Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 10.

KLEINERE BEITRÄGE ZUR THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN

I—II

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
1930

In einigen kleineren Abhandlungen unter dem gemeinsamen Titel »Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen«, von denen ich hier die zwei ersten vorlege, werde ich verschiedene Einzelprobleme aus der genannten Theorie behandeln.

Dem Charakter dieser kleinen Abhandlungen entsprechend sind diese so abgefasst, dass ihr Verständniss die Kenntniss der Definition und der Haupteigenschaften der fastperiodischen Funktionen voraussetzt.

I.

Über die Argumentvariation einer fastperiodischen Funktion.

Das Ziel der vorliegenden Note ist der Beweis des folgenden von Herrn WINTNER für die zwecke eines astronomischen Problems in einem speziellen, für die astronomische Fragestellung allerdings ausreichenden, Fall bewiesenen[1], im allgemeinen Fall als Vermutung hingestellten Satzes:

Es sei $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ $(-\infty < x < \infty)$ eine stetige und fastperiodische Funktion vom konstanten absoluten Betrage Eins; dann ist die durch die Forderung der Stetigkeit in Verbindung mit der normierenden Festsetzung $-\pi \leqq \varphi(0) < \pi$ eindeutig bestimmte Funktion $\varphi(x) = \arg f(x)$ in der Gestalt

$$\varphi(x) = cx + \psi(x)$$

darstellbar, wobei c eine Konstante und $\psi(x)$ eine fastperiodische Funktion bedeutet.

Bemerken wir, dass die Umkehrung dieses Satzes trivial ist: Eine Funktion der Form $e^{i\varphi(x)}$, wobei $\varphi(x) =$

[1] A. WINTNER, Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires, Rend. Accad. Lincei 1930, Marzo 3.

$cx + \psi(x)$ ist mit konstantem c und fastperiodischem $\psi(x)$, ist gewiss eine fastperiodische Funktion. Es folgt dies daraus, dass $e^{i\varphi(x)}$ das Produkt zweier fastperiodischen Funktionen ist, nämlich der periodischen Funktion e^{icx} und der (mit denselben Verschiebungszahlen wie $\psi(x)$) fastperiodischen Funktion $e^{i\psi(x)}$.

Um das Verständniss des folgenden zu erleichtern, führen wir den Beweis des aufgestellten Satzes zunächst für den einfachen Fall, wo $e^{i\varphi(x)}$ eine periodische Funktion ist, etwa mit der Periode p; es wird sich herausstellen, dass in diesem Falle cp ein ganzes Multiplum von 2π und $\psi(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode p ist.

Aus $e^{i\varphi(x+p)} = e^{i\varphi(x)}$ für alle x folgt zunächst, dass $\varphi(x+p) - \varphi(x) =$ einem ganzen Multiplum von 2π für jeden Wert von x ist, hieraus aber, da $\varphi(x)$ stetig ist, dass dieses Multiplum für alle x dasselbe ist. Es gibt also eine Konstante c, so dass für alle x

$$\varphi(x+p) - \varphi(x) = cp,$$

d. h.

$$\varphi(x) - cx = \varphi(x+p) - c(x+p)$$

wird; dies bedeutet aber, dass die Funktion $\varphi(x) - cx$ eine periodische Funktion mit der Periode p ist; nennen wir sie $\psi(x)$, so wird

$$\varphi(x) = cx + \psi(x).$$

Bemerken wir, dass der soeben bewiesene Satz auch in umgekehrter Richtung richtig ist: Eine Funktion der Form $e^{i\varphi(x)}$, wobei $\varphi(x) = cx + \psi(x)$ und $\psi(x)$ periodisch mit der Periode p ist, ist periodisch mit derselben Periode, sobald cp gleich einem ganzen Multiplum von 2π ist.

