Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XI**, 3.

EXTRÉMA LIÉS

PAR

T. BONNESEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
1931

Dans mon livre »Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes« (Paris, 1929) j'ai traité le problème d'extrémum lié qui consiste à rechercher le minimum de la fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles assujetties à la condition de donner à une autre fonction $f^1(x, y)$ une valeur fixée, en introduisant la notion de l'inégalité extrémale entre les deux fonctions. Pour indiquer une condition suffisante de minimum il est nécessaire de considérer les termes du second ordre du développement des fonctions en puissances de $(x-x_0,\ y-y_0)$ au voisinage du point $(x_0,\ y_0)$ où a lieu le minimum. La condition prend dans ce cas une forme assez simple qui permet en particulier d'indiquer les circonstances dans lesquelles on peut parvenir à une inégalité extrémale améliorée.

Dans ce mémoire je vais reprendre la question sous la forme plus génerale: minimer une fonction de n variables assujetties à donner à p autres fonctions des valeures fixées. Il est clair que dans ce cas le terme du second ordre sera bien plus compliqué. Cependant, grâce au langage vectoriel il est possible d'attribuer à la condition suffisante de minimum une signification géométrique simple qui peut servir à comparer le problème de l'extrémum lié au problème libre associé. Pour cela je commence par donner au No. 1 les notions vectorielles nécessaires. — Pour les extréma liés du calcul des variations, c. à d. pour les problèmes isopérimétriques on peut obtenir un résultat analogue (No. 12).

1. Dans un espace à n dimensions nous considérerons des vecteurs $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ aux composantes cartésiennes contravariantes x^i. A l'aide d'une forme quadratique donnée

$$\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (g_{ij} x^i x^j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

on introduit les composantes covariantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de x en posant

$$x_i = (g_{ij} x^j). \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Ici $(g_{ij} x^j)$ signifera la somme des n termes de cette forme qu'on obtient en donnant aux indixes superieures et inférieures j toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$. L'expression $(g_{ij} x^i x^j)$ a la signification analogue.

La forme φ peut être définie ou non. Si elle est indéfinie, l'équation $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$ définira un cône, dont le sommet peut être choisi arbitrairement. L'espace sera divisé par ce cône en deux parties, une partie positive et une partie negative selon le signe de φ.

A un vecteur x on attribue une mesure, dont le carré sera définie par la formule

$$x^2 = (g_{ij} x^i x^j). \tag{3}$$

De cette manière la mesure de x peut bien être imaginaire, mais le carré en est toujours réel et dans ce qui suit c'est ce carré du vecteur seulement qui interviendra. Dans le cas où φ est indéfinie il existe des vecteurs de mesure nulle dont les composantes ne sont pas toutes égales à zèro. Ce sont les vecteurs parallèles à une directrice du cône $\varphi = 0$.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est définie par la formule

$$(4) \qquad xy = (g_{ij} x^i y^j) = (x^i y_i) = (x_i y^i).$$

Deux vecteurs x et y seront dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul: $xy = 0$, c. à d. si l'un des vecteurs est situé dans le plan polaire de l'autre par rapport au cône fondamental. Dans ce cas on aura en posant $z = x + y$ la relation de Pythagore

$$(5) \qquad z^2 = x^2 + y^2.$$

Multivecteurs. Soient $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$ p vecteurs linéairement independants partants d'un même point aux coordonnées $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$. Pris dans un ordre donné les vecteurs constituent par définition un p-vecteur situé dans un p-plan (plan à p dimensions), dont les points sont déterminés par les vecteurs

$$(6) \qquad y = \xi + a\alpha + b\beta + \cdots + k\varkappa,$$

ou y et ξ partent de l'origine des coordonnées. $a, b, \ldots, k$ sont des nombres réels quelconques.

Au p-vecteur orienté on attribue une mesure Δ, dont nous considérons seulement le carré défini par le déterminant

$$(7) \qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \ldots & \alpha\varkappa \\ \beta\alpha & \beta^2 & \ldots & \beta\varkappa \\ \vdots & & & \\ \varkappa\alpha & \varkappa\beta & \ldots & \varkappa^2 \end{vmatrix},$$

dont la valeur est indépendant de l'ordre des vecteurs. Cette définition n'est que la généralisation de la mesure d'un bivecteur (α, β) dans l'espace ordinaire en posant $\varphi(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Dans ce cas la mesure Δ de (α, β) est égal à l'aire du parallélogramme déterminé par α et β. Ainsi que la mesure d'un trivecteur (α, β, γ) est égal au volume du parallélopipède détermine par α, β et γ.

On aura $\Delta^2 = 0$, si les p vecteurs $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ sont linéairement dependants ou bien s'il existe un vecteur $\omega = a\alpha + b\beta + \cdots + k\varkappa$ qui est perpendiculaire à ces vecteurs. Dans le dernier cas on aura $\omega^2 = 0$.

En effet, si $\Delta^2 = 0$ il existent p nombres $a, b, \ldots, k$ non tous nuls tels que

$$\begin{gathered} a\alpha^2 + b\alpha\beta + \cdots + k\alpha\varkappa = 0, \\ a\alpha\beta + b\beta^2 + \cdots + k\beta\varkappa = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a\alpha\varkappa + b\beta\varkappa + \cdots + k\varkappa^2 = 0. \end{gathered}$$

Ces équations montrent que le vecteur $\omega = a\alpha + b\beta + \cdots + k\varkappa$ est perpendiculaire à $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$, et on en deduit que $\omega^2 = 0$, en multipliant les équations réspectivement par $a, b, \ldots, k$. Inversement, s'il existent p nombres $a, b, \ldots, k$ pour lesquels les p équations sont vraies, on aura $\Delta^2 = 0$. En particulier on peut avoir $\omega = 0$, c. à d. que $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ sont linéairement dépendants. Si la forme quadratique φ est définie c'est le dernier cas seul qui peut avoir lieu. Si φ est indéfinie et $\omega \neq 0$, le vecteur ω sera situé à une génératrice du cône fondamental, et le p-plan $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$ sera situé dans le $(n-1)$-plan tangent du cône le long de cette génératrice; ce plan contient en effet tous les vecteurs perpendiculaires à ω.

