Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII,** 6.

ÜBER FASTPERIODISCHE BEWEGUNGEN IN EBENEN BEREICHEN UND AUF FLÄCHEN

VON

W. FENCHEL UND B. JESSEN

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

§ 1. Einleitung.

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist ein Satz von H. Bohr[1] über fastperiodische Bewegungen auf einem Kreis. Es handelt sich dabei um eine Übertragung der folgenden einfachen Eigenschaft von periodischen Bewegungen auf fastperiodische.

Es sei $z = f(t)$ eine stetige Funktion der Periode p mit $|f(t)| = 1$. Wir schreiben $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, wobei das Argument $\varphi(t) = \arg f(t)$ stetig gewählt und etwa durch die Festsetzung $-\pi \leqq \varphi(0) < \pi$ normiert sei. Aus der Periodizität von $f(t)$ folgt, dass die Differenz $\varphi(t+p) - \varphi(t)$ für jedes t ein ganzes Vielfaches von 2π ist, das aus Stetigkeitsgründen von t unabhängig ist; bezeichnen wir es mit $n \cdot 2\pi$, so ist offenbar die Funktion $\psi(t) = \varphi(t) - \frac{n \cdot 2\pi}{p} t$ eine periodische Funktion der Periode p. Es gilt also für $\varphi(t)$ die Darstellung

$$\varphi(t) = \frac{n \cdot 2\pi}{p} t + \psi(t).$$

Die Konstante $\frac{n \cdot 2\pi}{p}$ nennen wir die Säkularkonstante von $f(t)$.

Eine stetige Funktion $z = f(t)$ heisst bekanntlich fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine »relativ dichte« Menge von Verschiebungszahlen gibt, d. h. Zahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$, sodass für alle t

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leqq \varepsilon$$

[1] Bohr [1], [2]; vgl. auch Wintner [1], [2].

ist. Hierbei wird eine Zahlenmenge relativ dicht genannt, wenn es eine Zahl $l > 0$ derart gibt, dass jedes Intervall der Länge l wenigstens eine Zahl der Menge enthält.

Der Bohrsche Satz besagt nun, dass auch bei einer fastperiodischen Funktion $z = f(t)$ mit $|f(t)| = 1$ ein dem obigen ähnlicher Sachverhalt besteht. Wir schreiben $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, wobei $\varphi(t) = \arg f(t)$ wie oben festgelegt ist. Dann gilt

$$\varphi(t) = ct + \psi(t),$$

wo c eine Konstante, die Säkularkonstante der Funktion, und $\psi(t)$ fastperiodisch ist. Aus der Beschränktheit von $\psi(t)$ ergibt sich für c die Darstellung

$$c = \lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Der einfache Beweis dieses Satzes beruht auf der folgenden Bemerkung: Es sei $\tau = \tau(\varepsilon)$ eine zu einem positiven $\varepsilon < 2$ gehörige Verschiebungszahl von $f(t)$, also

$$|f(t+\tau) - f(t)| = |e^{i\varphi(t+\tau)} - e^{i\varphi(t)}| \leqq \varepsilon < 2$$

für alle t. Dann ist für jedes t die Differenz $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ bis auf einen Fehler von höchstens $2 \arcsin \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \frac{\pi}{2}$ ein ganzes Vielfaches von 2π, das wegen $\varepsilon \frac{\pi}{2} < \pi$ von t unabhängig sein muss. Bezeichnen wir es mit $n_\tau \cdot 2\pi$, so gilt also für alle t

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t) - n_\tau \cdot 2\pi| \leqq \varepsilon \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus lässt sich ohne Mühe die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{t}$ und dann mit dem so bestimmten c die Fastperiodizität von $\psi(t) = \varphi(t) - ct$ einsehen.

In der folgenden Untersuchung werden wir den Satz in etwas anderer Formulierung verwenden: Es sei $\varphi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ eine reelle stetige Funktion und $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl. Wir wollen die Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(t)$ modulo λ nennen, falls es zu jedem t eine ganze Zahl $n_{\tau t}$ derart gibt, dass die Ungleichung

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t) - n_{\tau t}\lambda| \leqq \varepsilon$$

besteht. (Diese Zahl $n_{\tau t}$ ist dann für $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ eindeutig bestimmt und überdies von t unabhängig). Wir nennen $\varphi(t)$ *fastperiodisch modulo* λ, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen modulo λ gibt.

Da die Fastperiodizität modulo λ der Funktion $\varphi(t)$ mit der gewöhnlichen Fastperiodizität der Funktion $f(t) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\varphi(t)}$ gleichbedeutend ist, ergibt sich der Bohrsche Satz in der folgenden Form: *Jede modulo* λ *fastperiodische Funktion ist von der Form*

$$\varphi(t) = ct + \psi(t),$$

wo c *konstant und* $\psi(t)$ *fastperiodisch ist.*

Wir betrachten nun eine fastperiodische Funktion $z = f(t)$, von der wir annehmen, dass sie gewissen Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nicht beliebig nahe kommt, d. h. es sollen für alle t und $\mu = 1, 2, \ldots, m$ die Ungleichungen

$$|f(t) - a_\mu| \geqq k > 0$$

bestehen. Schreibt man für jedes $\mu = 1, 2, \ldots, m$

$$f(t) - a_\mu = |f(t) - a_\mu| \, e^{i\varphi_\mu(t)},$$

so ist jeder der beiden Faktoren auf der rechten Seite fastperiodisch, insbesondere also nach dem Bohrschen Satz

$$\varphi_\mu(t) = c_\mu t + \psi_\mu(t).$$

Bohr hat die Frage gestellt, welche Systeme von Säkularkonstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ hier auftreten können. Für periodische Bewegungen lässt sich leicht einsehen, dass alle und nur die Wertsysteme $c_1, c_2, \ldots, c_m$ vorkommen, bei denen die Verhältnisse zwischen je zwei c_μ rational sind. Der eine von uns[1] hat nun kürzlich bewiesen, dass dies auch allgemein für fastperiodische Bewegungen gilt, m. a. W. dass die Menge der bei fastperiodischen Bewegungen auftretenden Systeme von Säkularkonstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ nicht umfassender ist als die Menge der schon bei periodischen Bewegungen auftretenden.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass dem ein allgemeinerer Tatbestand zugrunde liegt.

