Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XII,** 14.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER EINE ANALYTISCHE FUNKTION MIT SPEZIELLEN FASTPERIODISCHEN EIGENSCHAFTEN

VON

RICHARD PETERSEN

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1934

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

EINLEITUNG

Auf Anregung von Professor H. Bohr habe ich mich früher mit dem folgenden Problem beschäftigt[1]:

Es sei $f(s) = f(\sigma + it)$ eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytische Funktion.

In welchem Grade werden der Funktion gleichartig fastperiodische Eigenschaften erteilt durch die Forderung, dass $f(\sigma + it)$ auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0 (\alpha < \sigma_0 < \beta)$ fastperiodisch sei?

Das Ergebnis dieser Untersuchungen lässt sich kurz in den folgenden zwei Sätzen zusammenfassen:

Hauptsatz I. Zu der Funktion $f(\sigma + it)$ gehört eine endliche oder abzählbare Anzahl von Maximalstreifen I, die im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ überall dicht gelegen sind, d. h. ein beliebiger Teilstreifen $\gamma < \sigma < \delta$ enthält Geraden $\sigma = \sigma_0$, welche mindestens einem dieser Maximalstreifen angehören.

Hauptsatz II. Es ist möglich, eine ganze transzendente Funktion zu konstruieren, für welche die Menge der Maximalstreifen, welche die in I erwähnte Bedingung erfüllen, gegeben ist.

Nach dem Erscheinen der besprochenen Abhandlung stellte mir Docent B. Jessen folgende Frage:

Gibt es eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytische Funk-

[1] Om en Klasse næstenperiodiske analytiske Funktioner (Habilitationsschrift). Kopenhagen. 1933.

tion $f(s)$, welche auf einer und nur einer Geraden $\sigma = \sigma_0$ dieses Streifens fastperiodisch ist?

Diese Frage habe ich neulich beantworten können, indem ich mittels Runges Polverschiebung eine Funktion mit den verlangten Eigenschaften konstruiert habe[1]. Schon während ich an der Lösung dieses Problems arbeitete, wurde es mir aber klar, dass es natürlich und nicht ohne Interesse wäre, zu versuchen die Frage zu verallgemeinern und zwar in folgender Weise:

Falls man die in I und II erwähnte Menge von Maximalstreifen entfernt, bleibt eine Menge von Trennungslinien zurück. Die Verallgemeinung ist nun die folgende:

Ist es möglich, eine analytische Funktion aufzubauen, welche auf jeder dieser Trennungslinien fastperiodisch ist, ohne in irgendeinem der Streifen gleichartig fastperiodisch zu sein?

Ich werde mich in dieser Abhandlung darauf beschränken, nur einen Teil der Aufgabe zu behandeln, nämlich den Aufbau einer Funktion, die nur auf einer einzelnen Geraden oder auf einer endlichen Anzahl von Geraden fastperiodisch ist. Hoffentlich werde ich später zu dem allgemeinen Problem zurückkehren können.

Ich gehe jetzt zu einer kurzen Besprechung der wichtigsten Hilfsmittel über. Ich glaube aber davon ausgehen zu dürfen, dass die Sätze über fastperiodische Funktionen einer reellen Veränderlichen schon so bekannt sind, dass es sich erübrigt, sie an dieser Stelle zu erwähnen, und ich werde deshalb nur die im Folgenden zur Anwendung kommenden Sätze über fastperiodische Funktionen einer komplexen Veränderlichen aufzählen.

[1] En analytisk Funktion med specielle næstenperiodiske Egenskaber. Matem. Tidsskrift B. 1933. Kopenhagen.

Es sei $f(s) = f(\sigma + it)$ eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytische Funktion; der Streifen wird mit (α, β) bezeichnet.

Die reelle Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ heisst die zu $\varepsilon > 0$ gehörige Verschiebungszahl für $f(s)$ im Streifen (α, β), wenn für jedes s in (α, β) die Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$$

besteht. Falls $f(s)$ zugleich im Streifen $\alpha \leqq \sigma \leqq \beta$, der mit $\{\alpha, \beta\}$ bezeichnet wird, stetig ist, wird diese Ungleichung auch für $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$ gelten.

Die Zahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ werden auf einer Zahlenachse abgetragen, dadurch entsteht eine Menge $E(\varepsilon, f(s))$, die relativ dicht heisst, wenn es eine solche Zahl $l = l(\varepsilon)$ gibt, dass jedes Intervall der Länge l mindestens eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält.

Hauptdefinition. Die Funktion $f(s)$ soll fastperiodisch in (α, β) heissen, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge $E(\varepsilon, f(s))$ von Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ gehört; wird über $f(s)$ ferner vorausgesetzt, dass sie im abgeschlossenen Streifen $\{\alpha, \beta\}$ stetig ist, sind die Zahlen dieser Menge auch Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ für die Geraden $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$, und $f(s)$ heisst dann fastperiodisch in $\{\alpha, \beta\}$.

Der Ausdruck »eine Funktion $f(s)$ ist fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$« soll bedeuten, dass $f(s)$ in jedem Teilstreifen (α_1, β_1), wo $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, fastperiodisch ist.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen können wir jetzt die zu verwendenden Sätze formulieren. Wo nicht anderes bemerkt ist, handelt es sich um Sätze von H. Bohr.

I. Die Summe und das Produkt zweier in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischer Funktionen sind wieder fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$.

Die Grenzfunktion $F(s)$ einer in (α, β) gleichmässig konvergenten Folge von in (α, β) fastperiodischen Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ ist wieder fastperiodisch in (α, β).

Über Differentiation und Integration gilt: Ist $f(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, wird auch $f'(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$ sein; wenn das unbestimmte Integral dieser Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist, wird es wiederum eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion.

