

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 11.

DAS KRITISCHE MASSENVERHÄLTNIS
BEI DER BEWEGUNG UM L_4 UND L_5
IM PROBLÈME RESTREINT

VON

ELIS STRÖMGREN

MIT 6 FIGUREN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1930

Es ist bekannt, dass es für Werte von μ ($m_2 : m_1 = \mu : 1 - \mu$), die zwischen 0 und etwa 0.0385 liegen, um die Librationspunkte L_4 und L_5 im problème restreint infinitesimale periodische Bahnen gibt, für grössere Werte von μ aber nicht. Mit μ wird hier immer die kleinere Masse bezeichnet; wir haben also: $\mu \leq \frac{1}{2}$.

Der kritische Wert von μ , den wir im folgenden μ_0 nennen werden, ist durch die Gleichung:

$$1 - 27 \mu_0 (1 - \mu_0) = 0$$

definiert. Es ergibt sich hieraus:

$$\mu_0 = 0.038\ 5208\ 96 \dots$$

und entsprechend für das Verhältnis zwischen den zwei Massen:

$$\frac{m_2}{m_1} = 0.040\ 0642\ 05 \dots$$

Wenn $\mu > \mu_0$, gibt es infinitesimale asymptotische (spiralförmige) Bahnen in L_4 (L_5) hinein und aus diesen Librationspunkten hinaus. Die infinitesimale Theorie dieser asymptotischen Bahnen sind in A. N. 4015 und in den Publikationen der Kopenhagener Sternwarte 47, 61 und 67 skizziert und für das spezielle Kopenhagener Massenverhältnis $\mu = \frac{1}{2}$ näher ausgeführt worden. Wie diese infinite-

simalen asymptotischen Lösungen sich ins endliche Gebiet verfolgen lassen, und wie aus ihnen die Klassifizierung einer grossen Anzahl Klassen periodischer Bahnen aufbauen lässt, ist in den Publ. 47, 60, 61, 64 und 67 gezeigt worden.

Die Existenz eines kritischen Massenwertes ist also eine Tatsache, die mit Notwendigkeit aus der infinitesimalen Theorie folgt. Eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhang der Lösungen für μ -Werte grösser, bzw. kleiner als μ_0 hat aber bis jetzt gefehlt. In der vorliegenden Abhandlung werden wir dies Problem behandeln.

In der Publikation 67 (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Mathematisk-fysiske Meddelelser X, 7) habe ich die Theorie der infinitesimalen asymptotischen Lösungen für $\mu = \frac{1}{2}$ ausgeführt. Bei diesem speziellen Massenverhältnis sind die in L_4 hineingehenden und aus L_4 hinausgehenden asymptotischen Bahnen Spiegelbilder von einander: man erhält die Formeln der einen Gruppe aus den Formeln der anderen durch einfaches Wechseln von Vorzeichen. Bei anderen Werten von μ ist dies aber nicht der Fall; hier muss die Theorie für die hineinwandernden und für die hinauswandernden asymptotischen Bahnen gesondert behandelt werden, was im folgenden geschehen soll.

Die Differentialgleichungen der infinitesimalen Bewegung in der Nähe von L_4 lauten (s. Publ. 67, Seite 4):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)y \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)x + \frac{9}{4}y. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn wir der in Publ. (67) skizzierten Entwicklung folgen, erhalten wir zunächst für die beiden Fälle, I (in L_4 hineingehende Bewegung) und II (aus L_4 hinausgehende Bewegung), gemeinsam:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} > \mu > \mu_0 \\ \alpha &= +\sqrt{27\mu(1-\mu)-1} \\ a &= \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha^2}}} \\ b &= \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha^2}}}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(\text{woraus: } b^2 - a^2 = \frac{1}{2}, \quad ab = \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$\sigma = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) = \frac{\sqrt{23-4\alpha^2}}{4}$$

$$\varrho = -\frac{5}{4}$$

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

(woraus die Werte von e^{aT} und $e^{\frac{1}{2}aT}$ berechnet werden können).

