Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XII,** 13.

ÜBER DIE ROLLE DER TABELLENTEXTE IN DER BABYLONISCHEN MATHEMATIK

VON

O. NEUGEBAUER

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1934

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Bereits zu den ersten Erkenntnissen der Assyriologie gehört die Einsicht, dass in Babylonien ein sexagesimales Zahlensystem in Gebrauch war. HINCKS bemerkte dies 1854 an einem kleinen astronomischen Text und im gleichen Jahr wurden (in Senkereh = Larsa) auch schon Bruchstücke mathematischer Tabellentexte aufgefunden, die u. a. Listen von Quadraten und Kuben der ganzen Zahlen enthielten. Das Material an derartigen »Tabellentexten« hat sich dann dauernd vermehrt[1], insbesondere durch die von Hilprecht 1906 publizierten Funde aus Nippur[2].

Indessen wurden 1900 auch schon zwei umfangreichere Texte in Part IX der »Cuneiform Texts from babylonian tablets . . . in the British Museum« in Autographie publiziert, die offenbar sehr viel weitergehenden mathematischen Inhalt hatten, als blosse Zahlentabellen einfach übersehbarer Gesetzmässigkeit; aber es blieb bis auf weiteres bei der lakonischen Notiz der »Cuneiform Texts«: »Two early Semitic Babylonian texts, undated, one of which is illustrated with geometrical figures«. Den ersten Vorstoss zur Erklärung solcher »eigentlich mathematischen Texte«

[1] Mir sind heute über 150 solcher Texte bekannt (allerdings darunter eine grosse Anzahl unpubliziert). Einzelheiten des gesamten mir zugänglich gewordenen Materials hoffe ich demnächst in meiner Edition »Mathematische Keilschrift-Texte« (zitiert als MKT) Quellen u. Studien zur Geschichte der Mathematik (zitiert QS) Abtlg. A Bd. 3 vorlegen zu können. Für die Tabellentexte vgl. dort Kap. I.

[2] The Babylonian Expedition of the Univ. of Pennsylvania. Ser. A vol. XX, 1.

machte E. F. Weidner durch die Diskussion eines kleinen Abschnittes eines Textes der Berliner Museen in der Orientalistischen Literaturzeitung 1916, indem er nachwies, dass es sich dort um die Berechnung einer (irrationalen) Rechtecksdiagonale handle[1]. Trotz dieses Erfolges schien die Erforschung dieses Zweiges der Keilschriftliteratur neuerdings in Stocken kommen zu sollen, denn es blieb bis 1928 im Wesentlichen bei diesem Stand der Dinge[2]. Erst in diesem Jahre wurde nämlich ein neuer Versuch unternommen, »eigentlich mathematische Keilschriftexte« zu verstehen: C. Frank publizierte »Strassburger Keilschrifttexte in sumerischer und babylonischer Sprache«[3], darunter auch sechs mathematische Texte und zwar nicht nur in Autographie, sondern auch in Umschrift und mit Übersetzungsversuchen. Unmittelbar an diese Veröffentlichung schlossen sich die ersten Arbeiten von Struve, Schuster und mir an (sämtlich in den QS erschienen), die ihrerseits die Basis für die Aufrollung des ganzen Fragenkreises der babylonischen Mathematik gegeben haben durch Arbeiten von Thureau-Dangin, Waschow, mir u. a.[4]

[1] Es ist der Text VAT 6598. Unmittelbar an Weidner anknüpfend haben noch Ungnad und Zimmern Einzelheiten geklärt und hinzugefügt. Für die endgültige Diskussion dieses Abschnittes vgl. Arch. f. Orientforschg. **7** (1931) 90 ff., für den Gesamttext MKT Kap. VI.

[2] Zu nennen ist nur noch die schöne Untersuchung von Gadd »Forms and Colours« in Rev. d'Assyr. **19** (1922), die einen mathematischen Aufgabentext aus London mit symmetrischen Figuren analysierte und für terminologische Einzelfragen interessante Ergebnisse lieferte, nichts aber für das rein Mathematische, von dem man sich damals noch unmöglich ein angemessenes Bild machen konnte. Auf die mathematischen Einzelheiten dieses Textes werde ich in MKT Kap. III eingehen (BM 15285). Ich halte diesen Text für nicht unwichtig für die Geschichte des antiken Quadraturenproblems.

