Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 1.

EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

ZWEITE MITTEILUNG

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1929

In dem ersten Abschnitte dieser zweiten Mitteilung beschäftigen wir uns noch mit einigen Fragen aus der allgemeinen Kongruenzlehre, wie diese durch das ursprüngliche Axiomsystem der ersten Mitteilung[1] definiert wurde. In dem zweiten Abschnitte gehen wir dann zu dem Spezialfall über, wo ausserdem das Eindeutigkeitsaxiom gültig ist. Zum Schluss besprechen wir die Frage von der Unabhängigkeit der Axiome der Anordnung.

I.

1. Geradenbüschel.

1. Der eigentliche Geradenbüschel (Realbüschel) besteht aus allen Geraden durch einen Punkt O, den Mittelpunkt des Büschels. Durch einen beliebigen von O verschiedenen Punkt P geht eine einzige Gerade, oder unendlich viele Geraden, oder keine Gerade des Büschels, je nachdem die beiden Punkte O und P eine oder unendlich viele oder keine Verbindungsgeraden haben. Im letzten Falle sagen wir, dass der Punkt P ausserhalb des Büschels liegt, während in den beiden ersten Fällen P als einfacher bezw. mehrfacher Punkt innerhalb des Büschels bezeichnet werden soll.

Durch eine Halbdrehung[2] geht der Büschel in einen

[1] Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Math.-fys. Meddelelser. VIII, 11. 1929.

[2] Erste Mitteilung S. 29.

anderen Büschel über. Alle Punkte P bewahren durch die Transformation ihren Charakter dem Büschel gegenüber (als Punkt ausserhalb oder innerhalb, einfach oder mehrfach, des Büschels).

2. Von einem beliebigen Punkte P aus lassen sich immer Lote auf die Geraden des Büschels (O) fällen. Die Fusspunkte der Lote bilden eine Punktmenge, zu welcher O und P selbst hören oder nicht, je nachdem P innerhalb oder ausserhalb des Büschels liegt. Diese Punktmenge soll als Fusspunktmenge (O, P) oder (P, O) bezeichnet werden. Liegt P ausserhalb des Büschels, sind irgend zwei Punkte der Menge voneinander getrennt (d. h. sie haben keine Verbindungsgerade). Ist P innerhalb des Büschels (O), haben P und O eine (eindeutig oder mehrdeutig bestimmte) Verbindungsgerade, und je zwei Punkte der Menge (O, P) haben dann auch eine (eindeutig oder mehrdeutig bestimmte) Verbindungsgerade. Dies folgt aus den früher angegebenen Eigenschaften der nebenstehenden Figur 1[1]:

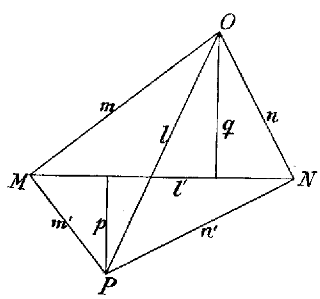

Fig. 1.

Es seien m und n zwei Geraden des Büschels (O), m' und n' die Lote von P auf diese beiden Geraden, M und N die Fusspunkte der Lote. Es sei ferner $OP = l$ eine Verbindungsgerade von O und P. Es wird dann eine Verbindungsgerade l' von M und N der Geraden l so entsprechen, dass, wenn die Lote von O und P auf l' mit q und p bezeichnet werden, die folgenden Gleichungen bestehen:

$$ml = qn, \quad m'l = pn', \quad Mp = qN.$$

Der Satz soll als **Lotensatz** bezeichnet werden.

[1] Erste Mitteilung S. 24—25.