Es sei G ein, etwa von endlich vielen Kreisen begrenztes, ebenes Gebiet. Zwei stetige Bewegungen $z = f(t)$ und $z = g(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ in G werden homotop genannt, wenn es möglich ist, sie gleichmässig stetig in G in einander überzuführen, d. h. wenn es eine Schar $z = h_\theta(t)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, von stetigen Bewegungen in G gibt, derart dass

$$h_0(t) = f(t), \quad h_1(t) = g(t)$$

$$|h_{\theta_1}(t) - h_{\theta_2}(t)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |\theta_1 - \theta_2| \leqq \delta = \delta(\varepsilon).$$

Es gilt dann: Jede fastperiodische Bewegung $z = f(t)$ in G ist einer periodischen Bewegung $z = g(t)$ in G homotop.

Hierin ist, wie unmittelbar zu sehen, der erwähnte Satz über die Säkularkonstanten enthalten. Wählt man nämlich

[1] Jessen [1].

für G das von den Kreisen $|z-a_\mu| = k$ und einem genügend grossen Kreis $|z| = K$ begrenzte Gebiet, so ist klar, dass zwei in G homotope fastperiodische Bewegungen $z = f(t)$ und $z = g(t)$ dieselben Säkularkonstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ besitzen, da für jedes μ die Differenz der Argumente $\arg\left(f(t)-a_\mu\right)$ und $\arg\left(g(t)-a_\mu\right)$ für alle t beschränkt ist.

Es erwies sich zunächst, dass der Beweis für den Satz über die Säkularkonstanten zu einem Beweis des zuletztgenannten Satzes ausgebaut werden konnte. Hierbei wurde aber der tiefliegende Approximationssatz für fastperiodische Funktionen herangezogen. Bei dem im folgenden dargestellten Beweis gelang es auf Grund einer Anregung von J. Nielsen mit den elementarsten Eigenschaften der fastperiodischen Funktionen auszukommen.

Wir gehen zur universellen Überlagerungsfläche Φ des Gebietes G über und führen in dieser in bekannter Weise eine nichteuklidische Metrik ein. Der fastperiodischen Bewegung in G entspricht dann eine »modulo einer Gruppe (der Fundamentalgruppe von G) fastperiodische« Bewegung in Φ. Von dieser wird dann in sehr einfacher Weise gezeigt, dass sie in beschränkter nichteuklidischer Entfernung von einer gleichförmigen Bewegung auf einer nichteuklidischen Geraden in Φ verläuft, und zwar einer Geraden, der eine geschlossene Kurve in G entspricht. Indem man wieder zum Gebiet G übergeht, erhält man mühelos die Behauptung.

Diese Schlussweise lässt sich nun nicht nur für ebene Gebiete, sondern wörtlich ebenso für eine umfassende Klasse von offenen und geschlossenen Flächen durchführen, und zwar für alle diejenigen Flächen, auf denen sich eine (in einem später zu präzisierenden Sinne) reguläre Metrik konstanter negativer Krümmung einführen lässt. Dazu gehören neben den ebenen Gebieten endlichen Zusammenhangs u. a. sämtliche geschlossenen Flächen mit folgenden Ausnahmen: Kugel, projektive Ebene, zweiseitige und einseitige Ringfläche.

Nimmt man diese vier Flächentypen aus, so gilt also folgender Satz: Jede fastperiodische Bewegung auf einer geschlossenen Fläche ist einer periodischen Bewegung homotop, d. h. sie lässt sich auf der Fläche gleichmässig stetig in eine periodische Bewegung deformieren. Dass die Ausnahmen nicht durch die Beweismethode bedingt sind, zeigt das Beispiel der Ringfläche, auf der es fastperiodische Bewegungen gibt, die keiner periodischen Bewegung homotop sind.

§ 2. Vorbemerkungen über diskontinuierliche Bewegungsgruppen in der hyperbolischen Ebene.

Es sei E der Einheitskreis der Ebene und Φ sein Inneres. Wir fassen Φ in der üblichen Weise als nichteuklidische Ebene auf, indem wir darin die Poincarésche Massbestimmung einführen. Den nichteuklidischen Abstand zweier Punkte bezeichnen wir mit $\varrho[P, Q]$. Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\varrho[P, Q]+\varrho[Q, R] \geqq \varrho[P, R].$$

Die geraden Linien dieser Metrik sind die zu E orthogonalen Kreisbögen. Die auf E gelegenen Endpunkte eines solchen Orthogonalkreisbogens sind als die unendlich fernen Punkte der betreffenden Geraden anzusehen. Es seien a eine nichteuklidische Gerade, U und V ihre unendlich fernen Punkte. Dann ist jeder U und V verbindende, in Φ gelegene Kreisbogen eine Abstandslinie von a, d. h. seine

Punkte haben konstante nichteuklidische Entfernung von a. Die auf a senkrechten (nichteuklidischen) Geraden stehen auch senkrecht auf den Abstandslinien von a und sind die kürzesten Verbindungen zwischen je zwei dieser Abstandslinien. Die kürzeste Verbindung zwischen je zwei Senkrechten zu a liegt auf a. Wir erwähnen noch: Sind α und β die Katheten und γ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$\operatorname{Cos} \gamma = \operatorname{Cos} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \beta.$$

Unter einer nichteuklidischen Bewegung verstehen wir wie üblich eine eineindeutige stetige Abbildung von Φ auf sich, die die Abstände ungeändert lässt. Die nichteuklidischen Bewegungen zerfallen bekanntlich in folgende Typen:

I. Bewegungen mit Erhaltung des Umlaufssinnes.

1) Drehungen. Es gibt genau einen Fixpunkt in Φ, und kein unendlich ferner Punkt bleibt fest.

2) Grenzdrehungen. Es gibt genau einen unendlich fernen Fixpunkt und keinen Fixpunkt in Φ.

3) Eigentliche Schiebungen. Es gibt genau zwei unendlich ferne Fixpunkte und keinen in Φ. Die die unendlich fernen Fixpunkte verbindende Gerade, die Achse der Schiebung, sowie jede ihrer Abstandslinien geht in sich über.

II. Bewegungen mit Wechsel des Umlaufssinnes.

1) Spiegelungen. Eine Gerade bleibt punktweise fest.

2) Klappschiebungen. Es gibt genau zwei unendlich ferne Fixpunkte, deren Verbindungsgerade a, die Achse, in sich übergeht. Eine Klappschiebung setzt sich aus einer eigentlichen Schiebung mit der Achse a und einer Spiegelung an a zusammen.

