Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X,** 12.

KLEINERE BEITRÄGE ZUR THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN

III—IV

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
1931

III.

Dirichletsche Reihen und fastperiodische Funktionen.

Es sei

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-s \log n}$$

eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe mit endlicher Konvergenzabszisse λ. Dann besitzt sie auch eine endliche gleichmässige Konvergenzabszisse μ, und zwar ist $\lambda \leqq \mu \leqq \lambda + 1$. Die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ ist offenbar fastperiodisch für $\sigma > \mu + \varepsilon$, dagegen nicht für $\sigma > \mu - \varepsilon$ (da sie in der Halbebene $\sigma > \mu - \varepsilon$ nicht einmal regulär und beschränkt ist).

Wir betrachten nunmehr eine Dirichletsche Reihe im Rogosinski'schen Sinne, d. h. eine Reihe der Form

$$(1) \quad \sum_{1}^{\infty} a'_n n^s + \sum_{2}^{\infty} \frac{a''_n}{n^s} = \sum_{1}^{\infty} a'_n e^{s \log n} + \sum_{2}^{\infty} a''_n e^{-s \log n}.$$

Die erste Teilreihe $\sum a'_n n^s$ möge als Konvergenzabszisse, bezw. gleichmässige Konvergenzabszisse die Zahl λ_1 bezw. die Zahl μ_1 besitzen; entsprechenderweise bezeichnen wir die Konvergenzabszisse, bezw. gleichmässige Konvergenzabszisse der zweiten Teilreihe $\sum a''_n n^{-s}$ mit λ_2 bezw. μ_2. Hierbei ist $\lambda_1 \geqq \mu_1$, $\lambda_2 \leqq \mu_2$. Wir nehmen an, dass $\lambda_1 > \lambda_2$

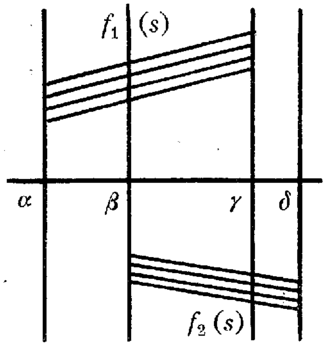
ist, so dass die Gesamtreihe (1) einen Konvergenzstreifen $\lambda_2 < \sigma < \lambda_1$ besitzt, in welchem sie alsdann eine reguläre Funktion $F(s)$ darstellt. Für $\lambda_2 + \varepsilon < \sigma < \lambda_1 - \varepsilon$ ist $F(s)$ bekanntlich gleich $O(|t|)$, gleichmässig in σ. Es sei nunmehr angenommen, dass es innerhalb des Konvergenzstreifens $\lambda_2 < \sigma < \lambda_1$ einen Teilstreifen $\eta_2 \leqq \sigma \leqq \eta_1$ gibt, in welchem die Funktion $F(s)$ beschränkt ist. In einem Gespräch mit Herrn ROGOSINSKI entstand die Frage, ob daraus die Fastperiodizität von $F(s)$ in $\eta_2 + \varepsilon < \sigma < \eta_1 - \varepsilon$ gefolgert werden kann. Diese Frage wäre sofort bejahend zu beantworten, wenn wir wüssten, dass nicht nur die Funktion $F(s)$, sondern jeder der beiden Summanden $f_1(s) = \sum a'_n n^s$ und $f_2(s) = \sum a''_n n^{-s}$ im Streifen $\eta_2 \leqq \sigma \leqq \eta_1$ beschränkt wäre; denn nach bekannten Sätzen wäre alsdann $\mu_1 \geqq \eta_1$ und $\mu_2 \leqq \eta_2$, und die Funktion $F(s)$ wäre somit im Streifen $\eta_2 + \varepsilon < \sigma < \eta_1 - \varepsilon$ einfach die Summe zweier fastperiodischer Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$.

In der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, dass in der Tat aus der Beschränktheit von $F(s) = f_1(s) + f_2(s)$ im Streifen $\eta_2 \leqq \sigma \leqq \eta_1$ die Beschränktheit jedes der beiden Summanden $f_1(s)$ und $f_2(s)$ im genannten Streifen $\eta_2 \leqq \sigma \leqq \eta_1$ gefolgert werden kann. Damit wird alsdann gezeigt sein, dass die obige Frage bejahend zu beantworten ist.

Die erwähnte Beschränktheit von $f_1(s)$ und $f_2(s)$ in $\eta_2 \leqq \sigma \leqq \eta_1$ ergibt sich als unmittelbares Corollar (man nehme etwa $\alpha = \eta_2 - 1$, $\beta = \eta_2$, $\gamma = \eta_1$, $\delta = \eta_1 + 1$) aus dem folgenden allgemeinen funktionentheoretischen Satze, der auch an und für sich ein gewisses Interesse darbietet.