Um den behaupteten Satz im allgemeinen Fall einer fastperiodischen Funktion $e^{i\varphi(x)}$ zu beweisen, gehen wir von der folgenden Bemerkung aus: Besteht für irgendein $\varepsilon < 2$ und irgendwelche Zahlen x und τ die Ungleichung

$$\left| e^{i\varphi(x+\tau)} - e^{i\varphi(x)} \right| \leqq \varepsilon, \tag{1}$$

dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl g, für die

$$| \varphi(x+\tau) - \varphi(x) - g \cdot 2\pi | \leqq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

ist; ferner ist diese Zahl g, wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$, unabhängig von x und τ in jeder solchen zusammenhängenden Punktmenge der $x\tau$-Ebene, auf welcher die Ungleichung (1) gilt. Von dieser Bemerkung ausgehend führen wir den Beweis des aufgestellten Satzes in drei Schritten: Zunächst wird die gleichmässige Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ aus der der Funktion $e^{i\varphi(x)}$ gefolgert; sodann mit Hilfe der Existenz beliebig grosser Verschiebungszahlen von $e^{i\varphi(x)}$ die Konstante c definiert und endlich für diesen Wert von c, jetzt erst mit voller Ausnutzung der Fastperiodizität von $e^{i\varphi(x)}$, die Fastperiodizität der Funktion $\varphi(x) - cx$ bewiesen.

1°. Die gleichmässige Stetigkeit der Funktion $e^{i\varphi(x)}$ besagt folgendes: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass, sobald $|\tau| \leqq \delta$, gleichzeitig für alle x des ganzen Intervalles $-\infty < x < \infty$ die Ungleichung (1) gilt. Wir wählen $\varepsilon < 2$; nach dem soeben gesagten folgt dann aus dieser Ungleichung, ebenfalls für $|\tau| \leqq \delta$ und für alle x, die Richtigkeit einer Ungleichung (2) mit einer passenden festen ganzen Zahl g; diese muss aber gleich Null sein, weil für $\tau = 0$ die Ungleichung die Form $|g \cdot 2\pi| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \pi < \pi$ annimmt. Für $g = 0$ ist aber (2) eben die Bedingung der gleichmässigen Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$.

Aus der gleichmässigen Stetigkeit von $\varphi(x)$ folgt unmittelbar die folgende Eigenschaft der Funktion $\varphi(x)$: Zu jedem $\tau > 0$ gibt es ein $K = K(\tau) > 0$, so dass, sobald $|k| < \tau$ ist, gleichzeitig für alle x

$$|\varphi(x+k) - \varphi(x)| < K.$$

Wir brauchen nur für irgendein $\varepsilon < 2$ und ein entsprechendes δ eine natürliche Zahl n so gross zu wählen, dass $\frac{\tau}{n} < \delta$ wird; dann gilt wegen

$$|\varphi(x+k) - \varphi(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \left| \varphi\left(x + \frac{\nu k}{n}\right) - \varphi\left(x + \frac{(\nu-1)k}{n}\right) \right|$$

die Behauptung für $K = \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \cdot n$.

2°. Um den Wert der Konstanten c zu definieren, betrachten wir für irgendein x und irgendein $t > 0$ den Quotienten

$$q(x, t) = \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t};$$

wir werden beweisen, das $q(x, t)$ für $t \to \infty$ gleichmässig in x einem bestimmten Grenzwert c zustrebt, d. h. dass es eine Zahl c gibt, so dass für jedes $\eta > 0$ gleichzeitig für alle x die Ungleichung

$$|q(x, t) - c| < \eta$$

besteht, sobald nur t grösser als eine nur von η abhängige Grösse $\Delta = \Delta(\eta)$ ist; die hierdurch bestimmte Zahl c wird das c des Satzes sein. Wir werden den Beweis führen, indem wir zeigen, dass für hinreichend grosses Δ der Unterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze von $q(x, t)$ im Gebiete $-\infty < x < \infty$, $t > \Delta$ beliebig klein ist.

