Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser **XII,** 8.

ZUR FRAGE DER MESSBARKEIT DER ELEKTROMAGNETISCHEN FELDGRÖSSEN

VON

N. BOHR UND L. ROSENFELD

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
1933

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

§ 1. Einleitung.

Die Frage nach der im Wirkungsquantum begründeten Begrenzung der Messbarkeit elektromagnetischer Feldgrössen hat durch die Diskussion der noch ungelösten Schwierigkeiten der relativistischen Atommechanik ein besonderes Interesse gewonnen. Zwar versuchte HEISENBERG[1] durch Betrachtungen orientierenden Charakters eine ähnliche Verbindung zwischen der Begrenzung der Messbarkeit von Feldgrössen und der Quantentheorie der Felder nachzuweisen, wie den durch das Unbestimmtheitsprinzip ausgedrückten Zusammenhang zwischen der komplementären Begrenzung der Messbarkeit kinematischer und dynamischer Grössen und dem nichtrelativistischen Formalismus der Quantenmechanik. Jedoch kamen LANDAU und PEIERLS[2] im Laufe einer kritischen Untersuchung der Grundlagen der relativistischen Verallgemeinerung dieses Formalismus zu dem Schluss, dass die Messbarkeit von Feldgrössen weiteren Einschränkungen unterworfen wäre, die über die Voraussetzungen der Quantentheorie der Felder wesentlich hinausgehen, und daher dieser Theorie jede physikalische Grundlage entziehen würden.

In diesem Widerspruch könnte man zunächst ein ernstliches Dilemma erblicken. Einerseits dürfte nämlich die Quantentheorie der Felder eine konsequente korrespondenz-

[1] W. HEISENBERG, Die physik. Prinzipien der Quantentheorie, 1930, S. 33 ff.

[2] L. LANDAU und R. PEIERLS, Zs. f. Phys., **69**, 56, 1931.

mässige Umdeutung der klassischen elektromagnetischen Theorie anzusehen sein in ähnlichem Sinne, wie die Quantenmechanik eine der Existenz des Wirkungsquantums entsprechende Umgestaltung der klassischen Mechanik darstellt. Andererseits hat eben die Quantenelektrodynamik die Schwierigkeiten der harmonischen Verschmelzung von Feldtheorie und Atomtheorie, denen wir schon in der klassischen Elektronentheorie begegnen, wesentlich vergrössert. Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, dass die verschiedenen hier auftretenden Probleme sich weitgehend von einander trennen lassen, indem der quantenelektromagnetische Formalismus an sich von allen Vorstellungen über den atomaren Aufbau der Materie unabhängig ist. Dies erhellt schon daraus, dass in ihn als universelle Konstanten ausser der Lichtgeschwindigkeit nur das Wirkungsquantum eingeht; denn diese beiden Konstanten reichen offenbar nicht aus zur Festlegung irgendwelcher spezifischen raumzeitlichen Dimensionen. In der Quantentheorie des Atombaus wird jede solche Festlegung ja erst durch das Hinzutreten der elektrischen Elementarladung und der Ruhemassen der Elementarteilchen erreicht.

Eben die ungenügende Unterscheidung zwischen Feldtheorie und Atomtheorie bildet die Hauptursache für die Unstimmigkeiten der früheren Untersuchungen über die Messbarkeit von Feldgrössen, wo als Probekörper einzig elektrisch geladene Massenpunkte in Betracht gezogen wurden. Die der bisherigen Atommechanik zugrundegelegte korrespondenzmässige Verwertung der klassischen Elektronentheorie beruht nämlich vor allem auf der Kleinheit der Elementarladung gegenüber der Quadratwurzel des Produkts von Wirkungsquantum und Lichtgeschwindigkeit, wodurch es möglich wird, alle Strahlungsreak-

tionen als klein gegenüber den auf die Teilchen ausgeübten ponderomotorischen Kräften zu behandeln. Bei Messungen von Feldgrössen erweist es sich aber als wesentlich, über die Ladung der Probekörper in einem Umfang verfügen zu können, der mit letzterer Voraussetzung in Gegensatz käme, wenn man diese Körper als Punktladungen betrachten würde. Diese Schwierigkeiten verschwinden aber, wie wir sehen werden, wenn man Probekörper benutzt, deren linearen Abmessungen genügend gross gegenüber den Atomdimensionen gewählt werden, um ihre Ladungsdichte als näherungsweise konstant über den ganzen Körper betrachten zu können.

In dieser Verbindung ist es auch von wesentlicher Bedeutung, dass die übliche Beschreibung eines elektromagnetischen Feldes durch die Feldkomponenten in jedem Raumzeitpunkt, welche die klassische Feldtheorie charakterisiert, und nach welcher das Feld mittels Punktladungen im Sinne der Elektronentheorie ausmessbar wäre, eine Idealisation ist, der in der Quantentheorie nur eine beschränkte Anwendbarkeit zukommt. Dieser Umstand findet seinen sinngemässen Ausdruck gerade im quantenelektromagnetischen Formalismus, in welchem die Feldgrössen nicht mehr durch eigentliche Punktfunktionen dargestellt werden, sondern durch Funktionen von Raumzeitgebieten, die formal den Mittelwerten der idealisierten Feldkomponenten über die betreffenden Gebiete entsprechen. Nur für die Messbarkeit solcher Gebietsfunktionen lassen sich an Hand des Formalismus eindeutige Aussagen ableiten, und unsere Aufgabe wird also darin bestehen, zu untersuchen, inwieweit die in dieser Weise definierten, komplementären Begrenzungen der Messbarkeit von Feldgrössen mit den physikalischen Messungsmöglichkeiten übereinstimmen.

Soweit wir von allen in der atomistischen Struktur der Messinstrumente beruhenden Einschränkungen absehen können, lässt sich auch wirklich in dieser Hinsicht eine völlige Übereinstimmung nachweisen. Ausser einer eingehenden Untersuchung der Konstruktion und Handhabung der Probekörper verlangt aber dieser Nachweis noch die Berücksichtigung von gewissen, bei der Diskussion der Messbarkeitsfrage zutagetretenden, neuen Zügen der komplementären Beschreibungsweise, die nicht in der üblichen, der unrelativistischen Quantenmechanik entsprechenden Fassung des Unbestimmtheitsprinzips einbezogen sind. Nicht nur bedeutet es eine wesentliche Komplikation des Problems der Feldmessungen, dass wir beim Vergleich von Feldmittelwerten über verschiedene Raumzeitgebiete im allgemeinen nicht in eindeutiger Weise von einer zeitlichen Reihenfolge der Messvorgänge sprechen können, sondern schon die Deutung der einzelnen Messergebnisse erfordert bei Feldmessungen eine noch grössere Vorsicht als bei den gewöhnlichen quantenmechanischen Messproblemen.

Das Merkmal letzterer Probleme ist die Möglichkeit, jedem einzelnen Messergebnis eine im Sinne der klassischen Mechanik wohldefinierte Deutung beizulegen, indem der durch das Wirkungsquantum bedingten, prinzipiell unkontrollierbaren Wechselwirkung zwischen Messinstrument und Messobjekt völlig Rechnung getragen wird durch den Einfluss jedes Messvorgangs auf die durch nachfolgende Messungen zu prüfenden statistischen Erwartungen. Bei Messungen von Feldgrössen hingegen ist zwar jedes Messergebnis auf Grund des klassischen Feldbegriffs wohldefiniert, aber die begrenzte Anwendbarkeit der klassischen Feldtheorie auf die Beschreibung der unvermeidlichen elektromagnetischen Feldwirkungen der Probekörper bei der Messung

bringt, wie wir sehen werden, mit sich, dass diese Feldwirkungen in gewissem Umfang das Messergebnis selber in unkompensierbarer Weise beeinflussen. Eine nähere Untersuchung des prinzipiell statistischen Charakters der Folgerungen des quantenelektromagnetischen Formalismus zeigt jedoch, dass diese Beeinflussung des Messobjekts durch den Messvorgang die Prüfbarkeit solcher Folgerungen in keiner Weise beeinträchtigt, sondern vielmehr als einen wesentlichen Zug der innigen Anpassung der Quantentheorie der Felder an das Messbarkeitsproblem anzusehen ist.

Bevor wir zur näheren Ausführung der hier angedeuteten Betrachtungen übergehen, möchten wir nochmals betonen, dass die grundsätzlichen Schwierigkeiten, die der konsequenten Verwertung der Feldtheorie in der Atomtheorie entgegenstehen, von der vorliegenden Untersuchung völlig unberührt bleiben. Für die Beurteilung des Zusammenhangs dieser Schwierigkeiten mit den wohlbekannten Paradoxien der Messprobleme der relativistischen Quantenmechanik dürfte eben die Berücksichtigung des atomistischen Aufbaus aller Messinstrumente wesentlich sein. Besonders käme hier auch die durch den endlichen Wert der Elementarladung im Vergleich zur Quadratwurzel des Produkts aus Lichtgeschwindigkeit und Wirkungsquantum bedingte Begrenzung der korrespondenzmässigen Atommechanik in Betracht.[1]

[1] Vgl. N. Bohr, Atomic Stability and Conservation Laws, Atti del Congresso di Fisica Nucleare, 1932. Anmerkung bei der Korrektur. In einer demnächst erscheinenden besonderen Veröffentlichung wird näher diskutiert, welche Folgerungen die neue Entdeckung des Auftretens von sogenannten »positiven Elektronen« unter besonderen Umständen, sowie die Erkenntnis des Zusammenhangs dieser Erscheinung mit der relativistischen Elektronentheorie von Dirac, für die in der zitierten Arbeit besprochenen Probleme mit sich bringt.

§ 2. Messbarkeit von Feldern nach der Quantentheorie.

Der quantenelektromagnetische Formalismus hat seinen Ausgangspunkt gefunden in der von Dirac entwickelten Quantentheorie der Strahlung, welche durch die Einführung einer mit den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen zusammenhängenden Nichtvertauschbarkeit kanonisch konjugierter Schwingungsamplituden eines Strahlungsfeldes charakterisiert ist. Auf Grund dieser Theorie wurden von Jordan und Pauli zunächst für ladungsfreie Felder Vertauschungsrelationen zwischen den elektromagnetischen Feldkomponenten aufgestellt, und der Formalismus wurde dann von Heisenberg und Pauli zu einem gewissen Abschluss gebracht, indem die Wechselwirkung zwischen Feld und materiellen Ladungsträgern in korrespondenzmässiger Weise behandelt wurde. Die konsequente Anwendung der Theorie auf Atomprobleme ist indessen wesentlich beeinträchtigt durch das Auftreten der wohlbekannten Paradoxien der unendlichen Selbstenergie der Elementarteilchen, welche auch nicht durch die von Dirac vorgeschlagene Modifikation der Darstellung des Formalismus beseitigt wurden[1]. In unserer Diskussion der Begrenzung der Messbarkeit von Feldgrössen spielen diese Schwierigkeiten jedoch keine Rolle, weil für diesen Zweck die atomistische Struktur der Materie nicht wesentlich in Frage kommt. Zwar verlangt die Messung der Felder die Benutzung materieller geladener Probekörper, aber ihre eindeutige Anwendung als Messinstrumente wird eben durch den Umfang bedingt, in dem wir sowohl ihre Beeinflussung durch die Felder, wie ihre Wirkungen als Feldquellen auf Grund der klassischen Elektrodynamik behandeln können.

Bei diesem Sachverhalt können wir uns auf die reine

[1] Vgl. L. Rosenfeld, Zs. f. Phys., **76**, 729, 1932.

Feldtheorie beschränken und also zur Untersuchung der Folgerungen des quantenelektromagnetischen Formalismus betreffend die Messbarkeit von Feldgrössen direkt von den Vertauschungsrelationen ladungsfreier Felder ausgehen. Unter Benutzung der üblichen Bezeichnung, $[p, q] = pq - qp$, haben wir sodann zwischen den Feldkomponenten in zwei Raumzeitpunkten (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) folgende typische Relationen, woraus die übrigen Vertauschungsrelationen durch zyklische Permutation hervorgehen[1]):

$$\left.\begin{aligned}
\left[\mathfrak{E}_x^{(1)}, \mathfrak{E}_x^{(2)}\right] &= \left[\mathfrak{H}_x^{(1)}, \mathfrak{H}_x^{(2)}\right] = \sqrt{-1}\,\hbar\left(A_{xx}^{(12)} - A_{xx}^{(21)}\right)\\
\left[\mathfrak{E}_x^{(1)}, \mathfrak{E}_y^{(2)}\right] &= \left[\mathfrak{H}_x^{(1)}, \mathfrak{H}_y^{(2)}\right] = \sqrt{-1}\,\hbar\left(A_{xy}^{(12)} - A_{xy}^{(21)}\right)\\
\left[\mathfrak{E}_x^{(1)}, \mathfrak{H}_x^{(2)}\right] &= 0\\
\left[\mathfrak{E}_x^{(1)}, \mathfrak{H}_y^{(2)}\right] &= -\left[\mathfrak{H}_x^{(1)}, \mathfrak{E}_y^{(2)}\right] = \sqrt{-1}\,\hbar\left(B_{xy}^{(12)} - B_{xy}^{(21)}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{E}_x^{(1)}, \mathfrak{E}_y^{(1)}, \mathfrak{E}_z^{(1)}, \mathfrak{H}_x^{(1)}, \mathfrak{H}_y^{(1)}, \mathfrak{H}_z^{(1)}$ die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten im Raumzeitpunkte (x_1, y_1, z_1, t_1), während zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
A_{xx}^{(12)} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\,\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}\\
A_{xy}^{(12)} &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2}\left\{\frac{1}{r}\,\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}\\
B_{xy}^{(12)} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1 \partial z_2}\left\{\frac{1}{r}\,\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

[1] Vgl. P. Jordan und W. Pauli, Zs. f. Phys., **47**, 151, 1928, sowie W. Heisenberg und W. Pauli, Zs. f. Phys. **56**, 33, 1929. Abgesehen von einem unwesentlichen Vorzeichenunterschied, der von einer Unstimmigkeit in der Wahl der Zeitrichtung bei der Fourierzerlegung der Feldstärken herrührt, stimmen die angeführten Formeln mit den in den zitierten Abhandlungen abgeleiteten inhaltlich überein. Insbesondere bedeutet die hier benutzte Schreibweise, wo alle Glieder als retardierte erscheinen, eine rein formale Änderung, die auf eine möglichst anschauliche Deutung der Messprobleme hinzielt.

gesetzt ist. Weiter bedeutet $\hbar$ die durch 2π dividierte Plancksche Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit und r den räumlichen Abstand der beiden Punkte. Schliesslich bezeichnet δ die von Dirac eingeführte symbolische Funktion, die bekanntlich durch die Eigenschaft, dass

$$\int_{t'}^{t''} \delta(t - t_0)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ wenn } t' < t_0 < t'' \\ 0 \text{ wenn } t_0 < t' \text{ oder } t_0 > t'' \end{cases} \tag{3}$$

charakterisiert ist, und die formal wie eine gewöhnliche Funktion differenziert wird.