II. Die Fourierentwicklungen der in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ für $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ $(\alpha < \sigma < \beta)$, können in der Dirichletentwicklung

$$f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$$

gesammelt werden. Ist $f(s)$ fastperiodisch in $\{\alpha, \beta\}$, gilt die Entwicklung auch auf den Geraden $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$.

III. Die Dirichletentwicklungen der Summe und des Produkts zweier in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischer Funktionen erhält man durch formale Rechnung.

Die Dirichletentwicklung der Grenzfunktion $F(s)$ einer in (α, β) gleichmässig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen $f_n(s)$ entsteht durch formalen Grenzübergang in der Entwicklung von $f_n(s)$.

IV. Eine in der Halbebene $(-\infty, \alpha]$ fastperiodische Funktion $f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$, deren Exponenten alle positiv mit einer von Null verschiedenen unteren Grenze sind, hat ein unbestimmtes Integral $F(s)$, das ebenfalls in $(-\infty, \alpha]$ fastperiodisch ist, und man erhält die Entwicklung von $F(s)$ durch gliedweise Integration.

Schliesst die Gerade $\sigma = \alpha$ sich der Halbebene $\sigma < \alpha$ an, oder mit anderen Worten: setzt man über $f(s)$ voraus, dass sie in $(-\infty, \alpha\}$ fastperiodisch ist und die Entwicklung

$f(s) \infty \sum A_n e^{\Lambda_n s}$, $-\infty < \sigma \leqq \alpha$ hat, folgt aus dem Beweise des obigen Satzes unmittelbar, dass das unbestimmte Integral von $f(\alpha + it)$ beschränkt ist, d. h. das Integral ist eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen t. Nach diesen Bemerkungen ist es möglich, den für die nach rechts abgeschlossene Halbebene $(-\infty, \alpha\rangle$ geltenden und dem obigen entsprechenden Satz herzuleiten.

V. Ist $f(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$ und sind die Exponenten Λ_n numerisch beschränkt, z. B. $|\Lambda_n| < 1$, dann ist $f(s)$ eine ganze Transzendente und fastperiodisch in $[-\infty, +\infty]$.

Ich habe damit die Sätze über fastperiodische Funktionen, welche ich anwenden werde, aufgezählt, und es fehlt nur noch, an Runges Methode der Polverschiebung zu erinnern; ich formuliere den Runge'schen Satz in der speziellen Form, in welcher ich ihn anwenden werde:

VI. Bezeichnet man ein Polynom mit $P_0(x)$, so ist $R_0(z) = P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$ eine rationale Funktion von z mit den Polen $z = \pm i$. Wünscht man die Pole $z = \pm i$ in einen Punkt $z = a$ zu verlegen, wo $-1 < a < 0$, wird zunächst ein Verschiebungsgebiet G in der z-Ebene gewählt, welches ausserhalb einer einfachen geschlossenen Kurve liegt, die $z = \pm i$ und $z = a$ ganz umschliesst. Der Satz von Runge besagt dann, dass es möglich ist, für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches Polynom $P(x)$ zu bestimmen, dass für alle z im Gebiete G — d. h. ausserhalb der geschlossenen Kurve — die Ungleichung

$$\left| P\left(\frac{1}{z-a}\right) - P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right) \right| < \varepsilon$$

besteht.

Zum Schluss der Einleitung werde ich zur Orientierung eine kurze Übersicht der vorliegenden Arbeit geben:

In § 1 konstruiere ich eine ganze Transzendente, die in den Halbebenen $(-\infty, 0\rangle$ und $[0, +\infty)$ fastperiodisch ist, aber in den zwei Halbebenen voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen hat. Diese Funktion ist die in meiner Habilitationsschrift konstruierte, hier kommt aber bei meiner Anwendung von Runges Methode der Polverschiebung noch ein neues Moment hinzu, nämlich die Abschätzung der Grösse des numerischen Beitrags, der von den Gliedern der Dirichletentwicklungen mit Exponenten zwischen 0 und 1 bzw. zwischen -1 und 0 herrührt.

In § 2 konstruiere ich eine ganze Transzendente $\Phi(s)$, die in den beiden Halbebenen $(-\infty, \alpha\rangle$ und $\langle\beta, +\infty)$ fastperiodisch ist, ohne auf irgendeiner der Geraden $\sigma = \sigma_0 (\alpha < \sigma_0 < \beta)$ fastperiodisch zu sein.

Bei der Konstruktion einer solchen analytischen Funktion gilt es ein Mittel zu finden, welches die Hebung der fastperiodischen Eigenschaft bewirken kann. Man muss sich nun erst daran erinnern, dass, wenn eine fastperiodische Funktion einer reellen Veränderlichen eine Fourierentwicklung besitzt, deren konstantes Glied von Null verschieden ist, so wird das unbestimmte Integral dieser Funktion nicht beschränkt sein, d. h. nicht fastperiodisch sein — hiernach sieht man sofort ein, dass eben Integration das gesuchte Mittel ist.

Wir verfahren folgendermassen:

Durch Anwendung der in § 1 konstruierten Funktion $\varphi(s)$ bilden wir eine Funktion, welche sowohl in der Halbebene $(-\infty, \alpha\rangle$, im Streifen $[\alpha, \beta]$, wie auch in der Halbebene $\langle\beta, +\infty)$ fastperiodisch und so beschaffen ist, dass die konstanten Glieder der Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen gleich Null sind, während das konstante Glied im Streifen $[\alpha, \beta]$ von Null verschieden ist.

Die den Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen $(-\infty, \alpha\}$ und $\{\beta, +\infty)$ angehörigen Exponenten werden sich zwar im Punkte Null häufen, wir haben aber schon in § 1 die von diesen Gliedern herrührenden Beiträge abgeschätzt; es wird somit durch spezielle Wahl der bei der Polverschiebung zu verwendenden Zahlen ε_n möglich sein zu erreichen, dass das Integral der Funktion in den beiden Halbebenen $(-\infty, \alpha\}$ und $\{\beta, +\infty)$ fastperiodisch wird, ohne auf irgendeiner der Geraden $\sigma = \sigma_0 (\alpha < \sigma_0 < \beta)$ fastperiodisch zu sein.