Satz. Es seien (siehe Figur) $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ vier reelle Zahlen, und es seien $f_1(s)$ eine im Streifen $\alpha \leqq \sigma \leqq \gamma$ analytische Funktion und $f_2(s)$ eine im

Streifen $\beta \leqq \sigma \leqq \delta$ analytische Funktion, welche den folgenden Bedingungen genügen:



1°. Es gibt eine positive Konstante K, so dass

$$f_1(s) = O\left(|t|^K\right) \qquad \text{in } \alpha \leqq \sigma \leqq \gamma,$$

$$f_2(s) = O\left(|t|^K\right) \qquad \text{in } \beta \leqq \sigma \leqq \delta.$$

2°. Es ist $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \alpha$, und $f_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \delta$ beschränkt, d. h. es gibt eine positive Konstante k, so dass

$$|f_1(\alpha + it)| < k, \qquad |f_2(\delta + it)| < k \qquad (-\infty < t < \infty).$$

3°. Im gemeinsamen Streifen $\beta \leqq \sigma \leqq \gamma$ ist die Summe $F(s) = f_1(s) + f_2(s)$ beschränkt, d. h. es gibt eine positive Konstante c, so dass

$$|F(s)| < c \qquad \text{für } \beta \leqq \sigma \leqq \gamma.$$

Dann ist $f_1(s)$ beschränkt im Streifen $\alpha \leqq \sigma \leqq \gamma$, und $f_2(s)$ ist beschränkt im Streifen $\beta \leqq \sigma \leqq \delta$.

Beweis. Es genügt offenbar zu beweisen, dass $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ beschränkt ist; denn $f_1(s)$ ist alsdann auf den beiden Begrenzungsgeraden des Streifens $\alpha \leqq \sigma \leqq \gamma$ beschränkt und daher, nach einem klassischen Satze von PHRAGMÉN und LINDELÖF, auch im Innern dieses Streifens beschränkt; hieraus ergibt sich dann weiter, dass $f_2(s) = F(s) - f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta$ beschränkt ist und somit auch, wiederum nach dem PHRAGMÉN-LINDELÖFschen Satze, im ganzen Streifen $\beta \leqq \sigma \leqq \delta$ beschränkt ausfällt. Aus Symmetriegründen genügt es natürlich auch — statt der Beschränktheit von $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ — die Beschränktheit von $f_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta$ nachzuweisen.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, dass $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ und $f_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta$ nicht beschränkt sind, und haben daraus einen Widerspruch herzuleiten.

Aus Bequemlichkeitsgründen wollen wir annehmen, dass $\alpha > 0$ ist (so dass der ganze Streifen $\alpha \leqq \sigma \leqq \delta$ der Halbebene $\sigma > 0$ angehört), was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Es bezeichne N die kleinste positive ganze Zahl grösser als K, und es bezeichne η eine positive Grösse, die wir nachher über alle Grenzen werden wachsen lassen. Wir bilden, bei beliebigem festgehaltenem $\eta > 0$, die beiden analytischen Hilfsfunktionen

$$g_1(s) = f_1(s) \cdot \frac{\eta^N}{(s+\eta)^N} \qquad (\text{für } \alpha \leqq \sigma \leqq \gamma),$$

$$g_2(s) = f_2(s) \cdot \frac{\eta^N}{(s+\eta)^N} \qquad (\text{für } \beta \leqq \sigma \leqq \delta).$$

Wegen $N > K$ ist $g_1(s)$ beschränkt in $\alpha \leqq \sigma \leqq \gamma$, und $g_2(s)$ beschränkt in $\beta \leqq \sigma \leqq \delta$. Wir führen, stets bei festgehaltenem η, die Bezeichnungen ein:

$$L_1(\sigma) = \underset{-\infty < t < \infty}{\text{Ob. Gr.}} |g_1(\sigma + it)| \qquad \text{für jedes } \sigma \text{ in } \alpha \leqq \sigma \leqq \gamma$$

$$L_2(\sigma) = \underset{-\infty < t < \infty}{\text{Ob. Gr.}} |g_2(\sigma + it)| \qquad \text{für jedes } \sigma \text{ in } \beta \leqq \sigma \leqq \delta.$$

Wir werden beweisen, dass

$$\lim_{\eta \to \infty} \{L_1(\gamma) - L_1(\beta)\} = +\infty \tag{2a}$$

und

$$\lim_{\eta \to \infty} \{L_2(\beta) - L_2(\gamma)\} = +\infty. \tag{2b}$$

Aus Symmetriegründen genügt es, eine dieser beiden Limesgleichungen (2a) und (2b) zu beweisen. Beweisen wir etwa (2a).