2. Der Fusspunktsatz.

3. In einem Büschel (O) betrachten wir eine beliebige Anzahl Geraden, welche mit den Zahlen 1, 2, 3, ... bezeichnet werden. Drei beliebige von ihnen seien i, k, l

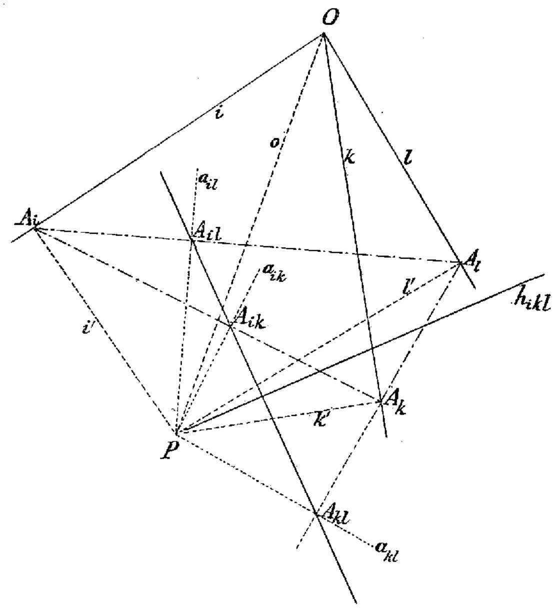

Fig. 2.

(Fig. 2). Von dem festen Punkte P innerhalb des Büschels ziehen wir eine Gerade o nach O und fällen die Lote i', k', l' auf die drei Geraden i, k, l. Die Fusspunkte der Lote seien A_i, A_k, A_l. Durch P ziehen wir 3 Geraden a_{ik}, a_{il}, a_{kl}, welche derart bestimmt werden, dass

$$a_{ik} = i'ok', \quad a_{kl} = k'ol', \quad a_{il} = l'oi'.$$

Es wird also

$$o = i'a_{ik}k' = k'a_{kl}l' = l'a_{li}i'.$$

Durch A_i und A_k (und analog für die anderen Zeiger) lässt sich dann nach dem Lotensatz (2) eine Gerade $\perp a_{ik}$ ziehen, d. h. es existiert ein Dreieck $A_i A_k A_l$, dessen Seiten senkrecht zu den Geraden a_{kl}, a_{li}, a_{ik} stehen. Die Seiten des Dreiecks $A_k A_l$, $A_l A_i$, $A_i A_k$ werden von den entsprechenden Geraden a_{kl}, a_{li}, a_{ik} in den Punkten A_{kl}, A_{li}, A_{ik} geschnitten. Es wird sich zeigen, dass diese 3 Punkte immer in einer geraden Linie enthalten sind.

Bestimmen wir nämlich eine Gerade h_{ikl} derart, dass

$$h_{ikl} = a_{ik} i' a_{il},$$

so wird nach dem Lotensatz das Lot von A_{ik} auf h_{ikl} durch A_{il} gehen, und es wird leicht nachgewiesen, dass der Ausdruck für h_{ikl} in den drei Zeigern symmetrisch ist. Aus den obigen Ausdrücken für o

$$\begin{aligned} o &= i' a_{ik} k' = k' a_{kl} l' = l' a_{li} i' \\ &= k' a_{ik} i' = l' a_{kl} k' = i' a_{li} l', \end{aligned}$$

folgt nämlich

$$a_{ik} k' = a_{il} l',$$

und die hierzu analogen Gleichungen; also wird

$$a_{ik} i' a_{il} = a_{kl} l' a_{il} = a_{kl} k' a_{ik},$$

woraus gerade hervorgeht, das h_{ikl} nach der Definition unverändert bleibt, wenn die Zeiger i, k, l vertauscht werden.

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Fusspunktsatz. Drei beliebige Punkte der Fusspunktmenge (O, P) sind immer die Ecken eines Dreiecks derart, dass die Fusspunkte der Lote von P (oder O) auf die Seiten des Dreiecks in einer geraden Linie gelegen sind.

Ist die gerade Linie $OP = o$ mehrdeutig bestimmt, wird auch das Dreieck $A_i A_k A_l$ mehrdeutig bestimmt, und die gerade Linie $A_{ik} A_{kl} A_{li}$ ebenso.