[3] Schriften d. Strassburger Wiss. Ges. i. Heidelberg, NF Heft 9 (1928).

[4] Seit 1929 in den QS, seit 1931 im Arch. f. Orientf., seit 1932 in der Rev. d'Assyriologie.

Dass die Frankschen Interpretationsversuche seiner Texte in entscheidenden Punkten als misslungen angesehen werden müssen, hat seine Ursache gewissermassen in einem zufälligen Missgeschick, unter dem die Interpretation aller mathematischen Zeugnisse aus Babylonien fast von Anfang an litt. Man hatte zwar den sexagesimalen Aufbau des Zahlensystems erkannt, ebenso seinen Stellenwertcharakter, denn Hincks las ja richtig 1,20 als 80 und 1,36 als 96 u. s. w., und man merkte auch bald, dass diese Stellenwertbezeichnung keine absolute war, dass z. B. »30« sowohl für 30 wie für $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ stehen konnte, wie auch für $30 \cdot 60 = 1800$ u. s. w. — aber man erkannte nicht, dass diese Unbestimmtheit nicht nur als Mangel des Systems betrachtet werden musste, sondern gerade umgekehrt ein ideales mathematisches Hilfsmittel des praktischen Rechnens bildete. So kam Hilprecht auf die unglückliche Idee, diesen »Mangel« gewaltsam weginterpretieren zu müssen, indem er nicht nur alle Keilschriftzahlen grundsätzlich als ganze Zahlen las, sondern einen Zusammenhang der »Platonischen Zahl« mit seinen Tabellentexten annahm und daher die Zahlen:

2	30
3	20
4	15 u. s. w.

in einer harmlosen Reziprokentabelle als

2	6480000
3	4320000
4	3240000 u. s. w.

las, weil »all the numbers .... are devisors of 1296000« d. h. von 60^4, der »Platonischen Zahl«. Es ist erstaunlich zu sehen, mit welchem Enthusiasmus diese absurde Theorie Aufnahme gefunden hat. Trotz des Widerspruches einiger französischer und deutscher Assyriologen hat sie weiteste Verbreitung gefunden und ist auch heute noch nicht ganz verschwunden. Ihr ist es wohl in erster Linie zuzuschreiben, dass man sich von dem Getriebe der babylonischen Mathematik ein völlig falsches Bild machen konnte, obwohl man bereits eines ihrer wichtigsten Instrumente, eben die Tabellentexte, voll vor Augen hatte. Es schien eben auch die Relation der babylonischen Kultur zur Mathematik wesentlich bestimmt durch Mystik und Magie. So ging man naturgemäss auch unter ganz falschen Voraussetzungen an die eigentlich mathematischen Texte heran und konnte sie für unbeholfene und unkorrekte Schüler-Versuche halten, selbst wenn man nicht mehr direkt an diese »pythagoreisch-platonischen« Zahlenspekulationen glauben wollte.

Dass der tatsächliche Sachverhalt ein gänzlich anderer ist, hat sich ja indessen mit aller Deutlichkeit herausgestellt. Das überraschende an den neuen Ergebnissen ist dabei natürlich nicht, dass die babylonischen mathematischen Texte doch ein sinnvolles und mathematisch konsequentes Gebäude bilden — das hätte man ruhig a priori annehmen dürfen — sondern, dass diese babylonische Mathematik in ihrem Typus so völlig anders aufgebaut ist, als etwa die gleichzeitige aegyptische oder die zeitlich anschliessende griechische. Sie ist, wie sich eben in den letzten Jahren gezeigt hat, nicht nur eine sehr hoch entwickelte Mathematik, sondern sie ist in wirklich erstaunlichem Masse »algebraisch« orientiert[1].