Eben im Auftreten der durch (3) definierten δ-Funktion in den Vertauschungsrelationen (1) kommt die bereits erwähnte Tatsache zum Vorschein, dass die quantentheoretischen Feldgrössen nicht als eigentliche Punktfunktionen zu betrachten sind, sondern erst Raumzeitintegralen über die Feldkomponenten ein eindeutiger Sinn zukommt. Mit Rücksicht auf die einfachste Prüfungsmöglichkeit des Formalismus werden wir uns mit der Betrachtung von Mittelwerten der Feldkomponenten über einfach zusammenhängende Raumzeitgebiete begnügen, deren räumliche Ausdehnung innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls konstant bleibt. Indem wir das Volumen eines solchen Gebiets G mit V und das zugehörige Zeitintervall mit T bezeichnen, definieren wir also zum Beispiel den Mittelwert von $\mathfrak{E}_x$ durch die Formel

$$\overline{\mathfrak{E}}_x^{(G)} = \frac{1}{VT}\int_T dt \int_V \mathfrak{E}_x\, dv. \tag{4}$$

Für die so definierten Mittelwerte zweier Feldkomponenten über zwei gegebene Raumzeitgebiete I und II gelten Vertauschungsrelationen, die sich umittelbar aus (1) durch Integration über die beiden Gebiete und Division mit dem

Produkt ihrer vierdimensionalen Ausdehnungen ergeben. Die Werte der Klammersymbole $\left[\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}, \overline{\mathfrak{E}}_x^{(II)}\right], \ldots$ gehen also einfach aus (1) hervor, wenn die Grössen $A^{(12)}$, $B^{(12)}$ durch ihre Mittelwerte über die zwei Gebiete

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A}_{xx}^{(I,\,II)} &= -\frac{1}{V_I V_{II} T_I T_{II}} \int_{T_I} dt_1 \int_{T_{II}} dt_2 \int_{V_I} dv_1 \int_{V_{II}} dv_2 \\
&\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\,\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\} \\
\bar{A}_{xy}^{(I,\,II)} &= -\frac{1}{V_I V_{II} T_I T_{II}} \int_{T_I} dt_1 \int_{T_{II}} dt_2 \int_{V_I} dv_1 \int_{V_{II}} dv_2 \\
&\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2}\left\{\frac{1}{r}\,\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\} \\
\bar{B}_{xy}^{(I,\,II)} &= -\frac{1}{V_I V_{II} T_I T_{II}} \int_{T_I} dt_1 \int_{T_{II}} dt_2 \int_{V_I} dv_1 \int_{V_{II}} dv_2 \\
&\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial z_2}\left\{\frac{1}{r}\,\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ersetzt werden.

In ganz ähnlicher Weise, wie sich die dem Unbestimmtheitsprinzip zugrundeliegende Heisenbergsche Relation

$$\Delta p \Delta q \backsim \hbar \tag{6}$$

für zwei kanonisch konjugierte mechanische Grössen aus der allgemeinen quantenmechanischen Vertauschungsrelation

$$[q,\, p] = \sqrt{-1}\,\hbar \tag{7}$$

ableiten lässt, ergeben sich also für die Produkte der komplementären Unbestimmtheiten der betrachteten Feldmittelwerte folgende typische Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(II)} \backsim \hbar\left|\bar{A}_{xx}^{(I,\,II)} - \bar{A}_{xx}^{(II,\,I)}\right|, \quad \Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}\Delta\overline{\mathfrak{E}}_y^{(II)} \backsim \hbar\left|\bar{A}_{xy}^{(I,\,II)} - \bar{A}_{xy}^{(II,\,I)}\right| \\
&\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}\Delta\overline{\mathfrak{H}}_x^{(II)} = 0, \qquad\qquad \Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}\Delta\overline{\mathfrak{H}}_y^{(II)} \backsim \hbar\left|\bar{B}_{xy}^{(I,\,II)} - \bar{B}_{xy}^{(II,\,I)}\right|.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Einige für unser Problem wichtige Ergebnisse lassen sich unmittelbar aus den Ausdrücken (5) und (8) folgern. Vor allem sehen wir, dass gemäss der durch (3) ausgedrückten Eigenschaft der δ-Funktion die Grössen $\bar{A}^{(\mathrm{I,\,II})}$, $\bar{B}^{(\mathrm{I,\,II})}$ sich bei stetiger Verschiebung der Grenzen der Gebiete I und II stetig ändern, solange die Ausdehnungen dieser Gebiete, d. h. die Werte von V_{I}, T_{I}, V_{II}, T_{II} von Null verschieden bleiben. Insbesondere verschwinden die Differenzen $\bar{A}^{(\mathrm{I,\,II})}-\bar{A}^{(\mathrm{II,\,I})}$ und $\bar{B}^{(\mathrm{I,\,II})}-\bar{B}^{(\mathrm{II,\,I})}$ ohne Unstetigkeit, wenn die Grenzen der zwei Gebiete allmählich mit einander zusammenfallen. Hieraus folgt, dass die Mittelwerte aller Feldkomponenten über dasselbe Raumzeitgebiet unter einander vertauschbar sind, und somit unabhängig von einander genau messbar sein sollen. Diese Folgerung der Theorie, die über die Voraussetzung der unbeschränkten Messbarkeit jeder einzelnen Feldgrösse wesentlich hinausgeht, erscheint übrigens als ein Spezialfall zweier allgemeinerer Sätze, die aus den Symmetrieeigenschaften der Grössen $\bar{A}^{(\mathrm{I,\,II})}$ und $\bar{B}^{(\mathrm{I,\,II})}$ folgen. Aus der Tatsache, dass die Ausdrücke $A^{(12)}-A^{(21)}$ ihr Vorzeichen wechseln, wenn die Zeitpunkte t_1 und t_2 vertauscht werden, folgt nämlich, dass die Mittelwerte zweier gleichartiger (d. h. zweier elektrischer oder zweier magnetischer) Komponenten über zwei beliebige Raumgebiete immer vertauschbar sind, sobald die zugehörigen Zeitintervalle zusammenfallen. Weiter folgt aus der entsprechenden Antisymmetrie der Ausdrücke $B^{(12)}$ und $B^{(21)}$ bei Vertauschung der Raumpunkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2), dass die Mittelwerte zweier ungleichartiger Komponenten, wie $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$, über zwei beliebige Zeitintervalle vertauschbar sind, wenn die zugehörigen Raumgebiete zusammenfallen.

Diese Resultate könnten zunächst mit den aus der Heisenberg-Paulischen Darstellung des Formalismus abzuleitenden Vertauschungsrelationen zwischen Mittelwerten von Feldgrössen zu einem und demselben Zeitpunkt über endliche Raumgebiete, die im zitierten Buch von Heisenberg diskutiert sind, unvereinbar erscheinen. Während auch dort Mittelwerte gleichartiger Komponenten als vertauschbar angegeben werden, wird auf die Nichtvertauschbarkeit von ungleichartigen Komponenten über ein und dasselbe Raumgebiet geschlossen. Dieser Gegensatz löst sich aber einfach dadurch, dass es sich in der Heisenbergschen Behandlung um einen Grenzübergang handelt, bei dem zwei ursprünglich nicht zusammenfallende Raumzeitgebiete erst dann zur Deckung gebracht werden, nachdem ihre zeitlichen Ausdehnungen sich zu einem und demselben Zeitpunkt zusammengezogen haben. Mit Rücksicht auf die Symmetrie des durch (2) gegebenen Ausdruckes $B_{xy}^{(12)}$ in Bezug auf t_1 und t_2, sowie auf die durch (3) definierte Eigenschaft der δ-Funktion finden wir nämlich für zusammenfallende Zeitintervalle

$$\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{I,\,II})}-\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{II,\,I})}=\frac{2}{V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}}T^2}\cdot\frac{1}{c}\int_{V_{\mathrm{I}}}dv_1\int_{V_{\mathrm{II}}}dv_2\,\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{9}$$

wo $T_{\mathrm{I}}=T_{\mathrm{II}}=T$ gesetzt ist, und die doppelte Integration über alle Paare von Punkten je eines der betreffenden Raumgebiete zu erstrecken ist, deren Abstand r kleiner ist als cT. Wenn wir nun weiter die beiden Raumgebiete von selbem Volumen $V_{\mathrm{I}}=V_{\mathrm{II}}=V$ und von selber Gestalt, aber gegen einander in der z-Richtung verschoben annehmen, so bekommen wir im Grenzfall, wo cT als verschwindend klein in Vergleich mit den linearen Abmessungen der Raumgebiete betrachtet werden kann, für das in (9) auftretende Raumintegral durch partielle Integration den Ausdruck $\pm 2\pi c^2T^2F$, wo F das Areal der von der Projektion der

Schnittkurve der Begrenzungsflächen von V_{I} und V_{II} auf die xy-Ebene eingeschlossenen Fläche darstellt, und wo das Vorzeichen + bzw. — zu nehmen ist, je nachdem der Bereich II in der positiven bzw. negativen z-Richtung gegenüber dem Bereich I verschoben ist. Bei stetiger Durcheinanderschiebung der Bereiche ändert sich also die Differenz $\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} - \bar{B}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}$ unstetig um den Betrag $\frac{8\pi c F}{V^2}$, indem beide Ausdrücke $\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{I,II})}$ und $\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}$ ihr Vorzeichen wechseln. Im besprochenen Grenzfall weist daher die Vertauschungsrelation der instantanen Raummittelwerte von $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ eine wesentliche Zweideutigkeit auf, die für den erwähnten scheinbaren Widerspruch verantwortlich ist.

Der durch die früheren Untersuchungen der physikalischen Messungsmöglichkeiten vermeintlich erbrachte Nachweis einer komplementären Begrenzung der Messbarkeit ungleichartiger Feldkomponenten innerhalb eines und desselben Raumbereiches beruht auch, wie wir sehen werden, lediglich auf der Benutzung von Punktladungen als Probekörper, was keine genügend scharfe Begrenzung des Messbereichs erlaubt. Für die Prüfung des quantenelektromagnetischen Formalismus kommen, wie schon betont, nur Messungen mit Probekörpern endlich ausgedehnter Ladungsverteilung in Betracht, da jede wohldefinierte Aussage dieses Formalismus sich ja auf Mittelwerte der Feldkomponenten über endliche Raumzeitgebiete bezieht. Dieser Umstand hindert uns aber keineswegs, alle eindeutigen, aus der Heisenberg-Paulischen Darstellung zu ziehenden Schlüsse über die Zeitabhängigkeit von räumlichen Feldmittelwerten durch Feldmessungen zu prüfen. Dazu brauchen wir nur Mittelwertsbereiche heranzuziehen, deren zeitliche Ausdehnung T, mit c multipliziert, genügend klein ist gegenüber ihren linearen räumlichen Abmessungen, deren Grössenordnung wir im folgenden immer mit L bezeichnen werden.

Eben der Fall $L > cT$ eignet sich übrigens besonders zu einer eingehenden Prüfung der Folgerungen des Formalismus im eigentlichen quantentheoretischen Gebiet. Schon im Gültigkeitsbereich der klassischen Theorie bietet ja der Fall $L \leq cT$ wenig Interesse, weil alle Besonderheiten der Wellenfelder innerhalb des Volumens V sich wegen der Fortpflanzung während des Zeitintervalls T bei der Mittelwertbildung weitgehend ausgleichen. Im Quantengebiet kommen zu diesem Ausgleich noch die eigentümlichen Schwankungserscheinungen hinzu, die aus dem prinzipiell statistischen Charakter des Formalismus folgen. Während im Falle $L \leq cT$ diese Schwankungen, wie wir sogleich sehen werden, in die Lösungen gegebener Probleme wesentlich eingehen, spielen sie eben im Fall $L > cT$ eine verhältnismässig kleine Rolle.

Die erwähnten Schwankungen hängen aufs Engste zusammen mit der Unmöglichkeit, die für die Quantentheorie der Felder charakteristische Lichtquantenvorstellung mittels klassischer Begriffe zu veranschaulichen. Insbesondere geben sie Ausdruck für die gegenseitige Ausschliessung der genauen Kenntnis der Lichtquantenzusammensetzung eines elektromagnetischen Feldes und der Kenntnis des Mittelwerts irgendeiner seiner Komponenten in einem wohldefinierten Raumzeitgebiet. Denken wir uns die Dichte $\omega_i\,(\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_z)$ der Lichtquanten von bestimmtem Polarisationsparameter i und gegebenen Impuls und Energie $\hbar\varkappa_x$, $\hbar\varkappa_y$, $\hbar\varkappa_z$ und $\hbar\nu = \hbar c\sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \varkappa_z^2}$ bekannt, so sind zwar die Erwartungswerte aller Feldmittelwerte Null, aber das mittlere Schwankungsquadrat jeder Feldgrösse, wie die durch (4) definierte $\bar{\mathfrak{E}}_x^{(G)}$, wird durch die einfach abzuleitende Formel

$$
\left.\begin{aligned}
S(G) = \frac{1}{V^2T^2}\cdot\frac{\hbar}{3}\int_T dt_1\int_T dt_2\int_V dv_1\int_V dv_2\,\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_i\omega_i+1\Big) \\
\cos\left[\varkappa_x(x_1-x_2)+\varkappa_y(y_1-y_2)+\varkappa_z(z_1-z_2)-\nu(t_1-t_2)\right] \\
\frac{d\varkappa_x d\varkappa_y d\varkappa_z}{\nu}
\end{aligned}\right\}\quad(10)
$$

gegeben. Aus der Formel (10) sehen wir, dass die betreffenden Schwankungen bei gegebener Lichtquantenzusammensetzung nie ausbleiben können, da sie schon für $\omega_i = 0$, d. h. bei völliger Abwesenheit von Lichtquanten, einen endlichen, positiven Wert annehmen, der sich durch eine leichte Rechnung auf die Form

$$
S_0(G) = \frac{2}{3\pi^2}\,\frac{\hbar c}{V^2}\int_V dv_1\int_V dv_2\,\frac{1}{r^2\left[(cT)^2-r^2\right]} \qquad (11)
$$

bringen lässt. Für jede andere, durch eine gegebene Dichte ω_i definierte Lichtquantenverteilung wird das Schwankungsquadrat des Mittelwerts einer Feldkomponente grösser als $S_0(G)$ sein. Die nach dem Formalismus zu erwartenden Schwankungen eines Feldmittelwerts können aber beliebig klein werden, wenn eine direkte, etwa durch Messungen erreichte Kenntnis von Feldgrössen vorausgesetzt ist. In einem solchen Fall ist selbstverständlich die Lichtquantendichte ω_i nicht wohldefiniert, und wir müssen uns mit statistischen Aussagen über diese Dichte begnügen.

Für die Diskussion der Messungsmöglichkeiten ist es ferner von entscheidender Bedeutung, dass der Ausdruck (11) nicht nur für die Feldschwankungen im lichtquantenfreien Raum gilt, sondern auch das Schwankungsquadrat jedes Feldmittelwerts in dem allgemeineren Fall darstellt, wo als Feldquellen nur klassisch beschreibbare Strom- und Ladungsverteilungen vorkommen. Der Feldzustand ist hier

eindeutig durch die Forderungen definiert, dass der Erwartungswert jeder Feldgrösse mit dem klassisch berechneten übereinstimmt, und dass die Anzahl der Lichtquanten von gegebenem Impuls und Polarisation um ihren korrespondenzmässig abgeschätzten Mittelwert n_0 gemäss dem für unabhängige Ereignisse gültigen Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$
w(n) = \frac{n_0^n e^{-n_0}}{n!} \qquad (12)
$$

verteilt sind. Für die Feldschwankungen dieses Zustandes ergibt eine einfache Rechnung eben den Ausdruck (11). Entsprechend der Eigentümlichkeit der Hohlraumschwankungen folgt weiter, dass auch im allgemeinen Fall eines Feldes gegebener Lichtquantenzusammensetzung das Hinzukommen der Feldwirkungen irgendwelcher klassisch beschreibbaren Quellen keinerlei Einfluss auf die Schwankungserscheinungen haben wird.

Die Quadratwurzel des Ausdrucks (11) mag als eine kritische Feldgrösse $\mathfrak{S}$ angesehen werden, in dem Sinne, dass wir nur bei der Betrachtung von Feldmittelwerten, die wesentlich grösser als $\mathfrak{S}$ sind, von den betreffenden Schwankungen absehen dürfen. Für die Beurteilung der Prüfungsmöglichkeit des Formalismus im eigentlichen Quantengebiet kommt noch eine andere kritische Feldgrösse $\mathfrak{U}$ in Betracht, die gleich ist der Quadratwurzel des durch (8) gegebenen Produkts der komplementären Unbestimmtheiten zweier Feldmittelwerte über Raumzeitbereiche, die sich nur teilweise überdecken, indem sie räumlich und zeitlich um Strecken der Grössenordnung L bzw. T gegen einander verschoben sind. Für Feldstärken, die wesentlich grösser als $\mathfrak{U}$ sind, gelangen wir nämlich offenbar in den Gültigkeitsbereich der klassischen elektromagnetischen Theorie, wo alle quantentheoretischen Züge des Formalismus ihre Bedeutung verlieren. Eine einfache Abschätzung auf Grund der Formeln (8) und (11) ergibt nun, dass im Falle $L \leq cT$ beide kritische Ausdrücke $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{S}$ von derselben Grössenordnung

$$\mathfrak{U} \sim \mathfrak{S} \sim \frac{\sqrt{\hbar c}}{L \cdot cT} \tag{13}$$

sind. Im Falle $L > cT$ hingegen ist

$$\mathfrak{U} \sim \sqrt{\frac{\hbar}{L^3 T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} \sim \frac{\sqrt{\hbar c}}{L^2}, \tag{14}$$

so dass im Grenzfall $L >> cT$ die kritische Feldstärke $\mathfrak{U}$ viel grösser ist als $\mathfrak{S}$, und wir daher bei der Prüfung der charakteristischen Folgerungen des Formalismus von den Feldschwankungen weitgehend absehen können.