Sei $\varepsilon < 2$ eine positive Zahl und $\tau > 1$ eine zugehörige Verschiebungszahl der Funktion $e^{i\varphi(x)}$. Für alle x besteht dann die Ungleichung (1), also nach dem oben Gesagten auch eine Ungleichung (2) mit einer gewissen festen, d. h. von x unabhängigen, ganzen Zahl g. Sei jetzt $t > \tau$ eine beliebige Zahl; um den Quotienten $q(x, t)$ abzuschätzen, schreiben wir t in der Form $t = n\tau + k$ mit ganzem n und $0 \leqq k < \tau$; dann folgt aus

$$\varphi(x+t) - \varphi(x) =$$

$$\varphi(x+t) - \varphi(x+n\tau) + \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\varphi(x+\nu\tau) - \varphi\big(x+(\nu-1)\tau\big)\Big)$$

in Verbindung mit der Schlussbemerkung von 1° und der Ungleichung (2) ohne weiteres für alle x

$$|\,\varphi(x+t) - \varphi(x) - n \cdot g \cdot 2\pi\,| \leqq K(\tau) + n \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2},$$

also, nach Division mit t, wegen $\frac{n}{t} \leqq \frac{1}{\tau} < 1$

$$\left| q(x, t) - \frac{g \cdot 2\pi}{\tau + \frac{k}{n}} \right| \leqq \frac{K(\tau)}{t} + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt aber, dass für hinreichend grosses $\varDelta$ der Unterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze von $q(x, t)$ für $-\infty < x < \infty$ und $t > \varDelta$ kleiner als z. B. $3 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$ sein muss, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

3°. Mit der gefundenen Konstante c betrachten wir jetzt die Funktion $\psi(x) = \varphi(x) - cx$. Unsere Aufgabe ist, die Fastperiodizität von $\psi(x)$ zu beweisen. Bemerken wir zunächst, dass es hierfür hinreichend ist, den Fall $c = 0$ zu betrachten, wo $\psi(x) = \varphi(x)$ ist; die Funktion $\psi(x)$ steht nämlich in derselben Beziehung zur fastperiodischen Funktion $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(x)}e^{-icx}$ wie $\varphi(x)$ zur Funktion $e^{i\varphi(x)}$; und für $\psi(x)$ ist offenbar der Grenzwert von $\dfrac{\psi(x+t)-\psi(x)}{t}$ für $t \to \infty$ gleich Null.

Bei der Annahme $c = 0$ beweisen wir die Fastperiodizität von $\varphi(x)$ folgendermassen. Sei $\varepsilon < 2$; wie oben gezeigt, gibt es dann zu jeder zu ε gehörigen Verschiebungszahl τ von $e^{i\varphi(x)}$, d. h. zu jeder Zahl τ, für die die Ungleichung (1) für alle x besteht, eine von x unabhängige Zahl g, so dass die Ungleichung (2) für alle x besteht. Wir wollen beweisen, dass hierbei immer $g = 0$ sein muss; damit wird der Beweis vollendet sein, denn für $g = 0$ ist (2) eben die Bedingung für die Fastperiodizität von $\varphi(x)$. Dass immer $g = 0$ sein muss, ist aber unmittelbar klar; gäbe es nämlich eine Zahl τ, für die $g \neq 0$ wäre, so würde für dieses τ entweder für alle x die Ungleichung

$$\varphi(x+\tau) - \varphi(x) > \pi,$$

oder für alle x die Ungleichung

$$\varphi(x+\tau) - \varphi(x) < -\pi,$$

gelten, also beidemal für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$\left|\varphi(x+n|\tau|) - \varphi(x)\right| > n\pi,$$

also

$$|c| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\varphi(x+n|\tau|) - \varphi(x)\right|}{n|\tau|} \geqq \frac{\pi}{|\tau|} > 0,$$

gegen unsere Annahme.