Dass dabei dem idealen babylonischen Zahlensystem

[1] Vgl. z. B. meine »Studien zur Geschichte der antiken Algebra I« QS B 2.

eine wesentliche geschichtliche Rolle zufällt, ist mir nicht zweifelhaft. Ist die babylonische Mathematik doch auf mindestens $2^1/_2$ Jahrtausende hinaus die einzige, die über eine Zahlenbezeichnung verfügt, mit der man nicht nur zählen kann, sondern auch unmittelbar rechnen, d. h. genau so direkt multiplizieren und dividieren mit den Zahlen selbst, wie wir heute, und unter Vermeidung aller langwierigen und im Grunde unsachgemässen Umwege, wie das »Rechenbrett« bei Griechen, Römern und im Mittelalter[1]. Trotz, oder wegen dieser Brauchbarkeit des babylonischen Zahlensystems spielen hier die Tabellentexte eine wesentliche Rolle. Wenn man etwa die aegyptische Mathematik untersucht, so kann man dort sehr deutlich erkennen, dass das Rechnen an sich, insbesondere die Bruchrechnung, noch als wesentliche Schwierigkeit wirkt und jedes Vordringen zu einer eigentlichen mathematischen Problemstellung im heutigen Sinne praktisch unmöglich macht, weil sozusagen noch die Ausdrucksmittel selbst fehlen. Im babylonischen ist dies grundsätzlich anders: dort ist das Operieren mit den Zahlen als solchen längst kein Problem mehr[2], dort ist das Rechnen

[1] Man muss immer wieder darauf hinweisen, dass das wirklich Interessante am babylonischen »Sexagesimalsystem« nicht die ungewöhnliche Basis 60 ist, sondern das historische Unikum des Stellenwertes der Zahlzeichen. So sind alle Theorien des Sexagesimalsystems, die immer nur die Basis 60 motivieren wollen und dabei ganz übersehen, dass sie gleichzeitig einen historisch und ideenmässig viel wesentlicheren Punkt mit zu erfassen haben, nämlich die Positionsschreibung, von vorneherein zum Scheitern verurteilt.

[2] In einer Reihe von Arbeiten über »Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung« (QS B **1** und **2**) habe ich gezeigt, dass dieser Zustand keineswegs vom Himmel gefallen ist, sondern dass man noch sehr wohl erkennen kann, wie auch in diesem Kulturkreis zunächst dieselben Schwierigkeiten bestanden haben, wie im aegyptischen. Die Anordnung der »Multiplikationstabellen« ist nämlich eine solche, dass sie zunächst nicht für die Aufsuchung beliebiger Produkte ab ganzer Zahlen a und b eingerichtet waren, sondern für die Aufsuchung der Vielfachen der

bereits ein wirkliches Hilfsmittel, nicht ein Hemmnis, in der Lösung mathematischer Fragen, etwa der Bestimmung von Unbekannten, die einem Gleichungssystem genügen sollen. In dieser Phase haben naturgemäss auch Tabellentexte ihren guten Sinn: ist das Rechnen nicht mehr Problem, sondern nur noch Mittel der Mathematik, dann liegt es nahe, sich das Rechnen selbst so sehr zu vereinfachen als möglich. Systematisch angelegte Multiplikationstabellen, Reziprokenlisten u. s. w. gestatten dann, alles nicht mehr Wesentliche ein für alle Mal aus dem Gang der eigentlich mathematischen Überlegung auszuschalten. So kann man die bisherigen Ergebnisse etwa folgendermassen zusammenfassen: Die babylonische Mathematik ist besonders in algebraischer Richtung erstaunlich weit entwickelt, viel weiter als es aus aegyptischen und selbst griechischen Analogien zu erwarten war. Die Durchführung aller numerischen Rechnungen wird durch ein wohlgeordnetes System von Tabellentexten erledigt.