Im folgenden spielen nur diejenigen Bewegungen eine Rolle, bei denen der nichteuklidische Abstand eines Punktes von seinem Bildpunkt für alle Punkte von Φ eine positive untere Grenze besitzt. Es ist klar, dass Drehungen und Spiegelungen diese Eigenschaft nicht zukommt, da bei ihnen wenigstens ein Punkt von Φ festbleibt. Aber auch die Grenzdrehungen sind ausgeschlossen, da es bei ihnen Punkte gibt, deren Entfernung vom Bildpunkt beliebig klein ist. Es bleiben also nur die eigentlichen Schiebungen und Klappschiebungen, die wir der Kürze wegen im allgemeinen gemeinsam als Schiebungen bezeichnen. Bei einer Schiebung erreicht der Abstand von Punkt zu Bildpunkt sein Minimum $\lambda > 0$ für die Punkte der Achse. Wir bezeichnen λ als Verschiebungslänge.

Zwei Schiebungen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn sie dieselbe Achse, also dieselben unendlich fernen Fixpunkte haben.

Dass zwei Schiebungen γ_1 und γ_2 derselben Achse a vertauschbar sind, liegt auf der Hand. Versehen wir nämlich a mit einem Durchlaufungssinn und zählen die Verschiebungslängen λ_1 und λ_2 von γ_1 und γ_2 positiv oder negativ, je nachdem die Schiebung längs a in diesem oder dem entgegengesetzten Sinn erfolgt, so ist sowohl $\gamma_1\gamma_2$ als auch $\gamma_2\gamma_1$ eine Schiebung längs a mit der Verschiebungslänge $\lambda_1+\lambda_2$, und zwar eine eigentliche Schiebung, wenn γ_1 und γ_2 beide eigentliche oder beide Klappschiebungen sind, sonst eine Klappschiebung.

Es seien nun umgekehrt γ_1 und γ_2 vertauschbar, also

$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1. \tag{2, 1}$$

Ferner sei a die Achse von γ_1 und a' die aus ihr bei γ_2 hervorgehende Gerade. Dann ist nach (2, 1) wegen $\gamma_2 a = a'$

$$\gamma_1 a' = a';$$

d. h. nicht nur a sondern auch a' wird bei γ_1 in sich übergeführt. Nun kann aber bei einer Schiebung ausser der Achse a keine Gerade a' in sich übergehen; sonst wären nämlich entweder die unendlich fernen Punkte von a' Fixpunkte, was ausgeschlossen ist, oder a' würde mit Umkehrung des Durchlaufungssinnes auf sich abgebildet, und dann gäbe es auf a', also in Φ einen Fixpunkt. a' muss daher mit a identisch sein. Also ist $\gamma_2 a = a$; d. h. a ist auch Achse von γ_2.

Es sei nun Γ eine Gruppe von nichteuklidischen Bewegungen mit der Eigenschaft, dass der Abstand zweier äquivalenter Punkte stets grösser oder gleich einer positiven Konstante k ist. Hierbei werden zwei Punkte äquivalent genannt, wenn es eine zu Γ gehörige Bewegung gibt, die den einen in den anderen überführt. Eine solche Gruppe werde als stark diskontinuierlich[1] bezeichnet. Nach dem obigen ist klar, dass eine stark diskontinuierliche Gruppe abgesehen von der Identität, nur Schiebungen, und zwar nur solche mit Verschiebungslängen $\geqq k$ enthalten kann.

Ferner folgt: Ist Z eine (nicht nur aus der Identität bestehende) kommutative Untergruppe der stark diskontinuierlichen Gruppe Γ, so haben alle Elemente von Z die gleiche Achse, und Z ist eine unendliche zyklische Gruppe.

Die erste auf die Achse bezügliche Behauptung ergibt sich unmittelbar aus einer oben gemachten Bemerkung. Dass Z zyklisch ist, sieht man so: Die gemeinsame Achse a möge orientiert und die Verschiebungslängen der Ele-

[1] Es wird hier mehr verlangt als bei eigentlich diskontinuierlichen Gruppen; vgl. § 5.

mente von Z entsprechend mit Vorzeichen versehen werden. Wegen der Diskontinuitätseigenschaft von Γ können zwei verschiedene Elemente von Z nicht dieselbe Verschiebungslänge haben, und es gibt unter den Elementen von Z genau eins, ζ_0, mit minimaler positiver Verschiebungslänge λ_0. Ist nun $\lambda = n\lambda_0 + r$ (n ganz, $0 \leqq r < \lambda_0$) die Verschiebungslänge eines beliebigen anderen Elementes ζ von Z, so hat $\zeta \cdot \zeta_0^{-n}$ die nicht negative Verschiebungslänge $r < \lambda_0$. Folglich ist $r = 0$ und $\zeta \cdot \zeta_0^{-n}$ die Identität. Jedes Element von Z ist also ganzzahlige Potens von ζ_0.

§ 3. Fastperiodische Bewegungen modulo einer diskontinuierlichen Bewegungsgruppe.

$F(t)$ sei ein für $-\infty < t < \infty$ stetig von t abhängiger Punkt der nichteuklidischen Ebene Φ. Wir sprechen dann von einer Bewegung $F(t)$ in Φ. Unter einer zu ε gehörigen Verschiebungszahl von $F(t)$ wird man hier eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ verstehen, derart dass für alle t der nichteuklidische Abstand

$$\varrho[F(t+\tau),\ F(t)] \leqq \varepsilon$$

ist. $F(t)$ soll fastperiodisch heissen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von zu ε gehörigen Verschiebungszahlen gibt. Wir nehmen nun eine für das folgende grundlegende Erweiterung dieser Begriffsbildung vor.

Es sei eine stark diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ in der nichteuklidischen Ebene Φ gegeben. Eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ soll dann eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Bewegung $F(t)$ modulo Γ genannt werden, wenn es ein (von τ und eventuell von t abhängiges) Element $\gamma_{\tau t}$ aus Γ gibt, so dass für alle t

$$\varrho[F(t+\tau),\ \gamma_{\tau t} F(t)] \leqq \varepsilon$$

ist, wo $\gamma_{\tau t} F$ den aus F bei der Bewegung $\gamma_{\tau t}$ hervorgehenden Punkt bedeutet. Die Bewegung $F(t)$ heisse fastperiodisch modulo Γ, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ von $F(t)$ modulo Γ gibt.