4. Betrachten wir vier Geraden i, k, l, m des Büschels (O), können wir vier Fusspunktgeraden $h_{ikl}, h_{ilm}, h_{imk}, h_{klm}$ erhalten, den 4 Geradentripeln ikl, ilm, imk, klm entsprechend. Es lässt sich zeigen, dass die Fusspunkte der Lote von P auf diese 4 Fusspunktgeraden in einer Geraden h_{iklm} gelegen sind (der Fusspunktgeraden der vier Geraden i, k, l, m für den Punkt P).

Um dies zu zeigen, brauchen wir nur die vorstehenden Entwicklungen auf die Geraden $A_m A_i, A_m A_k, A_m A_l$ (wo A_m der Fusspunkt des Lotes von P auf die Gerade m bezeichnet) zu verwenden. Die Lote von P auf diese Geraden sind a_{mi}, a_{mk}, a_{ml}, und wir brauchen nun nur die obigen Gleichungen derart zu transformieren, dass $i' \rightarrow a_{mi}$ (für festen m und alle i), ferner $a_{ik} \rightarrow h_{mik}$ und $h_{ikl} \rightarrow h_{mikl}$. Es wird dann

$$\begin{aligned} i' a_{ik} k' &\rightarrow a_{mi} h_{mik} a_{mk}, \\ h_{mikl} &= h_{mik} a_{mi} h_{mil}, \end{aligned}$$

und wir haben nur noch nötig zu zeigen, dass dieser Ausdruck symmetrisch in allen 4 Zeigern m, i, k, l ausfällt. Es ist aber

$$\begin{aligned} h_{mik} &= a_{mk} m' a_{mi}, \\ h_{mil} &= a_{ml} m' a_{mi}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} h_{mikl} &= a_{mk} m' a_{mi} a_{mi} a_{ml} m' a_{mi} \\ &= (a_{mk} m') a_{ml} (m' a_{mi}), \end{aligned}$$

wo alle 3 Faktoren symmetrisch in m und l sind, und dies wird eben genügen, um die erwähnte Symmetrieeigenschaft festzustellen. Die Gerade h_{mikl} kann als Fusspunktgerade der 4 Geraden m, i, k, l bezeichnet werden.

Der Satz lässt sich unmittelbar erweitern für eine grössere Anzahl von geraden Linien. Für 5 Geraden des Büschels i, k, l, m, n gibt es 5 Geraden h_{iklm}, h_{ikmn}, u. s. w., und die Fusspunkte der Lote von P auf diese 5 Geraden sind in einer geraden Linie h_{iklmn} enthalten. Es wird leicht verständlich, wie die Untersuchung sich auf höhere Anzahlen von Geraden ausdehnen lässt.

3. Die Gegenpaarung.

5. Im Realbüschel sprechen wir von *Gegenpaarung*, wenn die Geraden des Büschels derart gepaart werden, dass die verschiedenen Paare aa_1, bb_1, cc_1, ... die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Bedingungen erfüllen:

$$ab_1 = a_1 b, \; ac_1 = a_1 c, \; bc_1 = b_1 c, \; \dots \text{ u. s. w.}$$

Eine Gegenpaarung wird z. B. hergestellt, wenn jede Gerade des Büschels an einer festen Geraden x des Büschels gespiegelt wird. Die Spiegelungsachse x und die darauf senkrechte Gerade y des Büschels (welche auch als Spiegelungsachse aufgefasst werden kann) sind dann Doppelstrahlen der Paarung. Es besteht aber auch die Möglichkeit einer Gegenpaarung, wo keine Doppelstrahlen vorhanden sind.

In jedem Büschel gibt es eine bestimmte Gegenpaarung, bei welcher zwei gegebene Geraden des Büschels a, a_1 einander entsprechen. Ein beliebiges Paar xx_1 lässt sich nämlich durch die Bedingung

$$ax_1 = xa_1, \text{ oder } x_1 = axa_1,$$

bestimmen. Aus $x_1 = axa_1$, $y_1 = aya_1$, folgt sofort

$$xy_1 = xaya_1 = yaxa_1 = yx_1.$$

Hat das Paar aa_1 eine Spiegelungsachse (und somit zwei zueinander senkrechte Spiegelungsachsen) so haben alle Paare xx_1, yy_1, u. s. w. dieselben Spiegelungsachsen.