Ich habe diese Betrachtungsweise mit Absicht auf diese knappe Formulierung gebracht, weil ich glaube, dass auch damit der tatsächliche Sachverhalt noch nicht richtig beschrieben ist, sondern dass wir neuerdings vor einer prinzipiell äusserst wichtigen neuen Phase in der Gesamteinschätzung der babylonischen Mathematik stehen. Um nochmals die Sachlage zu formulieren: der Bereich der babylonischen Mathematik schien uns bisher in zwei grosse Gruppen zu zerfallen: »eigentlich mathematische Texte«

Brüche $\frac{1}{a}$ mit endlicher Sexagesimalbruchdarstellung. Da aber dank der Unbestimmtheit des Stellenwertes $\frac{1}{a} = \bar{a}$ auch immer als ganze Zahl gefasst werden kann, so lässt sich das System von Tabellen für $\bar{a}b$ auch leicht zu einem System echter Multiplikationstabellen ausgestalten.

und »Tabellen-Texte«. Gewiss haben beide Gruppen ihre lange Geschichte und je tiefer man sie zurückverfolgt, desto mehr nähern sich die Typen einander, desto kausaler sind sie miteinander verknüpft; aber in ihrer endgültigen Gestalt stehen sie doch als gänzlich ungleiche Partner nebeneinander — »Rechenknechte« hat man sehr anschaulich zu den Tabellentexten gesagt. Zweifel an der Richtigkeit dieser Gegenüberstellung haben sich bei mir schon eingestellt, als sich zeigte, dass man kubische Gleichungen der speziellen Form $x^3 + x^2 = a$ dadurch löste, dass man Tabellen für $n^3 + n^2$ (n ganz) herstellte[1]. Gewiss war von vorneherein klar, dass für uns das eigentlich Interessante an diesen Beispielen die Lösungs*methode* ist, aber man konnte doch daran denken, das Gewicht nach wie vor auf den algebraischen Sachverhalt der Gleichungsauflösung zu legen, d. h. dieses Eingreifen eines Tabellentextes als einen aus der Natur des speziellen algebraischen Problems herstammenden Sonderfall aufzufassen. Ich glaube jetzt sagen zu können, dass diese Auffassung zu eng ist, dass vielmehr Tabellentexte *grundsätzlich* als ein der »eigentlichen« babylonischen Mathematik angehöriges Element aufgefasst werden müssen, d. h. nicht als ein prinzipiell ausschaltbares Abkürzungsmittel des Rechnens, sondern sozusagen als »erlaubtes Konstruktionsmittel«, das jederzeit *wesent-*

[1] Vgl. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. 1933, 316 ff. sowie QS B **2**, 303 (1932). Ich benutze die Gelegenheit, um zwei Irrtümer aus der erstgenannten Arbeit zu berichtigen. a) In Anm. 1 ist zu Unrecht behauptet, dass xy als »Querschnitt« RI bezeichnet sei; man hat vielmehr *qaqari*^{ri} »Fläche« zu lesen (vgl. dazu auch eine demnächst erscheinende Arbeit im Arch. f. Orientf. **9**). b) Bezeichnet man auf S. 319 u. $xyz + xy$ als a und $x \pm y$ als b, so hat die vorletzte Gleichung zu lauten:

$$\frac{\mu x^2 y + xy}{\mu b^3} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z+1}{\mu b} \quad \text{u. s. w.}$$

lich in den Gang einer mathematischen Überlegung eingreifen kann.

Es ist klar, dass ich hier nicht mehr die bekannten Tabellentexte zur Multiplikation und Division meine, denn deren Rolle als reine Rechenhilfen liegt selbstverständlich fest. Was ich sagen will ist vielmehr, dass wir heute erst am Anfang unserer Kenntnisse von dem System der babylonischen Tabellentexte stehen, dass wir zwar die einfachsten Typen kennen und in ihrer Funktion verstehen, dass aber darüber hinaus noch gänzlich anders gebaute Tabellentypen existiert haben müssen. Einstweilen ist uns erst ein Exemplar dieser neuen Gattung bekannt, nämlich eben die Tabelle für $n^2 + n^3$ deren Funktion wir plötzlich nachher verstanden haben durch die Auffindung eines Textes, der gewisse kubische Gleichungen auf $x^2 + x^3 = a$ reduziert. Aber wir wissen bereits nicht mehr, wie die Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichungen dieses Textes vor sich gehen kann[1], obwohl sie sicherlich auch wieder über Tabellentexte führen muss. Es hat gar keinen Sinn, an Hand dieses einen Textes wirklich abschliessendes über die Lösungsverfahren kubischer Gleichungen sagen zu wollen, wenn man bedenkt, mit welchem ungeheuren Material man eigentlich wird operieren müssen, um wirklich Einblicke in die babylonische Mathematik erwarten zu dürfen. Ich kenne z. B. seit kurzem 4 Tafeln einer Serie, die mindestens 10 Tafeln umfasst haben muss und die mindestens 400 (!) Beispiele ganz spezieller Typen quadratischer und biquadratischer Gleichungen enthalten hat[2]. Man kann daran

[1] Vgl. l. c. Anm. 10, S. 320, sowie MKT Kap. III (BM 85200 + VAT 6599).