Bevor wir zu dem Vergleich der in diesem Paragraphen besprochenen Folgerungen des quantenelektromagnetischen Formalismus mit den physikalischen Messungsmöglichkeiten von Feldgrössen übergehen, möchten wir noch hier betonen, dass die widerspruchslose Deutbarkeit dieses Formalismus in keiner Weise gefährdet ist durch solche paradoxe Züge seiner mathematischen Darstellung, wie die unendliche Nullpunktsenergie. Insbesondere hat diese letztere Paradoxie, die übrigens mittels einer die physikalische Deutung nicht störenden, formalen Änderung der Darstellung[1] beseitigt werden kann, keine direkte Verbindung zum Problem der Messbarkeit von Feldgrössen. Auf Grund der Feldtheorie würde ja eine Bestimmung der elektromagnetischen Energie in einem gegebenen Raumzeitbereich die Kenntnis der einer Messung unzugänglichen Werte der

[1] Vgl. L. Rosenfeld und J. Solomon, Journal de Physique **2**, 139, 1931, sowie W. Pauli, Hb. d. Physik, 2. Aufl., Bd. 24/1, S. 255, 1933.

Feldkomponenten in jedem Raumzeitpunkt des Gebiets verlangen. Eine physikalische Messung der Feldenergie liesse sich nur mittels einer geeigneten mechanischen Vorrichtung ausführen, durch welche die in einem gegebenen Raumgebiet befindlichen elektromagnetischen Felder von dem übrigen Feld getrennt werden könnten, so dass die in diesem Gebiet enthaltene Energie unter Verwendung des Erhaltungssatzes nachträglich gemessen werden könnte. Jede solche Trennung der Felder wird aber wegen der Wechselwirkung mit dem Messmechanismus eine unkontrollierbare Änderung der Feldenergie im betreffenden Gebiet mit sich bringen, deren Berücksichtigung wesentlich ist für die Aufklärung der wohlbekannten Paradoxien, die in der Diskussion der Energieschwankungen der Hohlraumstrahlung zutagetreten.[1]

§ 3. Voraussetzungen physikalischer Feldmessungen.

Definitionsgemäss beruht die Messung von elektromagnetischen Feldgrössen auf der Uebertragung von Impuls auf geeignete elektrische oder magnetische Probekörper, die sich im Feld befinden. Ganz abgesehen von der in der Quantentheorie gebotenen Vorsicht bei der Anwendung der üblichen Idealisation der in jedem Raumzeitpunkt definierten Feldkomponenten, handelt es sich dabei wesentlich immer um Mittelwerte dieser Komponenten sowohl über die für die Impulsübertragung erforderlichen endlichen Zeitintervalle, wie über die Raumbereiche, über welche die Elektrizitätsladungen bzw. magnetischen Polstärken der in Frage kommenden Probekörper verteilt sind. Selbstverständlich ist schon die Annahme einer gleichmässigen Ladungsverteilung auf einem Probekörper eine Idealisation, die wegen des

[1] Vgl. W. Heisenberg, Leipziger Berichte **83**, 1, 1931.

atomaren Aufbaus aller materieller Körper einer gewissen Einschränkung unterliegt, die aber für die eindeutige Definition von Feldgrössen unentbehrlich ist.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, betrachten wir die Messung des Mittelwerts der elektrischen Feldkomponente in der x-Richtung $\mathfrak{E}_x$ über einen Raumzeitbereich von Volumen V und Zeitlänge T. Dazu benutzen wir also einen Probekörper, dessen elektrische Ladung über das Volumen V mit der Dichte ϱ gleichmässig verteilt ist und bestimmen die Werte p_x' und p_x'' der Impulskomponente dieses Körpers in der x-Richtung am Anfang t' und am Ende t'' des Intervalls T. Der gesuchte Mittelwert $\overline{\mathfrak{E}}_x$ wird dann durch die Gleichung

$$p_x'' - p_x' = \varrho \overline{\mathfrak{E}}_x VT \tag{15}$$

bestimmt, wobei allerdings vorausgesetzt ist, dass die von den Impulsmessungen beanspruchten Zeitintervalle, die wir grössenordnungsmässig mit Δt bezeichnen wollen, als verschwindend klein gegenüber T betrachtet werden können, und dass wir die Verschiebung des Probekörpers sowohl infolge der Impulsmessungen, wie infolge der ihm durch das zu messende Feld innerhalb des Zeitintervalls T erteilten Beschleunigung vernachlässigen können im Verhältnis zu den linearen Abmessungen L des Raumbereichs V.

Durch die Wahl eines genügend schweren Probekörpers können wir offenbar seine Beschleunigung unter Einwirkung des Feldes beliebig herabsetzen. Bei den Impulsmessungen begegnen wir aber Verhältnissen, die von der Masse des Probekörpers unabhängig sind. Dem Unbestimmtheitsprinzip zufolge wird ja jede mit der Genauigkeit Δp_x ausgeführte Messung der Impulskomponente p_x mit einem Verlust Δx der Kenntnis der Lage des betreffenden Körpers

verbunden, der grössenordnungsmässig durch die in (6) enthaltene Relation

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar \tag{16}$$

gegeben wird. An und für sich bedeutet dieser Sachverhalt jedoch keine Einschränkung der durch die Feldmessung zu erzielenden Genauigkeit, da wir noch über den Wert der Ladungsdichte verfügen können. Wenn wir Δt und Δx im Verhältnis zu T und L vernachlässigen, erhalten wir in der Tat aus (15) und (16) für die Genauigkeit $\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x$ der Feldmessung grössenordnungsmässig

$$\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x \sim \frac{\hbar}{\varrho\Delta x \cdot VT} \tag{17}$$

welche bei jedem noch so kleinen Wert von Δx durch die Wahl eines genügend grossen Werts von ϱ beliebig klein gemacht werden kann.

Streng genommen hängt die Genauigkeit der Feldmessung noch von der absoluten Grösse des Werts von $\overline{\mathfrak{E}}_x$ selber ab, denn bei gegebenen Spielräumen für Δt und Δx wird, selbst wenn Δp_x Null wäre, der aus (15) ermittelte Wert von $\overline{\mathfrak{E}}_x$ wegen der unscharfen Begrenzung des Messbereiches mit einer Unsicherheit behaftet, die jede Grenze überschreitet, wenn $\mathfrak{E}_x$ ins Unendliche wächst. Letzterer Umstand entspricht jedoch nur der allgemeinen Begrenzung aller physikalischen Messungen, bei welchen eine Kenntnis der Grössenordnung der zu erwartenden Effekte für die Wahl der geeigneten Messinstrumente immer nötig ist. Bei unserem Problem ist eine obere Grenze der uns interessierenden Effekte dadurch gesetzt, dass wir bei wachsender Grösse der Feldkomponenten allmählich ins Gültigkeitsgebiet der klassischen elektromagnetischen Theorie gelangen. In dem zur Prüfung des quantenelektromagnetischen Formalismus besonders geeigneten Fall $L > cT$ stellt, wie im vorigen Paragraphen erwähnt, der mit der rechten Seite der ersten Formel (14) äquivalente Ausdruck

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{VT}} \tag{18}$$

eine in dieser Hinsicht kritische Feldgrösse dar. Bei Einführung dieser Bezeichnung nimmt die Beziehung (17) die Form

$$\Delta \overline{\mathfrak{E}}_x \sim \lambda Q \tag{19}$$

an, wo

$$\lambda = \frac{Q}{\varrho \Delta x} \tag{20}$$

ein dimensionsloser, für die Beurteilung der Genauigkeit der Feldmessung ausschlaggebender Faktor ist.

Die Forderung, dass λ klein gegenüber der Einheit, und gleichzeitig Δx klein gegenüber L sein soll, bedeutet, dass die gesamte elektrische Ladung des Körpers aus einer sehr grossen Anzahl Elementarladungen ε bestehen soll. In der Tat ist nach (20) diese Anzahl N durch

$$N = \frac{\varrho V}{\varepsilon} = \frac{QV}{\lambda \varepsilon \Delta x} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L}{\Delta x} \cdot \sqrt{\frac{L}{cT}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar c}{\varepsilon^2}} \tag{21}$$

gegeben, und ist sehr gross, wenn die erwähnten Forderungen erfüllt sind und, wie angenommen, $L > cT$ ist. Der letzte Faktor ist ja die reziproke Quadratwurzel der Feinstrukturkonstante, deren Kleinheit, wie schon in der Einleitung erwähnt, eine wesentliche Voraussetzung der korrespondenzmässigen Elektronentheorie ist. Wie dort betont, sind einer Feldmessung mit einer Elementarladung als Probekörper wesentliche Einschränkungen auferlegt, was auch direkt aus (21) ersichtlich ist, wenn man $N = 1$ setzt.[1] Die Annahme eines grossen Werts von N ist überdies eine notwendige Bedingung für die physikalische Verwirklichung einer gleichmässigen Verteilung der Ladung des Probekörpers über das Volumen V; und solange die linearen Abmessungen L des Probekörpers gross sind gegenüber den Atomdimensionen, bietet ihre Erfüllung offenbar keine prinzipielle Schwierigkeit. Es braucht auch kaum erwähnt zu werden, dass unter dieser Voraussetzung die oben benutzte Annahme über die Masse des Probekörpers, die damit gleichbedeutend ist, dass diese Masse sehr gross gegenüber derjenigen eines Lichtquants der Wellenlänge L sein muss, stets befriedigt werden kann.

Soweit haben wir indessen völlig von den elektromagnetischen Feldwirkungen abgesehen, welche die Beschleunigung jedes Probekörpers während der Impulsmessung begleiten. Diese Wirkungen überlagern sich auf das ursprüngliche Feld und müssen in die durch Gleichungen vom Typus (15) definierten Feldmittelwerte einbezogen werden. Die Hauptaufgabe der folgenden Untersuchung wird daher sein, eine Messanordnung zu finden, in welcher die Feldwirkungen der Probekörper in grösstmöglichem Umfang kontrolliert oder kompensiert werden können. An dieser Stelle müssen wir aber zunächst auf die Frage eingehen, inwieweit die Rückwirkung der durch die Beschleunigungen der Probekörper bei den Impulsmessungen erzeugten Strahlungsfelder schon die Ausführbarkeit der Messung der

[1] Vgl. V. Fock und P. Jordan, Zs. f. Phys. **66**, 206, 1930, wo auf derartige, mit der Quantentheorie der Felder nicht verbundene Einschränkungen von Feldmessungen hingewiesen ist. Vgl. auch J. Solomon, Journal de physique, **4**, 368, 1933.

in (15) auftretenden Werte der Impulskomponente des Probekörpers am Anfang und am Ende des Messintervalls beeinträchtigen könnte. Eben mit Hinblick auf diese Möglichkeit haben LANDAU und PEIERLS in der anfangs zitierten Arbeit die Zuverlässigkeit der Unbestimmtheitsrelation (16) für geladene Körper angezweifelt, und geschlossen, dass sie durch eine andere, noch mehr einschränkende Relation zu ersetzen sei, in welcher die Ladung des Probekörpers wesentlich eingeht. Dabei haben sie jedoch das elektromagnetische Verhalten eines solchen Körpers mit demjenigen einer Punktladung e verglichen, und folglich zur Abschätzung der Grössenordnung der durch die Strahlungsrückwirkung hervorgerufenen Impulsänderung des Probekörpers während der Zeit Δt den Ausdruck

$$\delta_e p_x \sim \frac{e^2}{c^3}\frac{\Delta x}{\Delta t^2} \tag{22}$$

benutzt. Wird aber $\delta_e p_x$ als eine zusätzliche Unbestimmtheit der Impulsmessung betrachtet, so bekommt man anstatt (17), wenn $\varrho V = e$ gesetzt ist und zwischen $\overline{\mathfrak{E}}_x$ und $\mathfrak{E}_x$ nicht unterschieden wird,

$$\Delta_e \mathfrak{E}_x \sim \frac{\hbar}{eT\Delta x} + \frac{e\Delta x}{c^3 T \Delta t^2}, \tag{23}$$

dessen Minimum bei Variation von e offenbar durch

$$\Delta_m \mathfrak{E}_x \sim \frac{\sqrt{\hbar c}}{c^2 T \Delta t} \tag{24}$$

gegeben ist. Wenn man weiter mit LANDAU und PEIERLS zwischen T und Δt nicht unterscheidet, stimmt dieser Ausdruck überein mit der von ihnen angegebenen absoluten Grenze der Messbarkeit von Feldkomponenten, auf der sie

ihre Kritik der Grundlagen des quantenelektromagnetischen Formalismus begründet haben.

Die vermeintlichen Schwierigkeiten der Impulsmessung verschwinden aber sofort, wenn auf die endliche Ausdehnung der elektrischen Ladung des Probekörpers genügende Rücksicht genommen wird. Bei der unten näher zu prüfenden Idealisation einer gleichmässigen, starr verschiebbaren Ladungsverteilung, können nämlich die elektrischen Feldstärken im Gebiet V während der Beschleunigung des Probekörpers innerhalb der Zeit Δt höchstens einen Wert von der Grössenordnung $\varrho\Delta x$ erreichen. Denn ihre zeitlichen Ableitungen sind ja nach den Maxwellschen Gleichungen höchstens von derselben Grössenordnung wie die Stromdichte, die grössenordnungsmässig durch $\varrho\frac{\Delta x}{\Delta t}$ gegeben ist. Jede elektromagnetische Rückwirkung auf den Körper während des Messintervalls Δt kann daher nur eine Impulsübertragung von der Grössenordnung

$$\delta_\varrho p_x \sim \varrho^2 V \Delta x \Delta t \tag{25}$$

mit sich bringen. Mit Rücksicht auf (18) und (20) bekommen wir also durch Vergleich von (16) und (25):

$$\delta_\varrho p_x \sim \Delta p_x \cdot \lambda^{-2}\frac{\Delta t}{T}, \tag{26}$$

woraus folgt, das bei jeder, durch einen gegebenen Wert von λ symbolisierten, angestrebten Genauigkeit der Feldmessung der Einfluss der elektromagnetischen Rückwirkung auf die Impulsmessung des Probekörpers vernachlässigt werden kann, wenn nur Δt in Vergleich mit T genügend klein gewählt wird. Eben dieser Umstand ist für die Beurteilung der Genauigkeit der Feldmessungen ausschlaggebend;

denn es erweist sich als unmöglich, den Einfluss des Strahlungsrückstosses auf die Impuls- und Energiebilanz bei den einzelnen Impulsmessungen direkt in Betracht zu ziehen. Zum Beispiel wäre der von Pauli[1] gemachte Vorschlag, die in der Ausstrahlung enthaltenen Impuls- und Energiebeiträge durch eine besondere Vorrichtung nachträglich zu messen, schon deswegen unausführbar, weil die Strahlungsfelder, die bei den Impulsmessungen am Anfang und Ende des Intervalls T entstehen, wenigstens in dem für die Feldmessungen besonders wichtigen Fall $L > cT$ nicht in einem für diesen Zweck genügenden Mass von einander trennen lassen. Überhaupt werden wir in den folgenden Paragraphen ganz allgemein zeigen, dass jeder Versuch einer derartigen Kontrolle der Feldwirkungen der Probekörper die Verwertung der betreffenden Feldmessung wesentlich beeinträchtigen würde.