Zwei Geradenpaare aa_1, bb_1 sollen im allgemeinen gegengepaart heissen, wenn

$$ab_1 = ba_1, \quad \text{oder} \quad b_1 = aba_1.$$

Wir werden in diesem Falle auch die Redeweise einführen, dass b an dem Paar aa_1 gespiegelt wird.

6. Es sei vorgelegt ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c, und 3 Geraden a', b', c' durch die Ecken A, B, C. Diese Geraden werden an den Paaren bc, ca, ab (»an den Winkeln des Dreiecks«) gespiegelt, und wir erhalten hierdurch 3 entsprechende Geraden a'', b'', c'', derart, dass

$$\begin{aligned} a'' &= ba'c, \\ b'' &= cb'a, \\ c'' &= ac'b. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$a''b''c'' = ba'ccb'aac'b = b\,(a'b'c')\,b,$$

oder

$$a''b''c'' = (a'b'c')^b.$$

Die Bewegung $a''b''c''$ ist also die Transformierte von $a'b'c'$ durch b.

Wenn die 3 Geraden a', b', c' durch denselben Punkt P' gehen, so wird $a'b'c'$, und somit auch $a''b''c''$, eine Spiegelung darstellen.

Haben zwei von den drei Geraden $a''b''c''$ ausserdem einen eindeutigen Schnittpunkt P'', so werden alle drei Geraden durch diesen Punkt gehen. Die Achse der Spiegelung $a''b''c''$ ist das Spiegelbild von der Achse der Spiegelung $a'b'c'$ in Bezug auf b, und geht folglich durch das

Spiegelbild von P' in Bezug auf b. Es lässt sich übrigens leicht nachweisen, dass die Geraden a'', b'', c'' die Mittelsenkrechten sind der Seiten des Dreiecks $(P')^a (P')^b (P')^c$.

7. Es sei vorgelegt ein Viereck $ABCD$ mit den Seiten $DA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$; es sei ferner ein Punkt P' gegeben, welcher mit A, B, C, D die Verbindungsgeraden a', b', c', d' hat. Wir spiegeln a', b', c', d' an den Winkeln des Vierecks und erhalten die entsprechenden Geraden a'', b'', c'', d''.

Es wird dann

$$a'' = aa'b, \quad b'' = bb'c, \quad c'' = cc'd, \quad d'' = dd'a,$$

woraus folgt

$$a''b''c''d'' = a(a'b'c'd')\,a = (a'b'c'd')^a.$$

Die Bewegung $a''b''c''d''$ wird somit eine In-Bewegung mit festem Punkt in dem Spiegelbild von P' in Bezug auf a. Ist imbesonderen $a'b'c'd'$ die Identität, so wird $a''b''c''d''$ ebenfalls die Identität vorstellen, d. h. wenn $a'c'$, $b'd'$ gegengepaart sind, so werden die Paare $a''c''$, $b''d''$ ebenfalls gegengepaart.

II.

8. In diesem Abschnitte gehen wir nun dazu über, die Kongruenzlehre weiter zu entwickeln in dem besonderen aber sehr wichtigen Falle, wo das Eindeutigkeitsaxiom unbedingt gültig ist, d. h. wo man ausser den bisher zu Grunde gelegten Axiomen noch das Eindeutigkeitsaxiom zur Verfügung hat, welches besagt:

Irgend zwei Punkte haben eine und nur eine Verbindungsgerade.

Die bisher gewonnenen allgemeinen Resultate erhalten in dieser einfachen Geometrie eine besonders einfache Gestalt, die aber sofort aus den Tatsachen hervorgeht, dass nunmehr zwei beliebige Punkte nur eine Verbindungsgerade und zwei Geraden höchstens einen gemeinsamen Punkt haben. Ein Geradenbüschel (O) sendet genau eine Gerade durch jeden von O verschiedenen Punkt. Durch jeden Punkt P geht eine und nur eine Gerade c, welche mit zwei gegebenen Geraden a und b, welche nicht beide durch P gehen, in Involution ist ($abc = cba$, siehe Erste Mitteilung S. 24 ff.).