Danach wird es sehr einfach sein, durch Anwendung der in § 1 und § 2 aufgebauten Funktionen ganze Transzendenten zu konstruieren, welche nur auf einzelnen Geraden fastperiodisch sind. Dies wird in § 3 durchgeführt, wie schon bemerkt, beschränke ich mich aber darauf, das Problem nur für eine endliche Anzahl von Geraden zu behandeln.

Ich bemerke, dass ich durch die Bezeichnung »Hauptsatz« die besondere Bedeutung der Funktion $\Phi(s)$ habe betonen wollen; ich glaube nämlich, dass diese Funktion bei vielen Konstruktionen, welche eigentümliche fastperiodische Eigenschaften von analytischen Funktionen beleuchten können, sich als brauchbar erweisen wird.

§ 1. Konstruktion eines wichtigen Beispiels.

Wir wollen nun an die erste Aufgabe herangehen, nämlich an die Konstruktion einer Funktion $\varphi(s)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(s)$ sei eine ganze Transzendente.

2) $\varphi(s)$ sei fastperiodisch in $(-\infty, 0\}$ und $[0, +\infty)$.

3) $\varphi(s)$ habe voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen.

Als Bausteine verwenden wir reinperiodische Funktionen mit Polen auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$.

Wir fangen mit einer Funktion an, deren Pole auf $\sigma = 1$ liegen, z. B.

$$\varphi_0(s) = P_0\left(\frac{1}{e^{\pi(s-1)}+1}\right) = \frac{1}{e^{\pi(s-1)}+1}$$

welche die Pole $s = 1 + (2q+1)i \, (q = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ und die Periode $2i$ hat.

Auf $\varphi_0(s)$ wendet man die Transformation

$$z = e^{\frac{\pi}{2}(s-1)} \tag{1}$$

an, welche die Funktion in

$$R_0(z) = P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{z^2+1}$$

mit den Polen $z = \pm i$ überführt.

Für diese Funktionen erhält man die Entwicklungen

$$R_0(z) = \frac{1}{z^2+1} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2m}, & |z| < 1 \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} z^{-2m}, & |z| > 1 \end{cases}$$

$$\left.\varphi_0(s) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{m\pi(s-1)}, & \sigma < 1 \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-m\pi(s-1)}, & \sigma > 1 \end{cases}\right\} \tag{2}$$

Das konstante Glied der Entwicklung von $\varphi_0(s)$ ist in $\sigma < 1$ gleich 1, in $\sigma > 1$ gleich 0.

Ferner bemerkt man, dass die Dirichletentwicklung (2) in der Halbebene $\sigma < 1$ nur ein einziges Glied enthält, dessen Exponent kleiner als 1 ist, nämlich das zu $m = 0$ gehörige Glied $\psi_0(s) = 1$; die Entwicklung in der Halbebene $\sigma > 1$ enthält aber kein Glied, dessen Exponent grösser als -1 ist — dies wird durch $\chi_0(s) = 0$ ausgedrückt.

Verschiebung der Pole von $\sigma = 1$ nach $\sigma = \frac{1}{2}$.

Wir werden jetzt Runges Methode anwenden, indem wir die Pole $\pm i$ in der z-Ebene durch den einzigen Pol $-e^{-\frac{\pi}{4}}$ ersetzen.

Durch die Transformation (1) erhält man:

$$z = \pm i \quad \text{ergibt die Pole} \quad s = 1 + (2q+1)i$$
$$z = -e^{-\frac{\pi}{4}} \quad — \quad - \quad — \quad s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i.$$

Durch diese Verschiebung in der z-Ebene gelingt es, die Pole in der s-Ebene von $\sigma = 1$ nach $\sigma = \frac{1}{2}$ zu verschieben und gleichzeitig diejenigen auf $\sigma = \frac{1}{2}$ zu zerstreuen.

Es wird hiernach notwendig, ein passendes Verschiebungsgebiet (Γ_1) in der s-Ebene und das zugehörige Gebiet (G_1) in der z-Ebene zu wählen.

Das Gebiet Γ_1 wird definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{2^2} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^2}, \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}; \quad \frac{7}{2^2} < \sigma;$$

mittels (1) erhält man — indem $z = re^{i\theta}$ — dass G_1 durch

$$r < e^{-\frac{3\pi}{8}}; \quad e^{-\frac{3\pi}{8}} \leqq r \leqq e^{\frac{3\pi}{8}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}; \quad e^{\frac{3\pi}{8}} < r$$

definiert ist.

Diese Gebiete haben wir so gewählt, dass die Pole $z = \pm i$ und $z = -e^{-\frac{\pi}{4}}$ in dem zu G_1 komplementären Gebiete gelegen sind, während die Pole $s = 1 + (2q+1)i$ und $s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i$ in dem zu Γ_1 komplementären Gebiete liegen.

Nun wird die Folge der positiven Zahlen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ so gewählt, dass die Reihe $\sum_1^\infty \varepsilon_n$ konvergiert und eine Summe hat, welche kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; diese Zahlen werden späterhin noch zwei Bedingungen unterworfen.