[2] Die Publikation und detaillierte Bearbeitung erscheint in MKT Kap. VII.

abschätzen, mit welcher Gründlichkeit die babylonische Mathematik ihre Aufgaben gruppiert und eingeübt hat und erst an Hand solcher Serien wird man im Stande sein, auch über die Lösungsverfahren bei anderen Aufgabengruppen etwas andgültiges feststellen zu können.

Im Falle der kubischen Gleichungen ging unsere Kenntnis von eigentlich mathematischen Texten und Tabellentexten noch nicht allzu prinzipiell auseinander. Dies hat sich seither, wie mir scheint, verschoben. In QS **2**, 304 habe ich schon kurz auf die Existenz von Zins- und Zinseszinsrechnungen hingewiesen. Die nähere Untersuchung dieser Texte hat nun u. a. zweierlei ergeben: erstens, dass auf Grund der Relation $K = 2^n a$ die zwischen Anfangskapital a, Endkapital K und Zeit n (es handelt sich um eine spezielle Normierung, deren Diskussion hier zu weit führen würde[1]) besteht, nicht nur K aus a und n, sondern auch n aus K und a bestimmt wird, d. h. also, dass man ein Problem stellt und löst, das im Prinzip auf die Umkehrung der Exponentialfunktionen c^x also auf den »Logarithmus« hinauskommt — und dass zweitens die letzte Aufgabe offenbar wieder durch Rekursion auf Tabellentexte gelöst wird, wie es ja auch in der Tat im Wesen des Problems liegt.

Ich möchte in dieser vorläufigen Mitteilung nicht auf die Einzelheiten des Textes eingehen, umsomehr, als ich sie ja bald mit dem ganzen übrigen Material der MKT vorlegen zu können hoffe. Hervorheben möchte ich nur, dass hier wie bei den kubischen Gleichungen die Bezugnahme auf die Lösungszahlen der Aufgabe durch einen terminus technicus geschieht, der nunmehr schon eine

[1] Einzelheiten in MKT Kap. VI, VAT 8521 und 8528.

ganze Gruppe wichtiger Tabellentexte zusammenschliesst[1]: Quadrate und Quadratwurzeln, Kuben und Kubikwurzeln, n in n^2+n^3, so dass ich geradezu so weit gehen möchte, hier den gemeinsamen Hinweis auf die Aufgabe der Bestimmung einer Umkehrfunktion mit Hilfe von Tabellentexten zu erblicken.

Es ist klar, dass man damit wieder einmal vor einer Fülle ungelöster Fragen steht. Soviel ich sehe, sind die Tabellentexte, die in unserm Text einzugreifen haben, nicht ohne weiteres als »Logarithmentafeln« zu bezeichnen; sonst könnte man allerhand mir noch nicht ganz verständliche Umwege vermeiden[2]. Überhaupt muss ich ausdrücklich betonen, dass ich das Wort »Logarithmen« nur zur kurzen Umschreibung des prinzipiellen Problems gebrauche, der tatsächliche Sachverhalt aber zweifellos nicht so einfach liegt. Aber auf jeden Fall scheint mir jetzt doch das Interpolationsproblem für Tabellentexte akut zu werden, auf das wir ja bisher nur von Quadratwurzeloperationen her gewisse Hinweise haben[3]. Und schliesslich hat man jetzt sowohl bei den kubischen Gleichungen wie bei den Zinseszinsrechnungen den Boden des »rein« algebraischen Operierens so gründlich verlassen, dass man doch vor einer ganz neuen Seite der babylonischen Tabellentexte steht: ich glaube, man hat sie nicht als »Rechenknechte« der Algebra

[1] Diese terminologischen Fragen habe ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit im Arch. f. Orientforschg. **9** behandelt. Es handelt sich übrigens um den Kreis der Termini um »íb-DI«, auf den ich schon gelegentlich der kubischen Gleichungen hingewiesen habe.