Von jetzt an verläuft die Entwicklung für I und II getrennt. Wir erhalten für die hineingehende Bewegung:

I.

$$\begin{aligned} \eta &= -2a + \sigma \\ M &= \frac{\varrho\eta - 4ab^2}{\eta^2 + 4b^2} \\ N &= \frac{2(ab\eta + b\varrho)}{\eta^2 + 4b^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 e^{-at} \cos bt + \left(\frac{M}{N} x_0 - \frac{1}{N} y_0 \right) e^{-at} \sin bt \\
 y &= y_0 e^{-at} \cos bt + \left(\frac{M^2 + N^2}{N} x_0 - \frac{M}{N} y_0 \right) e^{-at} \sin bt
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

oder, wenn wir $x_0 = 0$ setzen:

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{1}{N} y_0 e^{-at} \sin bt \\
 y &= y_0 e^{-at} \cos bt - \frac{M}{N} y_0 e^{-at} \sin bt.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Für den Winkel (φ), den die Tangente der Bewegung im Punkte $0, y_0$ mit der x -Achse bildet, ergibt sich:

$$tg \varphi = M + \frac{a}{b} N.$$

Für die hinausgehende Bewegung ergibt sich:

II.

$$\begin{aligned}
 \theta &= 2a + \sigma \\
 P &= \frac{q\theta + 4ab^2}{\theta^2 + 4b^2}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$Q = \frac{2(ab\theta - bq)}{\theta^2 + 4b^2}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 e^{at} \cos bt - \left(\frac{P}{Q} x_0 - \frac{1}{Q} y_0 \right) e^{at} \sin bt \\
 y &= y_0 e^{at} \cos bt - \left(\frac{P^2 + Q^2}{Q} x_0 - \frac{P}{Q} y_0 \right) e^{at} \sin bt
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

und, für $x_0 = 0$:

$$x = \frac{1}{Q} y_0 e^{at} \sin bt \quad (8)$$

$$y = y_0 e^{at} \cos bt + \frac{P}{Q} y_0 e^{at} \sin bt.$$

Für den Winkel (χ), den die Tangente der Bewegung im Punkte 0, y_0 mit der x -Achse bildet, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \chi = P + \frac{a}{b} Q.$$

Wenn wir nun die Entwicklung der einen Gruppe von Bewegungen, z. B. der hinausgehenden Spiralbewegungen, (II) verfolgen, sehen wir, dass der Faktor e^{at} für einen ganzen Umlauf, also e^{aT} (für einen halben Umlauf $e^{\frac{1}{2}aT}$), bei abnehmenden Werten von μ gegen 1 konvergiert, und dass dieser Wert bei $\alpha = 0$, d. h. bei $\mu = \mu_0$, erreicht wird. Der Faktor e^{aT} bedeutet aber das Verhältnis, in dem die von einer spiralförmigen Bahn mit einer Zwischenzeit von einem ganzen Umlauf abgeschnittenen zwei Stücke der y -Achse zu einander stehen. Gleichzeitig konvergiert φ gegen denselben Wert wie χ .

Der Verlauf der numerischen Werte von e^{aT} , φ und χ bei abnehmendem μ besagt also, dass **die spiralförmigen Bewegungen**, die in verschiedenen vorgegebenen Punkten 0, y_0 einsetzen, **für $\mu = \mu_0$ in geschlossene Bahnen zerfallen**. Diese Bahnen sind Ellipsen und zwar konvergieren die hinaus- und hineingehenden Spiralbahnen für $\mu = \mu_0$ gegen dieselbe Ellipsenschar:

$$\alpha = 0$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

$$\varrho = -\frac{5}{4}$$

$$T = 2\sqrt{2}\pi.$$

I.

II.

$$\eta = \sigma = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

$$\theta = \sigma$$

$$M = \frac{\varrho\sigma}{\sigma^2+2} = -\frac{\sqrt{23}}{11}$$

$$P = \frac{\varrho\sigma}{\sigma^2+2} = M$$

$$N = \frac{\varrho\sqrt{2}}{\sigma^2+2} = -\frac{4\sqrt{2}}{11}$$

$$Q = -\frac{\varrho\sqrt{2}}{\sigma^2+2} = -N$$

und, für $x_0 = 0$, bei I und II identisch gleich:

$$x = \frac{11}{4\sqrt{2}} y_0 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t$$

$$y = y_0 \cos \frac{1}{\sqrt{2}} t - \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}} y_0 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t.$$

Für den Winkel ($\varphi = \chi$), den die Tangente der Bahn im Punkte 0, y_0 mit der x -Achse bildet, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{23}}{11}; \quad \varphi = -23^\circ 33'.39.$$

Für den Winkel (Ω), den die kleine Achse der Ellipse mit der x -Achse macht, ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{23}}; \quad \Omega = 61^\circ 0'.83$$

und für das Verhältnis der zwei Halbachsen der Ellipsen:
 $\frac{A}{B} = 1 + \sqrt{2}$.