Nach dem Dreigeradensatz von Doetsch ist $\log L_1(\sigma)$ eine konvexe Funktion von σ im Intervalle $\alpha \leqq \sigma \leqq \gamma$. Somit ist

$$\log L_1(\beta) \leqq q_1 \log L_1(\gamma) + q_2 \log L_1(\alpha),$$

wo $q_1 = \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ und $q_2 = \dfrac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$ zwei positive (von η unabhängige) Konstanten < 1 bezeichnen. Nun gilt aber in der ganzen Halbebene $\sigma > 0$ (bei festgehaltenem $\eta > 0$) die Ungleichung

$$\left| \frac{\eta^N}{(s+\eta)^N} \right| \leqq \frac{\eta^N}{(\sigma + \eta)^N} < 1,$$

und es ist somit

$$L_1(\alpha) \leqq \underset{-\infty < t < \infty}{\text{Ob. Gr.}} |f_1(\alpha + it)| \leqq k$$

d. h.

$$\log L_1(\alpha) \leqq \log k.$$

Wir erhalten somit die Ungleichung

$$\log L_1(\beta) \leqq q_1 \log L_1(\gamma) + q_2 \log k$$

oder anders geschrieben

$$(3) \quad \log L_1(\gamma) - \log L_1(\beta) \geqq (1-q_1) \log L_1(\gamma) - q_2 \log k.$$

Nunmehr lassen wir $\eta \to \infty$. Aus der vorausgesetzten Nicht-Beschränktheit von $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ folgt alsdann — und dies ist der springende Punkt des Beweises — dass $L_1(\gamma)$ über alle Grenzen wächst; in der Tat können wir zu einem beliebig gegebenen $C > 0$ zunächst einen Punkt $s_0 = \gamma + it_0$ so wählen, dass $|f_1(s_0)| > C$ ist, und danach, wegen $\frac{\eta^N}{(s_0+\eta)^N} \to 1$ für $\eta \to \infty$, ein η_0 so wählen, dass für jedes $\eta > \eta_0$

$$|g_1(s_0)| = |f_1(s_0)| \cdot \left| \frac{\eta^N}{(s_0+\eta)^N} \right| > C$$

und also a fortiori

$$L_1(\gamma) > C$$

ist.

Aus $L_1(\gamma) \to \infty$ für $\eta \to \infty$ folgt nunmehr nach (3) die Gleichung

$$\lim_{\eta \to \infty} \{ \log L_1(\gamma) - \log L_1(\beta) \} = \infty$$

und also a fortiori die zu beweisende Gleichung

$$(2\text{a}) \qquad \lim_{\eta \to \infty} \{ L_1(\gamma) - L_1(\beta) \} = \infty.$$

Nachdem die beiden (symmetrischen) Limesgleichungen

$$(2\text{a}) \qquad \lim_{\eta \to \infty} \{ L_1(\gamma) - L_1(\beta) \} = +\infty$$

und

$$(2\text{b}) \qquad \lim_{\eta \to \infty} \{ L_2(\gamma) - L_2(\beta) \} = -\infty$$

somit dargetan sind, können wir sofort den Beweis vollenden, d. h. den gewünschten Widerspruch herleiten. In der Tat gilt bei jedem $\eta > 0$ im Streifen $\beta \leqq \sigma \leqq \gamma$ die Ungleichung

$$\big|\,|g_1(s)| - |g_2(s)|\,\big| \leqq |g_1(s) + g_2(s)| =$$

$$= \big|\big(f_1(s) + f_2(s)\big)\big| \cdot \left|\frac{\eta^N}{(s+\eta)^N}\right| = |F(s)| \cdot \left|\frac{\eta^N}{(s+\eta)^N}\right| < c \cdot 1 = c,$$

also speziell (für $\sigma = \beta$ und $\sigma = \gamma$)

$$|L_1(\beta) - L_2(\beta)| \leqq c, \quad |L_1(\gamma) - L_2(\gamma)| \leqq c;$$

somit ist für jedes $\eta > 0$

$$L_1(\gamma) - L_1(\beta) \leqq L_2(\gamma) - L_2(\beta) + 2c,$$

welche letztere Ungleichung in offenkundigem Widerspruch zu (2a) und (2b) steht.

IV.