Bevor wir zur näheren Untersuchung dieser Bewegungen übergehen, bemerken wir, dass für $\varepsilon < \frac{k}{2}$, wo k die in der Definition der Gruppe Γ vorkommende Konstante ist, das Gruppenelement $\gamma_{\tau t}$ durch ε, τ und t eindeutig bestimmt und überdies von t unabhängig ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so gäbe es ein t_0 und eine Folge $t_\nu \to t_0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, sowie entsprechende Gruppenelemente $\gamma_{\tau t_\nu}$, $\gamma_{\tau t_0}$, sodass

$$\gamma_{\tau t_\nu} \neq \gamma_{\tau t_0}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots$, also nach Definition von k

$$\varrho[\gamma_{\tau t_\nu} F(t),\ \gamma_{\tau t_0} F(t)] \geqq k \tag{3, 1}$$

für alle t und $\nu = 1, 2, \ldots$. Andererseits ist

$$\varrho[F(t_0 + \tau),\ \gamma_{\tau t_0} F(t_0)] \leqq \varepsilon < \frac{k}{2}, \tag{3, 2}$$

$$\varrho[F(t_\nu + \tau),\ \gamma_{\tau t_\nu} F(t_\nu)] \leqq \varepsilon < \frac{k}{2}. \tag{3, 3}$$

Aus (3, 1) und (3, 3) ergäbe sich aber nach der Dreiecksungleichung

$$\varrho[F(t_\nu + \tau),\ \gamma_{\tau t_0} F(t_\nu)] \geqq k - \varepsilon > \frac{k}{2}$$

und daraus für $\nu \to \infty$ wegen der Stetigkeit von F ein Widerspruch gegen (3, 2). Wir können also γ_τ statt $\gamma_{\tau t}$ schreiben und haben für $\varepsilon < \frac{k}{2}$ als Definitionsungleichung einer zu ε gehörigen Verschiebungszahl τ modulo Γ

$$\varrho\left[F(t+\tau),\ \gamma_\tau F(t)\right] \leqq \varepsilon. \tag{3, 4}$$

Unser nächstes Ziel ist der folgende Satz, aus dem sich mit Hilfe des in der Einleitung genannten Satzes von BOHR mühelos alle aufgestellten Behauptungen ergeben werden:

Eine modulo Γ fastperiodische Bewegung $F(t)$ ist stets fastperiodisch modulo einer zyklischen Untergruppe Z von Γ.

Der Beweis hierfür kann sehr einfach folgendermassen geführt werden: Wir nehmen $\varepsilon < \frac{k}{4}$ an, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, und betrachten zwei zu ε gehörige Verschiebungszahlen τ_1 und τ_2 modulo Γ. Wir haben also für alle t

$$\varrho\left[F(t+\tau_1),\ \gamma_{\tau_1} F(t)\right] \leqq \varepsilon < \frac{k}{4} \tag{3, 5}$$

$$\varrho\left[F(t+\tau_2),\ \gamma_{\tau_2} F(t)\right] \leqq \varepsilon < \frac{k}{4}. \tag{3, 6}$$

Aus (3, 5) folgt wegen der Bewegungsinvarianz des Abstandes

$$\varrho\left[\gamma_{\tau_2} F(t+\tau_1),\ \gamma_{\tau_2}\gamma_{\tau_1} F(t)\right] \leqq \varepsilon < \frac{k}{4}$$

und aus (3, 6), wenn $t+\tau_1$ statt t geschrieben wird,

$$\varrho\left[F(t+\tau_1+\tau_2),\ \gamma_{\tau_2} F(t+\tau_1)\right] \leqq \varepsilon < \frac{k}{4},$$

also nach der Dreiecksungleichung

$$\varrho\left[F(t+\tau_1+\tau_2),\ \gamma_{\tau_2}\gamma_{\tau_1} F(t)\right] \leqq 2\varepsilon < \frac{k}{2}.$$

Dies besagt, dass $\tau_1+\tau_2$ eine zu 2ε gehörige Verschiebungszahl modulo Γ und $\gamma_{\tau_2}\gamma_{\tau_1}$ das entsprechende Gruppenelement ist. Indem man die Rollen von τ_1 und τ_2 vertauscht, schliesst man ebenso, dass $\tau_2+\tau_1=\tau_1+\tau_2$ eine zu 2ε gehörige Verschiebungszahl modulo Γ ist, und zwar mit dem Gruppenelement $\gamma_{\tau_1}\gamma_{\tau_2}$. Nun ist wegen $2\varepsilon<\frac{k}{2}$, wie oben bemerkt, das zu $\tau_1+\tau_2$ gehörige Gruppenelement eindeutig bestimmt. Folglich ist

$$\gamma_{\tau_2}\gamma_{\tau_1}=\gamma_{\tau_1}\gamma_{\tau_2}.$$

Das heisst: Die den zu $\varepsilon<\frac{k}{4}$ gehörigen Verschiebungszahlen entsprechenden Gruppenelemente sind paarweise vertauschbar. Sie erzeugen also eine kommutative Untergruppe Z von Γ, und diese ist nach dem letzten Satz des vorigen Paragraphen zyklisch.

Es kann der Fall eintreten, dass die Gruppe Z nur aus der Identität besteht. Dann ist $F(t)$ fastperiodisch im gewöhnlichen Sinne, die Bewegung $F(t)$ verläuft ganz in einem beschränkten Teil der nichteuklidischen Ebene, und es ist möglich, $F(t)$ gleichmässig stetig in einen Punkt zu deformieren. Dieser Fall soll zunächst ausgeschlossen werden.

Z sei also eine unendliche zyklische Gruppe von Schiebungen. Es ist mühelos einzusehen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass Z nur eigentliche Schiebungen und keine Klappschiebungen enthält. Sonst betrachte man nämlich bei gegebenem $\varepsilon>0$ die zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Verschiebungszahlen τ und Gruppenelemente γ_τ. Offenbar sind 2τ und γ_τ^2 Verschiebungszahlen und Gruppenelemente zu ε, und mit den τ bilden auch die 2τ eine relativ dichte Menge. Z kann also durch die aus den Quadraten der Elemente von Z gebildete Gruppe ersetzt werden, und diese enthält keine Klappschiebungen.