Mit Runges Verfahren bestimmen wir danach das Polynom $P_1(x)$ so, dass im Gebiete G_1 die Ungleichung

$$\left| P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}} z + 1}\right) - R_0(z) \right| < \varepsilon_1$$

besteht. Hiermit ist eine Funktion $R_1(z) = P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}} z + 1}\right)$ festgelegt, die in der z-Ebene analytisch ist bis auf den Pol $z = -e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Durch die Transformation (1) ergibt sich

$$\varphi_1(s) = P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)} + 1}\right).$$

Diese Funktion ist analytisch in der s-Ebene bis auf die Pole $s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i$ und hat die Periode $4i$. Ferner erfüllt sie in Γ_1 die Ungleichung

$$|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| < \varepsilon_1 \tag{3}$$

und wir haben nun die Entwicklungen

$$R_1(z) - R_0(z) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' a_m^{(1)} z^m, & |z| < e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' b_m^{(1)} z^{-m}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Durch die Transformation (1) ergibt sich weiter

$$\varphi_1(s) - \varphi_0(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' a_m^{(1)} e^{\frac{m\pi}{2}(s-1)}, & \sigma < \frac{1}{2} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' b_m^{(1)} e^{-\frac{m\pi}{2}(s-1)}, & \sigma > 1. \end{array} \right\} \quad (2')$$

Für die konstanten Glieder erhalten wir zufolge (3):

$$\left| a_0^{(1)} \right| < \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \left| b_0^{(1)} \right| < \varepsilon_1.$$

In der Dirichletentwicklung (2′) für $\sigma < \frac{1}{2}$ gibt es nur ein einziges Glied, dessen Exponent kleiner als 1 ist, nämlich $\psi_1(s) = a_0^{(1)}$; während die Entwicklung in der Halbebene $\sigma > 1$ ein einziges Glied enthält, dessen Exponent grösser als -1 ist, nämlich $\chi_1(s) = b_0^{(1)}$.

Der zweite Schritt besteht aus einer Verschiebung der Pole von $\sigma = \frac{1}{2}$ nach $\sigma = \frac{1}{4}$ und ist ganz analog dem vorhergehenden.

Wir wollen nun sehen, wie der n^{te} Schritt verläuft.

Nach $n-1$ Schritten haben wir

$$\varphi_{n-1}(s) = P_{n-1}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^{n-1}}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} + 1}\right)$$

erreicht; diese Funktion ist analytisch in der s-Ebene mit Ausnahme der Pole $s = \frac{1}{2^{n-1}} + 2^{n-1}(2q+1)i$ und erfüllt im Gebiete Γ_{n-1} die Ungleichung

$$|\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)| < \varepsilon_{n-1}.$$

Nun verschieben wir die Pole von $\sigma = \frac{1}{2^{n-1}}$ nach $\sigma = \frac{1}{2^n}$.

Als Ausgangsfunktion wird $\varphi_{n-1}(s)$ verwendet, und die Transformation ist

$$z = e^{\frac{\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)};$$

dadurch erhält man in der z-Ebene

$$R_{n-1}(z) = P_{n-1}\left(\frac{1}{z^2+1}\right).$$

Diese Funktion ist analytisch in der ganzen z-Ebene bis auf die Pole $z = \pm i$.

In der z-Ebene werden die Pole $\pm i$ nach dem Pole $-e^{-\frac{\pi}{4^n}}$ verschoben.

$$z = \pm i \quad \text{ergibt die Pole} \quad s = \frac{1}{2^{n-1}} + 2^{n-1}(2q+1)i$$
$$z = -e^{-\frac{\pi}{4^n}} \quad \text{— — —} \quad s = \frac{1}{2^n} + 2^n(2q+1)i.$$

Durch diese Verschiebung in der z-Ebene gelingt es, die Pole in der s-Ebene von $\sigma = \frac{1}{2^{n-1}}$ nach $\sigma = \frac{1}{2^n}$ zu verschieben und gleichzeitig diejenigen auf $\sigma = \frac{1}{2^n}$ zu zerstreuen.

Das Gebiet Γ_n ist definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^{n+1}};\quad \frac{1}{2^{n+1}} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^{n+1}},\ -2^{n-2} < t < +2^{n-2};\quad \frac{7}{2^{n+1}} < \sigma,$$

und das entsprechende Gebiet G_n in der z-Ebene wird

$$r < e^{-\frac{3\pi}{2^{2n+1}}}; \quad e^{-\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} \leqq r \leqq e^{\frac{3\pi}{2^{2n+1}}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < +\frac{\pi}{4}; \quad e^{\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} < r.$$

Durch Runges Methode wird das Polynom $P_n(x)$ so bestimmt, dass im Gebiete G_n die Ungleichung

$$\left| P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4^n}} z + 1}\right) - R_{n-1}(z) \right| < \varepsilon_n$$

besteht.

Damit ist eine Funktion $R_n(z) = P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4^n}} z + 1}\right)$ festgelegt, die nur den Pol $-e^{-\frac{\pi}{4^n}}$ hat, und durch Anwendung der Transformation ergibt sich

$$\varphi_n(s) = P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^n}\right)} + 1}\right),$$

welche analytisch in der s-Ebene mit Ausnahme der Pole $s = \frac{1}{2^n} + 2^n(2q+1)i$ ist und die Periode $2^{n+1}i$ hat. Diese neue Funktion erfüllt im Gebiete Γ_n die Ungleichung

$$|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n.$$

Ferner haben wir

$$R_n(z) - R_{n-1}(z) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} z^m, & |z| < e^{-\frac{\pi}{4^n}} \\ \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(n)} z^{-m}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Die Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$ ergibt

$$\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}, & \sigma < \dfrac{1}{2^n} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}, & \sigma > \dfrac{1}{2^{n-1}}. \end{cases} \tag{4}$$

In der zu der Halbebene $\sigma < \frac{1}{2^n}$ gehörigen Dirichletentwicklung von $\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)$ gibt es höchstens 2^{n-1} Glieder, deren Exponenten kleiner als 1 sind; ihre Summe bezeichnen wir mit

$$\psi_n(s) = \sum_{m=0}^{q_n}{}' a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}, \tag{5}$$

wo q_n die grösste ganze Zahl ist, für welche $\frac{q_n \pi}{2^n} < 1$.