Uebrigens ist es nicht nur für die Diskussion des Verhaltens der einzelnen Probekörper während der Messungen, sondern auch für die Beurteilung der gegenseitigen Beeinflussung mehrerer Probekörper wesentlich, dass diese nicht als Punktladungen, sondern als kontinuierliche Ladungsverteilungen behandelt werden. Denn die übliche Identifizierung der Ortsunbestimmtheit eines als Punktladung betrachteten Probekörpers mit den linearen Dimensionen des Messbereichs bedeutet eine willkürliche, dem Messbarkeitsproblem fremde Annahme. Aus diesem Grunde weichen die von Heisenberg einerseits, von Landau und Peierls andererseits durch Betrachtung von Punktladungen abgeschätzten Ausdrücke für das Produkt der Unsicherheiten von $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ innerhalb desselben Raumzeitbereichs nicht nur, wie schon erwähnt, von den Erwartungen des quanten-

[1] Vgl. W. Pauli, Hb. d. Physik, 2. Aufl., Bd. 24/1, S. 257, 1933.

elektromagnetischen Formalismus ab, sondern stimmen nur im Spezialfall $L \sim cT$ mit einander überein. In diesem Fall ergeben beide Abschätzungen den Ausdruck Q^2, welcher dem nach dem Formalismus zu erwartenden grössenordnungsmässigen Wert des Produkts der komplementären Unbestimmtheiten zweier Feldmittelwerte innerhalb Raumzeitbereiche, die gegen einander um Raumzeitstrecken derselben Grössenordnung wie L und T verschoben sind, entspricht. Für zusammenfallende Bereiche ist es indessen ein wesentlicher Zug des Formalismus, dass das betreffende Produkt identisch verschwindet. Der physikalische Sinn dieses Resultats leuchtet auch sofort ein, sobald man die gleichmässige Ladungsverteilung des zur Messung von $\overline{\mathfrak{E}}_x$ benutzten Probekörpers berücksichtigt; denn die magnetische Feldstärke, die in einem Punkt P_2 des Volumens V durch die Verschiebung der Ladung ϱdv eines im Punkt P_1 befindlichen Volumelements erzeugt wird, ist genau gleich und entgegengesetzt der magnetischen Feldstärke, die infolge der gleichen Verschiebung der im Punkt P_2 befindlichen Ladung ϱdv im Punkte P_1 entsteht, sodass der Mittelwert über das Volumen V jeder durch die Verschiebung des Probekörpers erzeugten magnetischen Feldkomponente verschwindet.

Aus dem obigen geht hervor, dass für die Diskussion der Messbarkeit von Feldgrössen die Annahme von entscheidender Bedeutung ist, dass die zu benutzenden Probekörper sich als gleichmässig geladene, starre Körper verhalten, deren Impulse innerhalb jedes gegebenen, beliebig kurzen Zeitintervalls mit der durch (16) ausgedrückten, zur begleitenden unkontrollierbaren Verschiebung komplementären Genauigkeit gemessen werden können. Natürlich dürfen wir dabei wegen der endlichen Fortpflanzung aller Kräfte nicht an die gewöhnliche mechanische Idealisation des starren Körpers denken, sondern müssen uns jeden Probekörper als ein System individueller Teilkörper von genügend kleinen Dimensionen vorstellen, und die Messung des Gesamtimpulses dieses Systems in solcher Weise ausgeführt denken, dass alle Teilkörper mit genügender Annäherung dieselbe Verschiebung während der Impulsmessung erleiden. Dass diese Forderung, jedenfalls soweit man von dem atomaren Aufbau der Probekörper absehen kann, sich ohne prinzipielle Schwierigkeit erfüllen lässt, liegt daran, dass die erforderlichen Impulsmessungen sich vollständig auf klassischer Grundlage beschreiben lassen, gleichgültig, ob sie auf der Verfolgung eines Stossprozesses zwischen dem Probekörper und einem geeigneten materiellen Stosskörper, oder etwa auf der Untersuchung des Dopplereffekts bei Reflexion von Strahlung am Probekörper beruhen. Wenn nur die Masse des Stosskörpers gross genug ist, oder das zur Messung des Dopplereffekts benutzte Strahlungsbündel genügend viele Lichtquanten enthält, lässt sich nämlich die Wechselwirkung zwischen Probekörper und Stosskörper mit beliebiger Annäherung klassisch verfolgen. Der die Impulsmessung begleitende Verlust der Kenntnis der Lage des Probekörpers beruht in der Tat lediglich auf der Unmöglichkeit, zugleich den Verlauf des Stossprozesses relativ zu einem wohldefinierten raumzeitlichen Bezugssystem zu fixieren. Überhaupt ist ja die eigentümliche Komplementarität der Beschreibungsweise letzten Endes dadurch bedingt, dass jede solche Fixierung mit einer unvermeidlichen, prinzipiell unkontrollierbaren Impuls- und Energieübertragung an die zur Festlegung des Koordinatensystems nötigen Massstäbe und Uhren verknüpft ist.[1]

[1] Vgl. N. Bohr, Atomtheorie und Naturbeschreibung, Berlin, Springer, 1931. Diese Frage ist inzwischen vom Verfasser ausführlicher behandelt in einem in Wien gehaltenen, bald erscheinenden Gastvortrag, wo insbesondere auf die bei der Deutung des Unbestimmtheitsprinzips unter Berücksichtigung der Relativitätsforderung auftretenden Paradoxien näher eingegangen wird.

Wir erinnern daran, dass der bei jeder Beschreibung offen bleibende Spielraum in der Zeit Δt nach dem Unbestimmtheitsprinzip mit der Genauigkeit ΔE der Kenntnis der beim Stossprozess zwischen Stosskörper und Probekörper ausgetauschten Energie durch die bekannte Relation

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \tag{27}$$

verbunden ist. Wegen der für beide Körper gültigen Beziehung zwischen Energie und Impuls- und Geschwindigkeitskomponenten

$$dE = v_x dp_x \tag{28}$$

folgt direkt, dass

$$\Delta p_x \left| v_x'' - v_x' \right| \Delta t \sim \hbar. \tag{29}$$

Obwohl die hier auftretende Geschwindigkeitsänderung $|v_x'' - v_x'|$ des Probekörpers bei der Impulsmessung nach dem oben Gesagten für einen genügend schweren Probekörper als beliebig genau bekannt angesehen werden kann, bedeutet offenbar der Faktor

$$\left| v_x'' - v_x' \right| \Delta t = \Delta x \tag{30}$$

in vollem Einklang mit der Unbestimmtheitsrelation (16) einen ganz freien Spielraum in der Lage des Körpers relativ zum festen Bezugssystem. Aus (30) folgt unmittelbar die Bedingung

$$\Delta x < c \Delta t, \tag{31}$$

welche mit Rücksicht auf (16) bei einer Impulsmessung mit gegebener oberer Grenze Δt des Zeitspielraums der zu erzielenden Genauigkeit Δp_x eine absolute Grenze setzt. In

Anbetracht der relativistischen Invarianz der Relationen (16) und (27) und insbesondere der Beziehung (28) bedeutet dieser Umstand aber keinerlei Einschränkung in der Formulierung und Anwendbarkeit des Unbestimmtheitsprinzips. Für unser Problem ist es zumal erlaubt, von allen mechanischen Relativitätseffekten abzusehen, denn es ist immer möglich, unter Benutzung genügend schwerer Probekörper sich so einzurichten, dass die Geschwindigkeiten aller Probekörper während des ganzen Messvorgangs klein gegen die Lichtgeschwindigkeit bleiben. Infolgedessen können wir jede Verschiebung Δx bei den Impulsmessungen sogar als sehr klein betrachten gegenüber dem entsprechenden Wert von $c\Delta t$, der seinerseits beliebig klein gewählt werden muss.

Eben die genaue Verfolgbarkeit des relativen raumzeitlichen Verlaufs des zur Impulsmessung dienenden Vorgangs ermöglicht die Messung des Gesamtimpulses eines ausgedehnten Körpers innerhalb jedes gegebenen Zeitintervalles mit der erforderlichen, durch (16) ausgedrückten Genauigkeit. So können wir den Gesamtimpuls des als Probekörper dienenden Systems von geladenen materiellen Teilkörpern durch einen einzigen Stossprozess bestimmen, indem wir uns eines Stosskörpers besonderer Konstruktion bedienen, der überall im Probekörpersystem eingreift, und jedem Teilkörper zur selben Zeit dieselbe Beschleunigung erteilt. Zwar stellt diese Vorrichtung der Konstruktion der Stoss- und Probekörper weitgehende Anforderungen, die jedoch keine prinzipielle Schwierigkeit bieten, soweit wir den atomaren Aufbau der Körper vernachlässigen können. Am einfachsten gestaltet sich wohl die betrachtete Messung des Gesamtimpulses des Probekörpers, wenn man sie auf optischem Wege mittels Dopplereffektbestimmung ausführen würde, wobei man etwa folgendermassen vorgehen könnte: Man denke sich jeden

Teilkörper mit einem kleinen, auf die x-Richtung senkrechten Spiegel versehen und denke sich eine Anzahl anderer Spiegel in einer solchen Weise fest angebracht, dass der Lichtweg von der Strahlungsquelle zu jedem Teilkörper derselbe ist. Wenn wir nun durch eine passende Vorrichtung ein Strahlungsbündel von der Dauer Δt erzeugen, das eine Anzahl von Lichtquanten enthält, die genügend gross ist gegenüber der Anzahl der Teilkörper, werden also alle diese Körper gleichzeitig einen Stoss bekommen und eine Beschleunigung erleiden, die für alle Teilkörper mit beliebiger Genauigkeit gleich gross gemacht werden kann.

Um zu zeigen, dass man mit einer solchen Anordnung tatsächlich den Gesamtimpuls des Probekörpers mit einer der Relation (16) genügenden Genauigkeit bestimmen kann, werden wir die Wechselwirkung zwischen Probekörpersystem und Strahlungsbündel etwas näher betrachten. Unter Berücksichtigung der oben erwähnten Annahme der Kleinheit der Geschwindigkeit des Probekörpers gegen die Lichtgeschwindigkeit haben wir für jeden Teilkörper

$$\left.\begin{aligned} m_\tau\left(v''_{\tau,x}-v'_{\tau,x}\right) &= \frac{\hbar}{c}\sum_{n_\tau}(\nu'+\nu''), \\ \frac{1}{2}\,m_\tau\left(v''^{2}_{\tau,x}-v'^{2}_{\tau,x}\right) &= \hbar\sum_{n_\tau}(\nu'-\nu''), \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

wo m_τ die Masse eines Teilkörpers, $v'_{\tau,x}$, $v''_{\tau,x}$ seine Geschwindigkeit vor und nach der Reflexion bezeichnet, und die Summation sich über die am Teilkörper reflektierten n_τ Lichtquanten erstreckt, deren Frequenzen (reziproke Periode mal 2π) vor und nach der Reflexion durch ν' bzw. ν'' dargestellt werden. Für die Impulskomponente des betreffenden Teilkörpers bzw. vor und nach dem Stoss folgt aus (32)

$$\left.\begin{aligned} p'_{\tau,x} &= m_\tau v'_{\tau,x} = \\ p''_{\tau,x} &= m_\tau v''_{\tau,x} = \end{aligned}\right\} m_\tau c\,\frac{\sum\limits_{n_\tau}(\nu'-\nu'')}{\sum\limits_{n_\tau}(\nu'+\nu'')} \mp \frac{1}{2}\frac{\hbar}{c}\sum_{n_\tau}(\nu'+\nu''), \tag{33}$$

Wenn wir nun annehmen, dass die mittlere spektrale Frequenz ν_0 des Strahlungsbündels sehr gross ist, sowohl gegen die mittlere Abweichung $(\Delta t)^{-1}$ seiner Frequenzverteilung, wie gegen alle Frequenzänderungen $\nu' - \nu''$, so können wir mit genügender Annäherung für die Geschwindigkeitsänderungen der Teilkörper durch den Stoss

$$v''_{\tau,x} - v'_{\tau,x} = \frac{\hbar}{m_\tau c}\sum_{n_\tau}(\nu'+\nu'') = \frac{2 n_\tau \hbar \nu_0}{m_\tau c} \tag{34}$$

setzen und sie für alle Teilkörper als gleich gross annehmen. Durch den Stoss bekommen also alle Teilkörper zwar unkontrollierbare, aber beliebig genau gleiche Verschiebungen, deren Grössenordnung Δx der Relation (30) genügt, wo $|v''_x - v'_x|$ mit der gemeinsamen Geschwindigkeitsänderung des ganzen Probekörpersystems zu identifizieren ist. Indem wir unseren Voraussetzungen gemäss Δx als verschwindend klein gegenüber $c\Delta t$ betrachten können, erhalten wir daher auf Grund von (33) und (34) für das Produkt von Δx mit der Unsicherheit des Gesamtimpulses des Probekörpers näherungsweise

$$\Delta p_x \Delta x \sim \Delta t \cdot \Delta\Big(\sum_\tau \sum_{n_\tau} \hbar\nu' - \sum_\tau \sum_{n_\tau} \hbar\nu''\Big). \tag{35}$$

Die in der Klammer stehenden Grössen in (35) sind eben die Gesamtenergien der auf den Probekörper einfallenden und von diesem reflektierten Strahlungsbündel. Die Energie des letzteren Bündels lässt sich, etwa durch Spektralanalyse der reflektierten Strahlung, mit beliebiger Genauigkeit messen. Für das einfallende Strahlungsbündel wäre aber eine solche Analyse mit den Versuchsbedingungen offenbar unverträglich. Die Gesamtenergie dieser Strahlung lässt sich jedoch immer mit einer zu Δt komplementären, durch die Relation (27) gegebenen Genauigkeit messen. Hierfür ist nämlich eine rein mechanische Vorrichtung hinreichend, durch welche das betrachtete Bündel aus einem Strahlungsfeld abgetrennt wird, dessen Energie vor und nach der Trennung mit beliebiger Genauigkeit etwa durch Spektralmessungen ermittelt werden kann. Die Relation (35) ist also identisch mit der üblichen Unbestimmtheitsrelation (16). Man bemerke noch, dass der Nachweis dieser Identität wesentlich dadurch bedingt ist, dass wir der beschriebenen Anordnung gemäss keine Auskunft über die Impulse der einzelnen Teilkörper, sondern nur über den Gesamtimpuls des Probekörpers erhalten.

Der Umstand, dass das Probekörpersystem bei den erforderlichen Impulsmessungen eine gemeinsame Translation erleidet, ist nicht nur wichtig für die Berechnung der diese Messungen begleitenden Feldwirkungen der Probekörper, sondern gibt uns die Möglichkeit, was in diese Berechnung eine grosse Vereinfachung bringt, uns so einzurichten, dass alle bei der Feldmessung zu benutzenden Probekörper ausserhalb der von den Impulsmessungen beanspruchten kurzen Zeitintervalle als ruhend betrachtet werden können. Wir können nämlich unmittelbar nach jeder Impulsmessung, d. h. praktisch genommen noch innerhalb des Intervalls Δt, dem Probekörpersystem durch eine geeignete Vorrichtung einen zweiten, entgegengerichteten Stoss geben, durch welchen die durch den ersten Stoss erteilte Geschwindigkeitsänderung jedes Teilkörpers mit beliebiger, d. h. mit einer seiner Masse umgekehrt proportionalen Genauigkeit aufgehoben wird, ohne dass die angestrebte Kenntnis des Gesamtimpulses des Probekörpers verloren geht. Dabei ist es aber unmöglich, das Zeitintervall zwischen den beiden Stossprozessen mit einem geringeren Spielraum als Δt zu kennen, so dass der Probekörper, wie es das Unbestimmtheitsprinzip verlangt, durch den Gegenstoss keineswegs in seine ursprüngliche Lage, sondern in eine unbekannte, grössenordnungsmässig um Δx verschobene Lage, mit der betreffenden Annäherung zur Ruhe gebracht wird.