Die Theorie der direkten und inversen Halbdrehungen (Erste Mitteilung S. 29) wird sich besonders einfach gestalten, weil nun die Möglichkeit der Mehrdeutigkeit der Transformationen weggefallen ist.

Gibt es in der einfachen Geometrie ein Rechteck, so wird jedes Viereck mit 3 rechten Winkeln notwendig als Rechteck ausfallen, und zwei Geraden mit einem gemeinsamen Lot haben dann alle Lote gemein (der singuläre Fall der einfachen Geometrie). In diesem Falle ist immer ABC (die Transformation, welche aus 3 Umwendungen um drei beliebige Punkte A, B, C zusammengesetzt ist) eine involutorische Transformation (eine Umwendung).

Gibt es aber in unserer Geometrie überhaupt kein Rechteck (der ordinäre Fall), so wird die Transformation ABC zwar auch eine involutorische Transformation darstellen können, aber nur in dem Falle, wo die Punkte A, B, C in derselben geraden Linie gelegen sind.

Es soll nun im folgenden die weitere Begründung der einfachen Geometrie gegeben werden. Die Ergebnisse meiner alten Arbeit (Math. Ann. 64) sollen dabei im wesentlichen noch massgebend werden. Einige Vereinfachungen in der Darstellung sollen gegeben werden. Vor allen Dingen wird die Begründung von den Axiomen der Anordnung unabhängig gemacht. Ich muss aber zugeben, dass ich keine wesentlichen Vereinfachungen des Hauptbeweises des Fundamentalsatzes habe erzielen können. Wenn man von Seiten der Leser, die meine alte Arbeit gewürdigt haben, hervorgehoben hat, dass die Beweise verwickelt[1] oder umständlich[2] sind, so möchte ich doch die Gegenbemerkung machen, dass die Sache selbst nicht ganz einfach ist. Es ist wohl kein Zufall, wenn man bis jetzt meines Wissens keinen allgemeingültigen Beweis für den Mittelliniensatz eines Dreiecks hat erbringen können, mit alleiniger Hilfe derjeniger Hilfsmittel, welche für die Formulierung der Aufgabe selbst massgebend sind (Ebene Kongruenzaxiome, ohne Stetigkeit oder Parallelenaxiome).

4. Idealbüschel und Idealpunkte.

9. Ein allgemeiner Geradenbüschel (a, b) soll definiert werden als die Gesamtheit derjenigen Geraden c, von denen jede mit zwei festen, untereinander verschiedenen Geraden a, b eine involutorische Transformation abc bildet. Wenn a und b einen gemeinsamen Punkt O aufweisen, so wird der Geradenbüschel aus der Gesamtheit aller Geraden durch diesen Punkt bestehen.

Haben die beiden Geraden a und b ein gemeinsames Lot n, wird der Büschel aus allen Geraden, welche senkrecht auf n stehen, zusammengesetzt.

Sind a und b zwei beliebige Geraden ohne gemeinsamen Punkt, soll der Geradenbüschel (a, b) als Idealbüschel bezeichnet werden. Durch jeden Punkt P geht genau eine

[1] F. SCHUR, Grundlagen der Geometrie, S. 160.

[2] M. DEHN, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung (Pasch-Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1926, S. 236).

Gerade des Büschels. Die Konstruktion dieser Geraden haben wir früher angegeben (Erste Mitteilung S. 24—25).