In der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2^{n-1}}$ enthält die Entwicklung (4) höchstens 2^{n-1} Glieder, deren Exponenten grösser als -1 sind; ihre Summe bezeichnen wir mit

$$\chi_n(s) = \sum_{m=0}^{q_n}{}' b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}, \tag{6}$$

wo q_n dieselbe Zahl wie oben ist.

Wir wollen jetzt die Grösse von $|\psi_n(s)|$ in $\sigma \leqq 0$ abschätzen. Da $|R_n(z) - R_{n-1}(z)| < \varepsilon_n$ für $|z| < e^{-\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} = \delta_n$, ergibt sich aus dem Cauchy'schen Koeffizientensatze

$$|a_m^{(n)}| \leqq \frac{\varepsilon_n}{\delta_n^m} = \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}} \tag{7}$$

und es gilt somit in der linken Halbebene des Gebietes Γ_n $\left(\text{d. h. für } \sigma < \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ die Ungleichung

$$|\psi_n(s)| \leqq 2^{n-1} \varepsilon_n.$$

Da die Halbebene $\sigma \leqq 0$ sämtlichen Gebieten Γ_n angehört, ergibt sich, dass die Ungleichung

$$|\psi_n(s)| \leqq 2^{n-1}\varepsilon_n \tag{8}$$

richtig ist für $\sigma \leqq 0$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir gehen nun dazu über, die Grösse von $|\chi_n(s)|$ in einer Halbebene, die in sämtlichen Verschiebungsgebieten Γ_n (z. B. $\sigma \geqq 2$) enthalten ist, abzuschätzen.

Da für $|z| > e^{\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} = \frac{1}{\delta_n}$ die Ungleichung $|R_n(z) - R_{n-1}(z)| < \varepsilon_n$ besteht, erhält man ebenso, dass

$$|b_m^{(n)}| \leqq \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}} \tag{9}$$

woraus die Ungleichung

$$|\chi_n(s)| \leqq 2^{n-1}\varepsilon_n \tag{10}$$

folgt, die richtig ist z. B. für $\sigma \geqq 2$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Für die konstanten Glieder haben wir

$$|a_0^{(n)}| < \varepsilon_n \quad \text{und} \quad |b_0^{(n)}| < \varepsilon_n.$$

Die oben gefundene Majorisierung von $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ wird erst im folgenden Paragraphen zur Anwendung kommen; an dieser Stelle kehren wir wieder zur Untersuchung der Funktionen

$$\varphi_0(s),\ \varphi_1(s),\ \ldots,\ \varphi_n(s),\ \ldots$$

zurück, um zu zeigen, dass diese Folge von Funktionen eine Grenzfunktion $\varphi(s)$ hat, welche eine ganze Transzendente ist.

Wir betrachten die Verhältnisse innerhalb eines festen Kreises $|s| < \varrho$.

Das Gebiet Γ_n ist definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^{n+1}}; \quad \frac{1}{2^{n+1}} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^{n+1}}, \ -2^{n-2} < t < 2^{n-2}; \quad \frac{7}{2^{n+1}} < \sigma,$$

und es ist somit möglich, eine solche Zahl N zu wählen, dass alle Gebiete $\Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \ldots$ den Kreis $|s| < \varrho$ enthalten.

Die gesuchte Grenzfunktion wird in der Form

$$\varphi(s) = \varphi_N(s) + \sum_{N+1}^{\infty} \left(\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\right)$$

geschrieben. Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind analytische Funktionen im Kreise $|s| < \varrho$.

Da im Kreise $|s| < \varrho$ die Ungleichung $|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n$ besteht, und da ferner $\sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n$ konvergent ist, ergibt sich, dass die Reihe gleichmässig konvergiert; $\varphi(s)$ ist also analytisch im Kreise $|s| < \varrho$, und da ϱ beliebig gross gewählt werden kann, ist $\varphi(s)$ eine ganze Transzendente.

Jetzt haben wir $\varphi(s)$ festgelegt und wollen nun ihre fastperiodischen Eigenschaften untersuchen.

Da die Halbebene $\sigma \leqq 0$ sämtlichen Gebieten Γ_n angehört, die Funktionen $\varphi_n(s)$ fastperiodisch (sogar reinperiodisch) in diesen Gebieten sind, und die Ungleichung $|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n$ in $\sigma \leqq 0$ besteht, können wir durch eine Majorantenbetrachtung schliessen, dass die Folge gleichmässig konvergent in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ ist, d. h. $\varphi(s)$ ist fastperiodisch in $(-\infty, 0\}$.

Indem δ eine beliebig kleine, positive Grösse ist, wird die Halbebene $\sigma > \delta$ sämtlichen Gebieten Γ_n von einer gewissen Stelle an angehören; in genau derselben Weise wie oben lässt sich dann beweisen, dass $\varphi(s)$ fastperiodisch in der Halbebene $\delta < \sigma < +\infty$ ist, d. h. $\varphi(s)$ ist fastperiodisch in $[0, +\infty)$.

Da $\varphi(s)$ fastperiodisch in $(-\infty, 0\}$ und in $[0, +\infty)$ ist, können — infolge des Satzes II der Einleitung — die Fourierentwicklungen der bei jedem festen Wert von σ entstehenden fastperiodischen Funktionen in zwei Dirichletentwicklungen gesammelt werden:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s) &\sim A_0 + \sum_1^\infty A_n e^{\Lambda_n s} \quad (\Lambda_n \neq 0) \quad \text{für} \quad \sigma \leqq 0 \\ \varphi(s) &\sim B_0 + \sum_1^\infty B_n e^{M_n s} \quad (M_n \neq 0) \quad \text{für} \quad \sigma > 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Diese Entwicklungen entstehen aber durch formalen Grenzübergang in den entsprechenden Entwicklungen von $\varphi_n(s)$ — Satz III der Einleitung — also ergibt sich aus der Darstellung

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \sum_1^\infty \big(\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\big),$$

dass $A_0 = 1 + \sum_1^\infty a_0^{(n)}$ und $B_0 = 0 + \sum_1^\infty b_0^{(n)}$.