Ajoutons aux vecteurs $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ un vecteur nouveau $(x-\xi)$ partant du sommet ξ du p-vecteur à un point x. Le carré de la mesure du $(p+1)$-vecteur $\big((x-\xi), \alpha, \beta, \ldots, \varkappa\big)$ est

$$(8) \qquad D^2 = \begin{vmatrix} (x-\xi)^2 & \alpha(x-\xi) & \beta(x-\xi) & \ldots & \varkappa(x-\xi) \\ (x-\xi)\alpha & \alpha^2 & \alpha\beta & \ldots & \alpha\varkappa \\ (x-\xi)\beta & \alpha\beta & \beta^2 & \ldots & \beta\varkappa \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x-\xi)\varkappa & \alpha\varkappa & \beta\varkappa & \ldots & \varkappa^2 \end{vmatrix}.$$

Abaissons du point $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ la »perpendiculaire« au plan du vecteur $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$. Soit $(y^1, y^2, \ldots y^n)$ le pied de la perpendiculaire et cherchons une expression pour la valeur de $(x-y)^2$. Pour déterminer les paramètres $a, b, \ldots, k$ de (6) corréspondants au point y on n'a qu'exprimer que $(x-y)$ est perpendiculaire aux p vecteurs, ce que donne:

$$(x-y)\,\alpha = 0, \; (x-y)\,\beta = 0, \ldots, \; (x-y)\,\varkappa = 0.$$

En posant $x-y = (x-\xi)-(y-\xi)$ on a à l'aide de (6) les équations:

$$(9) \qquad \begin{aligned} (x-\xi)\,\alpha &= a\,\alpha^2 + b\,\alpha\beta + \cdots + k\,\alpha\varkappa, \\ (x-\xi)\,\beta &= a\,\alpha\beta + b\,\beta^2 + \cdots + k\,\beta\varkappa, \\ &\;\vdots \\ (x-\xi)\,\varkappa &= a\,\alpha\varkappa + b\,\beta\varkappa + \cdots + k\,\varkappa^2, \end{aligned}$$

dont le déterminant est égal à Δ^2, qui sera supposé different de zéro.

Ceci posé on a (5)

$$(x-y)^2 = (x-\xi)^2 - (y-\xi)^2,$$
$$(x-y)^2 = (y-\xi)^2 - (a\alpha + b\beta + \cdots k\varkappa)^2.$$

La multiplication des équations (9) par $a, b, \ldots, k$ réspectivement et l'addition suivante donne:

$$(x-y)^2 = (x-\xi)^2 - \big(a\alpha\,(x-\xi) + b\beta\,(x-\xi) + \cdots + k\varkappa\,(x-\xi)\big).$$

Ici $a, b, \ldots, k$ seront remplacés par les valeurs tirées des équations (9), et on vérifera sans difficulté qu'on a:

$$(x-y)^2 = \frac{D^2}{\Delta^2}. \tag{10}$$

Dans l'espace ordinaire ou $\varphi(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ cette formule signifie simplement que la hauteur d'un parallèlopipède est égale au volume de ce parallèlepipède divisé par l'aire de la base.

Ajoutons que la mesure du vecteur $(y-\xi)$, projection de $(x-\xi)$ sur le p-plan $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$, est déterminée par

$$(y-\xi)^2 = -\frac{D_1^2}{\Delta^2},$$

où D_1^2 signifie le déterminant qui provient de D^2 en remplaçant le premier élément $(x-\xi)^2$ par 0.

2. Soient

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ f^1(x) &\equiv f^1(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ &\vdots \\ f^p(x) &\equiv f^p(x^1, x^2, \ldots, x^n) \end{aligned} \tag{1}$$

$p+1$ fonctions réelles des variables réelles $x^1, x^2, \ldots, x^n$, où $p < n$. Nous nous poserons le problème d'extrémum lié suivant:

Trouver la valeur minima de la fonction $f(x)$ pour des valeurs de $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ assujetties à donner aux fonctions $f^1(x), \ldots, f^p(x)$ des valeurs fixées.

Pour fixer les idées nous supposerons les $p+1$ fonctions définies dans un domaine fermé D de l'espace des $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, dans lequel les fonctions $f^1(x), \ldots, f^p(x)$ sont continues. Quand le point x parcourt le domaine D, les systèmes de valeurs $(m^1, m^2, \ldots, m^p)$ que peuvent prendre les fonctions $f^1(x), \ldots, f^p(x)$ formeront un ensemble fermé M. Pour que le problème de minimum posé ait un sens, le système des valeurs fixées de ces p fonctions doit être choisi dans l'ensemble M. Ceci posé, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f^1(x) = m^1, \ldots, f^p(x) = m^p$ sera aussi fermé. Et si la fonction $f(x)$ est semi-continue inférieurement dans D, $f(x)$ atteindra une valeur minima absolue sur cet ensemble. Cette valeur minima est donc une fonction bien définie de $(m^1, \ldots, m^p)$, soit $\Phi(m^1, \ldots, m^p)$, de sorte que l'inégalité

$$f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\} \geqq 0 \tag{2}$$

a lieu dans tout le domaine D.

Si $f(x)$ est supérieurement continue on aura une inégalité analogue exprimant les maxima liés de $f(x)$. Les inégalités de cette nature seront dites inégalités extrémales entre $f(x)$ et $f^1(x), \ldots, f^p(x)$.

On peut démontrer que si $f(x)$ est semi-continue inférieurement dans D, $\Phi(m^1, \ldots, m^p)$ sera semi-continue inferieurement dans M, tandis que la continuité de $f(x)$ n'entrainera pas nécessairement la continuité de Φ.[1]

Le problème des extréma liés peut donc être ainsi posé: Étant données les $p+1$ fonctions (1), déterminer une fonction $\Phi\{f^1, \ldots, f^p\}$ telle que la fonction

$$z(x) \equiv f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\} \tag{3}$$

ait pour minimum zéro pour tout système de valeurs que peut prendre les fonctions $f^1(x), \ldots, f^p(x)$.