Zum Schluss sei bemerkt, dass der bewiesene Satz, wonach für jede fastperiodische Funktion $f(x)$ vom konstanten absoluten Betrage Eins die durch die Forderung der Stetigkeit in Verbindung mit der normierenden Festzetzung $-\pi \leqq \arg f(0) < \pi$ eindeutig bestimmte Funktion $\arg f(x)$ in ein lineares Glied cx und ein fastperiodisches $\psi(x)$ zerfällt, nicht allgemein für jede durchweg von Null verschiedene fastperiodische Funktion $f(x)$ richtig ist; dies zeigt z. B. die Funktion

$$f(x) = 2 + e^{ix} + e^{ix\sqrt{2}},$$

für die $\arg f(x)$, in derselben Weise wie oben eindeutig erklärt, nicht einmal gleichmässig stetig wird. Bemerken wir aber, dass der Satz richtig ist, sobald die Funktion $f(x)$ nicht beliebig nahe an Null herankommt, d. h. sobald $|f(x)|$ eine positive untere Grenze hat; dies folgt unmittelbar daraus, das in diesem Fall bei der Schreibweise

$$f(x) = |f(x)|\, e^{i\varphi(x)}$$

die Funktion $e^{i\varphi(x)} = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, und somit nach dem obigen Satze auch die Funktion $\varphi(x) = \arg f(x)$ selbst, fastperiodisch wird.

II.

Eine Bemerkung über die Wertverteilung fastperiodischer Funktionen.

Es sei $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ eine stetige reellwertige periodische Funktion, etwa mit der Periode p. Bei einer beliebig gewählten festen reellen Grösse a bezeichnen wir mit $M(X)$ die Menge aller Punkte x des Intervalles $0 \leqq x \leqq X$, für welche $f(x) = a$ ist, und mit $L(X)$ das Mass dieser (abgeschlossenen) Menge. Aus der Periodizität von $f(x)$ folgt dann sofort, dass der Grenzwert

$$\lim_{X \to \infty} \frac{L(X)}{X}$$

existiert $\left(\text{und zwar gleich dem Werte } \frac{L(p)}{p} \text{ ist}\right)$.

Für den Fall einer fastperiodischen Funktion hat Herr Wintner[1] u. a. bewiesen, dass ein entsprechender Satz für alle Werte von a, mit eventueller Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Werten, gilt. Die Frage, ob der Satz bei jedem a richtig ist, wurde dahingestellt gelassen. Der Zweck der vorliegenden Note ist, durch Angabe eines passenden Beispiels zu zeigen, dass solche Ausnahmewerte a tatsächlich existieren können.

[1] A. Wintner, Diophantische Approximationen und Hermitsche Matrizen, Math. Zeitschr. Bd. 30.

Indem wir der Bequemlichkeit halber $a = 0$ wählen, haben wir also zu zeigen:

Es gibt eine (reellwertige) fastperiodische Funktion $f(x)$ mit der folgenden Eigenschaft: Bezeichnet $L(X)$ das Mass der abgeschlossenen Menge aller Punkte x des Intervalles $0 \leqq x \leqq X$, in welchen $f(x)$ den Wert 0 annimmt, so strebt der Quotient

$$\frac{L(X)}{X}$$

für $X \to \infty$ **keinem** bestimmten Grenzwerte zu, d. h. es ist

$$\overline{\lim} \frac{L(X)}{X} > \underline{\lim} \frac{L(X)}{X}.$$

In der Tat können wir eine fastperiodische Funktion mit der gewünschten Eigenschaft durch das folgende Verfahren konstruieren.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge positiver Grössen, so dass $\sum \varepsilon_n$ konvergiert. Ferner sei $(2 <)\ m_1 < m_2 \ldots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen, für welche