Von den konstanten Gliedern zeigten wir: $|a_0^{(n)}| < \varepsilon_n$ und $|b_0^{(n)}| < \varepsilon_n$; da nun ferner die Ungleichung $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ besteht, ergibt sich sofort, dass

$$|A_0| > 1 - \sum_1^\infty \varepsilon_n > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |B_0| < \sum_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}$$

d. h. $A_0 \neq B_0$.

Die Dirichletentwicklungen der Funktion $\varphi(s)$ in den beiden Halbebenen sind also voneinander verschieden.

Damit haben wir bewiesen:

Satz. *Es gibt ganze transzendente Funktionen, die sowohl in $(-\infty, 0\}$ wie auch in $[0, +\infty)$ fastperiodisch sind und in den beiden Halbebenen voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen haben.*

§ 2. Eine ganze Transzendente, die in zwei getrennten Halbebenen fastperiodisch ist.

Wir gehen nun zu der eigentlichen Aufgabe über, nämlich zu der Konstruktion einer Funktion $\Phi(s)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\Phi(s)$ sei eine ganze Transzendente.

2) $\Phi(s)$ sei fastperiodisch in $(-\infty, \alpha\}$ und in $\{\beta, +\infty)$, wo $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

3) $\Phi(s)$ sei auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0$ $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$ fastperiodisch.

Beim Aufbau von $\Phi(s)$ werden die in § 1 eingeführten Funktionen $\varphi(s)$, $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ angewendet.

Wir werden zunächst die Glieder der Dirichletentwicklungen von $\varphi(s)$ — § 1, (11) — welche Exponenten haben, die numerisch kleiner als 1 sind, abschätzen; mit anderen Worten: wir wollen die Reihen

$$\left.\begin{array}{l} \psi_0(s) + \psi_1(s) + \cdots + \psi_n(s) + \cdots \\ \chi_0(s) + \chi_1(s) + \cdots + \chi_n(s) + \cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

untersuchen.

Es ist früher bewiesen worden, dass die Glieder dieser Reihen für jedes $n \geqq 1$ die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} |\psi_n(s)| \leqq 2^{n-1}\varepsilon_n, & \sigma \leqq 0 \\ |\chi_n(s)| \leqq 2^{n-1}\varepsilon_n, & \sigma \geqq 2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

erfüllen. Jetzt wird es notwendig sein, die Zahlen ε_n einer weiteren Bedingung zu unterwerfen, nämlich der, dass $\sum\limits_1^\infty 2^{n-1}\varepsilon_n$ konvergent ist; diese ist mit der ersten Bedingung $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ vereinbar.

Dadurch ist es uns ermöglicht, mittels einer Majorantenbetrachtung einzusehen, dass die durch die Reihen (1) definierten Summen $\psi(s)$ und $\chi(s)$ in $(-\infty, 0\}$ bzw. in $\{2, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Aus dem Satze V der Einleitung schliesst man nun, dass diese beiden Funktionen ganze Transzendenten und in $(-\infty, +\infty]$ bzw. in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Da die Dirichletentwicklungen von $\psi(s)$ und $\chi(s)$ durch formale Addition der zu $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ gehörigen Entwicklungen entstehen, hat man

$$\left.\begin{aligned} \psi(s) &\sim A_0 + \sum_{0<\Lambda_n<1}' A_n e^{\Lambda_n s} \\ \chi(s) &\sim B_0 + \sum_{-1<M_n<0}' B_n e^{M_n s}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Auf Grund der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihen (1) und aus der Art und Weise, in welcher wir die Ungleichungen (2) gefunden haben, sehen wir sofort, dass die Reihen (3) absolut und gleichmässig konvergent in $(-\infty, 0\}$ bzw. $\{2, +\infty)$ sind.

Wird das konstante Glied nach der linken Seite transportiert, erhält man aus (3):

$$\left.\begin{aligned} \psi(s) - A_0 &\sim \sum_{0<\Lambda_n<1}' A_n e^{\Lambda_n s} \\ \chi(s) - B_0 &\sim \sum_{-1<M_n<0}' B_n e^{M_n s}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wir wollen nun ein unbestimmtes Integral jeder der Funktionen betrachten:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(s) &= \int \left(\psi(s) - A_0\right) ds \\ X(s) &= \int \left(\chi(s) - B_0\right) ds. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Zu untersuchen ist, ob diese ganzen transzendenten Funktionen $\Psi(s)$ und $X(s)$ wiederum fastperiodisch sind. Wir müssen deshalb zu den ursprünglichen Ausdrücken — § 1, (5) und (6) — zurückkehren:

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(s) - a_0^{(n)} &= \sum_{m=1}^{q_n}{}' a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} \\ \chi_n(s) - b_0^{(n)} &= \sum_{m=1}^{q_n}{}' b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Durch Entfernung der konstanten Glieder von jedem einzelnen Glied der Reihen (1), wodurch die Funktionen $\psi(s)$ und $\chi(s)$ definiert wurden, erhält man

$$\left.\begin{aligned} \psi(s) - A_0 &= \sum_{1}^{\infty}{}' \left(\psi_n(s) - a_0^{(n)}\right) \\ \chi(s) - B_0 &= \sum_{1}^{\infty}{}' \left(\chi_n(s) - b_0^{(n)}\right), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

die in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ bzw. in $\sigma \geqq 2$ absolut und gleichmässig konvergent sind.