Ajoutons qu'il ne suffit pas d'exiger de la fonction Φ que la différence $f-\Phi$ ait pour minimum zéro dans le domaine D. Il faut exiger de plus que l'ensemble de points de D ou $f-\Phi = 0$ soit le plus grand possible. L'inégalité extrémale entre les fonctions $x+y$ et $\sqrt{xy}$ $(x \geqq 0, \ y \geqq 0)$ par exemple n'est pas: $x+y-\sqrt{xy} \geqq 0$, bien que le minimum du premier membre soit égal à zéro pour $x = 0$, $y = 0$. L'inégalité extrémale est: $x+y-2\sqrt{xy} \geqq 0$, où le signe d'egalité est valable pour $x = y$.

3. Jusqu'ici nous avons parlé du minimum absolu. Dans ce que suit nous allons trouver des minima relatifs, c'est à dire que nous exigerons seulement que l'inégalité extrémale (2) soit valable dans un certain voisinage des points x des minimas, et il ne sera question que de points x intérieurs au domaine en question.

Supposons pour cela que les dérivées partielles des trois premiers ordres de $f(x)$, $f^1(x), \ldots, f^p(x)$ existent et posons

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = f_i(x), \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i\, \partial x^j} = f_{ij}(x), \quad \text{etc.}$$

[1] La condition de la continuité de Φ à été indiqué par M. G. Scorza-Dragoni (Rend. dei Lincei 1929, p. 579-83 et plus particulièrement 1930, p. 865-72).

Quant à la fonction inconnue $\Phi\{f^1, \ldots, f^p\}$ nous supposerons pour commencer l'existence de ses derivées partielles des trois premiers ordres:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f^i} = \Phi_i\{f^1, \ldots, f^p\}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f^i \partial f^j} = \Phi_{ij}\{f^1, \ldots, f^p\} \text{ etc.}$$

Pour les valeurs extrèmes de

$$z(x) = f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots . f^p(x)\} \tag{3}$$

seront alors satisfaites les n conditions nécessaires

$$\begin{aligned} &f_1 - (\Phi_1 f_1^1 + \cdots + \Phi_p f_1^p) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_n - (\Phi_1 f_n^1 + \cdots + \Phi_p f_n^p) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ces équations sont une conséquence de la forme que nous avons donné au problème. En effet, on peut donner aux coordonnées du minimum cherché des accroissements quelconques, en faisant varier éventuellement les valeurs de $f^1(x), \ldots, f^p(x)$. Si, au contraire, le problème est posé sous la forme cité au début du no. 2, c. à d. que les valeurs $f^1(x) = m^1, \ldots, f^p(x) = m^p$ sont fixées davance, les accroissements h de x seront assujettis aux conditions $f^1(x+h) = m^1$ etc., ce qui aménera certaines difficultés.

Dans les équations (4) entrent outre les n coordonnées inconnues $(x^1, \ldots, x^n)$ les p fonctions inconnues $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$. Mais comme les équations doivent être satisfaites sur l'ensemble des x le plus grand on peut chercher à donner aux coefficients $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ des valeurs quelconques. En posant

$$\Phi_1 = \lambda_1, \ldots, \Phi_p = \lambda_p,$$

il s'agit de résoudre les équations

$$(5) \quad \begin{array}{l} f_1(x) - \left(\lambda_1 f_1^1(x) + \cdots + \lambda_p f_1^p(x)\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) - \left(\lambda_1 f_n^1(x) + \cdots + \lambda_p f_n^p(x)\right) = 0 \end{array}$$

pour des valeurs réelles des x.

On voit que les coefficients λ sont précisément les multiplicateurs introduits par LAGRANGE pour résoudre le problème d'extrémum lié, et que les conditions (5) sont celles qui interviennent dans le problème d'extrémum libre, qui consiste à minimer la fonction

$$(6) \qquad g(x) = f(x) - \left(\lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_p f^p(x)\right)$$

pour des valeurs données de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Nous avons donc affaire à deux problèmes associés: le problème lié et le problème libre, dont les conditions de minimum du premier ordre sont les mêmes. Mais nous verons qu'il n'est plus du même pour les conditions du second ordre.

4. Si l'on considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ comme des coordonnées variables les équations (5) représenteront dans l'espace $(x^1, \ldots, x^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de $n+p$ dimensions des hypersurfaces qui auront en général des multiplicités de dimension p en commun. Sur une telle multiplicité les $n+p$ coordonnées peuvent être exprimées en fonctions de p paramètres appropriées. Nous nous occuperons dans ce mémoire du cas où $(x^1, \ldots, x^n)$, peuvent être exprimés en fonctions de $(\lambda_1, \ldots. \lambda_p)$. Mais il faut remarquer que ceci

n'est pas toujours possible. Si p. ex. les fonctions f, f^1, $\ldots$, f^p sont des polynomes homogènes du même dégré, les equations (5) seront satisfaites par $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$ quelles que soient les valeurs des λ.

Citons ici le problème important qui consiste à minimer une forme quadratique

$$f(x) = (a_{ij} x^i x^j) \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

pour des valeurs $(x^1, \ldots, x^n)$ assujettis à la condition de donner à la forme quadratique

$$f^1(x) = \Sigma (x^i)^2$$

une valeur donnée.

Puisque les details de la solution de ce problème sont bien connus nous pouvons nous borner à ces quelques remarques: Il suit du raisonnement du no. 2 que $f(x)$ atteint une valeur minima pour toute valeur (positive ou nulle) de $f^1(x)$. Pour trouver l'inégalité extrémale il faut résoudre les équations

$$(7) \qquad (a_{ij} x^j) - \lambda x^i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui représentent dans l'espace $(x^1, \ldots, x^n, \lambda)$ n surfaces du second ordre qui ont $n+1$ droites en commun, dont la première est simplement:

$$x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0.$$

Les autres n droites sont déterminées à l'aide de l'équation séculaire:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

qui a n racines réelles $\lambda = l_1, \ldots, l_n$. Pour chacune de ces racines, $\lambda = l_i$ p. ex., on aura une droite d'intersection, dont les équations peuvent être écrites:

$$x^1 = k^1 t,\ x^2 = k^2 t,\ \ldots,\ x^n = k^n t,\ \lambda = l_i,$$

où $k^1, \ldots, k^n$ sont des constantes, t un paramètre variable. Le long de cette droite on a

$$f(x) - l_i f^1(x) = 0.$$

En effet, cette équation resulte de la multiplication de (7) par x^i et de l'addition suivante des n équations. Si l_1 est la plus petites des racines, l'inégalité extrémale cherchée est

$$f(x) - l_1 f^1(x) \geqq 0.$$

5. Dans ce qui suit on supposera que les équations (5) peuvent être satisfaites par n fonctions de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$:

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi^1(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= \xi^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \end{aligned} \tag{8}$$

dont les derivées partielles existent pour toutes les valeurs d'un certain intervalle: $l_i < \lambda < L_i$.