Für die Beurteilung der im nächsten Paragraphen näher zu untersuchenden komplementären Begrenzung der Messbarkeit von Feldgrössen ist es überhaupt erforderlich, das Verhalten der Probekörper während des ganzen Messvorgangs möglichst genau zu verfolgen. Dabei zeigt es sich zunächst notwendig, die Lage jedes Probekörpers zu jeder seiner Benutzung bei der Messung vorangehenden und nachfolgenden Zeit genau zu kennen. Zweckmässigerweise wird dieses dadurch erreicht, dass der Probekörper ausserhalb des Zeitintervalles, während dessen der auf ihn vom Feld übertragene Impuls zu ermitteln ist, mit einem als räumliches Bezugssystem dienenden, starren Gerüst fest verbunden bleibt. Am Anfang des betrachteten Intervalles muss diese Verbindung aufgelöst und die Komponente des Impulses des Probekörpers in der Richtung der zu bestimmenden Feldkomponente gemessen werden, wobei wir immer annehmen werden, dass durch einen unmittelbar folgenden Gegenstoss der oben besprochenen Art der Körper in eine nicht genau voraussagbare Lage mit einer seiner Masse umgekehrt proportionalen Annäherung wieder zur Ruhe gebracht wird. Am Ende des Zeitintervalles wird nach erneuter Messung der betreffenden Impulskomponente die feste Verbindung wieder hergestellt, wobei es sich als nicht unwesentlich erweist, den Probekörper in genau dieselbe Lage wie ursprünglich zu bringen. Schon diese Vorschriften stellen, wenn die raumzeitlichen Mittelwertbereiche genügend scharf definiert werden sollen, weitgehende Ansprüche an die verfeinerte Konstruktion der Probekörpersysteme. Denn wegen der Retardation aller Kräfte ist es streng genommen notwendig, dass die Auflösung sowie die Wiederherstellung der Verbindung der Probekörpersysteme mit dem festen Gerüst für alle ihre unabhängigen Teilkörper, deren lineare Abmessungen mindestens ebenso klein wie der kleinste in Betracht kommende Wert von $c\Delta t$ sein müssen, gleichzeitig vorgenommen wird, d. h. innerhalb des Zeitspielraums Δt der Impulsmessung, der seinerseits genügend klein gegenüber dem Zeitintervall T gewählt werden muss.

Noch weitergehende Ansprüche an Idealisation in Bezug auf die Konstruktion und Handhabung der Probekörpersysteme sind offenbar nötig, wenn es sich um die Messung von Feldmittelwerten über zwei sich teilweise überdeckende Raumzeitgebiete handelt. In diesem Fall müssen wir ja über Probekörper verfügen, die ohne gegenseitige mechanische Beeinflussung in einander verschoben werden können. Um die zu messenden elektromagnetischen Felder möglichst wenig durch die Anwesenheit der Probekörpersysteme zu stören, werden wir überdies jedem elektrischen oder magnetischen Teilkörper einen anderen, genau entgegengesetzt geladenen Neutralisierungskörper zur Seite gestellt denken. Im Falle magnetischer Probekörpersysteme ist zwar zu bedenken, dass eine gleichmässige Polstärkenverteilung auf einem streng abgegrenzten Körper nicht bestehen kann. Man kann sich aber, wenigstens im Prinzip, vorstellen, dass jeder Teilkörper eines solchen Systems mittels magnetisierbarer biegsamer Fäden mit dem zugehörigen Neutralisierungskörper verbunden ist. Alle diese Neutralisierungskörper sollen während des ganzen Messvorgangs mit dem festen Gerüst verbunden bleiben, ohne die freie Beweglichkeit der zum eigentlichen Probekörpersystem gehörigen Teilkörper mechanisch zu beeinflussen. Die in solchen Voraussetzungen, sowie in den unten einzuführenden Annahmen über die noch nötigen Kompensationsmechanismen, enthaltenen Idealisationen sind natürlich nur zu verteidigen, soweit wir den atomaren Aufbau der Probekörper vernachlässigen können. Wie schon erwähnt, bedeutet diese Vernachlässigung jedoch keine prinzipielle Einschränkung der Prüfungsmöglichkeit des quantenelektromagnetischen Formalismus, da in diesem Formalismus keinerlei universellen raumzeitlichen Dimensionen auftreten. Der Zweck der vorangehenden Betrachtungen war daher auch vor allem, zu zeigen, dass es bei den für die Feldmessungen in Frage kommenden, rein mechanischen Problemen möglich ist, zwischen den durch die atomistische Struktur der Materie bedingten Einschränkungen der Beschaffenheit der Probekörper und den auf dem universellen Wirkungsquantum beruhenden, besonders im Unbestimmtheitsprinzip formulierten Begrenzungen der Handhabung dieser Körper streng zu unterscheiden.

§ 4. Berechnung der Feldwirkungen der Probekörper.

Nach der Untersuchung der physikalischen Voraussetzungen der Beschaffenheit der Probekörper werden wir nun übergehen zur genaueren Betrachtung der die Messung von Feldgrössen begleitenden elektromagnetischen Feldwirkungen der Probekörper, die für die Messbarkeitsfrage von entscheidender Bedeutung sind. Gemäss den obigen Ausführungen werden wir dabei jeden Probekörper als eine das

räumliche Mittelwertgebiet gleichmässig auffüllende Ladungsverteilung behandeln, die während der Impulsmessung eine einfache Translation erleidet. Die Berechnung der dadurch erzeugten elektromagnetischen Felder werden wir zunächst auf Grund der klassischen Elektrodynamik ausführen, und erst nachher auf die durch das Wirkungsquantum bedingte Begrenzung der Gültigkeit dieser Behandlung eingehen.

Betrachten wir zwei Raumzeitgebiete I und II, mit Volumina V_{I} und V_{II} und Zeitlängen T_{I} und T_{II} und fragen wir nach dem elektromagnetischen Feld, das in einem Punkt (x_2, y_2, z_2, t_2) des Gebiets II durch eine Messung des Mittelwerts von $\mathfrak{E}_x$ über das Gebiet I erzeugt wird. Wir nehmen also an, dass sich ursprünglich im Volumen V_{I} zwei elektrische Ladungsverteilungen mit den konstanten Dichten $+\varrho_{\mathrm{I}}$ und $-\varrho_{\mathrm{I}}$ befinden. Im Intervall von t'_{I} bis $t'_{\mathrm{I}} + \Delta t_{\mathrm{I}}$ erfährt die erste Ladungsverteilung eine einfache ungleichförmige Translation in der x-Richtung um die Strecke $D_x^{(\mathrm{I})}$; im Intervall von $t'_{\mathrm{I}} + \Delta t_{\mathrm{I}}$ bis t''_{I} bleibt sie in Ruhe in der verschobenen Lage; schliesslich bewegt sie sich innerhalb des Zeitintervalls von t''_{I} bis $t''_{\mathrm{I}} + \Delta t_{\mathrm{I}}$, ungleichförmig parallel der x-Achse bis zu ihrer ursprünglichen, mit der Neutralisierungsverteilung zusammenfallenden Lage zurück. Im Einklang mit der im vorigen Paragraphen besprochenen Forderung werden wir ferner annehmen, dass Δt_{I} sehr klein gegenüber $T_{\mathrm{I}} = t''_{\mathrm{I}} - t'_{\mathrm{I}}$ ist, und dass $D_x^{(\mathrm{I})}$ nicht nur sehr klein ist gegen die linearen Abmessungen des räumlichen Mittelwertgebiets von Volumen V_{I}, sondern auch klein ist gegenüber $c\Delta t_{\mathrm{I}}$.

Im Grenzfall verschwindend kleiner Δt_{I} lassen sich also die Quellen des gesuchten Feldes darstellen als eine im Gebiet I während des Zeitintervalls von t'_{I} bis t''_{I} bestehende Polarisation in der x-Richtung von der konstanten Dichte

$P_x^{(\mathrm{I})} = \varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})}$, sowie eine nur in unmittelbarer Nähe der Zeitpunkte t_{I}' und t_{I}'' vorhandene Stromdichte, die wir unter Benutzung des durch Formel (3) definierten Symbols

$$J_x^{(\mathrm{I})} = \varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})} \left[\delta\left(t - t_{\mathrm{I}}'\right) - \delta\left(t - t_{\mathrm{I}}''\right)\right] \tag{36}$$

schreiben können. Mit Hilfe desselben Symbols lässt sich ebenfalls die Polarisation $P_x^{(\mathrm{I})}$ zu einer beliebigen Zeit t durch die Formel

$$P_x^{(\mathrm{I})} = \varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})} \int_{t_{\mathrm{I}}'}^{t_{\mathrm{I}}''} \delta(t - t_1)\, dt_1 \tag{37}$$

ausdrücken. Die Komponenten der durch diese Quellen im Raumzeitpunkte (x_2, y_2, z_2, t_2) erzeugten Felder berechnen sich bekanntlich aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(\mathrm{I})} &= -\frac{\partial \varphi^{(\mathrm{I})}}{\partial x_2} - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_x^{(\mathrm{I})}}{\partial t_2}, \quad & E_y^{(\mathrm{I})} &= -\frac{\partial \varphi^{(\mathrm{I})}}{\partial y_2}, \quad & E_z^{(\mathrm{I})} &= -\frac{\partial \varphi^{(\mathrm{I})}}{\partial z_2}, \\ H_x^{(\mathrm{I})} &= 0, & H_y^{(\mathrm{I})} &= \frac{\partial \psi_x^{(\mathrm{I})}}{\partial z_2}, & H_z^{(\mathrm{I})} &= -\frac{\partial \psi_x^{(\mathrm{I})}}{\partial y_2}, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

wobei wir zur Unterscheidung von den zu messenden Feldkomponenten lateinische Buchstaben gebrauchen. In (38) bedeutet $\varphi^{(\mathrm{I})}$ das retardierte skalare Potential

$$\varphi^{(\mathrm{I})} = \int_{V_{\mathrm{I}}} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{P_x^{(\mathrm{I})}\left(t_2 - \frac{r}{c}\right)}{r}\right] dv_1 \tag{39}$$

und $\psi_x^{(\mathrm{I})}$ die retardierte Vektorpotentialkomponente

$$\psi_x^{(\mathrm{I})} = \frac{1}{c}\int_{V_{\mathrm{I}}} \frac{J_x^{(\mathrm{I})}\left(t_2 - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dv_1, \tag{40}$$

wo r den Abstand der Raumpunkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) darstellt. Bedenkt man, dass der Ausdruck (36) auch in der Form

$$J_x^{(\mathrm{I})} = -\varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})} \int_{t_{\mathrm{I}}'}^{t_{\mathrm{I}}''} \frac{\partial}{\partial t_1} \delta(t - t_1)\, dt_1 \tag{41}$$

geschrieben werden kann, so lassen sich die sich aus (38), (39) und (40) ergebenden Feldkomponenten mit Rücksicht auf (37) und (41) mittels der durch (2) definierten Abkürzungen durch die typischen Formeln

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(\mathrm{I})} &= \varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})} \int_{V_{\mathrm{I}}} dv_1 \int_{T_{\mathrm{I}}} dt_1 A_{xx}^{(12)}, \quad & E_y^{(\mathrm{I})} &= \varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})} \int_{V_{\mathrm{I}}} dv_1 \int_{T_{\mathrm{I}}} dt_1 A_{xy}^{(12)}, \\ H_x^{(\mathrm{I})} &= 0, & H_y^{(\mathrm{I})} &= \varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})} \int_{V_{\mathrm{I}}} dv_1 \int_{T_{\mathrm{I}}} dt_1 B_{xy}^{(12)} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

darstellen.

Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der symbolischen δ-Funktion ist es leicht einzusehen, dass die durch (42) gegebenen Feldkomponenten immer endlich bleiben und sogar in keinem Raumzeitpunkt (x_2, y_2, z_2, t_2) einen Wert von der Grössenordnung $\varrho_{\mathrm{I}} D_x^{(\mathrm{I})}$ überschreiten können. Wie schon erwähnt, sind die elektromagnetischen Kräfte, die während der Impulsmessung am Probekörper im Zeitintervall Δt auftreten, eben von dieser Grössenordnung (vgl. S. 25). Dass die Feldintensitäten in der nachfolgenden Zeit nicht wesentlich zunehmen, ist lediglich eine Folge des gleich nach der Impulsmessung stattfindenden Gegenstosses, wodurch der Körper zur Ruhe gebracht wird, und der in den Ansätzen (36) und (37) seinen idealisierten mathematischen Ausdruck findet.

Die uns besonders interessierenden Mittelwerte dieser Feldkomponenten über das Gebiet II gehen aus (42) durch einfache Raumzeitintegration hervor, und werden also gemäss (5) durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}_x^{(\mathrm{I,II})} &= D_x^{(\mathrm{I})} \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \bar{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})}, & \bar{E}_y^{(\mathrm{I,II})} &= D_x^{(\mathrm{I})} \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \bar{A}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} \\ \bar{H}_x^{(\mathrm{I,II})} &= 0, & \bar{H}_y^{(\mathrm{I,II})} &= D_x^{(\mathrm{I})} \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \bar{B}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

gegeben.

Auf Grund der schon im § 2 diskutierten Eigenschaften der Ausdrücke $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sehen wir, dass die durch (43) gegebenen Feldmittelwerte bei gegebenem Wert von $D_x^{(\mathrm{I})}$ wohldefinierte, stetige Funktionen der Gebiete I und II sind. Bei abnehmenden Spielräumen Δt und Δx der Zeitdauer der Impulsmessungen und der diese begleitenden, unvoraussagbaren Verschiebungen, sind also diese Feldmittelwerte vom näheren raumzeitlichen Verlauf der Stossprozesse ganz unabhängig und einfach der im Messintervall T_{I} konstanten Verschiebung des Probekörpers proportional. Eben dieser Umstand erweist sich, wie wir sehen werden, als entscheidend für die Möglichkeit einer weitgehenden Kompensation der unkontrollierbaren Feldwirkungen der Probekörper.

Soweit ist die Berechnung der Feldwirkungen auf rein klassischer Grundlage ausgeführt worden. Für den genaueren Vergleich der Messungsmöglichkeiten mit den Forderungen des quantenelektromagnetischen Formalismus ist es aber notwendig, noch die Begrenzung zu berücksichtigen, die, infolge des durch die Lichtquantenvorstellung symbolisierten, quantentheoretischen Zugs jeder Feldwirkung, der klassischen Berechnungsweise auferlegt ist. Um einen Überblick über die Verhältnisse zu gewinnen, nehmen wir an, dass die betrachteten Mittelwertgebiete grössenordnungsmässig gleich sind und räumlich gegen einander verschoben sind um Strecken von derselben Grössenordnung wie ihre linearen

Abmessungen, die wir mit L bezeichnen, und dass ferner die zugehörigen Zeitintervalle von der Grössenordnung T kleiner sind als $\frac{L}{c}$. Unter diesen Bedingungen kommen in der spektralen Zerlegung der Feldwirkungen im wesentlichen nur Wellen vor, deren Länge von derselben Grössenordnung wie L ist. Da ferner im betrachteten Fall die Intensität des durch die Impulsmessung erzeugten Felds grössenordnungsmässig gleich $\varrho \Delta x$, und folglich die im Volumen V enthaltene Feldenergie von der Grössenordnung $\varrho^2 \Delta x^2 V$ ist, so wird die Anzahl der in Frage kommenden Lichtquanten durch den Ausdruck

$$n \sim \varrho^2 \Delta x^2 V \frac{L}{\hbar c} = \lambda^{-2} \frac{L}{cT} \quad (44)$$

abgeschätzt, wo λ den durch (20) definierten, für die Messgenauigkeit massgebenden Faktor bedeutet. Wir sehen also, dass in unserem Fall n immer gross gegenüber der Einheit ist, wenn eine Messgenauigkeit verlangt wird, bei der Feldstärken gemessen werden können, die kleiner sind als die kritische Feldgrösse Q.

Je grösser die bei den Feldmessungen angestrebte Genauigkeit ist, umso verhältnismässig genauer werden offenbar die klassisch berechneten Ausdrücke (42) und (43) der betrachteten Feldwirkungen. Es ist indessen wesentlich zu bemerken, dass sich die absolute Genauigkeit dieser Ausdrücke bei wachsendem Wert von n nicht ändert. Der statistische Schwankungsbereich der Feldmittelwerte wird nämlich in unserem Fall schätzungsweise durch

$$\frac{\varrho \Delta x}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{VL}} \sim \frac{\sqrt{\hbar c}}{L^2}$$

gegeben. Dieser allein von den linearen Abmessungen des Messgebiets abhängige, immer endlich bleibende Ausdruck für den Schwankungsbereich der Feldwirkungen der Probekörper stimmt tatsächlich mit dem für den Fall $L > cT$ aus dem Formalismus abgeleiteten Ausdruck (14) für die Grössenordnung der reinen Hohlraumschwankungen überein. Überhaupt handelt es sich bei obiger Betrachtung nur um ein Beispiel der im § 2 angeführten, allgemeinen Beziehung zwischen Hohlraumschwankungen und den nur statistisch beschreibbaren Abweichungen der Feldmittelwerte von den nach der klassischen Theorie aus der Angabe der Quellen berechneten Feldgrössen. Wie schon dort erwähnt wurde, sind weiter in dem für die Prüfung des Formalismus besonders wichtigen Falle $L > cT$ die Hohlraumschwankungen immer kleiner als die für die komplementäre Messbarkeit von Feldgrössen massgebende Feldstärke Q, und zwar umso kleiner, je grösser das Verhältnis zwischen L und cT ist. Bei dem folgenden Vergleich zwischen Feldmessungen und Formalismus werden wir daher immer von den klassisch berechneten Ausdrücken (43) ausgehen, und erst nachher die Bedeutung der Schwankungserscheinungen für die Widerspruchsfreiheit des Formalismus diskutieren.