Es kann noch erwähnt werden, dass die Bewegung in den Ellipsen in dem benutzten rotierenden Achsensystem unter konstanter Flächengeschwindigkeit vor sich geht, und zwar so, dass diese Bewegung (in dem rotierenden System) einer Zentralkraft entspricht, die dem Radiusvektor proportional ist. Dasselbe ist übrigens auch mit der später unten (S. 11 und 14) besprochenen allgemeineren Ellipsenbewegung für $\mu_0 > \mu > 0$ der Fall.

Im folgenden stelle ich eine Reihe numerischer Werte zusammen, die den Entwicklungsgang von $\mu = \frac{1}{2}$ bis zu $\mu = \mu_0$ erläutern. Für einige der gegebenen μ -Werte sind die entsprechenden Bahnbewegungen in den Figuren 1—6 dargestellt (vgl. S. 14). Das Hauptinteresse knüpft sich an die Entwicklung der Grössen $e^{\frac{1}{2}aT}$, φ und χ .

μ	a	b	T	$e^{\frac{1}{2}aT}$
0.50	+ 0.63208	+ 0.94843	6.6248	8.1148
0.45	+ 0.62949	+ 0.94672	6.6368	8.0755
0.40	+ 0.62160	+ 0.94150	6.6736	7.9580
0.35	+ 0.60793	+ 0.93252	6.7375	7.7514
0.30	+ 0.58761	+ 0.91942	6.8340	7.4472
0.25	+ 0.55903	+ 0.90136	6.9707	7.0172
0.20	+ 0.51924	+ 0.87728	7.1622	6.4201
0.15	+ 0.46244	+ 0.84490	7.4365	5.5811

μ	a	b	T	$e^{\frac{1}{2}aT}$
0.10	+ 0.37378	+ 0.79982	7.8558	4.3414
0.05	+ 0.18199	+ 0.73015	8.6054	2.1880
0.04	+ 0.06754	+ 0.71015	8.8476	1.2897
0.039	+ 0.03857	+ 0.70816	8.8726	1.1867
0.0387	+ 0.02358	+ 0.70750	8.8808	1.1104
0.0386	+ 0.01569	+ 0.70729	8.8836	1.0722
μ_0	0.00000	+ 0.70711	8.8857	1.0000

μ	I			II		
	M	N	φ	P	Q	χ
0.50	- 0.13357	- 0.74800	- 32° 18'	+ 0.13357	+ 0.74800	+ 32° 18'
0.45	- 0.17396	- 0.76390	- 34 17	+ 0.09442	+ 0.72930	+ 30 5
0.40	- 0.21600	- 0.77664	- 36 5	+ 0.05603	+ 0.70858	+ 27 39
0.35	- 0.26005	- 0.78540	- 37 40	+ 0.01779	+ 0.68551	+ 24 55
0.30	- 0.30630	- 0.78900	- 39 2	- 0.02106	+ 0.66039	+ 21 51
0.25	- 0.35484	- 0.78558	- 40 6	- 0.06160	+ 0.63295	+ 18 19
0.20	- 0.40522	- 0.77227	- 40 46	- 0.10557	+ 0.60304	+ 14 7
0.15	- 0.45560	- 0.74393	- 40 47	- 0.15632	+ 0.57006	+ 8 51
0.10	- 0.49966	- 0.69033	- 39 26	- 0.22204	+ 0.53344	+ 1 34
0.05	- 0.50150	- 0.57950	- 32 52	- 0.34092	+ 0.49807	- 12 14
0.04	- 0.46523	- 0.53287	- 27 17	- 0.40314	+ 0.50255	- 19 34
0.039	- 0.45317	- 0.52404	- 25 43	- 0.41754	+ 0.50673	- 21 18
0.0386	- 0.44314	- 0.51797	- 24 27	- 0.42861	+ 0.51093	- 22 39
μ_0	- 0.43598	- 0.51426	- 23 33.39	- 0.43598	+ 0.51426	- 23 33.39