Introduisons p vecteurs $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$ partants du point ξ:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \xi^2}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial \xi^n}{\partial \lambda_1}\right) \\ \beta &= (\beta^1, \ldots, \beta^n) = \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial \xi^2}{\partial \lambda_2}, \ldots, \frac{\partial \xi^n}{\partial \lambda_2}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varkappa &= (\varkappa^1, \ldots, \varkappa^n) = \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \lambda_p}, \frac{\partial \xi^2}{\partial \lambda_p}, \ldots, \frac{\partial \xi^n}{\partial \lambda_p}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Si ces vecteurs sont linéairement indépendantes (nous indiquerons plus tard une condition suffisante pour que cela ait lieu (no. 8)) ils constituerons un p-vecteur de l'espace $(x^1, \ldots, x^n)$ par lequel un p-plan est déterminé: le plan tangent de la multiplicité (8). Cette multiplicité qui a alors p dimensions sera dite la multiplicité stationaire Ξ.

Introduisons les valeurs (8) dans les fonctions $f(x)$, $f^1(x), \ldots, f^p(x)$ et posons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f\{\xi^1(\lambda), \ldots, \xi^n(\lambda)\}, \\ f^1(\lambda) &= f^1\{\xi^1(\lambda), \ldots, \xi^n(\lambda)\}, \\ f^p(\lambda) &= f^p\{\xi^1(\lambda), \ldots, \xi^n(\lambda)\}, \end{aligned}$$

Pour les valeurs considérées de $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ les valeurs de $f^1, \ldots, f^p$ formeront un continu dans lequel nous supposerons qu'il est possible d'exprimer inversement $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ en fonctions de $f^1, \ldots, f^p$. Alors $f(\lambda)$ peut être exprimée en fonction de $f^1, \ldots, f^p$:

$$\begin{aligned} & f\{\xi^1(\lambda), \ldots, \xi^n(\lambda)\} = \\ (10) \quad & \Phi\Big\{f^1\{\xi^1(\lambda), \ldots, \xi^n(\lambda)\}, \ldots, f^p\{\xi^1(\lambda), \ldots, \xi^n(\lambda)\}\Big\}. \end{aligned}$$

En somme nous avons obtenu une fonction $\Phi\{f^1, \ldots, f^p\}$ telle que la différence $f - \Phi\{f^1, \ldots, f^p\}$ s'annule identifiquement sur Ξ.

De plus on a sur Ξ, comme nous l'avions supposé d'avance:

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial f^1} = \lambda_1, \text{ etc.}$$

En effet, si l'on multiplie les équations (5) par $\frac{\partial \xi^1}{\partial \lambda_i}$, $\ldots$, $\frac{\partial \xi^n}{\partial \lambda_i}$ respectivement on aura par addition des équations nouvelles:

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda_i} - \left\{ \lambda_1 \frac{\partial f^1(\lambda)}{\partial \lambda_i} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial f^p(\lambda)}{\partial \lambda_i} \right\} = 0.$$

La comparaison de ces p équations aux équations (10) montre que $\Phi_1 = \lambda_1, \ldots, \Phi_p = \lambda_p$.

6. Introduisons de nouveau la fonction

$$(6) \qquad g(x) = f(x) - \left(\lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_p f^p(x)\right),$$

où les coefficients sont des constantes. Les dérivées partielles du premier ordre $g_i(x)$ s'annulent sur Ξ à cause des équations (5). A l'aide des dérivées du second ordre $g_{ij}(x)$ nous introduirons pour tout point ξ de Ξ une forme quadratique

$$\varphi(x) = g_{ij}(\xi)\, x^i x^j,$$

qui peut définir une métrique vectorielle.

La differentiation de l'identitée

$$(5) \qquad f_i(\xi) - \left\{ \lambda_1 f_i^1(\xi) + \cdots + \lambda_p f_i^p(\xi) \right\} = 0$$

par rapport à λ_1 donne

$$(11) \quad g_{i1}(\xi) \frac{\partial \xi^1}{\partial \lambda_1} + g_{i2}(\xi) \frac{\partial \xi^2}{\partial \lambda_1} + \cdots + g_{in}(\xi) \frac{\partial \xi^n}{\partial \lambda_1} = f_i^1(\xi),$$

ou bien selon (9)

$$(11\,\text{bis}) \quad g_{i1}(\xi)\, \alpha^1 + g_{i2}(\xi)\, \alpha^2 + \cdots + g_{in}(\xi)\, \alpha^n = f_i^1(\xi)$$

c'est à dire que $f_i^1(\xi)$ est le composant covariant α_i de α. Par la multiplication de (11) avec $\dfrac{\partial \xi^i}{\partial \lambda_1}$ et la sommation sur i on a

$$\alpha^2 = \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \lambda_1}. \tag{12}$$

En multipliant (11) par $\dfrac{\partial \xi^i}{\partial \lambda_2}$ on trouve

$$\alpha\beta = \frac{\partial f^1(\xi)}{\partial \lambda_2}. \tag{13}$$

Ces expressions des produits scalaires des vecteurs $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$ deux à deux nous seront utiles pour le calcul des dérivées partielles Φ_{ij}.