Wir gehen nun dazu über, Folgerungen für den Verlauf einer modulo Γ fastperiodischen Bewegung $F(t)$ zu ziehen. Zu diesem Zweck führen wir in der nichteuklidischen Ebene Φ in folgender Weise ein Koordinatensystem ein: a sei die gemeinsame Achse der Elemente von Z. Auf a werde ein Punkt O und eine Orientierung gewählt und als Abszisse x eines Punktes P von a der in gewöhnlicher Weise mit Vorzeichen versehene nichteuklidische Abstand $\varrho[O, P]$ eingeführt. a zerlegt Φ in zwei Halbebenen, von denen die eine als positiv, die andere als negativ bezeichnet sei. Unter der Ordinate y eines Punktes P von Φ soll dann der senkrechte Abstand von P und a verstanden werden, und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem P in der positiven oder negativen Halbebene liegt. Die Abszisse x von P ist die Abszisse seiner senkrechten Projektion auf a.

Ist nun $F(t)$ eine fastperiodische Bewegung modulo Z und λ die kleinste positive Verschiebungslänge, die in Z vorkommt, so folgen aus (3, 4) für die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ von $F(t)$ die Ungleichungen

$$(3,7) \qquad |x(t+\tau)-x(t)-n_\tau\lambda| \leqq \varepsilon,$$

$$(3,8) \qquad |y(t+\tau)-y(t)| \leqq \varepsilon;$$

denn bei den Schiebungen von Z wird die Abszisse x nur um ein ganzzahliges Vielfaches $n_\tau\lambda$ von λ geändert, und die Ordinate bleibt ungeändert[1]. (3, 8) besagt, dass $y(t)$ eine gewöhnliche fastperiodische Funktion, insbesondere also beschränkt ist. Daraus kann man entnehmen, dass die Bewegung $F(t)$ zwischen zwei Abstandslinien von a verläuft.

[1] Vgl. den Beginn von § 2. Legt man durch die Punkte $F(t)$ und $\gamma_\tau F(t)$ die Senkrechten und die Abstandslinien zu a, so ergibt sich (3, 7) daraus, dass die Achse a die kürzeste Verbindung je zweier Senkrechten zu a ist, und (3, 8) daraus, dass die Senkrechten zu a die kürzesten Verbindungen zweier Abstandslinien von a sind.

(3, 7) besagt, dass $x(t)$ fastperiodisch modulo λ in dem in § 1 angegebenen Sinne ist. Nach dem dort genannten Satz von Bohr ist also

$$x(t) = ct + \psi(t),$$

wo c konstant und $\psi(t)$ fastperiodisch ist. Bezeichnet $G(t)$ den Punkt von a mit der Abszisse ct, so hat man in $G(t)$ eine (im nichteuklidischen Sinne) gleichförmige Bewegung auf a. Aus dem eben Gesagten kann man insbesondere entnehmen, dass

$$\operatorname{Cos} \varrho[F(t),\ G(t)] = \operatorname{Cos} \psi(t) \cdot \operatorname{Cos} y(t)$$

und daher auch $\varrho[F(t),\ G(t)]$ selbst fastperiodisch, insbesondere beschränkt ist. Betrachtet man ferner die Schar $H_\theta(t)$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ von Bewegungen, deren Koordinaten $ct + (1-\theta)\,\psi(t)$ und $(1-\theta)\,y(t)$ sind, so erhält man schliesslich:

In der nichteuklidischen Ebene gibt es zu jeder fastperiodischen Bewegung $F(t)$ modulo einer stark diskontinuierlichen Bewegungsgruppe Γ eine Gerade a und auf dieser eine gleichförmige Bewegung $G(t)$, sodass der Abstand $\varrho[F(t),\ G(t)]$ beschränkt, sogar fastperiodisch ist. Ferner gibt es eine Schar $H_\theta(t)$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ von (ebenfalls modulo Γ fastperiodischen) Bewegungen, derart dass

$$H_0(t) = F(t), \quad H_1(t) = G(t)$$

und bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\varrho[H_{\theta_1}(t),\ H_{\theta_2}(t)] \leqq \varepsilon$$

für $|\theta_2 - \theta_1| \leqq \delta = \delta(\varepsilon)$ gilt.

Die Gerade a ist hierbei Achse von Bewegungen aus Γ.

In dieser Formulierung gilt der Satz auch in dem oben ausgeschlossenen Fall, dass die zyklische Gruppe Z nur aus der Identität besteht. Man hat nur die Achse a beliebig und $G(t) = G$ konstant auf a zu wählen.

§ 4. Fastperiodische Bewegungen in Killingschen Raumformen.

Es sei Γ wieder eine stark diskontinuierliche Bewegungsgruppe der nichteuklidischen Ebene Φ. Wir betrachten Φ modulo Γ; d. h. wir fassen jede Klasse von bezüglich Γ äquivalenten Punkten aus Φ als einen Punkt einer neuen Mannigfaltigkeit Φ_Γ auf und übertragen die Metrik von Φ auf Φ_Γ in folgender Weise: Sind p und q zwei Punkte von Φ_Γ, also zwei Klassen äquivalenter Punkte von Φ, so soll unter dem Abstand $\varrho_\Gamma[p, q]$ das Minimum der nichteuklidischen Abstände eines Punktes der Klasse p von einem Punkt der Klasse q verstanden werden. Dass dieses Minimum existiert, ist sofort zu sehen. Sind nämlich P_0, $P_1, \ldots$ die Punkte der Klasse p und $Q_0, Q_1, \ldots$ die der Klasse q, so gibt es zu jedem P_μ ein Element γ_μ von Γ, das P_μ in P_0 überführt. Folglich ist

$$\varrho[P_\mu, Q_\nu] = \varrho[\gamma_\mu P_\mu, \gamma_\mu Q_\nu] = \varrho[P_0, \gamma_\mu Q_\nu],$$

und $\gamma_\mu Q_\nu$ ist wieder ein Q_ν. Folglich ist es hinreichend, das Minimum von $\varrho[P_0, Q_\nu]$ für $\nu = 0, 1, \ldots$ zu suchen. Dessen Existenz ergibt sich daraus, dass sich die Q_ν innerhalb Φ nicht häufen können. Zugleich folgt, dass es für genügend kleines $\varrho_\Gamma[p, q]$ auch n u r e i n Q_ν gibt, sodass

$$\varrho_\Gamma[p, q] = \varrho[P_0, Q_\nu]$$

wird. Da wegen der starken Diskontinuität von Γ der Abstand je zweier Q_ν mindestens k ist, können wir sogar behaupten, dass dies stets für $\varrho_\Gamma[p, q] < \frac{k}{2}$ der Fall ist.