§ 5. Messung einzelner Feldmittelwerte.

Der Untersuchung der Messungsmöglichkeiten von Feldmittelwerten legen wir definitionsgemäss die Gleichung (15) zugrunde, welche die klassisch beschriebene Impulsbilanz eines im Felde befindlichen Probekörpers ausdrückt. Nach den vorangehenden Ausführungen ist dabei jede Feldkomponente, wie $\mathfrak{E}_x$, als die Überlagerung der von allen Feldquellen, einschliesslich der Probekörper selber, herrührenden Felder zu betrachten, und der Kern des Messproblems ist eben die Frage, in welchem Umfang diese Felder den

verschiedenen Quellen zugeordnet werden können. Wir möchten aber gleich hier betonen, dass die strenge Anwendbarkeit des klassischen Feldbegriffs für die erwähnte Definition der Feldmittelwerte an sich durch die oben berührte begrenzte Gültigkeit der klassischen Beschreibung der Feldwirkungen der Probekörper nicht beeinträchtigt wird. Ganz abgesehen von der im § 3 diskutierten Frage der bei den Impulsmessungen der Probekörper am Anfang und Ende des Messintervalls erreichbaren Genauigkeit, dürfte die Eindeutigkeit dieser Definition lediglich verlangen, dass die Massen der Probekörper genügend gross gewählt werden, um jede von ihren Beschleunigungen im Messintervall unter Einfluss der elektromagnetischen Felder herrührende Modifikation dieser Felder vernachlässigen zu können. Würde man in dieser Vernachlässigung einen Widerspruch erblicken zum atomaren Charakter des Impulsaustausches zwischen elektromagnetischen Wellenfeldern und materiellen Körpern, so muss man bedenken, dass es sich beim betrachteten Messproblem keineswegs um die Verfolgung wohldefinierter Elementarvorgänge im Sinne der Lichtquantenvorstellung handelt. Insbesondere wird nach der beschriebenen Messanordnung ein unkontrollierbarer Impulsbeitrag vom festen Gerüst, woran jeder Probekörper vor und nach dem Messintervall gebunden ist, aufgenommen. Im Grenzfall einer klassisch beschreibbaren Wechselwirkung zwischen einem elektromagnetischen Wellenzug und einem genügend schweren, geladenen Körper würde ja die zuletzt erwähnte Impulsübertragung den im Messintervall vom Probekörper aufgenommenen Impuls offenbar genau kompensieren.

Als Vorbereitung zur allgemeinen Diskussion des Messproblems betrachten wir zunächst eine einzelne Feldmessung und fragen, wie im § 3, nach dem Mittelwert von $\mathfrak{E}_x$

in einem bestimmten Raumzeitgebiet, das wir entsprechend den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen mit I kennzeichnen. Nach der Grundgleichung (15) bekommen wir also für die Impulsbilanz des Probekörpers

$$p_x^{(I)''} - p_x^{(I)'} = \varrho_I V_I T_I \left(\bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)} + \bar{E}_x^{(I,I)} \right), \tag{45}$$

wo $\bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)}$ den Anteil des Mittelwerts von $\mathfrak{E}_x$ darstellt, der im betrachteten Raumzeitgebiet I vorhanden wäre, wenn keine Impulsmessung zur Zeit t' am Probekörper vorgenommen wäre, während $\bar{E}_x^{(I,I)}$ den Anteil des Feldmittelwerts bedeutet, der von dieser Messung stammt und dessen klassisch abgeschätzter Ausdruck durch (43) gegeben wird, wenn die Gebiete I und II gleichgesetzt werden.

Nach den Ausführungen von § 3 lässt sich die in (45) auftretende Summe der Feldmittelwerte $\bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)}$ und $\bar{E}_x^{(I,I)}$ durch die Wahl eines genügend grossen Werts von ϱ_I mit beliebiger Genauigkeit bestimmen. Je grösser aber ϱ_I gewählt wird, umso grösser wird der unkontrollierbare Wert von $\bar{E}_x^{(I,I)}$, und der durch die bisher beschriebene, einfache Messanordnung erreichbaren Genauigkeit der Bestimmung von $\bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)}$, welche nach (45) durch

$$\Delta \bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)} \backsim \frac{\Delta p_x^{(I)}}{\varrho_I V_I T_I} + \Delta \bar{E}_x^{(I,I)} \tag{46}$$

gegeben ist, wird daher eine Grenze gesetzt. Mit Rücksicht auf die Relation (16) und auf den Umstand, dass die in (43) auftretende Grösse $D_x^{(I)}$ nur mit dem Spielraum Δx_I voraussagbar ist, erhalten wir nämlich aus (46) für $\Delta \bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)}$ den Ausdruck

$$\Delta \bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)} \backsim \frac{\hbar}{\varrho_I \Delta x_I V_I T_I} + \varrho_I \Delta x_I V_I T_I \left| \bar{A}_{xx}^{(I,I)} \right|, \tag{47}$$

dessen Minimalwert offenbar

$$\Delta_m \bar{\mathfrak{E}}_x^{(I)} \backsim \sqrt{\hbar \left| \bar{A}_{xx}^{(I,I)} \right|} \tag{48}$$

beträgt, und im Fall $L_I > cT_I$ eben gleich der kritischen Grösse Q_I ist. Freilich ist (48), wenn L_I gross gegenüber cT_I ist, wesentlich kleiner als der von Landau und Peierls als absolute Grenze der Messbarkeit von Feldgrössen angegebene Ausdruck (24); wäre aber (48) als eine unvermeidliche Grenze der Messgenauigkeit anzusehen, so kämen wir dennoch zu der mit der Auffassung der genannten Verfasser übereinstimmenden Schlussfolgerung, dass der quantenelektromagnetische Formalismus keine Prüfung im eigentlichen Quantengebiet zuliesse, und dass der ganzen Feldtheorie also nur im klassischen Grenzfall eine physikalische Realität zukäme.

Diese Schlussfolgerung lässt sich jedoch nicht aufrechterhalten, denn der Umstand, dass in $\bar{E}_x^{(I,I)}$ nach (43) der Faktor der unvoraussagbaren Verschiebung $D_x^{(I)}$ eine wohldefinierte, allein von den geometrischen Verhältnissen abhängige Grösse ist, erlaubt uns, bei den Messungen uns so einzurichten, dass die Wirkung des Feldes $E_x^{(I)}$, bis auf die unvermeidlichen Feldschwankungen, völlig kompensiert wird. Dies wird durch eine Messanordnung erreicht, bei welcher der Probekörper auch nicht im Messintervall T_I frei beweglich ist, sondern mit dem festen Gerüst durch einen Federmechanismus verbunden bleibt, dessen Spannung zu $D_x^{(I)}$ proportional ist. Wird die durch diesen Mechanismus in der x-Richtung auf den Probekörper ausgeübte Kraft gleich $-F_I D_x^{(I)}$ angesetzt, so wird offenbar der ganze vom Feld $E_x^{(I)}$ auf diesen Körper übertragene Impuls durch die Feder völlig aufgehoben, wenn die Spannkraft

$$F_{\mathrm{I}} = \varrho_{\mathrm{I}}^2 V_{\mathrm{I}}^2 T_{\mathrm{I}} \bar{A}_{xx}^{(\mathrm{I},\mathrm{I})} \tag{49}$$

gewählt wird. Dies gilt jedenfalls, wenn der Probekörper so schwer ist, dass seine Schwingungsperiode unter dem Einfluss der Feder gross gegen T_{I} und somit seine Verschiebung innerhalb der Zeit T_{I} durch die Federspannung klein gegen $D_x^{(\mathrm{I})}$ ist. Ferner lässt sich die Wirkung der Feder, die streng genommen nur im asymptotischen Grenzfall klassisch beschreibbar ist, mit umso grösserer Näherung auf Grund der klassischen Mechanik berechnen, je grösser die Masse des Probekörpers ist. Abgesehen von den Einschränkungen, die durch die atomistische Struktur aller Körper bedingt sind, dürften gegen eine solche Kompensationsvorrichtung keine prinzipiellen Einwände bestehen. Erstens werden durch die Benutzung einer mechanischen Feder alle elektromagnetischen Felder vermieden, die von den zu messenden Feldern untrennbar wären. Zweitens kann man, wenn die Länge der Feder genügend klein, d. h. klein gegenüber cT_{I} ist, offenbar von allen Retardationseffekten absehen. Wenn das Probekörpersystem genügend schwer ist, so ist es dabei gleichgültig, ob die Feder nur auf einen Teilkörper wirkt, oder ob man ein Federsystem verwendet, das an jedem Teilkörper gleichmässig angreift.

Wir sehen also, dass die Deutbarkeit einer einzelnen Feldmessung allein durch die Grenze beschränkt ist, die der klassischen Beschreibung der Feldwirkungen des Probekörpers gesetzt ist. Diese Begrenzung, die von umso kleinerer Bedeutung ist, je grösser L_{I} ist gegenüber cT_{I}, hat jedoch auch im Falle $L_{\mathrm{I}} \leq cT_{\mathrm{I}}$ keinerlei Einschränkung der Prüfbarkeit der Folgerungen des quantenelektromagnetischen Formalismus zur Folge. Bei der Beurteilung dieser Frage müssen wir scharf unterscheiden zwischen

der Prüfung von theoretischen Erwartungen, welche auf Feldmessungen beruhende Angaben über elektrische oder magnetische Kräfte voraussetzen, und von solchen, die sich auf eine auf anderer Grundlage gewonnene Kenntnis des Zustandes des betrachteten Felds beziehen. Was die ersteren Erwartungen betrifft, so erfordert ihre Prüfung selbstverständlich eine nähere Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen mehrerer Feldmessungen; hier kann es sich also zunächst nur um die Prüfung von Erwartungen der letzeren Art handeln.

Es ist nun, wie im § 2 erwähnt, ein Hauptergebnis der Quantentheorie der Felder, dass alle Erwartungen über Feldmittelwerte, die nicht auf eigentlichen Feldmessungen, sondern auf der Lichtquantenzusammensetzung des zu untersuchenden Feldes oder auf der Kenntnis klassisch beschriebener Feldquellen beruhen, wesentlich statistischer Natur sein müssen. Die dortige nähere Ausführung zeigt ferner, dass die Einbeziehung der Schwankungen der Feldwirkungen der Probekörper um ihre klassisch abgeschätzten Werte keinerlei Änderung dieser statistischen Erwartungen mit sich bringt. Ohne weitere Korrektion bieten sich also die mittels der beschriebenen Versuchsanordnung erzielten Messergebnisse für die Prüfung der theoretischen Aussagen als die gesuchten Feldmittelwerte dar. Eine solche Auffassung der Messergebnisse, deren allgemeine Berechtigung wir im Folgenden näher untersuchen werden, ist auch dadurch nahegelegt, dass es sich bei allen Messungen von physikalischen Grössen definitionsmässig um die Anwendung klassischer Vorstellungen handeln muss, und dass also bei Feldmessungen jede Rücksichtnahme auf die Begrenzung der strengen Anwendbarkeit der klassischen Elektrodynamik im Widerspruch mit dem Messbegriff selber stehen würde.

Obwohl somit bei den Feldmessungen, wie schon in der Einleitung betont, der Messbegriff mit noch grösserer Vorsicht anzuwenden ist als bei den üblichen quantenmechanischen Messproblemen, weist die geschilderte Situation jedoch in bezug auf die Untrennbarkeit zwischen Phänomen und Messvorgang eine weitgehende Analogie zu diesen Problemen auf. Schon bei einer Orts- oder Impulsmessung des Elektrons eines Wasserstoffatoms von gegebenem stationären Zustand kann man ja mit gewissem Recht behaupten, dass das Messergebnis erst durch die Messung selber geschaffen wird. Wohl ist hier keine Rede von einer Begrenzung der Deutbarkeit der Messergebnisse auf Grund der klassischen Mechanik, sondern nur von einem Verzicht auf jede Kontrolle der Beeinflussung des Zustandes des Atoms durch den Messvorgang. Bei den Feldmessungen entspricht dieser für die Widerspruchsfreiheit wesentliche, komplementäre Zug der Beschreibung dem Umstand, dass die Kenntnis der Lichtquantenzusammensetzung des Feldes durch die Feldwirkungen der Probekörper verloren geht, und zwar gemäss (44) in umso grösserem Mass, je grösser die bei der Messung angestrebte Genauigkeit ist. Ausserdem ergibt sich aus der folgenden Diskussion, dass jeder Versuch, die Kenntnis der Lichtquantenzusammensetzung des Feldes durch eine nachträgliche Messung mittels irgend einer geeigneten Vorrichtung wiederherzustellen, zugleich jede weitere Verwertung der betreffenden Feldmessung verhindern würde.

Dass beim Nachweis der Übereinstimmung zwischen der Prüfbarkeit der Folgerungen des quantenelektromagnetischen Formalismus mittels einer einzelnen Feldmessung und der Deutbarkeit einer solchen Messung auf Grund der klassischen Elektrodynamik die reinen Hohlraumschwankungen als gemeinsame Begrenzung auftreten, bedeutet jedoch keineswegs, dass diese Schwankungen jeder Verwertung von Feldmessungen eine absolute Grenze setzen. In der Tat besteht eine derartige allgemeine Einschränkung weder für die Folgerungen des Formalismus betreffend Beziehungen zwischen Mittelwerten einer Feldkomponente über verschiedene Bereiche noch für die Prüfung solcher Beziehungen durch direkte Feldmessungen. Dies wird aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen hervorgehen, und es wird sich insbesondere zeigen, dass die für die Diskussion der Widerspruchsfreiheit der üblichen Quantenmechanik wesentliche Forderung der Wiederholbarkeit von Messungen kinematischer und dynamischer Grössen bei den Feldmessungen ihr sinngemässes Analogon besitzt.

§ 6. Messbarkeit zweier Mittelwerte einer Feldkomponente.

Bei der Untersuchung der Messbarkeit zweier Feldgrössen ist es zweckmässig, mit der Messung der Mittelwerte einer und derselben Feldkomponente über zwei verschiedene Gebiete I und II anzufangen. Indem wir, wie oben, die Feldkomponente $\mathfrak{E}_x$ betrachten, und zunächst von der Begrenzung der klassischen Beschreibbarkeit der Feldwirkungen der Probekörper absehen, haben wir also in diesem Fall für die Impulsbilanz der beiden Probekörper anstatt (45):

$$\left.\begin{aligned} p_x^{(\mathrm{I})''} - p_x^{(\mathrm{I})'} &= \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \left(\overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} + \bar{E}_x^{(\mathrm{I},\mathrm{I})} + \bar{E}_x^{(\mathrm{II},\mathrm{I})}\right) \\ p_x^{(\mathrm{II})''} - p_x^{(\mathrm{II})'} &= \varrho_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}} \left(\overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{II})} + \bar{E}_x^{(\mathrm{II},\mathrm{II})} + \bar{E}_x^{(\mathrm{I},\mathrm{II})}\right), \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

wo $\bar{E}_x^{(\mathrm{I},\mathrm{II})}$ durch den Ausdruck (43) definiert ist, und $\bar{E}_x^{(\mathrm{II},\mathrm{I})}$ sich aus diesem Ausdruck durch einfache Vertauschung der Indizes I und II ergibt.

Das Auftreten der Ausdrücke $\bar{E}_x^{(I, I)}$ und $\bar{E}_x^{(II, II)}$ in den Gleichungen (50) hat nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zur Folge, dass jeder der gesuchten Feldmittelwerte $\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}$ und $\overline{\mathfrak{E}}_x^{(II)}$ mittels einer einfachen Messanordnung nur mit einer durch (48) gegebenen beschränkten Genauigkeit bestimmt werden kann. Es ist also von vornherein einleuchtend, dass ein Kompensationsverfahren unvermeidlich ist, und zur vorläufigen Orientierung über das hier betrachtete, mehr verwickelte Messproblem werden wir deshalb zunächst eine Messanordnung heranziehen, in welcher die Rückwirkungen $\varrho_I V_I T_I \bar{E}_x^{(I, I)}$ und $\varrho_{II} V_{II} T_{II} \bar{E}_x^{(II, II)}$ durch zwei auf die Probekörper I und II wirkende Federn, deren Spannkräfte durch (49) und einen analogen Ausdruck gegeben sind, aufgehoben werden.