7. De l'identité

$$\Phi_1\left\{f^1(\lambda), \ldots, f^p(\lambda)\right\} = \lambda_1$$

on déduit par differentiation par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ respectivement:

$$\begin{gathered}
\Phi_{11}\frac{\partial f^1}{\partial \lambda_1} + \Phi_{12}\frac{\partial f^2}{\partial \lambda_1} + \cdots + \Phi_{1p}\frac{\partial f^p}{\partial \lambda_1} = 1, \\
\Phi_{11}\frac{\partial f^1}{\partial \lambda_2} + \Phi_{12}\frac{\partial f^2}{\partial \lambda_2} + \cdots + \Phi_{1p}\frac{\partial f^p}{\partial \lambda_2} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_{11}\frac{\partial f^1}{\partial \lambda_p} + \Phi_{12}\frac{\partial f^2}{\partial \lambda_p} + \cdots + \Phi_{1p}\frac{\partial f^p}{\partial \lambda_p} = 0,
\end{gathered}$$

ou bien en tenant compte de (12), (13) et des expressions analogues:

$$\begin{gathered}
\Phi_{11}\,\alpha^2 + \Phi_{12}\,\alpha\beta + \cdots + \Phi_{1p}\,\alpha\varkappa = 1 \\
\Phi_{11}\,\alpha\beta + \Phi_{12}\,\beta^2 + \cdots + \Phi_{1p}\,\beta\varkappa = 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_1{}^1\,\alpha\varkappa + \Phi_{12}\,\beta\varkappa + \cdots + \Phi_{1p}\,\varkappa^2 = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Le déterminant de ces équations est égal au carré de de la mesure $\varDelta$ du p-vecteur $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$. Supposé que $\varDelta^2 \neq 0$, les dérivées $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1p}$ sont déterminées par ces équations, et les autres derivées $\Phi_{21}, \Phi_{22}, \ldots, \Phi_{2p}$ etc. peuvent être calculées par des procédés analogues. En particulier il faut supposer que les vecteurs $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ soient linéairement independantes (voir la fin du no. 1).

8. Intercalons ici une remarque sur l'indépendance linéaire des vecteurs $(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$. Supposons qu'il existe une relation de la forme

$$a\alpha + b\beta + \cdots + k\varkappa = 0,$$

ou bien

$$a\alpha^i + b\beta^i + \cdots + k\varkappa^i = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Multiplions les équations (11 bis)

$$\begin{aligned} g_{i1}(\xi)\,\alpha^1 + g_{i2}(\xi)\,\alpha^2 + \cdots + g_{in}(\xi)\,\alpha^n &= f_i^1(\xi) \\ g_{i1}(\xi)\,\beta^1 + g_{i2}(\xi)\,\beta^2 + \cdots + g_{in}(\xi)\,\beta^n &= f_i^2(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

par $a, b, \ldots, k$ respectivement. L'addition suivante donnera alors

$$0 = af_i^1(\xi) + bf_i^2(\xi) + \cdots + kf_i^p(\xi). \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour que ces n équations soient vraies quand les coefficients $a, b, \ldots k$ ne sont pas tous égaux à zéro il faut que tous les déterminants d'ordre p de la matrice

$$\begin{vmatrix} f_1^1 & f_1^2 & \cdots & f_1^p \\ f_2^1 & f_2^2 & \cdots & f_2^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n^1 & f_n^2 & \cdots & f_n^p \end{vmatrix}$$

soient égaux à zéro. Or, les vecteurs $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ seront lineairement indépendantes si l'un de ces déterminants n'est pas égal à zéro, c'est à dire que les fonctions $f^1, f^2, \ldots, f^p$ ne sont liés par aucune relation indépendante des x. Et dans ces circonstances on verra de la même manière que le déterminant $||g_{ij}(\xi)||$ est différent de zéro.

D'où il suit l'existence supposé des dérivées partielles $\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \beta^1, \ldots, \beta^n$ etc.

9. Nous pouvons maintenant trouver une condition suffisante pour que la fonction

$$z(x) = f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\}$$

soit minimum sur la multiplicité Ξ. Dévéloppons pour cela $z(x)$ suivant les puissances de $x - \xi$ au voisinage du point $\xi(\lambda)$. Puisque $z(x)$ et ses derivées partielles $z_i(x)$ s'annulent pour $x = \xi(\lambda)$, nous n'avons qu'à considérer les termes du second ordre. On a

$$z_{ij} = f_{ij} - \sum \Phi_l f^l_{ij} - \sum \Phi_{mn} f^m_i f^n_j, \; (l, m, n = 1, 2, \ldots, p)$$

ou en posant $\Phi_l = \lambda_l$

$$z_{ij} = g_{ij} - \sum \Phi_{mn} f^m_i f^n_j.$$

En multipliant avec $(x^i - \xi^i)(x^j - \xi^j)$ et sommant sur $i, j = 1, \ldots, n$ on trouve

$$\begin{aligned} z(x) &= f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\} \\ &= \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x^i - \xi^i)(x^j - \xi^j) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{mn} \Phi_{mn} \cdot \sum f^m_i (x^i - \xi^i) \cdot \sum f^n_j (x^j - \xi^j) + (\;), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$
(15)\qquad \begin{aligned} z(x) = \frac{1}{2}(x-\xi)^2 - \frac{1}{2}\{ & \Phi_{11}\left(\alpha(x-\xi)\right)^2 \\ & + 2\Phi_{12}\left(\alpha(x-\xi)\right)\left(\beta(x-\xi)\right) + \cdots\} + (\ ), \end{aligned}
$$

où ( ) indique les termes du troisième ordre. Si l'on introduit ici les valeurs de Φ_{11}, Φ_{12}, etc. tirées de (14) et des équations analogues on aura

$$
(16)\qquad f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\Delta^2} + (\ ),
$$

où Δ^2 et D^2 sont les déterminants (7) et (8) du no. 1. Pour le voir il suffit de considérer le développement de D^2 par rapport à sa première colonne et de conférer les mineurs avec les équations (14).

Le résultat est donc que le terme du second ordre du dévéloppement de $z(x)$ est égal à la moitié du carré du vecteur que represente la distance du point x au p-plan tangent au point ξ de la multiplicité Ξ.