Durch Integration erhält man nun aus (6) das Folgende:

$$\left.\begin{aligned} \int \left(\psi_n(s) - a_0^{(n)}\right) ds &= \sum_{m=1}^{q_n}{}' \frac{2^n}{\pi m} a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} \\ \int \left(\chi_n(s) - b_0^{(n)}\right) ds &= \sum_{m=1}^{q_n}{}' \frac{-2^n}{\pi m} b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

welches in Verbindung mit den in § 1 gefundenen Ungleichungen

$$\left| a_m^{(n)} \right| \leqq \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}}$$

$$\left| b_m^{(n)} \right| \leqq \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}}$$

schon durch eine lose Abschätzung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \left| \int \left(\psi_n(s) - a_0^{(n)}\right) ds \right| &\leqq 2^{2n-2}\varepsilon_n, \quad \sigma \leqq 0 \\ \left| \int \left(\chi_n(s) - b_0^{(n)}\right) ds \right| &\leqq 2^{2n-2}\varepsilon_n, \quad \sigma \geqq 2\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Jetzt macht man über ε_n die dritte Voraussetzung, dass $\sum\limits_1^\infty 2^{2n-2}\varepsilon_n$ konvergent sei, welche Bedingung mit den zwei früheren vereinbar ist. Wenn wir diese Voraussetzung in Verbindung mit (9) anwenden, können wir — durch eine Majorantenbetrachtung — sofort schliessen, dass die aus (7) durch gliedweise Integration und Verwendung der durch (8) festgelegten Integrale entstehenden Reihen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^\infty \int \left(\psi_n(s) - a_0^{(n)}\right) ds \\ &\sum_1^\infty \int \left(\chi_n(s) - b_0^{(n)}\right) ds \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ bzw. in $\sigma \geqq 2$ absolut und gleichmässig konvergent sind.

Daraus folgt, dass die durch die Reihen (10) definierten Funktionen eben unbestimmte Integrale $\Psi(s)$ und $X(s)$ von $\psi(s) - A_0$ bzw. $\chi(s) - B_0$ sind, d. h.

$$\left.\begin{aligned} \Psi(s) &= \sum_1^\infty \int \left(\psi_n(s) - a_0^{(n)}\right) ds, \quad \sigma \leqq 0 \\ X(s) &= \sum_1^\infty \int \left(\chi_n(s) - b_0^{(n)}\right) ds, \quad \sigma \geqq 2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir haben damit die früher erwähnten Funktionen

$$\Psi(s) = \int \left(\psi(s) - A_0\right) ds$$
$$X(s) = \int \left(\chi(s) - B_0\right) ds$$

festgelegt. Aus der Darstellung (11) lässt sich sofort schliessen, dass $\Psi(s)$ und $X(s)$ in der Halbebene $(-\infty, 0\}$ bzw. in der Halbebene $\{2, +\infty)$ beschränkt bleiben; infolge des Satzes I der Einleitung sind diese Funktionen also fastperiodisch in $[-\infty, +0]$ bzw. in $[2, +\infty]$.

Aus einem bekannten Satze ergibt sich nunmehr, dass die Dirichletentwicklungen von $\Psi(s)$ und $X(s)$ durch gliedweise Integration von (4) entstehen:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(s) &\sim \sum_{0<\Lambda_n<1} \frac{A_n}{\Lambda_n} e^{\Lambda_n s}, \qquad \sigma < 0 \\ X(s) &\sim \sum_{-1<M_n<0} \frac{B_n}{M_n} e^{M_n s}, \qquad 2 < \sigma. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Indem man sich daran erinnert, dass die Exponenten dieser Entwicklungen positiv bzw. negativ sind, erhält man aus dem Satze V der Einleitung, dass $\Psi(s)$ und $X(s)$ in $(-\infty, +\infty]$ bzw. in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Damit ist das Folgende erreicht:

Wir haben die untenstehenden Entwicklungen der in § 1 aufgebauten Funktion $\varphi(s)$ gefunden:

$$\varphi(s) \sim A_0 + \sum_1^\infty A_n e^{\Lambda_n s}, \qquad \sigma \leqq 0$$
$$\varphi(s) \sim B_0 + \sum_1^\infty B_n e^{M_n s}, \qquad 0 < \sigma.$$

Zufolge der Voraussetzung, dass $\sum_{1}^{\infty}{}' 2^{n-1}\varepsilon_n$ konvergent ist, wird die zu $0 < \Lambda_n < 1$ gehörige Teilreihe der ersten Entwicklung eine in $(-\infty, +\infty]$ fastperiodische Funktion

$$\psi(s) \sim A_0 + \sum_{0<\Lambda_n<1}{}' A_n e^{\Lambda_n s}$$

bestimmen, während die zu $-1 < M_n < 0$ gehörige Teilreihe der zweiten Entwicklung eine in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodische Funktion bestimmt:

$$\chi(s) \sim B_0 + \sum_{-1<M_n<0}{}' B_n e^{M_n s}.$$

Macht man nun über die Zahlen ε_n die Voraussetzung, dass sogar $\sum_{1}^{\infty}{}' 2^{2n-2}\varepsilon_n$ konvergent ist, werden die Funktionen $\psi(s) - A_0$ und $\chi(s) - B_0$ die unbestimmten Integrale $\Psi(s)$ und $X(s)$ haben, welche wiederum ganze transzendente Funktionen und in $(-\infty, +\infty]$ bzw. in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Indem wir diese Voraussetzung über ε_n festhalten, gehen wir jetzt dazu über, die Funktion

$$\varphi(s-\alpha) + \varphi(-s+\beta) - A_0 - B_0,$$

wo $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, zu betrachten. Diese Funktion ist eine ganze Transzendente, fastperiodisch in $(-\infty, \alpha\}$, $[\alpha, \beta]$, $\{\beta, +\infty)$ und hat die Entwicklungen

$$\begin{array}{rll} \sum A_n e^{\Lambda_n(s-\alpha)} + \sum B_n e^{-M_n(s-\beta)}, & & \sigma \leqq \alpha \\ B_0 - A_0 + \sum B_n e^{M_n(s-\alpha)} + \sum B_n e^{-M_n(s-\beta)}, & & \alpha < \sigma < \beta. \\ \sum B_n e^{M_n(s-\alpha)} + \sum A_n e^{-\Lambda_n(s-\beta)}, & & \beta \leqq \sigma. \end{array}$$