Über die Funktionalgleichung $t = f(t) + \varphi(f(t))$ bei einer gegebenen fastperiodischen Funktion $\varphi(x)$.

Bei einer allgemeinen Untersuchung über die Umkehrung fastperiodischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen wurde ich auf ein Problem geführt, dessen Analogon für fastperiodische Funktionen einer reellen Veränderlichen ich in der vorliegenden Note kurz besprechen werde.

Es sei $\varphi(x)$ eine, für $-\infty < x < \infty$ definierte, reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, welche für alle x differentiierbar ist, und deren Differentialquotient für alle x einer Ungleichung der Form $|\varphi'(x)| < k < 1$ genügt. Ich betrachte die Funktion

$$t = g(x) = x + \varphi(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Wegen $\frac{dt}{dx} = 1 + \varphi'(x) > 1 - k\,(> 0)$ ist $t = g(x)$ eine monoton wachsende Funktion von x, welche sämtliche Werte $-\infty < t < \infty$ annimmt. Somit gibt es zu der Funktion $t = g(x)$ eine, für $-\infty < t < \infty$ definierte, inverse Funktion $x = f(t)$, welche ebenfalls monoton wachsend ist und alle Werte $-\infty < x < \infty$ annimmt. Wir schreiben diese inverse Funktion in der Form

$$x = f(t) = t - \psi(t).$$

Unser Problem ist nun das folgende: Was lässt sich über die Natur der Funktion $\psi(t)$ aussagen, wenn die gegebene Funktion $\varphi(x)$ fastperiodisch ist? Dies Problem wird durch den folgenden Satz gelöst.

Satz. Es sei $\varphi(x)$ eine fastperiodische Funktion, die für alle x differentiierbar ist und der Ungleichung $|\varphi'(x)| < k < 1$ genügt. Wir betrachten die Funktion

$$t = x + \varphi(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

und schreiben die inverse Funktion in der Form

$$x = t - \psi(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Dann ist $\psi(t)$ wieder eine fastperiodische Funktion. Ferner gehören die Fourierexponenten von $\psi(t)$ alle dem Modul M_φ der Funktion $\varphi(x)$ an (d. h. dem kleinsten Zahlenmodul, welcher die sämtlichen Fourierexponenten der Funktion $\varphi(x)$ enthält).

Beweis. Um die Fastperiodizität der Funktion $\psi(t)$ darzutun, wollen wir die zur Funktion $t = x + \varphi(x)$ inverse Funktion $x = t - \psi(t)$ mittels der Methode der sukzessiven Approximation berechnen. Zu diesem Zwecke schreiben wir die zu lösende Gleichung $t = x + \varphi(x)$ in der Form

$$x = t - \varphi(x).$$

Als Ausgangsfunktion bei der Approximation benutzen wir die Funktion

$$x = f_0(t) = t = t - \psi_0(t),$$

wo $\psi_0(t)$ identisch Null bedeutet. Danach bilden wir, durch successives Einsetzen in die rechte Seite der Gleichung $x = t - \varphi(x)$, die Funktionenfolge

$$f_1(t) = t - \varphi\{f_0(t)\} = t - \varphi\{t - \psi_0(t)\} = t - \psi_1(t),$$

$$f_2(t) = t - \varphi\{f_1(t)\} = t - \varphi\{t - \psi_1(t)\} = t - \psi_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n+1}(t) = t - \varphi\{f_n(t)\} = t - \varphi\{t - \psi_n(t)\} = t - \psi_{n+1}(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Zunächst wollen wir beweisen, dass bei jedem festen n die Funktion $\psi_n(t)$ eine fastperiodische Funktion von t ist, und zwar wollen wir genauer beweisen, dass die Fastperiodizität von $\psi_n(t)$ sogar in dem Sinne von der Fastperiodizität der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ »majorisiert« wird, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, derart, dass jede zu δ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\varphi(x)$ zugleich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\psi_n(t)$ darstellt. Wir führen den Beweis dieser Behauptung durch Induktion. Für $n = 0$ ist sie wahr, weil $\psi_0(t)$ identisch Null ist; wir nehmen an, dass sie für ein gewisses n wahr ist, und haben daraus ihre Gültigkeit für $n+1$ abzuleiten. Aus der Gleichung