Il est intéressant de comparer le dévéloppement (16) de la fonction $z(x)$ à celui dont on ferait usage pour le problème libre associé savoir de minimer la fonction

$$
g(x) = f(x) - \{\lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_p f^p(x)\}
$$

pour des valeurs données des λ. Soit de nouveau $x = \xi(\lambda)$ la solution des équations (5). Alors on a

$$
(17)\qquad g(x) - g(\xi) = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x^i - \xi^i)(x^j - \xi^j) + (\ )
$$

ou bien

$$
(18)\qquad g(x) - g(\xi) = \frac{1}{2}(x-\xi)^2 + (\ ).
$$

Le terme du second ordre est égal au premier membre du développement (15).

10. Quant à la formule (16) il faut remarquer que le terme de second ordre $\frac{1}{2} D^2 : \varDelta^2$ s'annule non seulement pour $x = \xi$, où la fonction $f - \varPhi$ s'annule elle-même, mais dans le cas aussi où le point x est situé sur le plan tangent de $\varXi$ au point ξ. On pourrait craindre qu'il ne soit alors impossible de juger du signe de $f - \varPhi$ à l'aide du terme de second ordre. Mais il n'en est pas ainsi.

En effet, au voisinage du point ξ il existe certainement sur $\varXi$ des points ξ' tels que le plan tangent à ξ' ne passe pas par le point x en question. En dévéloppant $z(x)$ en des puissances de $x - \xi'$ on obteindra alors un terme du second ordre qui n'e sera pas égal à zéro.

L'étude de la condition de minimum sera divisé en deux cas selon que la forme quadratique $\varphi(x) = (g_{ij} x^i x^j)$ est définie ou non.

1°. Rappelons nous que les coefficients g_{ij} sont fonctions du point ξ sur $\varXi$ et supposons que $\varphi(x)$ soit positivement définie en tout point de $\varXi$. La formule (17) montre alors qu'il existe un voisinage de $\varXi$, dans lequel $g(x) - g(\xi) \geqq 0$ de manière qu'il existe un minimum pour le problème libre pour toutes les valeurs de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ en question. On peut aussi dire que le carré du vecteur $(x - \xi)$ est positif au voisinage du point ξ quelque soit la direction du vecteur (18), ce qui permet de constater que le minimum existe aussi pour le problème lié. En effet, le terme du second ordre de (16) est égal à la moitie du carré du vecteur qui mesure la distance »perpendiculaire«

du point x au plan tangent de Ξ au point ξ, quantité positive ou nulle comme tout carré de vecteur. En d'autres termes, il existe un voisinage de la multiplicité stationaire Ξ dans lequel on a

$$f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\} \geqq 0,$$

le signe égal étant valable aux points de Ξ.

Le résultat est donc que si le problème de minimum libre a une solution, il en sera de même pour le problème lié. Ce qui était d'ailleurs évident d'avance. En effet, dire que le problème libre a une solution au point ξ pour des valeurs données de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, c'est dire que l'inégalité

$$\begin{aligned} & f(x) - \{\lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_p f^p(x)\} \\ \geqq\ & f(\xi) - \{\lambda_1 f^1(\xi) + \cdots + \lambda_p f^p(\xi)\} \end{aligned}$$

est vrai au voisinage de ξ. En particulier elle est aussi vraie pour des valeurs de x telles que $f^1(x) = f^1(\xi), \ldots, f^p(x) = f^p(\xi)$, si elles existent. Et alors on a $f(x) \geqq f(\xi)$, et cette inégalité résout le problème lié.

2°. Si la forme $\varphi(x) = (g_{ij} x^i x^j)$ est indéfinie en tout point de Ξ, le problème libre n'a pas de solution, mais néanmoins il peut bien exister un minimum pour le problème lié. Considérons en effet les vecteurs qui satisfont à l'équation $\varphi(x - \xi) = 0$; ils definissent un cône à $n-1$ dimensions, de sommet ξ. L'espace est divisé par ce cône en deux parties, une partie positive ou $\varphi(x-\xi) > 0$ et une partie negative ou $\varphi(x-\xi) < 0$. Les »normales« de Ξ au point ξ remplissent un $(n-p)$-plan »perpendiculaire« au p-plan tangent. Le terme du second degré du dévéloppement (16) sera positif, si ce plan normal est situé au coté positif du cône. Et si ceci a lieu à tout point de Ξ, on peut indiquer un voisinage de Ξ où

$$f(x) - \Phi\{f^1(x), \ldots, f^p(x)\} \geqq 0.$$

On peut p. ex. se figurer qu'il existe sur Ξ un domaine où $\varphi(x)$ est definie de manière que le problème libre et le problème lié aient de solution tous les deux. Sur la frontière de ce domaine, φ peut être semidefinie, et au delà de la frontière elle peut être indéfinie, mais le problème lié peut encore avoir de solution dans un domaine nouveau. Ce domaine peut être limitée par une frontière, sur laquelle $\Delta^2 = 0$, ce qui aura lieu quand le p-plan tangent de Ξ et tangent au cône. Sur cette frontière le problème lié n'a pas de solution.

11. Considérons en particulier le cas $p = 1$. Dans ce cas la multiplicité Ξ se réduit à une courbe, le p-plan tangente est la tangente de la courbe, le plan normal a $n-1$ dimensions. Supposons que le problème libre n'a pas de solution, c. à d. que $\varphi(x)$ est indéfinie. Pour que le minimum existe il faut alors que le plan normal soit situé du côte positif du cône $\varphi(x-\xi) = 0$, et la tangente sera alors située du coté negatif. Soit $y = (y^1, \ldots, y^n)$ le pied de la »perpendiculaire« abaissé du point x à la tangente. Ceci posé le dévéloppement (16) peut être écrite sous la forme

$$f(x) - \Phi\{f^1(x) = \frac{1}{2}\{(x-\xi)^2 - (y-\xi)^2\} + (\ ),$$

où $(y-\xi)^2 \leqq 0$. Quand le point x est choisi au voisinage de la courbe Ξ indiqué ci-dessus il est possible de choisir le point ξ sur Ξ de manière que $(x-\xi)^2 > 0$, c. à. d. que x sera situé du coté positif du cône au sommet ξ, est alors on a l'inégalité

$$f(x) - \Phi\{f^1(x)\} \geqq -\frac{1}{2}(y-\xi)^2 \geqq 0,$$

ou bien

$$f(x) - \Phi\{f^1(x)\} \geqq -\frac{1}{2}\frac{(\alpha(x-\xi))^2}{\alpha^2}$$

dite inégalité extrémale améliorée, le second membre de l'inégalité ordinaire, zéro, étant remplacé par une quantité positive.