10. In der Figur 3 ist vorausgesetzt, dass a und b kein gemeinsames Lot haben. Auf a wählen wir einen Punkt A, und von diesem fällen wir das Lot $p = AB$ auf b. Es gibt nun eine Halbdrehung um A, welche a in p überführt. Diese Halbdrehung transformiert die Gerade b in eine neue Gerade b' durch B ($pq = ap$, $b' \perp q$). Ist nun c eine beliebige Gerade des Büschels (a, b), und fällen wir von A das Lot $AC = r$ auf c, ziehen die Gerade BC und fällen das Lot s von A auf BC, so wird nach dem Lotensatz $rs = ap$. Die ganze Figur (a, b, c, r, s, p, A, B, C) wird nun bei der erwähnten Halbdrehung in eine ganz gleichartige Figur übergehen, und aus dieser Figur entnehmen wir sofort die Tatsache, dass die den drei Geraden a, b, c entsprechenden Geraden p, b', c', wiederum in Involution sind. Da nun p und b' den Schnittpunkt B haben, muss die Gerade c' auch durch diesen Punkt gehen.

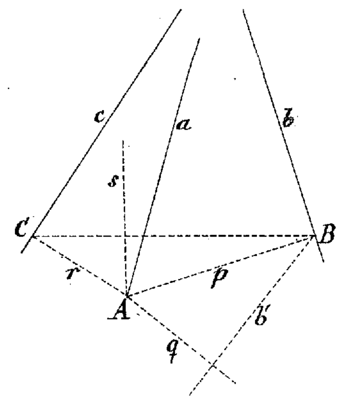

Fig. 3.

Ebenso wird jede neue Gerade d des Idealbüschels (a, b) durch unsere Halbdrehung in eine Gerade d' verwandelt, welche auch durch den Punkt B geht. Infolgedessen können wir auf die 3 Geraden p, c', d' den Lotensatz (2) anwenden, indem wir Lote von A auf c' und d' fällen, und geht man dann durch die Halbdrehung mit der so erhaltenen Figur zu den Geraden a, c, d zurück, so folgt sofort, dass a, c, d in Involution sind, d. h. d gehört dem Büschel (a, c), und c gehört dem Büschel (a, d). Es ist also hierdurch der folgende Satz bewiesen:

Wenn c und d dem Büschel (a, b) angehören, so wird auch d dem Büschel (a, c) (oder (b, c)) angehören. Je drei Geraden des Büschels (a, b) sind in Involution. Irgend zwei Geraden eines Büschels bestimmen diesen Büschel.

Ferner: Eine Halbdrehung verwandelt einen Büschel in einen neuen Büschel. Jeder Idealbüschel lässt sich durch eine Halbdrehung in einen Realbüschel verwandeln.

11. Wir wollen jetzt statt »Idealbüschel« das Wort »Idealpunkt« (oder »uneigentlicher Punkt«) einführen, indem wir statt »Geraden die dem Idealbüschel angehören« sagen »Geraden, die durch den Idealpunkt gehen«; statt zu sagen, dass ein Idealbüschel durch irgend zwei seiner Geraden bestimmt wird, können wir demnach sagen, dass ein Idealpunkt durch Schnitt von irgend zwei Geraden, welche durch den Punkt gehen, eindeutig erzeugt wird.

Nach diesen Verabredungen gelten also folgende Sätze:

Zwei Geraden haben immer einen und nur einen Punkt gemein: einen gewöhnlichen (oder eigentlichen) Punkt oder einen Idealpunkt (oder uneigentlichen Punkt).

Durch zwei Punkte, welche nicht beide Idealpunkte sind, geht eine und nur eine Gerade.

Durch zwei Idealpunkte geht höchstens eine Gerade.

Die Lote einer geraden Linie l haben einen uneigentlichen Punkt gemein, welcher der absolute Pol von l genannt werden soll. Wie schon früher erwähnt, gibt es zwei Hauptfälle unserer Geometrie: Der singuläre Fall, wo

Rechtecke existieren, und der ordinäre Fall, wo keine Rechtecke existieren. Im singulären Fall wird der absolute Pol P einer Geraden p, auch der Pol anderer Geraden sein. Diese Geraden bilden einen Büschel, welcher einen anderen Idealpunkt P' bestimmt. Je zwei Geraden, welche durch P und P' laufen, sind senkrecht zueinander.

Im ordinären Fall hingegen gibt es überhaupt keine zwei Geraden mit gemeinsamem Pol.