Aus den Gleichungen (50), unter Auslassung von $\bar{E}_x^{(I, I)}$ und $\bar{E}_x^{(II, II)}$, ergibt sich gemäss (16) und (43) für die Unsicherheiten der beiden Feldmessungen bei dieser Messanordnung, wenn man noch berücksichtigt, dass die in $\bar{E}_x^{(I, II)}$ und $\bar{E}_x^{(II, I)}$ auftretenden Verschiebungen $D_x^{(I)}$ und $D_x^{(II)}$ der Probekörper von einander völlig unabhängig und nur mit den Spielräumen Δx_I bzw. Δx_{II} bekannt sind:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)} &\sim \frac{\hbar}{\varrho_I \Delta x_I V_I T_I} + \varrho_{II} \Delta x_{II} V_{II} T_{II} \left|\bar{A}_{xx}^{(II, I)}\right| \\ \Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(II)} &\sim \frac{\hbar}{\varrho_{II} \Delta x_{II} V_{II} T_{II}} + \varrho_I \Delta x_I V_I T_I \left|\bar{A}_{xx}^{(I, II)}\right|. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Durch passende Wahl der Werte von $\varrho_I \Delta x_I$ und $\varrho_{II} \Delta x_{II}$ lässt sich offenbar jede der Grössen $\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)}$, $\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(II)}$ einzeln beliebig herabsetzen, jedoch nur auf Kosten einer Zunahme der anderen. Für das Produkt der beiden Grössen bekommen wir ja nach (51) den Minimalwert

$$\Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(I)} \Delta\overline{\mathfrak{E}}_x^{(II)} \sim \hbar \left[\left|\bar{A}_{xx}^{(I, II)}\right| + \left|\bar{A}_{xx}^{(II, I)}\right|\right]. \tag{52}$$

Trotz der grossen Aehnlichkeit der Relation (52) mit den von dem Formalismus geforderten Unsicherheitsrelationen (8) besteht jedoch ein prinzipieller Unterschied darin, dass in den letzteren nicht die Summe der Beträge der Grössen $\bar{A}_{xx}^{(I,II)}$ und $\bar{A}_{xx}^{(II,I)}$, sondern ihre algebraische Differenz auftritt. Zwar stimmen (8) und (52) im allgemeinen grössenordnungsmässig mit einander überein, wenn die Gebiete I und II räumlich und zeitlich um Strecken der Grössenordnung L und T gegen einander verschoben sind, wo sie beide den Abschätzungswert Q^2 ergeben. Die in der Unbestimmtheitsrelation (8) auftretende Differenz bewirkt aber, wie im § 2 erwähnt, dass das Produkt der komplementären Unsicherheiten in wichtigen Fällen identisch verschwindet, obwohl die Grössen $\bar{A}_{xx}^{(I, II)}$ und $\bar{A}_{xx}^{(II, I)}$ einzeln von Null verschieden bleiben. Dies trifft zum Beispiel zu, wenn die zeitlichen Mittelwertsintervalle T_I und T_{II} zusammenfallen, und insbesondere wenn die Mittelwertbereiche I und II sich ganz überdecken. Im letzteren Fall würde sogar die durch (52) gegebene Grenze der Messbarkeit zweier Feldmittelwerte in schroffem Widerspruch stehen mit dem Resultat der obigen Diskussion der Messung eines einzelnen Feldmittelwerts. Ueberhaupt stimmen die Ausdrücke (52) und (8) nur dann genau überein, wenn mindestens eine der Grössen $\bar{A}_{xx}^{(I,II)}$ oder $\bar{A}_{xx}^{(II,I)}$ verschwindet, was im allgemeinen erfordert, dass einer der in den Integralen (5) als Argumente der δ-Funktion auftretenden Ausdrücke $t_1 - t_2 - \frac{r}{c}$ oder $t_2 - t_1 - \frac{r}{c}$ für jedes Punktepaar (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) der Gebiete I und II von Null verschieden bleibt.

Abgesehen vom letzterwähnten Fall, wo zwischen den beiden Feldmittelwerten keine, oder jedenfalls nur eine einseitige

Korrelation besteht, verlangt also der Nachweis der Uebereinstimmung zwischen Messbarkeit und quantenelektromagnetischem Formalismus eine verfeinerte Messanordnung, wo die unkontrollierbaren Effekte in grösserem Masse kompensiert werden können. Zwar tritt hier, im Vergleich mit dem schon für die Messung einer Feldgrösse nötigen Kompensationsverfahren, die weitere Komplikation auf, dass die Verschiebungen beider Probekörper nicht nur unbekannt bleiben müssen, sondern auch von einander völlig unabhängig sind. Dieser Umstand bedeutet aber keine prinzipielle Schwierigkeit, nur wird ein etwas komplizierteres Verfahren notwendig, um auch den Einfluss der relativen Verschiebung der Probekörper auf die Feldmessungen möglichst zu kompensieren. Zu diesem Zweck wählen wir uns aus den Probekörpersystemen I und II je einen Teilkörper ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$, für die der Ausdruck $r-c\,(t_1-t_2)$ für zwei innerhalb der Zeitintervalle T_{I} bzw. T_{II} liegende Zeitpunkte t_{I}^{*} und t_{II}^{*} Null wird. Wäre eine solche Wahl nicht möglich, so wäre ja nach dem oben Gesagten die Uebereinstimmung zwischen Messbarkeit und Formalismus schon ohne weitere Kompensation erreicht. Zur Herstellung der notwendigen Korrelation zwischen den Probekörpern könnte man zunächst an eine Feder denken, welche die Körper ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ direkt mit einander verbinden sollte; dabei käme man jedoch wegen der Retardation der Kräfte in Schwierigkeiten. Es ist aber möglich, mit einer kurzen, d. h. gegen cT kleinen Feder auszukommen, indem man zum zweiten Probekörpersystem einen neutralen Teilkörper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ hinzufügt, der sich in der unmittelbaren Nähe des zum ersten System gehörigen Teilkörpers ε_{I} befindet, und mit diesem durch eine Feder verbunden ist.

Wie alle Teilkörper der beiden Probekörpersysteme soll zunächst der Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ an das feste Gerüst gebunden sein. Zur Zeit t_{I}' soll nun nach Auflösung dieser Verbindung sein Impuls mit derselben Genauigkeit, wie derjenige des Probekörpersystems II gemessen werden. Dadurch erleidet er eine unbekannte Verschiebung $D_x^{(\mathrm{III})}$ in der x-Richtung, die von derselben Grössenordnung wie Δx_{II} ist. Wird nun die Spannkraft der zwischen $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ und ε_{I} angebrachten Feder gleich $\frac{1}{2}\,\varrho_{\mathrm{I}}\varrho_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{II}}\left(\bar{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})}+\bar{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})}\right)$ gewählt, so wird im Zeitintervalle T_{I} von $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ auf ε_{I} der Impuls

$$P=\frac{1}{2}\,\varrho_{\mathrm{I}}\varrho_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{II}}\left(\bar{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})}+\bar{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})}\right)\left(D_x^{(\mathrm{I})}-D_x^{(\mathrm{III})}\right) \tag{53}$$

übertragen, während $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ im selben Zeitintervall die Impulsänderung $-P$ erleidet. Zur Zeit t_{I}'' wird wieder der Impuls von $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ mit derselben Genauigkeit gemessen. Vor dieser Messung, und zwar zur Zeit t_{II}^{*} soll aber ein kurzes Lichtsignal von $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ nach $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ gesandt werden, durch welches mittels einer geeigneten Vorrichtung die relative Verschiebung $D_x^{(\mathrm{III})}-D_x^{(\mathrm{II})}$ dieser Körper mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden kann. Bei der Aussendung, bzw. beim Empfang des Signals erleiden beide Körper Impulsänderungen, die zwar völlig unbekannt bleiben, sich aber in der Summe der an den Körpern gemessenen Impulsdifferenzen gegenseitig genau aufheben.

Für die Impulsbilanz der beiden Probekörpersysteme während der Messung haben wir also, wenn wir den Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ zum System II mitrechnen,

$$\left.\begin{aligned}
p_x^{(\mathrm{I})''}-p_x^{(\mathrm{I})'}&=\varrho_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{I}}\left(\mathfrak{E}_x^{(\mathrm{I})}+\bar{E}_x^{(\mathrm{II,I})}\right)+P\\
p_x^{(\mathrm{II})''}-p_x^{(\mathrm{II})'}+p_x^{(\mathrm{III})''}-p_x^{(\mathrm{III})'}&=\varrho_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{II}}\left(\mathfrak{E}_x^{(\mathrm{II})}+\bar{E}_x^{(\mathrm{I,II})}\right)-P.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Unter Berücksichtigung von (43) und (53) lassen sich diese Formeln in die Gestalt

$$
\left.\begin{aligned}
p_x^{(\mathrm{I})''} - p_x^{(\mathrm{I})'} &= \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} \\
&+ \frac{1}{2} \varrho_{\mathrm{I}} \varrho_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{II}} \Big\{ - D_x^{(\mathrm{II})} \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} - \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) \\
&+ \left(D_x^{(\mathrm{II})} - D_x^{(\mathrm{III})} \right) \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} + \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) + D_x^{(\mathrm{I})} \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} + \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) \Big\} \\
p_x^{(\mathrm{II})''} - p_x^{(\mathrm{II})'} + p_x^{(\mathrm{III})''} - p_x^{(\mathrm{III})'} &= \varrho_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}} \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{II})} \\
&+ \frac{1}{2} \varrho_{\mathrm{I}} \varrho_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{II}} \Big\{ D_x^{(\mathrm{I})} \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} - \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) \\
&- \left(D_x^{(\mathrm{II})} - D_x^{(\mathrm{III})} \right) \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} + \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) + D_x^{(\mathrm{II})} \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} + \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (55)
$$

bringen.

Die letzten Glieder in den geschweiften Klammern von (55) sind den unbekannten Verschiebungen der Probekörper I und II proportional und können also, genau wie die einfachen Rückwirkungen jedes Probekörpers auf sich selbst, durch geeignete Federverbindungen mit dem festen Gerüst aufgehoben werden. Dies läuft einfach darauf hinaus, dass der durch (49) gegebene Ausdruck der Spannkraft der auf den Körper I wirkenden Feder durch

$$
F_{\mathrm{I,II}} = \varrho_{\mathrm{I}}^2 V_{\mathrm{I}}^2 T_{\mathrm{I}} \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,I})} + \frac{1}{2} \varrho_{\mathrm{I}} \varrho_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}} \left(\overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} + \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right) \quad (56)
$$

zu ersetzen ist, und dass die Spannkraft der Feder zwischen dem Gerüst und dem Körper II analog zu ändern ist. Weiter sind die zur relativen Verschiebung $D_x^{(\mathrm{III})} - D_x^{(\mathrm{II})}$ proportionalen Glieder bei der beschriebenen Messanordnung mit beliebiger Genauigkeit bekannt und lassen sich daher bei den Feldmessungen einfach in Rechnung ziehen. Übrigens könnte man durch eine etwas kompliziertere Vorrichtung sogar erreichen, dass die Differenz $D_x^{(\mathrm{III})} - D_x^{(\mathrm{II})}$ verschwin-

det, indem man, analog der im § 3 beschriebenen Anordnung für die Messung des Gesamtimpulses eines Probekörpersystems, zur Bestimmung von $p_x^{(\mathrm{II})} + p_x^{(\mathrm{III})}$ ein und dasselbe Strahlungsbündel benutzt und mittels passend angebrachter fester Spiegel die Lichtwege so regelt, dass die Reflexionen am Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ und an allen Teilkörpern des Systems II bei der ersten Impulsmessung zu den Zeiten t'_{I} bzw. t'_{II} und bei der zweiten Impulsmessung zu den Zeiten t''_{I} bzw. t''_{II} erfolgen.

Durch alle diese Vorrichtungen, deren beträchtliche Komplikation im Wesen der Sache liegt, indem sie allein durch die endliche Fortpflanzung aller Feldwirkungen bedingt ist, haben wir nun wirklich den am Anfang dieses Paragraphen beschriebenen scheinbaren Gegensatz zwischen den Bestimmungen eines und zweier Mittelwerte einer Feldkomponente zum Verschwinden gebracht. Aus (55) bekommen wir jetzt nämlich für die Unbestimmtheiten von $\overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})}$ und $\overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{II})}$ anstatt (51)

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} &\sim \frac{\hbar}{\varrho_{\mathrm{I}} \Delta x_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{2} \varrho_{\mathrm{II}} \Delta x_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}} \left| \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} - \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right| \\
\Delta \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{II})} &\sim \frac{\hbar}{\varrho_{\mathrm{II}} \Delta x_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}}} + \frac{1}{2} \varrho_{\mathrm{I}} \Delta x_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \left| \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} - \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right|,
\end{aligned}\right\} \quad (57)
$$

woraus sich für den Minimalwert des Produkts der Unsicherheiten

$$
\Delta \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} \Delta \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{II})} \sim \hbar \left| \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{I,II})} - \overline{A}_{xx}^{(\mathrm{II,I})} \right| \quad (58)
$$

direkt ergibt, im Einklang mit der durch (8) ausgedrückten Folgerung der Quantentheorie der Felder.

Um die völlige Übereinstimmung zwischen der Messbarkeit der Mittelwerte einer Feldkomponente über zwei

Raumzeitgebiete und den Forderungen des quantenelektromagnetischen Formalismus nachzuweisen, müssen wir jedoch etwas näher auf die Frage eingehen, inwiefern die benutzte Annahme der klassischen Beschreibbarkeit der Feldwirkungen der Probekörper die Prüfungsmöglichkeiten der theoretischen Erwartungen beeinträchtigt. Eben bei der Messung mehrerer Feldmittelwerte könnte man nämlich, wie schon berührt, von vornherein denken, dass die Vernachlässigung der klassisch unverfolgbaren, von den reinen Hohlraumschwankungen untrennbaren Schwankungen aller Feldwirkungen der Probekörper in dieser Hinsicht einen wesentlichen Verzicht bedeute. Solange es sich um Mittelwertsgebiete handelt, die gegen einander räumlich und zeitlich um Strecken von derselben Grössenordnung wie ihre linearen Abmessungen L und zugehörigen Zeitintervalle T verschoben sind, ist allerdings in dem wichtigen Fall, wo L gross gegenüber cT ist, die in Frage stehende Vernachlässigung von geringer Bedeutung. Wenn jedoch L grössenordnungsmässig gleich oder kleiner als cT ist, so sind, wie in § 2 erwähnt, die Hohlraumschwankungen eben von derselben Grössenordnung wie die für zwei derart verschobene Gebiete mittels der Unbestimmtheitsrelationen definierte kritische Feldstärke $\mathfrak{U}$, die als die Grenze der klassischen Feldbeschreibung anzusehen ist. Besonders aber für zwei fast zusammenfallende Gebiete, wo das durch (8) gegebene Produkt der komplementären Unsicherheiten der Feldmittelwerte unabhängig vom Verhältnis zwischen L und cT gegen Null strebt, und somit die kritische Feldstärke $\mathfrak{U}$ im Vergleich mit den Hohlraumschwankungen beliebig klein sein kann, könnte die erwähnte Vernachlässigung noch bedenklicher vorkommen und scheinbar einen völligen Verzicht auf die Wiederholbarkeit der Feldmessungen bedeuten.

Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, dass wir eine widerspruchsfreie Deutung aller Folgerungen der Quantentheorie der Felder erreichen, wenn wir in zwangläufiger Verallgemeinerung des Messbegriffs die mittels der beschriebenen Anordnung erhaltenen Messergebnisse als die gesuchten Feldmittelwerte auffassen. Die in den Feldwirkungen sämtlicher Probekörper einbegriffenen, klassisch unbeschreibbaren Schwankungen lassen sich nämlich gar nicht trennen von den prinzipiell statistischen Zügen jeder theoretischen Aussage, deren Voraussetzungen sich nicht auf eigentliche Feldmessungen beziehen. Ohne das gestellte Messproblem in irgendwelcher Weise einzuschränken, können wir daher die betrachteten Schwankungen immer als integrierenden Bestandteil des zu messenden Feldes ansehen. Die Verhältnisse bei mehreren Feldmessungen weichen in dieser Hinsicht nur insofern von den bei der Messung eines einzigen Feldmittelwertes vorliegenden ab, als der Feldzustand, mit dem wir im allgemeinen Fall bei jeder einzelnen Messung zu tun haben, durch das Resultat der anderen Feldmessungen mitbestimmt wird.

Mit Hinblick auf die geschilderte Sachlage dürfte es jedoch nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dass wir bei der Korrelation mehrerer Feldmessungen mit einem dem üblichen Messproblem der nichtrelativistischen Quantenmechanik fremden Zug der allgemeinen Komplementarität der Beschreibung zu tun haben. Die grundsätzliche Vereinfachung, der wir in letzterer Theorie begegnen, liegt ja eben in der dort gemachten Trennung zwischen Raumkoordination und Zeitverlauf, welche es ermöglicht, alle Messvorgänge in eine einfache zeitliche Reihenfolge zu ordnen. Bei der Messung zweier Feldmittelwerte dagegen ist es nur dann möglich, von einer solchen Reihenfolge der Messvorgänge zu sprechen, wenn die zugehörigen Zeitintervalle ganz auseinanderliegen. Im allgemeinen wird auch, wie es dem Formalismus entspricht, die Korrelation der beiden Messungen eine gegenseitige sein; und nur wenn eine der Grössen $r - c(t_1 - t_2)$ und $r - c(t_2 - t_1)$ für alle Punktepaare der Gebiete I und II von Null verschieden bleibt, begegnen wir ähnlichen Verhältnissen, wie beim gewöhnlichen Messproblem der Atommechanik, indem das Ergebnis der einen Feldmessung sich dann einfach mitrechnen lässt zu den Voraussetzungen der durch die andere Messung zu prüfenden Erwartungen.

Ein lehrreiches Beispiel einer engen gegenseitigen Korrelation treffen wir eben bei Messungen der Mittelwerte einer Feldkomponente über zwei beinahe zusammenfallende Raumzeitgebiete. Entsprechend der Forderung der Wiederholbarkeit der Messergebnisse verlangt hier die Theorie, dass beide Messungen mit beliebiger Annäherung dasselbe Resultat ergeben sollen, ganz unabhängig von den durch die Voraussetzungen bedingten statistischen Aussagen über die Werte der zu messenden Feldgrössen. Dass diese Forderung bei unserer Versuchsanordnung auch wirklich erfüllt ist, folgt daraus, dass wir in diesem Fall mit zwei Probekörpersystemen zu tun haben, die fast denselben Raumbereich einnehmen und fast im selben Zeitintervall benutzt werden. Definitionsgemäss werden sie also fast demselben Feld ausgesetzt, ganz gleichgültig, aus welchen Quellen dieses Feld stammt, und welcher Beitrag von dem einen oder andern Probekörper herrührt.

Aus der letzten Bemerkung folgt eigentlich, dass wir bei zusammenfallenden Mittelwertgebieten schon ohne jede Kompensation genau übereinstimmende Resultate der beiden Messungen bekommen würden. Wegen der Feldwirkungen der Probekörper würden aber die so gewonnenen Messresultate umso mehr von den zu prüfenden theoretischen Erwartungen in unvoraussagbarer Weise abweichen, je grösser die angestrebte Messgenauigkeit ist. Durch den für einzelne Feldmessungen geeigneten Kompensationsmechanismus, den wir am Anfang dieses Paragraphen unverändert beibehalten hatten, werden diese Abweichungen zwar im allgemeinen herabgesetzt, aber jede strenge Korrelation der Messergebnisse wird zugleich durch die den unabhängigen Verschiebungen der Probekörper proportionalen Federwirkungen verhindert. Bei der für zwei Feldmessungen schliesslich angenommenen Anordnung, bei welcher alle wohldefinierten Unterschiede zwischen Messergebnissen und theoretischen Erwartungen kompensiert werden, wird auch eine solche Korrelation eben für zusammenfallende Gebiete wiederhergestellt. Denn, ganz unabhängig vom Grössenverhältnis der unkontrollierbaren Verschiebungen der Probekörper, sind, wie man leicht sieht, die durch die Gesamtwirkung aller Federn auf jeden Probekörper übertragenen Impulse, durch die entsprechenden Ladungsdichten dividiert, in diesem Fall genau dieselben.

Was die Widerspruchsfreiheit der Beschreibung betrifft, möchten wir noch bemerken, dass jeder Versuch, die durch eine Feldmessung verursachte Änderung des Lichtquantenzustands des Feldes durch die Untersuchung der Strahlung des Probekörpers zu kontrollieren, wie schon mehrmals erwähnt, die Möglichkeit ausschliessen würde, das Messergebnis für einen Vergleich mit einer zweiten Feldmessung zu verwerten. Damit nämlich von einer solchen Verwertung überhaupt die Rede sein kann, muss es Punktepaare aus den Gebieten I bzw. II geben, für welche einer der Ausdrücke $r - c(t_1 - t_2)$ oder $r - c(t_2 - t_1)$ verschwindet. Dies hat aber zur Folge, dass die Strahlungsfelder, die durch die Probekörper I und II während der Feldmessungen erzeugt werden, nicht auf ihrem Wege von dem einen zum andern Probekörper aufgefangen und analysiert werden können, ohne zugleich die durch diese Körper zu messenden Felder wesentlich zu beeinflussen. Erst nach Beendigung aller Feldmessungen, wo ihre direkte Verwertung nicht mehr in Betracht kommt, kann man eine beliebig genaue Analyse des Lichtquantenzustands des Gesamtfeldes ohne Beeinträchtigung des gestellten Messproblems vornehmen.

§ 7. Messbarkeit zweier Mittelwerte verschiedener Feldkomponenten.

Was die Messungen von Mittelwerten verschiedener Feldkomponenten betrifft, so erfordert nur der Fall senkrechter, gleichartiger oder ungleichartiger, Komponenten eine nähere Untersuchung, denn die vom quantenelektromagnetischen Formalismus verlangte völlige Vertauschbarkeit und unabhängige Messbarkeit von Mittelwerten paralleler ungleichartiger Komponenten findet gemäss (42) ihre unmittelbare Deutung im identischen Verschwinden der Komponente $H_x^{(\mathrm{I})}$ des durch die Messung von $\overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})}$ erzeugten Feldes. Übrigens lässt auf Grund der Gleichungen (43) die Messung von Mittelwerten senkrechter Feldkomponenten eine dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Verfahren analoge Behandlungsweise zu.

Betrachten wir die Messung des Mittelwerts von $\mathfrak{E}_x$ über das Gebiet I und des Mittelwerts von $\mathfrak{E}_y$ oder $\mathfrak{H}_y$ über das Gebiet II. Wenn wir zunächst eine Messanordnung heranziehen, wobei die Feldwirkungen jedes Probekörpers auf sich selbst während der Messung in der im

§ 5 beschriebenen Weise kompensiert werden, so bekommen wir für die Impulsbilanz der beiden zu benutzenden Probekörper Gleichungen vom folgenden Typus:

$$\left.\begin{aligned} p_x^{(\mathrm{I})''} - p_x^{(\mathrm{I})'} &= \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \left(\overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} + D_y^{(\mathrm{II})} \sigma_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}} \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II},\mathrm{I})}\right) \\ p_y^{(\mathrm{II})''} - p_y^{(\mathrm{II})'} &= \sigma_{\mathrm{II}} V_{\mathrm{II}} T_{\mathrm{II}} \left(\overline{\mathfrak{R}}_y^{(\mathrm{II})} + D_x^{(\mathrm{I})} \varrho_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}} \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})}\right) \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Je nachdem es sich um die Messung gleichartiger oder ungleichartiger Komponenten handelt, vertritt dabei der Buchstabe $\mathfrak{R}$ die übliche Bezeichnung der Feldkomponenten $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$, während C anstatt der in (43) auftretenden Symbole A oder B geschrieben ist; weiter stellt die Bezeichnung σ_{II} die Ladungsdichte bzw. Polstärkenverteilung des Probekörpers II dar.

In einer zur Herleitung von (52) analogen Weise ergibt sich aus (59) die Relation

$$\Delta \overline{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} \Delta \overline{\mathfrak{R}}_y^{(\mathrm{II})} \sim \hbar \left[\left| \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})} \right| + \left| \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II},\mathrm{I})} \right| \right], \quad (60)$$

welche, wie (52), nicht allgemein, sondern nur in gewissen Fällen eine Übereinstimmung zwischen Messbarkeit und quantenelektromagnetischem Formalismus darstellt. Von solchen Fällen möchten wir die Messung ungleichartiger senkrechter Feldkomponenten innerhalb desselben Raumbereichs besonders erwähnen, bei welcher, wie im § 2 hervorgehoben, beide Ausdrücke $\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})}$ und $\bar{B}_{xy}^{(\mathrm{II},\mathrm{I})}$ Null sind. Die Richtigkeit der Deutung dieser Tatsache als beliebig genaue unabhängige Messbarkeit der betreffenden Feldgrössen wurde bereits im § 3 für zusammenfallende Raumzeitgebiete durch eine elementare Betrachtung nahegelegt.

Zur allgemeinen Behandlung des Messbarkeitsproblems senkrechter Feldkomponenten wählen wir, wie im vorigen Paragraphen, zwei Teilkörper ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ der Probekörpersysteme I bzw. II, deren Abstand $r = c(t_{\mathrm{I}}^{*} - t_{\mathrm{II}}^{*})$ ist, wobei t_{I}^{*} und t_{II}^{*} innerhalb der Zeitintervalle T_{I} bzw. T_{II} liegen. Weiter bringen wir in unmittelbare Nähe von ε_{I} einen dritten Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$, dessen Impuls in der y-Richtung zu den Zeiten t_{I}' und t_{I}'' gemessen wird; die relative Verschiebung $D_y^{(\mathrm{III})} - D_y^{(\mathrm{II})}$ der Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ wird wieder durch ein Lichtsignal bestimmt, wodurch beide Körper entgegengesetzt gleiche Impulsänderungen erleiden. Anstatt $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ mit ε_{I} direkt durch eine Feder zu verbinden, müssen wir aber, um die Kraftübertragung durch den Federmechanismus proportional zu $D_y^{(\mathrm{III})} - D_x^{(\mathrm{I})}$ zu machen, eine Vorrichtung gebrauchen, die aus zwei Federn und einem Winkelhebel mit zwei gleich langen, zu einander senkrecht stehenden Armen besteht, der um ein am festen Gerüst angebrachtes Gelenk drehbar ist, und dessen Arme anfänglich parallel zur x-, bzw. y-Richtung stehen. Zwischen dem ersten Arm und dem Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ wird eine zur y-Achse parallele Feder angebracht, und zwischen dem zweiten Arm und dem Körper ε_{I} wirkt eine zur x-Achse parallele Feder. Die Spannkraft der Feder sei so gewählt, dass die Kraft, die während des Zeitintervalls T_{I} den Körper $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ in der y-Richtung und den Körper ε_{I} in der x-Richtung angreift, durch

$$\frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{II}}\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} + \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right)\left(D_x^{(\mathrm{I})} - D_y^{(\mathrm{III})}\right)$$

gegeben wird.

Die Impulsbilanz der beiden Probekörpersysteme schreibt sich also nach zweckmässiger Umformung in folgender, zu (55) analoger Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
p_x^{(\mathrm{I})''} - p_x^{(\mathrm{I})'} &= \varrho_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{I}}\bar{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} \\
&+ \frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{II}}\Big\{-D_y^{(\mathrm{II})}\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} - \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right) \\
&+ \left(D_y^{(\mathrm{II})} - D_y^{(\mathrm{III})}\right)\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} + \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right) + D_x^{(\mathrm{I})}\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} + \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right)\Big\} \\
p_y^{(\mathrm{II})''} - p_y^{(\mathrm{II})'} + p_y^{(\mathrm{III})''} - p_y^{(\mathrm{III})'} &= \sigma_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{II}}\bar{\mathfrak{H}}_y^{(\mathrm{II})} \\
&+ \frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{II}}\Big\{D_x^{(\mathrm{I})}\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} - \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right) \\
&+ \left(D_y^{(\mathrm{II})} - D_y^{(\mathrm{III})}\right)\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} + \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right) - D_y^{(\mathrm{II})}\left(\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} + \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right)\Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Nach Kompensation der letzten Glieder erhalten wir somit für die Unsicherheiten der Feldmittelwerte:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\bar{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})} &\sim \frac{\hbar}{\varrho_{\mathrm{I}}\Delta x_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{II}}\Delta y_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{II}}\left|\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} - \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right| \\
\Delta\bar{\mathfrak{H}}_y^{(\mathrm{II})} &\sim \frac{\hbar}{\sigma_{\mathrm{II}}\Delta y_{\mathrm{II}}V_{\mathrm{II}}T_{\mathrm{II}}} + \frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{I}}\Delta x_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{I}}T_{\mathrm{I}}\left|\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} - \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right|,
\end{aligned}\right\} \quad (62)$$

woraus sich für den Minimalwert ihres Produktes

$$\Delta\bar{\mathfrak{E}}_x^{(\mathrm{I})}\Delta\bar{\mathfrak{H}}_y^{(\mathrm{II})} \sim \hbar\left|\bar{C}_{xy}^{(\mathrm{I,II})} - \bar{C}_{xy}^{(\mathrm{II,I})}\right| \quad (63)$$

ergibt, wiederum in vollem Einklang mit dem quantenelektromagnetischen Formalismus.

Aus den allgemeinen Ausführungen am Ende des vorigen Paragraphen folgt weiter, dass auch in dem hier betrachteten Fall die Verwertung der Feldmessungen für die Prüfung der Aussagen des Formalismus in keiner Weise durch die klassische Abschätzung der Feldwirkungen beeinträchtigt wird. Übrigens kommt bei Messungen von Mittelwerten verschiedener Feldkomponenten die Frage der Wiederholbarkeit gar nicht in Betracht, und die reinen Hohlraumschwankungen sind als unvermeidlicher statistischer Zug in allen theoretischen Aussagen einbegriffen.

§ 8. Schlussbemerkungen.

Wir kommen also zu der bereits anfangs erwähnten Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie der Felder in bezug auf die Messbarkeitsfrage eine widerspruchsfreie Idealisation darstellt in dem Umfang, in dem wir von allen Einschränkungen, die auf der atomistischen Struktur der Feldquellen und der Messinstrumente beruhen, absehen können. Eigentlich dürfte dieses Ergebnis, wie schon in der Einleitung betont, anzusehen sein als eine unmittelbare Konsequenz der gemeinsamen korrespondenzmässigen Grundlage des quantenelektromagnetischen Formalismus und der Gesichtspunkte, von welchen die Prüfungsmöglichkeiten dieses Formalismus zu beurteilen sind. Nichtsdestoweniger dürfte der etwas komplizierte Charakter der zum Nachweis der völligen Übereinstimmung zwischen Formalismus und Messbarkeit herangezogenen Betrachtungen kaum zu vermeiden sein. Erstens sind ja die an der Messanordnung zu stellenden physikalischen Forderungen bedingt durch die in Integralform gekleideten Aussagen des quantenelektromagnetischen Formalismus, wodurch die besondere Einfachheit der klassischen Feldtheorie als reiner Differentialtheorie verloren geht. Weiter erfordert die Deutung der Messergebnisse und ihre Verwertung an Hand des Formalismus, wie wir gesehen haben, die Berücksichtigung

von gewissen in den Messproblemen der unrelativistischen Quantenmechanik nicht auftretenden Zügen der komplementären Beschreibungsweise.

Bei der Abschliessung dieser Arbeit möchten wir nicht unerwähnt lassen, dass wir in vielen Diskussionen über die behandelten Fragen mit früheren und jetzigen Mitarbeitern des Instituts, worunter sowohl Heisenberg und Pauli wie Landau und Peierls, manche Anregung und Hilfe gefunden haben.

Universitetets Institut for teoretisk Fysik.

København, April 1933.

Meddelt paa Mødet den 2. December 1932.
Færdig fra Trykkeriet den 19. December 1933.