Dans les cas où $p > 1$ aussi on peut obtenir des inégalités améliorées, mais nous n'entrerons pas dans les détails de cette question.

12. Les extréma liés du calcul des variations c. à d. les problèmes isopérimétriques peuvent être traités d'une manière analogue. Soient deux points donnés 1 et 2 de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) respectivement et les $p+1$ integrales

$$(1) \qquad \begin{aligned} f &= \int_1^2 F(x, y, y')\,dx \\ f^i &= \int_1^2 F^i(x, y, y')\,dx. \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}$$

Nous nous proposons de déterminer une courbe $y = y(x)$ joignant les points 1 et 2, minimant l'intégrale f et assujettie à donner aux intégrales f^i des valeurs fixées. Ou bien nous nous proposons de déterminer une fonctionnelle $\Phi(f^1, f^2, \ldots, f^p)$ telle que la fonctionelle

$$z = f - \Phi(f^1, f^2, \ldots, f^p)$$

ait pour minimum zéro pour tout système de valeurs que peuvent prendre les intégrales $f^1, f^2, \ldots, f^p$.

Nous supposerons dans ce que suit que les courbes minimantes cherchées se trouvent à l'intérieur du champ des (x, y) en question de manière qu'on peut faire subir aux fonctions $y = y(x)$ des variations bilatérales. Soient $y = y(x)$ la courbe minimante et $y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ une courbe voisine, où $\eta(x)$ est une fonction arbitraire telle que $\eta(x_1) = 0$, $\eta(x_2) = 0$, et ε un paramètre variable. L'existence des derivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f^i} \equiv \Phi_i, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f^i \partial f^j} \equiv \Phi_{ij}$$

étant supposée, la variation première δz de z est donnée par

$$\frac{\delta z}{\varepsilon} \equiv \int_1^2 (F_y \eta + F_y \eta^1)\, dx - \Phi_i \int_1^2 (F^i_y \eta + F^i_{y'} \eta')\, dx,$$

et la variation seconde $\delta^2 z$ par

$$\begin{aligned} \frac{2\,\delta^2 z}{\varepsilon^2} = & \int_1^2 (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\, dx \\ & - \Phi_i \int_1^2 (F^i_{yy}\eta^2 + 2F^i_{yy'}\eta\eta' + F^i_{y'y'}\eta'^2)\, dx \\ & - \Phi_{ij} \int_1^2 (F^i_y \eta + F^i_{y'}\eta')\, dx \int_1^2 (F^j_y \eta + F^j_{y'}\eta')\, dx. \end{aligned}$$

La condition de minimum de premier ordre: $\delta z = 0$, conduit, comme il est bien connu, à l'équation différentielle d'Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \Phi_i \left(F^i_y - \frac{d}{dx} F^i_{y'} \right) = 0,$$

où nous essayerons de donner aux fonctionnelles inconnues Φ_i des valeurs arbitraires λ_i:

$$(2) \qquad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \lambda_i \left(F^i_y - \frac{d}{dx} F^i_{y'} \right) = 0 .$$

Cette équation presente aussi la condition de minimum pour le problème libre qui consiste à déterminer le minimum de la fonctionnelle

$$g = f - \lambda_i f^i$$

pour des valeurs données des λ_i.

Soit

$$y = \varphi(x, \alpha, \beta, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

l'intégrale générale de l'équation differentielle (1) dependant de deux paramètres α et β, et supposons qu'il est possible pour toutes les valeurs de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ d'un certain intervalle de déterminer α et β de manière que la courbe intégrale passe par les points 1 et 2. Soit

$$y = \xi(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

l'équation de cette courbe intégrale de sorte qu'on a

$$y_1 = \xi(x_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p), \quad y_2 = \xi(x_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Remarquons qu'on a

$$\frac{\partial \xi(x_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)}{\partial \lambda_k} = 0, \quad \frac{\partial \xi(x_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)}{\partial \lambda_k} = 0,$$

c'est à dire que

$$\eta(x) = \xi_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

est une variation admissible, d'où suivent les identitées

$$(3) \quad \int_1^2 (F_y \xi_k + F_{y'} \xi_k') - \lambda_i \int_1^2 (F_y^i \xi_k + F_{y'}^i \xi_k') = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

pour $y = \xi$, $\eta = \xi_k$.

Quand on introduit $y = \xi(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ dans les fonctionelles $f, f^1, \ldots, f^p$, elles deviendront des fonctions de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et nous supposerons qu'il est possible de résoudre les p équations $f^i = f^i(\lambda_1, \ldots, \eta_p)$ par rapport aux λ. En substituant les valeurs trouvées dans f on aura une équation de la forme

$$f - \Phi(f^1, \ldots, f^p) = 0,$$

valable pour les valeurs que peuvent prendre $f, f^1, \ldots, f^p$ pour $y = \xi(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Les équations (3) qui peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_k} - \lambda_i \frac{\partial f^i}{\partial \lambda_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

montrent qu'on a

$$\lambda_i = \Phi_i(f^1, f^2, \ldots, f^p),$$

comme nous l'avions supposé d'avance. De ces identités on peut tirer les dérivées partielles Φ_{ij}. Les differentiations successives par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de

$$\lambda_1 = \Phi_1(f^1, \ldots, f^p)$$

par exemple, donnent les équations

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
1 &= \Phi_{11}\frac{\partial f^1}{\partial \lambda_1} + \Phi_{12}\frac{\partial f^2}{\partial \lambda_1} + \cdots + \Phi_{1p}\frac{\partial f^p}{\partial \lambda_1},\\
0 &= \Phi_{11}\frac{\partial f^1}{\partial \lambda_2} + \Phi_{12}\frac{\partial f^2}{\partial \lambda_2} + \cdots + \Phi_{1p}\frac{\partial f^p}{\partial \lambda_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= \Phi_{11}\frac{\partial f^1}{\partial \lambda_p} + \Phi_{12}\frac{\partial f^2}{\partial \lambda_p} + \cdots + \Phi_{1p}\frac{\partial f^p}{\partial \lambda_p},
\end{aligned}
$$

qui permettent de trouver les valeurs de $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1p}$ pourvu que le déterminant de ces équations ne soit pas égal à zéro.