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m_m}\right) > \frac{1}{2}$$

ist; zur Abkürzung setzen wir

$$p_0 = 1,\ p_1 = m_1,\ p_2 = m_1 m_2, \ldots,\ p_n = m_1 m_2 \cdots m_n, \ldots$$

also

$$p_n = m_n p_{n-1} \qquad (p_0 = 1).$$

Bei jedem $n = 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir mit $\varphi_n(x)$ die stetige, nicht negative, reinperiodische Funktion mit der Periode p_n, welche im Periodizitätsintervall $0 \leqq x \leqq p_n$ durch die folgende Festlegung definiert ist (siehe Fig. 1):

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq p_{n-1} \\ \sin \dfrac{\pi}{p_{n-1}}(x - p_{n-1}) & \text{für } p_{n-1} \leqq x \leqq 2p_{n-1} \\ 0 & \text{für } 2p_{n-1} \leqq x \leqq p_n \end{cases}$$

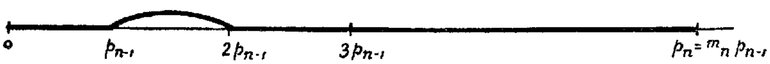

Fig. 1.

Wegen $0 \leqq \varphi_n(x) \leqq 1$ ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(x),$$

als Summe einer für alle x gleichmässig konvergenten Reihe von fastperiodischen (sogar stetigen reinperiodischen) Funktionen, eine fastperiodische Funktion von x. Von dieser Funktion $f(x)$ wollen wir nachweisen, dass sie die im obigen Satz geforderte Eigenschaft besitzt.

Es bezeichne wie oben $L(X)$ das Mass der Menge aller x des Intervalles $0 \leqq x \leqq X$ mit $f(x) = 0$, d. h. die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $(0, X)$, in welchen $f(x)$ durchweg gleich 0 ist. Entsprechenderweise bezeichne $L_n(X)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Gesamtlänge der Teilintervalle von $(0, X)$, wo die (mit der Periode p_n periodische) Funktion

$$f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \varphi_\nu(x)$$

den Wert 0 hat.

Da die Funktion $\varphi_\nu(x)$ für jedes $\nu > n$ im ganzen Intervalle $0 \leqq x \leqq p_n$ gleich Null ist, gelten offenbar (vgl. die Figur) für jedes $n \geqq 2$ die beiden Gleichungen

$$L(p_n) = L_n(p_n) = (m_n - 1)\, L_{n-1}(p_{n-1})$$

und

$$L(2p_{n-1}) = L_n(2p_{n-1}) = L_n(p_{n-1}) = L_{n-1}(p_{n-1}).$$

Die letzte Gleichung ergibt

$$\frac{L(2p_{n-1})}{2p_{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{L_{n-1}(p_{n-1})}{p_{n-1}} \leqq \frac{1}{2}$$

also (für $n \to \infty$)

$$\underline{\lim}\frac{L(X)}{X} \leqq \frac{1}{2}.$$

Die erste Gleichung liefert dagegen

$$\frac{L(p_n)}{p_n} = \frac{L_n(p_n)}{p_n} = \frac{(m_n - 1)\,L_{n-1}(p_{n-1})}{m_n \cdot p_{n-1}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m_n}\right)\frac{L_{n-1}(p_{n-1})}{p_{n-1}}$$

und hieraus weiter

$$\frac{L(p_n)}{p_n} = \left(1 - \frac{1}{m_n}\right)\left(1 - \frac{1}{m_{n-1}}\right)\frac{L_{n-2}(p_{n-2})}{p_{n-2}} = \ldots =$$

$$= \prod_{\nu=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right)\frac{L_1(p_1)}{p_1} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right).$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$\overline{\lim}\frac{L(X)}{X} \geqq \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right) > \frac{1}{2}.$$