Da die in den Entwicklungen auftretenden Teilreihen, welche den Exponenten zwischen 0 und 1 oder -1 und 0 entsprechen, ganze transzendente Funktionen bestimmen, die in $(-\infty, +\infty]$ bzw. in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodisch sind, wird

1) die den Exponenten $\geqq 1$ entsprechende Teilreihe der ersten Entwicklung eine Funktion bestimmen, welche in $(-\infty, \alpha\}$ fastperiodisch ist,

2) die den Exponenten $\geqq 1$ oder $\leqq -1$ entsprechende Teilreihe der zweiten Entwicklung eine Funktion bestimmen, welche in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist,

3) die den Exponenten $\leqq -1$ entsprechende Teilreihe der dritten Entwicklung eine Funktion bestimmen, welche in $\{\beta, +\infty)$ fastperiodisch ist.

Aus dem Satze IV der Einleitung können wir in Verbindung mit den früheren Ergebnissen schliessen, dass

$$\Phi(s) = \int \left(\varphi(s-\alpha) + \varphi(-s+\beta) - A_0 - B_0\right) ds$$

fastperiodisch in $(-\infty, \alpha\}$ und $\{\beta, +\infty)$, aber auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0$, $\alpha < \sigma_0 < \beta$, fastperiodisch ist.

Damit ist bewiesen:

Hauptsatz. *Es gibt ganze transzendente Funktionen, die sowohl in der Halbebene $(-\infty, \alpha\}$ wie auch in der Halbebene $\{\beta, +\infty)$ fastperiodisch sind, ohne auf irgendeiner der Geraden $\sigma = \sigma_0$, $\alpha < \sigma_0 < \beta$, fastperiodisch zu sein.*

Wir betrachten jetzt die Funktion

$$\varphi(s-\beta) + \varphi(-s+\alpha) - 2A_0;$$

ihre Dirichletentwicklung im Streifen $\{\alpha, \beta\}$ wird das konstante Glied Null haben, während die konstanten Glieder

der Entwicklungen in den Halbebenen $\sigma < \alpha$ bzw. $\beta < \sigma$ von Null verschieden sind. Das unbestimmte Integral

$$\int \left(\varphi(s-\beta)+\varphi(-s+\alpha)-2A_0\right) ds$$

wird dann eine ganze Transzendente sein, die fastperiodisch im abgeschlossenen Streifen $\{\alpha, \beta\}$ aber auf keiner Geraden ausserhalb dieses Streifens fastperiodisch ist.

Man erhält somit den

Satz. *Es gibt ganze transzendente Funktionen, die in einem abgeschlossenen Streifen fastperiodisch sind, ohne auf irgendeiner der Geraden ausserhalb dieses Streifens fastperiodisch zu sein.*

§ 3. Eine ganze Transzendente, die nur auf einer endlichen Anzahl von Linien fastperiodisch ist.

Durch Anwendung der in § 1 konstruierten Funktion $\varphi(s)$ bilden wir zunächst die ganze Transzendente

$$\varphi(s)+\varphi(-s)-2A_0,$$

wo A_0 das konstante Glied der der Halbebene $\sigma \leqq 0$ entsprechenden Dirichletentwicklung von $\varphi(s)$ ist.

Diese Funktion ist fastperiodisch sowohl in den Halbebenen $(-\infty, 0]$ und $[0, +\infty)$, wie auch auf der Geraden $\sigma = 0$. In den Halbebenen $\sigma < 0$ und $\sigma > 0$ werden die konstanten Glieder der Dirichletentwicklungen von Null verschieden sein, während das konstante Glied der zu der Geraden $\sigma = 0$ gehörigen Fourierentwicklung gleich Null ist.

fens fastperiodisch zu sein. Wir bauen nun die dem Streifen $I = \{\sigma_1, \sigma_n\}$ entsprechende Funktion $\Omega_I(s)$ auf.

Über die Funktion

$$\sum_1^{n-1}{}' \Phi_{I_q}(s) + \Omega_I(s)$$

können wir Folgendes aussagen:

1) Da $\sum_1^{n-1}{}' \Phi_{I_q}(s)$ und $\Omega_I(s)$ ganze transzendente Funktionen sind, wird auch ihre Summe eine ganze Transzendente sein.

2) Da $\sum_1^{n-1}{}' \Phi_{I_q}(s)$ in den beiden Halbebenen $(-\infty, \sigma_1\}$ und $\{\sigma_n, +\infty)$ fastperiodisch ist, und da ferner $\Omega_I(s)$ auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0 < \sigma_1$ oder $\sigma = \sigma_0 > \sigma_n$ fastperiodisch ist, wird ihre Summe auf keiner der Geraden $\sigma = \sigma_0 < \sigma_1$ und $\sigma = \sigma_0 > \sigma_n$ fastperiodisch sein.

3) Da $\sum_1^{n-1}{}' \Phi_{I_q}(s)$ auf den Geraden $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma = \sigma_n$ fastperiodisch ist, und da ferner $\Omega_I(s)$ im abgeschlossenen Streifen $\{\sigma_1, \sigma_n\}$ fastperiodisch ist, wird ihre Summe auf eben diesen Geraden, aber auf keinen anderen fastperiodisch sein.

Damit haben wir bewiesen:

Satz. *Es gibt ganze transzendente Funktionen, welche auf einer endlichen Anzahl von Geraden und nur auf diesen fastperiodisch sind.*

Færdig fra Trykkeriet den 2. Juni 1934.