Posons maintenant

$$G(x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda_i F^i(x, y, y')$$

$$P = G_{yy} = F_{yy} - \lambda_i F^i_{yy}, \quad Q = G_{yy'}, \quad R = G_{y'y'},$$

où P, Q, R pour $y = \xi(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont des fonctions de x et de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Pour l'étude de la variation seconde nous aurons affaire de l'integrale

$$(5) \qquad \int_1^2 (P\eta^2 + 2\,Q\,\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx,$$

où η signifie une fonction de x, $\eta(x)$, telle que $\eta(x_1) = 0$, $\eta(x_2) = 0$. On peut appeler $\eta(x)$ une fonction vecteur, et regarder l'intégrale (5) comme la mesure de ce vecteur, ou bien comme le carré du vecteur. Nous introduirons pour cela le symbole $(\eta)^2$:

$$(6) \qquad (\eta)^2 = \int_1^2 (P\eta^2 + 2\,Q\,\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx.$$

De plus on peut définir le produit $(\eta\zeta)$ des deux fonctions η et ζ $\left(\zeta(x_1) = 0,\ \zeta(x_2) = 0\right)$ par la formule

$$(7) \qquad (\eta\zeta) = \int_1^2 \big(P\eta\zeta + Q\,(\eta'\zeta + \eta\zeta') + R\eta'\zeta'\big)\,dx,$$

η et ζ seront dites orthogonales quand $(\eta\zeta) = 0$.

Ceci posé, la différentiation de l'identité $(\delta z = 0)$

$$\int_1^2 \big((F_y\,\eta + F_{y'}\,\eta') - \lambda_i\,(F_y^i\,\eta + F_{y'}^i\,\eta')\big)\,dx = 0$$

par rapport à λ_i donnera la formule

$$(\xi_i,\,\eta) = \int_1^2 (F_y^i\,\eta + F_{y'}^i\,\eta')\,dx,$$

où $\xi_i = \dfrac{\partial}{\partial\lambda_i}\,\xi\,(x,\,\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_p)$. Dans cette formule on peut en particulier poser $\eta = \xi_j$, d'où

$$(\xi_i,\,\xi_j) = \int (F_y^i\,\xi_j + F_{y'}^i\,\xi_j')\,dx = \frac{\partial f^i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f^j}{\partial \xi_i}.$$

Les équations (5) peuvent maintenant être écrites sous la forme

$$(8) \qquad \begin{aligned} 1 &= (\xi_1)^2\,\Phi_{11} + (\xi_1\xi_2)\,\Phi_{12} + \cdots + (\xi_1\xi_p)\,\Phi_{1p} \\ 0 &= (\xi_1\xi_2)\,\Phi_{11} + (\xi_2)^2\,\Phi_{12} + \cdots + (\xi_2\xi_p)\,\Phi_{1p} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= (\xi_1\xi_p)\,\Phi_{11} + (\xi_2\xi_p)\,\Phi_{12} + \cdots + (\xi_p)^2\,\Phi_{1p}. \end{aligned}$$

Nous supposerons que le déterminant

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} (\xi_1)^2\,(\xi_1\xi_2) & \ldots & (\xi_1\xi_p) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (\xi_1\xi_p)\,(\xi_2\xi_p) & \ldots & (\xi_p)^2 \end{vmatrix}$$

de ces équations est différent de zéro. Δ^2 peut être appelé le carré du p-vecteur $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$. En ajoutant le vecteur arbitraire η, on aura un $(p+1)$-vecteur dont le carré est

$$D^2 = \begin{vmatrix} (\eta^2) & (\eta\xi_1) & (\eta\xi_2) & \ldots & (\eta\xi_p) \\ (\eta\xi_1) & (\xi_1)^2 & (\xi_1\xi_2) & \ldots & (\xi_1\xi_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\eta\xi_p) & (\xi_1\xi_p) & (\xi_2\xi_p) & \ldots & (\xi_p)^2 \end{vmatrix}.$$

Maintenant la variation seconde $\delta^2 z$ du problème isopérimétrique peut être écrite sous la forme

$$\frac{2}{\varepsilon^2}\delta^2 z = \int_1^2 (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx - (\xi_i\eta)(\xi_j\eta)\,\Phi_{ij}$$

la sommation étendue à $i, j = 1, 2, \ldots, p$. Et on peut alors constater à l'aide des équations (8) et des équations analogues que

$$\frac{\delta^2 z}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\Delta^2}.$$

Pour faire l'analogie avec la recherche antérieure complète l'on peut considérer l'ensemble des vecteurs $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \cdots + \alpha_p\xi_p$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres arbitraires, comme le plan du p-vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$. Alors on peut determiner un vecteur $\xi = \eta - (\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_p\xi_p)$ qui est orthogonal à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, pourvu que le déterminant Δ^2 soit different de zéro. Et on peut constater, comme nous l'avons fait auparavant que

$$(\xi)^2 = \frac{D^2}{\Delta^2}.$$

Tandis que la condition de minimum dans le problème libre est que le carré du vecteur de variation

$$(\eta)^2 = \int_1^2 (P\eta^2 + 2\,Q\,\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx$$

soit positif pour toute variation η admissible, il suffit pour le problème isopérimétrique que $(\eta)^2$ soit positif pour des variations qui sont orthogonales au plan du p-vecteur $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$. Quand cette condition est satisfaite le problème est resolu par l'inégalité isopérimétrique

$$f - \Phi(f^1, f^2, \ldots, f^p) \geqq 0.$$

Dans le chapitre III de mon livre cité j'ai montré comment on peut dans certains cas parvenir à une inégalité améliorée.

Forelagt paa Mødet d. 14. November 1930.
Færdig fra Trykkeriet d. 11. Juli 1931.