[2] Allerdings scheint mir auch manches Logarithmen der Basis 2 nicht völlig unmöglich zu machen. Aber wieder kann ein Text allein zur Entscheidung nicht genügen.

[3] Vgl. hierzu QS B **2**, 291 ff. (1932).

zu fassen, sondern sozusagen als »Funktionstabellen«. Tabellen für $n^2 + n^3$ oder (wie sie auch im Einzelnen aussehen mögen) für c^n u. s. w. spielen im Rahmen der Ausdrucksmittel der babylonischen Mathematik die Rolle unserer stetigen Funktionen $y = x^2 + x^3$ oder $y = c^x$ bzw. $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ und ihrer Umkehrfunktionen. Sie bilden das Baumaterial, das der babylonischen Mathematik zur Verfügung stand, so wie in der Frühgeschichte der Analysis die »elementaren« oder »analytischen« Funktionen, ohne dass alle diese Begriffe zunächst präzise umschrieben waren.

So glaube ich, dass wir neuerdings den Tabellentexten erhöhte Aufmerksamkeit werden zuwenden müssen, wenn wir den wirklichen Umkreis der babylonischen Mathematik beschreiben wollen. Es stehen sich nicht mehr »Tabellentexte« und »eigentlich mathematische Texte« als prinzipiell verschiedene Textgruppen gegenüber, sondern man wird die Tabellentexte in »elementare Tabellen« (d. h. Multiplikations- und Reziprokentabellen) und »Funktionstabellen« gliedern müssen und die letzteren voll zu den »eigentlich mathematischen Texten« rechnen müssen. Das bedeutet, geschichtlich gesehen, dass unser Bild von der babylonischen Mathematik wieder sehr viel mehr an innerer Geschlossenheit gewonnen hat. Das aus den frühesten Phasen der babylonischen Mathematik bereits bekannte Verfahren der Tabellierung von Zahlenreihen bestimmter Gesetzmässigkeit erscheint nicht allmählich zu einer blossen Nebensächlichkeit zu degenerieren, sondern es entwickelt sich organisch weiter und greift auch in die eigentliche Mathematik ein, wie in den ältesten Anfängen. Zahlensystem, Stellenwert-Rechentechnik und numerische Erzwingung der Lösung algebraischer oder weiterreichender Aufgaben werden somit als Teile eines einheitlichen historischen Prozesses verständlich[1].

[1] Anhang. Es scheint mir, als ob diese Betrachtungsweise auch für ein fundamentales Problem der Geschichte der antiken Astronomie wesentlich werden könnte, nämlich für die Frage nach der Existenz einer kinematischen Modellvorstellung der babylonischen rechnende Astronomie. Ohne einer systematischen Untersuchung dieser Fragen vorgreifen zu wollen glaube ich schon jetzt sagen zu dürfen, dass auch auf diesem Gebiet das Operieren mit tabellarisch gegebenen elementaren »Funktionen« den Ausgangspunkt zur mathematischen Behandlung der astronomischen Vorgänge abgegeben hat und nicht eine Rückübersetzung kinematischer Überlegungen in numerische Relationen, wie in der Ptolemäischen Astronomie.

Korrekturzusatz. Zufällig sind mir soeben neue Tabellentexte zugänglich geworden, die uns gerade in der hier erörterten Richtung um ein wesentliches Stück weiterbringen, nämlich Tabellen für die sukzessiven Potenzen c^n verschiedener Basen c ($c = 9$, 16, 1,40, 3,45 für $n = 1$ bis 10). Mir scheint, dass sich damit das Interpolationsproblem für Logarithmentafeln verschiebt in die Frage nach dem Wechsel zwischen verschiedenen Basen. Nur weiteres Textmaterial kann die definitive Beantwortung dieser Fragen herbeiführen.

Færdig fra Trykkeriet den 12. Maj 1934.