand von $G$ punktfremd; denn der

Bogen $x(1)$, $x(\tau'-1)$ hat einen grösseren Abstand von $S$ als die Kurve $C$, und der Bogen $x(\tau'-1)$, $x(\tau)$ verläuft ausserhalb $g$. Damit ist in der Tat gezeigt, dass die Gebiete $g$ und $G$ auf derselben Seite ihrer gemeinsamen Begrenzung $S$ liegen.

Daraus folgt zunächst, dass der Bogen $x(-1)$, $x(0)$, insbesondere also der Punkt $x(-1)$, wie behauptet, ausserhalb $G$ liegt; sonst müsste nämlich $x(-1)$, $x(0)$ auch Punkte von $g$ enthalten, was nicht der Fall ist.

Andererseits ergibt sich nun die Behauptung, dass die Bahn $x(t)$ das Gebiet $G$ für $t \geqq \tau'+1$ nicht mehr verlassen kann. $G$ könnte nämlich nur durch die in $K_0$ gelegene Strecke $S$ verlassen werden. Nun kann die Kurve nach $K_0$ nur gelangen, wenn sie von $K_{-1}$ herkommt, ohne $K_1$ zu treffen. Dies ist jedoch unmöglich, da $K_{-1}$ ausserhalb $g$ liegt und die Kurve von $G$ aus nur durch $K_1$ in $g$ eindringen kann. Damit ist der Beweis zuende geführt.

---

6. Bei einer fastperiodischen Bewegung $x(t)$ ist offenbar die Voraussetzung b) von 2. erfüllt. Aus dem dort ausgesprochenen Satz ergibt sich also, dass eine ebene fastperiodische Bewegung, die der Voraussetzung a) genügt, notwendig periodisch ist. Es liegt hier die Frage nahe, ob man ohne die Voraussetzung a) noch behaupten kann, dass die Bahnkurve einer fastperiodischen Bewegung stets einen Doppelpunkt besitzt. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt ein Beispiel einer doppelpunktfreien fastperiodischen Bewegung in der Ebene, das uns von B. Jessen mitgeteilt worden ist und das wir im folgenden mit seiner Erlaubnis wiedergeben.

Den Ausgangspunkt für die Konstruktion bildet der folgende Hilfssatz: Es sei $x_a(t)$ eine periodische Bewegung der Periode $4a$, die in der Halbperiode $-a \leqq t \leqq a$ ein doppelpunktfreies offenes Polygon monoton durchläuft und in der zweiten Halbperiode auf demselben Wege derart zurückkehrt, dass

$$x_a(t) = x_a(2a-t) \tag{8}$$

für $a \leqq t \leqq 3a$, also wegen der Periodizität für alle $t$ gilt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Bewegung $x_{3a}(t)$ der Periode $12a$ mit den folgenden Eigenschaften:

I. In der Halbperiode $-3a \leqq t \leqq 3a$ durchläuft $x_{3a}(t)$ monoton ein offenes doppelpunktfreies Polygon.

II. Es ist

$$x_{3a}(t) = x_{3a}(6a-t) \tag{9}$$

für $3a \leqq t \leqq 9a$, also für alle $t$.

III. Für $-a \leqq t \leqq a$ stimmen die Bewegungen $x_a(t)$ und $x_{3a}(t)$ überein:

$$x_a(t) = x_{3a}(t) \quad \text{für} \quad -a \leqq t \leqq a. \tag{10}$$

IV. Für alle $t$ gilt

$$\varrho[x_a(t),\ x_{3a}(t)] \leqq \varepsilon. \tag{11}$$

Um dies zu beweisen, braucht man $x_{3a}(t)$ nur für die Halbperiode $-3a \leqq t \leqq 3a$ so zu konstruieren, dass die Bedingungen I, III und IV in diesem Intervall erfüllt sind, und es dann für die zweite Halbperiode durch (9) zu definieren. Alsdann ist nämlich (11) von selbst für alle $t$ erfüllt; denn aus (8) und der Periodizität von $x_a(t)$ folgt auch für $x_a(t)$

$$x_a(t) = x_a(6a-t).$$

Um $x_{3a}(t)$ für $-3a \leqq t \leqq 3a$ zu konstruieren, setze man an die Endpunkte $-a$ und $a$ des von $x_a(t)$ beschriebenen Polygons je ein weiteres offenes Polygon $-3a, -a$ bzw. $a, 3a$ derart an, dass insgesamt ein offenes doppelpunktfreies Polygon $-3a, -a, a, 3a$ entsteht und dass die beiden zugefügten Polygone in genügender (durch $\varepsilon$ bestimmter)

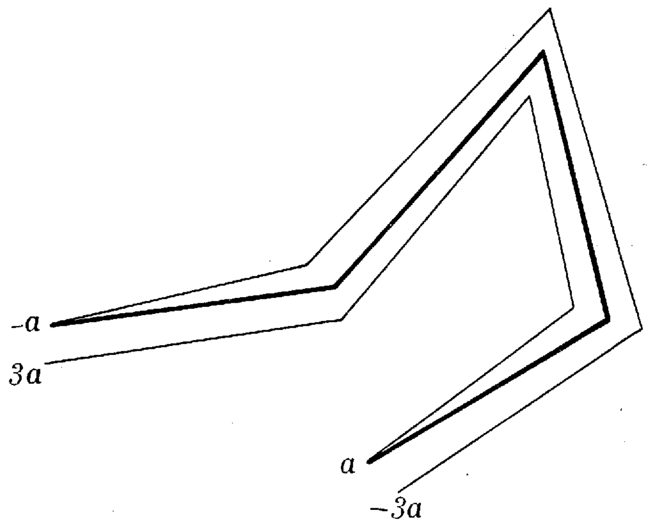


Abb. 3.

Nähe des ursprünglichen verlaufen (Abb. 3). Dann ist es, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht, möglich, das Polygon $-3a, 3a$ von $x_{3a}(t)$ im Intervall $-3a \leqq t \leqq 3a$ so durchlaufen zu lassen, dass die Bedingungen (10) und (11) erfüllt sind.

Man gehe nun von einer beliebigen Bewegung $x_1(t)$ der Periode 4 aus, die den im Hilfssatz genannten Voraussetzungen für $a = 1$ genügt, und konstruiere auf Grund des Hilfssatzes zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ eine Bewegung $x_3(t)$ der Periode 12, von dieser ausgehend eine Bewegung $x_{3^2}(t)$ zu $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ und so fort, wenn $x_{3^n}(t)$ bereits definiert ist, eine Bewegung $x_{3^n+1}(t)$ zu $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$. Die so entstehende Folge periodischer Bewegungen ist gleichmässig konvergent; denn es ist ja nach (11)

$$\varrho\,[x_{3^n}(t),\ x_{3^n+1}(t)] \leqq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Die Grenzbewegung $x(t)$ ist also stetig und grenzperiodisch. Wegen (10) stimmt sie in einem beliebigen Intervall $-3^k \leqq t \leqq 3^k$ mit $x_{3^n}(t)$ für $n > k$ überein, und da $x_{3^n}(t)$ in $-3^n \leqq t \leqq 3^n$ doppelpunktfrei ist, gilt dasselbe von der Grenzbewegung $x(t)$.

Forelagt paa Mødet den 21. Februar 1936.
Færdig fra Trykkeriet den 24. Juni 1936.