Es sei p ein Punkt von Φ_Γ und P_0 ein beliebiger Punkt der zu p gehörigen Klasse von Punkten in Φ. Jedem Punkt q von Φ_Γ mit

$$\varrho_\Gamma[p, q] < \frac{k}{2} \tag{4, 1}$$

ordnen wir denjenigen nach dem eben Gesagten eindeutig bestimmten Punkt Q_0 von Φ zu, für den

$$\varrho_\Gamma[p, q] = \varrho[P_0, Q_0].$$

Auf diese Weise entsteht eine eineindeutige und entfernungstreue Abbildung des »Kreises« (4, 1) um p auf einen Kreis um P_0 in der nichteuklidischen Ebene Φ. Die Mannigfaltigkeit Φ_Γ ist also eine mit einer Metrik derart versehene (offene oder geschlossene) Fläche, dass es eine Zahl $r > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Jeder Kreis vom Radius r im Sinne der Metrik lässt sich umkehrbar eindeutig und entfernungstreu auf einen Kreis der nichteuklidischen Ebene abbilden.[1]

[1] Man kann sich die Entstehung der Fläche Φ_Γ durch Einführung eines Fundamentalbereichs der Gruppe Γ veranschaulichen. Darunter versteht man bekanntlich einen Bereich in Φ, der von jeder Klasse bezüglich Γ äquivalenter Punkte genau einen Punkt enthält. Es gibt stets einen Fundamentalbereich, der von endlich oder abzählbar vielen (nichteuklidischen) Strecken, Halbgeraden oder Geraden begrenzt wird. Die Gesamtheit dieser Randstücke zerfällt in Paare, so dass die Strecken (Halbgeraden, Geraden) eines Paares äquivalent, also durch Bewegungen aus Γ in einander überführbar sind. Heftet man nun je zwei äquivalente Randstücke des Bereichs zusammen (was natürlich Verzerrungen und eventuell sogar Selbstdurchdringungen des Bereichs erfordert), so erhält man ein »Modell« der oben abstrakt konstruierten Fläche Φ_Γ.

Φ ist die universelle Überlagerungsfläche von Φ_Γ, und Γ ist der Fundamentalgruppe von Φ_Γ isomorph.

Eine solche Mannigfaltigkeit Φ_Γ bezeichnen wir als hyperbolische Killingsche Raumform[1].

Ist $F(t)$ ein beliebiger stetiger Kurvenbogen in Φ, so entspricht ihm auf Φ_Γ wieder ein stetiger Bogen $f(t)$. Umgekehrt entspricht einer stetigen Kurve $f(t)$ auf Φ_Γ eine Klasse äquivalenter stetiger Kurven in Φ. Unter diesen Kurven kann man nun z. B. dadurch eine auszeichnen, dass man aus der $f(0)$ entsprechenden Klasse äquivalenter Punkte einen beliebigen als $F(0)$ wählt. Durch diese Normierung in Verbindung mit der Forderung der Stetigkeit ist dann die Bildkurve $F(t)$ von $f(t)$ eindeutig fixiert. Eine geschlossene Kurve auf Φ_Γ geht in einen Kurvenbogen über, der zwei äquivalente Punkte verbindet, und umgekehrt. Die Geraden in Φ entsprechen den geodätischen Linien auf Φ_Γ.

Wir betrachten nun eine im Sinne der eingeführten Metrik ϱ_Γ fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf Φ_Γ. Dieser entspricht nach Fixierung von $F(0)$ eine wohlbestimmte stetige Bewegung $F(t)$ in Φ. Ist τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(t)$, also

$$\varrho_\Gamma[f(t+\tau),\ f(t)] \leq \varepsilon,$$

so folgt nach Definition des Abstandes ϱ_Γ, dass es ein Gruppenelement $\gamma_{\tau t}$ gibt, so dass

$$\varrho[F(t+\tau),\ \gamma_{\tau t} F(t)] = \varrho_\Gamma[f(t+\tau),\ f(t)] \leq \varepsilon$$

ist. Das bedeutet aber, dass $F(t)$ fastperiodisch modulo Γ ist. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass jeder modulo Γ fastperiodischen Bewegung $F(t)$ in Φ eine fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf Φ_Γ entspricht. Indem wir nun die am

[1] Vgl. Hopf [1] § 1.

Schluss des vorigen Paragraphen zusammengefassten Resultate auf $F(t)$ anwenden, erhalten wir entsprechende Aussagen für die fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf Φ_Γ.

Wir bemerken zunächst: Ist a eine Achse von Elementen der Gruppe Γ, so entspricht a auf der Fläche Φ_Γ eine geschlossene geodätische Linie; denn a verbindet ja äquivalente Punkte. Daher geht die gleichförmige Bewegung $G(t)$ auf a in eine periodische gleichförmige Bewegung $g(t)$ auf dieser geschlossenen geodätischen Linie über. Ferner folgt für die der Schar $H_\theta(t)$ entsprechende Schar $h_\theta(t)$ auf Φ_Γ

$$h_0(t) = f(t), \quad h_1(t) = g(t)$$

$$\varrho_\Gamma\left[h_{\theta_1}(t),\ h_{\theta_2}(t)\right] \leqq \varepsilon$$

für $|\theta_1 - \theta_2| \leqq \delta = \delta(\varepsilon)$. Das heisst:

Jede fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf einer hyperbolischen Killingschen Raumform Φ_Γ ist einer periodischen Bewegung $g(t)$ auf Φ_Γ homotop, wobei die Bewegungen der überführenden Schar selbst fastperiodisch gewählt werden können.

Zu einer zweiten Formulierung des Satzes gelangt man, wenn man beachtet, dass die Verbindungsstrecke von $F(t)$ und $G(t)$ in Φ beschränkte Länge hat. Auf Φ_Γ übertragen besagt dies: $f(t)$ und $g(t)$ lassen sich durch einen auf Φ_Γ verlaufenden, stetig von t abhängigen Kurvenbogen beschränkter Länge verbinden.

Wir bemerken noch, dass sich die bisherigen Überlegungen fast wörtlich auf hyperbolische Killingsche Raumformen von n Dimensionen übertragen lassen. Man hat dazu nur zu beachten, dass auch jede kommutative Untergruppe einer stark diskontinuierlichen Bewegungsgruppe des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes zyklisch ist, was ebenso wie in § 2 daraus folgt, dass jedes von der Identität verschiedene Element einer solchen Gruppe genau zwei unendlich ferne Fixpunkte besitzt.