$$t-\psi_{n+1}(t)=t-\varphi\{t-\psi_n(t)\}$$

folgt

$$\psi_{n+1}(t)=\varphi\{t-\psi_n(t)\}.$$

Zu dem gegebenen ε bestimmen wir zunächst ein so kleines $\alpha>0$, dass jede Zahl, welche von einer zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Verschiebungszahl der Funktion $\varphi(x)$ um höchstens α abweicht, jedenfalls eine zu ε gehörige Verschiebungszahl dieser Funktion $\varphi(x)$ darstellt. Und zu diesem α bestimmen wir dann weiter — was nach unserer Annahme über die Funktion $\psi_n(t)$ möglich ist — ein $\beta>0$, so dass jede zu β gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(x)$ zugleich eine zu α gehörige Verschiebungszahl von $\psi_n(t)$ darstellt. Dann, behaupte ich, erfüllt die Zahl $\delta=\operatorname{Min}\left\{\frac{\varepsilon}{2},\beta\right\}$ unsere Forderung, d. h. falls τ eine beliebige zu δ gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(x)$ ist, so ist sie gleichzeitig eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\psi_{n+1}(t)$, d. h. es gilt für alle t die Ungleichung

$$\left|\psi_{n+1}(t+\tau)-\psi_{n+1}(t)\right|\leqq\varepsilon$$

oder, anders geschrieben, die Ungleichung

$$\left|\varphi\{t+\tau-\psi_n(t+\tau)\}-\varphi\{t-\psi_n(t)\}\right|\leqq\varepsilon.$$

Das Bestehen dieser letzten Ungleichung ist offenbar dargetan, wenn wir nachweisen können, dass bei jedem festen t die Argumentdifferenz

$$\{t+\tau-\psi_n(t+\tau)\}-\{t-\psi_n(t)\}=\tau-\{\psi_n(t+\tau)-\psi_n(t)\}$$

eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\varphi(x)$ ist, und dies ergibt sich daraus, dass die genannte Differenz von der zu $\delta \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Verschiebungszahl τ von $\varphi(x)$ um $\psi_n(t+\tau)-\psi_n(t)$ abweicht, welche letztere Grösse numerisch $\leqq \alpha$ ist, weil τ ja (als eine zu δ, und somit a fortiori zu β, gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(x)$) gewiss eine zu α gehörige Verschiebungszahl von $\psi_n(t)$ darstellt. — Wir fügen hinzu, dass aus der soeben bewiesenen »Majorisierung« der Fastperiodizität von $\psi_n(t)$ durch die Fastperiodizität von $\varphi(x)$ ein üblicher Weise gefolgert werden kann (durch Anwendung bekannter Sätze über die Beziehung der Fourierexponenten einer fastperiodischen Funktion zu ihren Verschiebungszahlen), dass die Fourierexponenten von $\psi_n(t)$ alle dem Modul M_φ angehören.

Wir führen nunmehr den Grenzübergang $n \to \infty$ aus und wollen beweisen, dass die Funktion $f_n(t) = t - \psi_n(t)$ gleichmässig in $-\infty < t < \infty$ gegen eine Grenzfunktion $f(t) = t - \psi(t)$ strebt, d. h. dass $\psi_n(t)$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $\psi(t)$ strebt. Dies ergibt sich sofort aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}|\psi_{n+1}(t)-\psi_n(t)| &= |\varphi\{t-\psi_n(t)\}-\varphi\{t-\psi_{n-1}(t)\}| = \\ &= |\psi_n(t)-\psi_{n-1}(t)|\cdot|\varphi'(\xi)| < k\cdot|\psi_n(t)-\psi_{n-1}(t)| < \\ &< k^2|\psi_{n-1}(t)-\psi_{n-2}(t)| < \ldots < k^n|\psi_1(t)-\psi_0(t)| = \\ &= k^n|\psi_1(t)| = k^n|\varphi(t)| \leqq k^n\cdot G,\end{aligned}$$

wo G die obere Grenze der gegebenen fastperiodischen Funktion $|\varphi(x)|$ bezeichnet. Aus der Gleichmässigkeit des Grenzüberganges $\psi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t)$ folgt nun sofort, dass die Grenzfunktion $\psi(t)$ wieder fastperiodisch ist, und ferner, dass auch die zur Grenzfunktion $\psi(t)$ gehörigen Fourierexponenten in dem Modul M_φ enthalten sind.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die gefundene Funktion $f(t) = t - \psi(t)$ tatsächlich die Gleichung

$$t = f(t) + \varphi\{f(t)\}$$

befriedigt; dies ist aber evident; wir brauchen nur, bei beliebigem festen t, in der Gleichung

$$t = f_{n+1}(t) + \varphi\{f_n(t)\}$$

den Grenzübergang $n \to \infty$ auszuführen.

Forelagt paa Mødet den 17. Oktober 1930.
Færdig fra Trykkeriet den 15. Januar 1931.