Somit ist

$$\overline{\lim}\frac{L(X)}{X} > \underline{\lim}\frac{L(X)}{X},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir fügen noch einige Bemerkungen hinzu über die Werteverteilung fastperiodischer Funktionen, die komplexwertig sein dürfen, $f(x) = u(x) + iv(x)$, d. h. wo nicht ausdrücklich verlangt wird, dass die Funktionswerte alle reell sind. Für gewisse spezielle fastperiodische Funktionen — nämlich für die Riemann'sche Zetafunktion, auf vertikalen Geraden betrachtet — haben Herr Børge Jessen und ich in einer gemeinsamen Arbeit (Acta mathematica Bd. 54) die Wertverteilung genau studiert. Für diese Funktionen haben wir unter anderem gezeigt, dass es zu jedem achsenparallelen Rechteck R der komplexen Ebene eine bestimmte »Wahrscheinlichkeit« W_R in dem Sinne gibt, dass der Quotient

$$\frac{L_R(X)}{X},$$

wo $L_R(X)$ das Mass derjenigen Punktmenge des Intervalles $0 \leq x \leq X$ bezeichnet, in deren Punkten x der zugehörige Funktionswert dem Rechteck R angehört, für $R \to \infty$ gegen einen bestimmten Grenzwert W_R strebt. Das oben konstruierte Beispiel einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ erlaubt nun unmittelbar zu zeigen, dass ein entsprechender Satz nicht für beliebige fastperiodische Funktionen gilt, und zwar weder wenn ein offenes Rechteck noch wenn ein abgeschlossenes Rechteck betrachtet wird. Genau ausgedrückt:

Es gibt eine fastperiodische Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ und dazu ein offenes (bzw. abgeschlossenes) Rechteck R in der komplexen Ebene, so dass der obige Quotient $\frac{L_R(X)}{X}$ **nicht** einem bestimmten Grenzwerte zustrebt.

In beiden Fällen (d. h. sei das Rechteck offen oder abgeschlossen) können wir zum Nachweis unserer Behauptung die obige fastperiodische Funktion $f(x) = \sum \varepsilon_n \varphi_n(x)$ heranziehen.

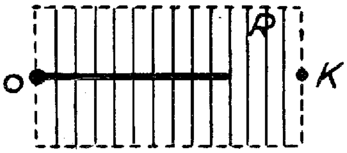

Fig. 2.

1°. Wir betrachten zunächst ein offenes Rechteck R, etwa das Rechteck $0 < u < K$, $-1 < \vartheta < 1$, wo K eine Konstante bezeichnet, die grösser ist, als die obere Grenze von $f(x)$ (siehe Fig. 2). Die Punktmenge des Intervalles $0 \leqq x \leqq X$, in welcher der Funktionswert $f(x)$ unserem Rechteck R angehört, ist offenbar die Komplementärmenge derjenigen Punktmenge, in welcher $f(x) = 0$ ist. Mit den obigen Bezeichnungen ist also $L_R)X) + L(X) = X$, d. h.

$$\frac{L_R(X)}{X} = 1 - \frac{L(X)}{X}.$$

Nun strebt aber, wie wir oben gezeigt haben, $\frac{L(X)}{X}$ keinem Grenzwerte zu, und dies gilt somit auch für $\frac{L_R(X)}{X}$.

2°. Für den Fall eines abgeschlossenen Rechtecks R können wir noch einfacher verfahren. Wir brauchen nur (siehe Fig. 3) etwa das Rechteck $-1 \leqq u \leqq 0, -1 \leqq v \leqq 1$ zu betrachten. Hier gilt offenbar $L_R(X) = L(X)$ und es ist somit klar, dass ein Grenzwert von $\frac{L_R(X)}{X}$ nicht existiert.

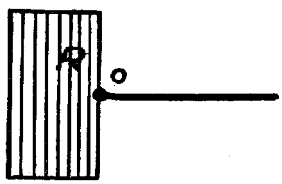

Fig. 3.

Forelagt paa Mødet den 11. April 1930.
Færdig fra Trykkeriet den 30. Juni 1930.