§ 5. Fastperiodische Bewegungen auf geschlossenen Flächen und in ebenen Bereichen.

Wir wollen nun diese Resultate einerseits auf geschlossene Flächen, andererseits auf ebene Gebiete spezialisieren. Dazu haben wir zunächst festzustellen, welche Typen geschlossener Flächen sich als hyperbolische Killingsche Raumformen auffassen lassen.

Es ist eine geläufige Tatsache, dass sich jeder topologische Flächentypus mit den unten zu nennenden vier Ausnahmen aus der nichteuklidischen Ebene Φ durch Reduktion modulo einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe Γ erhalten lässt, worunter eine Gruppe fixpunktfreier Bewegungen von Φ verstanden wird, bei der äquivalente Punkte niemals einen Häufungspunkt in Φ haben[1]. Bei einer geschlossenen Fläche Φ_Γ muss aber diese Gruppe Γ von selbst stark diskontinuierlich sein. Dies kann man etwa so einsehen[2]. In der am Anfang von § 4 angegebenen Weise wird auf Φ_Γ eine Metrik induziert, sodass jeder Punkt von Φ_Γ eine Umgebung (Kreis im Sinne der Metrik) besitzt, die auf einen Kreis in Φ umkehrbar eindeutig und entfernungstreu abbildbar ist. Ein solcher Kreis in Φ kann wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung keine zwei äquivalente Punkte enthalten. Es genügt also

[1] Einen Bericht über dieses »Clifford-Kleinsche Raumproblem« findet man bei HOPF [2]. Man vergleiche ferner KLEIN [1], HOPF [1], sowie für geschlossene Flächen GIESEKING [1] und NIELSEN [1].

[2] HOPF [1] S. 316.

zu zeigen: Es gibt eine positive Konstante r, sodass jeder Kreis vom Radius r auf Φ_Γ eineindeutig und entfernungstreu auf einen Kreis in Φ abgebildet werden kann. Angenommen, dies wäre falsch. Dann gäbe es auf Φ_Γ eine Folge $p_1, p_2, \ldots$ von Punkten, derart dass der Radius r_ν des grössten Kreises um p_ν mit der genannten Eigenschaft gegen Null konvergiert. Die p_ν hätten wegen der Geschlossenheit von Φ_Γ einen Häufungspunkt p'. Um diesen gäbe es einen Kreis der obigen Beschaffenheit; es sei $r' > 0$ dessen Radius. Dann müsste für alle p_ν, deren Entfernung von p' kleiner als $\frac{r'}{2}$ ist, $r_\nu > \frac{r}{2}$ sein, womit man zu einem Widerspruch gelangt ist.

Die erwähnten Ausnahmen sind erstens die zweiseitige und die einseitige Ringfläche, bei denen man von der euklidischen Ebene statt von Φ ausgehen muss, zweitens Kugel und projektive Ebene, auf denen sich eine elliptische, aber keine hyperbolische oder euklidische Metrik einführen lässt. Diese vier Flächen haben bzw. die Eulersche Charakteristik 0, 0, 2, 1, und alle übrigen geschlossenen Flächen haben negative Eulersche Charakteristik. Der Hauptsatz von § 4 gilt also insbesondere für alle geschlossenen Flächen mit negativer Charakteristik.

Nachträglich können wir uns noch sehr leicht von der speziellen Annahme einer nichteuklidischen Metrik befreien. Es sei nämlich $\sigma[p, q]$ ein beliebiger zweiter Abstandsbegriff auf der Fläche, vom dem nur verlangt werde, dass erstens $\sigma[p, q] \geqq 0$ und dann und nur dann $\sigma[p, q] = 0$ ist, falls p und q identisch sind, und dass zweitens $\sigma[p, q]$ stetig von p und q abhängt. Dann ist jede im Sinne dieser Metrik fastperiodische Bewegung auch fastperiodisch bezüglich der alten Metrik $\varrho_\Gamma[p, q]$, und zwei im Sinne der

Metrik $\varrho_\Gamma[p, q]$ homotope Kurven sind auch bezüglich $\sigma[p, q]$ homotop. Um dies einzusehen, hat man offenbar nur zu zeigen, dass der Abstand zweier Punkte im Sinne der einen Metrik gleichmässig klein ist, wenn ihr Abstand im Sinne der anderen klein ist, m. a. W. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ und ein $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass

$$\varrho_\Gamma[p, q] \leqq \varepsilon, \quad \text{falls } \sigma[p, q] \leqq \delta$$

und

$$\sigma[p, q] \leqq \varepsilon, \quad \text{falls } \varrho_\Gamma[p, q] \leqq \eta.$$

Dies folgt aber unmittelbar aus der Geschlossenheit der Fläche. Wäre nämlich die erste Behauptung falsch, so gäbe es eine gegen einen Punkt, etwa p, konvergierende Folge von Punktepaaren p_ν, q_ν mit $\sigma[p_\nu, q_\nu] \to 0$ und $\varrho_\Gamma[p_\nu, q_\nu] > \varepsilon$. Also wäre $\varrho_\Gamma[p, p] \geqq \varepsilon > 0$. Ebenso ergibt sich die zweite Behauptung. Wir haben daher:

Auf einer geschlossenen Fläche mit negativer Eulerscher Charakteristik sei eine beliebige Metrik eingeführt. Dann ist jede bezüglich dieser Metrik fastperiodische Bewegung auf der Fläche einer periodischen Bewegung homotop. Hierbei können die Bewegungen der überführenden Schar fastperiodisch gewählt werden.

Für eine gewöhnliche Fläche ohne Selbstdurchdringungen im Raume kann man z. B. als Abstand zweier Flächenpunkte ihren euklidischen Abstand wählen.

Wir betrachten nun ein ebenes Gebiet von endlichem Zusammenhang > 1, das wir uns der Einfachheit halber von endlich vielen Kreisen begrenzt denken. Es ist unschwer einzusehen, dass ein solches Gebiet als hyperbolische Killingsche Raumform aufgefasst werden kann, sodass die früheren Resultate anwendbar sind. Der in der Einleitung genannte Satz, dass jede (im gewöhnlichen Sinne) fastperiodische Bewegung in einem solchen Gebiet einer periodischen Bewegung homotop ist, lässt sich aber auch, wie jetzt gezeigt werden soll, unmittelbar aus dem vorstehenden Satz über geschlossene Flächen entnehmen.