Hiermit haben wir eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung des kritischen Massenwertes im System $\frac{1}{2} > \mu \geq \mu_0$ erreicht. Wenn wir uns nun dem Werte $\mu = \mu_0$ von der anderen Seite ($\mu_0 > \mu > 0$) her (s. z. B. CHARLIER'S

Mechanik des Himmels) nähern, zeigt es sich, dass die eben gefundene Ellipsenschar, in die die Spiralbahnen für $\mu = \mu_0$ entarten, mit einer Ellipsenschar identisch ist, gegen welche die bei $\mu < \mu_0$ existierenden zwei Klassen infinitesimaler *periodischer* Bahnen konvergieren.

Wir bauen die Theorie dieser Bahnen in analoger Weise auf wie oben für die Spiralbahnen und erhalten:

III.

$$\mu_0 > \mu > 0$$

$$\delta = \sqrt{1 - 27\mu + 27\mu^2}$$

$$\sigma = \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) = \frac{\sqrt{23 + 4\delta^2}}{4}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1 - \delta}{2}} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{1 + \delta}{2}}$$

Von jetzt an teilt sich die Rechnung in zwei Gruppen auf, die eine für β_1 , die andere für β_2 :

$$S = -\frac{\sigma\left(\beta^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sigma^2 + 4\beta^2}$$

$$U = \frac{2\beta\left(\beta^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sigma^2 + 4\beta^2}$$

$$x = x_0 \cos \beta t - \left(\frac{S}{U} x_0 - \frac{1}{U} y_0\right) \sin \beta t$$

$$y = y_0 \cos \beta t - \left(\frac{S^2 + U^2}{U} x_0 - \frac{S}{U} y_0\right) \sin \beta t$$

und, für $x_0 = 0$:

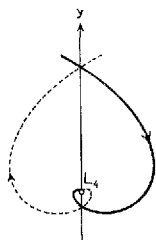


Fig. 1.
 $\mu = 0.5.$

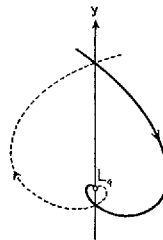


Fig. 2.
 $\mu = 0.3.$

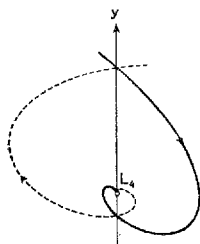


Fig. 3.
 $\mu = 0.15.$

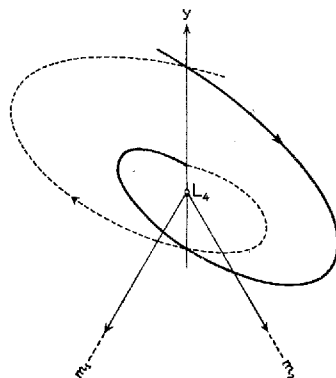


Fig. 4.
 $\mu = 0.05.$

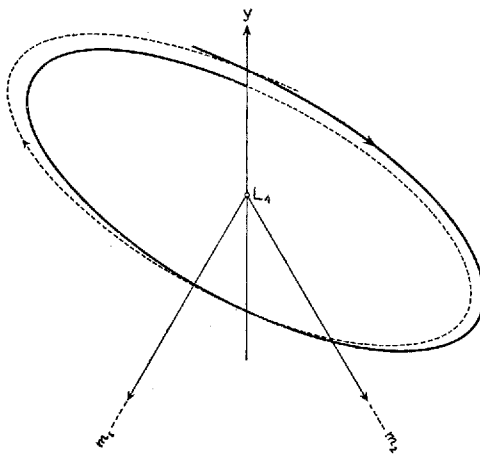


Fig. 5.
 $\mu = 0.0386.$

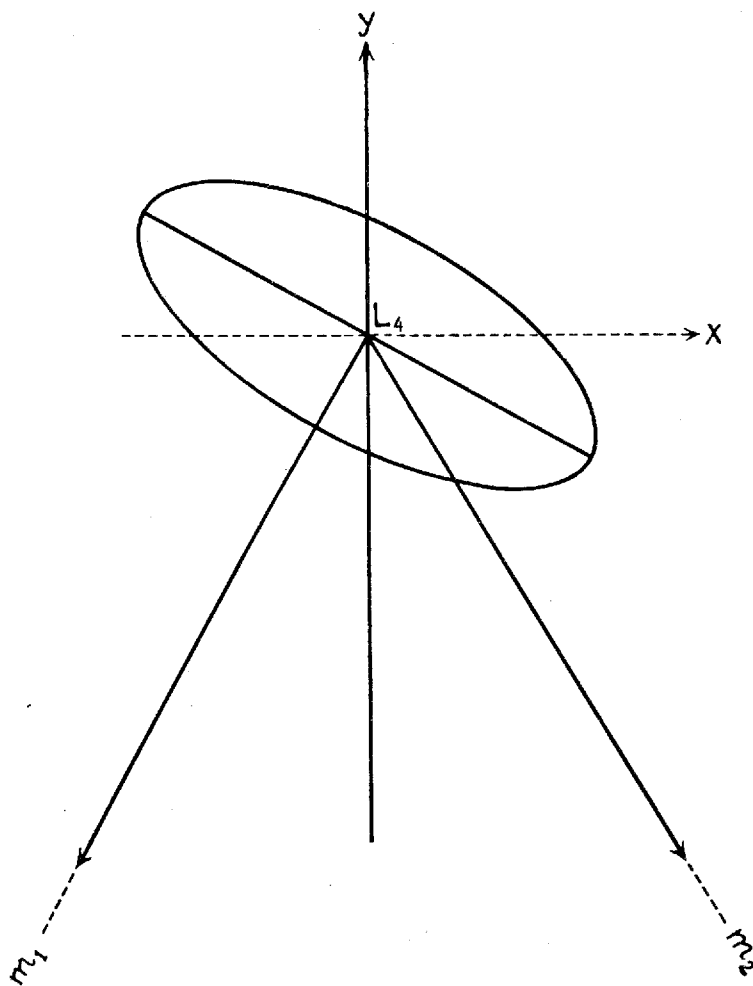


Fig. 6.
 $\mu = \mu_0$.

$$x = \frac{1}{U} y_0 \sin \beta t$$

$$y = y_0 \cos \beta t + \frac{S}{U} y_0 \sin \beta t.$$

Für den Winkel (\mathcal{J}), den die Tangente der Bahn im Punkte 0, y_0 mit der x -Achse macht, erhalten wir: $\operatorname{tg} \mathcal{J} = S$.

Für $\mu = 0$ entarten diese zwei Lösungen in den Punkt L_4 ; für $\mu = \mu_0$ fallen die zwei Ellipsenscharen zusammen ($\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$) und werden mit der oben (S. 8—9) angegebenen Ellipsenschar identisch, gegen welche — von der anderen Seite her kommend — die spiralförmigen asymptotischen Bahnen für $\mu = \mu_0$ konvergieren (so wird z. B. für beide Scharen $\mathcal{J}_{\mu_0} = -23^\circ 33'.39$).

In den Figuren 1—6 ist die oben angegebene Entwicklung dargestellt. Fig. 1—5 geben die Entwicklung der asymptotischen Bahnen von $\mu = 0.5$ bis $\mu = 0.0386$; die in den Librationspunkt hineinwandernden Bahnen sind voll ausgezogen, die hinauswandernden gestrichelt. Fig. 6 stellt ein Individuum der Ellipsenschar für $\mu = \mu_0$ dar, gegen die einerseits diese infinitesimalen *asymptotischen* und andererseits auch die infinitesimalen *periodischen* Bahnen konvergieren.

Hiermit ist der Zusammenhang des Systems asymptotischer und periodischer infinitesimaler Bahnen in der Umgebung von L_4 (L_5) für alle Massenverhältnisse klargelegt.

Für einige Kontrollrechnungen habe ich Herrn Lektor N. BENNEDSEN zu danken, für die Ausführung der Zeichnungen zu den Figuren Herrn Cand. mag. JENS P. MÖLLER.

Universitæts-Observatorium, Kopenhagen, 1930, Mai 26.

ELIS STRÖMGREN.