Zunächst bemerken wir, dass wir das Gebiet als mindestens dreifach zusammenhängend annehmen können. Denn bei einem zweifach zusammenhängenden Gebiet haben wir es mit einer fastperiodischen Funktion $f(t)$ zu tun, für die bei einem passenden a

$$|f(t)-a| \geqq k > 0$$

gilt. Nach dem BOHRschen Satz ist also

$$f(t)-a = |f(t)-a| \, e^{i(ct+\psi(t))} = e^{ict} |f(t)-a| \, e^{i\psi(t)},$$

wo $\psi(t)$ fastperiodisch und c konstant ist. Die Schar

$$h_\theta(t) = e^{ict} \left(|f(t)-a| \, e^{i\psi(t)}\right)^{1-\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

führt $f(t)$ offenbar gleichmässig stetig in die periodische Bewegung e^{ict} über und verbleibt im Gebiet, wenn dieses in der Form $0 < k \leqq |z-a| \leqq K$ mit $k < 1 < K$ angenommen wird, was ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist.

Es sei also G ein mindestens dreifach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene, das von endlich vielen Kreisen begrenzt ist, und $f(t)$ eine fastperiodische Bewegung in G. Wir errichten über G als Grundfläche einen geraden Zylinder der Höhe 1. Dieser Zylinder ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht $p > 1$, hat also negative Eulersche Charakteristik $2-2p$. Als Abstand auf dieser Fläche wählen wir den räumlichen euklidischen Abstand, der für die Punkte von G mit dem ebenen Abstand übereinstimmt. Dann ist $f(t)$ auch auf der Fläche fastperiodisch, also nach dem Obigen einer periodischen Bewegung auf der Fläche homotop. Projizieren wir nun die ganze Fläche senkrecht auf G zurück, so geht diese periodische Bewegung in eine periodische Bewegung $g(t)$ in G über, und $f(t)$ ist $g(t)$ homotop in G; denn bei der Projektion können die Abstände höchstens verkleinert werden.

§ 6. Die Ausnahmefälle.

In der euklidischen x, y-Ebene E betrachten wir die Translationsgruppe Γ

$$x' = x + m, \quad y' = y + n,$$

wo m und n ganze Zahlen sind. Diese Gruppe ist stark diskontinuierlich, da ja der Abstand äquivalenter Punkte mindestens 1 ist. Die euklidische Ebene modulo Γ ist eine Ringfläche E_Γ.

Es ist leicht zu sehen, dass jede periodische Bewegung auf E_Γ einer gleichförmigen Bewegung auf einer geschlossenen geodätische Linie homotop ist. Einer solchen gleichförmigen Bewegung auf E_Γ entsprechen in E gleichförmige Bewegungen auf Geraden mit rationalem Richtungstangens, da diese Geraden äquivalente Punkte, also Punkte mit ganzzahligen Koordinatendifferenzen verbinden müssen.

Wir betrachten nun die gleichförmige Bewegung

$$x(t) = t, \quad y(t) = \mu t$$

in E, wo μ eine irrationale Konstante ist. Diese Bewegung ist fastperiodisch modulo Γ; denn die Koordinaten sind sogar periodisch modulo Γ. Auf E_Γ entspricht ihr also eine fastperiodische Bewegung (und zwar eine gleichförmige

Bewegung auf einer offenen geodätischen Linie). Wäre nun diese Bewegung auf E_T einer periodischen homotop, so müsste die Gerade $y = \mu x$ beschränkten Abstand von einer Geraden mit rationalem Richtungstangens haben, was nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, dass der Hauptsatz von § 5 für die Torusfläche nicht gilt.

Ganz ähnlich schliesst man bei der einseitigen Ringfläche. Man hat dann nur von der Gruppe

$$x' = x + m, \quad y' = (-1)^m y + n \qquad (m, n \text{ ganz})$$

auszugehen.

Man kann ohne Mühe die plausible Behauptung beweisen, dass sich jede fastperiodische Bewegung auf der Kugelfläche gleichmässig stetig in einen Punkt überführen lässt. Ob sich aber die Bewegungen der überführenden Schar wie bei den Flächen negativer Charakteristik fastperiodisch wählen lassen, muss dahingestellt bleiben. Vermutlich trifft dies nicht zu.

Identifiziert man je zwei diametrale Punkte der Kugel, so entsteht die projektive Ebene; als Abstand zweier Punkte der projektiven Ebene sei der Abstand der entsprechenden-den Paare diametraler Punkte gewählt. Jeder stetigen Bewegung $f(t)$ in der projektiven Ebene entspricht daher nach Fixierung des Bildpunktes $F(0)$ von $f(0)$ eine eindeutig bestimmte stetige Bewegung $F(t)$ auf der Kugel. Ist τ eine zu einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gehörige Verschiebungszahl von $f(t)$, so ist 2τ eine zu 2ε gehörige Verschiebungszahl von $F(t)$; hieraus entnimmt man, dass $F(t)$ fastperiodisch ist, wenn $f(t)$ fastperiodisch ist; umgekehrt ist natürlich auch $f(t)$ fastperiodisch, wenn $F(t)$ fastperiodisch ist. Daher lässt sich auch jede fastperiodische Bewegung in der projektiven Ebene gleichmässig stetig in einen Punkt überführen.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

H. Bohr: [1] Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. [Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. **10** Nr. 10, 5—11 (1930).]

— [2] Über fastperiodische ebene Bewegungen. [Comment. math. helv. 4, 51—64 (1932).]

H. Gieseking: [1] Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen. [Diss. Münster 1912.]

H. Hopf: [1] Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. [Math. Ann. **95**, 313—339 (1925).]

— [2] Differentialgeometrie und topologische Gestalt. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **41**, 209—229 (1932).

B. Jessen: [1] Über die Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion. [Erscheint in den Math. Ann.]

F. Klein: [1] Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. [J. Springer, Berlin 1928.] Kap. IX.

J. Nielsen: [1] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. [Acta math. **50**, 189—358 (1927).]

A. Wintner: [1] Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires fournies par l'approximation de Lagrange. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) **11**, 464—467 (1930).]

— [2] Über eine Anwendung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf das Levi-Civitasche Problem der mittleren Bewegung. [Ann. Mat. pura appl. (4) **10**, 277—282 (1932.)]

Færdig fra Trykkeriet den 31. Maj 1935.