5. Satz der Gegenpaarung.

12. Die früher erwähnte Gegenpaarung der Geraden eines Realbüschel (S. 8) lassen sich natürlich unmittelbar auf den Idealbüschel übertragen, und die Sätze (6 und 7) über das Dreieck und das Viereck lassen sich in dieser Hinsicht in leicht verständlicher Weise erweitern. Für jedes Dreieck ABC, wo A, B, C Realpunkte sind, wird man z. B. zu jedem Punkt P' (Real- oder Idealpunkt), welcher nicht auf einer Seite des Dreiecks liegt, einen Gegenpunkt P'' finden können.

Wir wollen nun die Redeweise einführen, dass die Punktepaare AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ von dem Punkte P aus *gegengepaart* heissen sollen, wenn die Geradenpaare, welche von dem Punkte P als Mittelpunkt die Punktepaare AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ ausprojizieren, gegengepaart sind. Es folgt hieraus, dass die Gegenpaarung nicht gestört wird, wenn die Punkte mit anderen vertauscht werden, wenn nur die projizierenden Strahlen von P nicht geändert werden.

Wir wollen dann den folgenden Satz beweisen:

Satz der Gegenpaarung. *Wenn zwei von den drei Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits von einem Punkte P aus gegengepaart sind,* dann sind alle drei Gegeneckenpaaren von diesem Punkte aus gegengepaart.

Es seien p, q, r, s vier Geraden (Fig. 4), von denen keine drei durch einen Punkt gehen, und es seien die Gegeneckenpaare des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits durch AA_1, BB_1, CC_1 bezeichnet; wenn nun diese Gegeneckenpaare mit einem Punkt P, der nicht

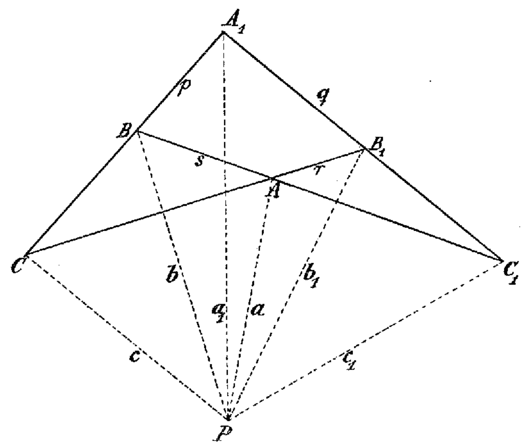

Fig. 4.

in eine Ecke des Vierseits fällt, durch die Geradenpaare aa_1, bb_1, cc_1 verbunden werden, und wenn dann zwei von diesen Paaren gegengepaart sind, so besagt unser Satz, dass alle drei Geradenpaare gegengepaart sind. Mit anderen Worten, wenn $bc = c_1 b_1$, so wird auch $ca = a_1 c_1$, $ab = b_1 a_1$.

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir 6 Hilfsgeraden a', a_1', b', b_1', c', c_1' derart, dass

$$
\begin{aligned}
a' &= ras, & a_1' &= pa_1 q, \\
b' &= sbp, & b_1' &= qb_1 r, \\
c' &= pcr, & c_1' &= qc_1 s.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir nun die folgenden ab:

$$a'_1 b'_1 c' = p\,(a_1 b_1 c)\,p, \tag{1}$$
$$a'_1 c'_1 b' = p\,(a_1 c_1 b)\,p, \tag{2}$$
$$b' a' c' = p\,(bac)\,p. \tag{3}$$

Es leuchtet ein, dass die Ausdrücke auf den rechten Seiten von diesen Gleichungen Spiegelungen darstellen, und es folgt hieraus, dass jedes der auf den linken Seiten stehenden Geradentripel $a'_1 b'_1 c'$, $a'_1 c'_1 b'$, $b'a'c'$ einen gemeinsamen Punkt hat. Da nun ferner $bc = c_1 b_1$, oder $b_1 c = c_1 b$, sind die Spiegelungen (1) und (2) identisch, und es folgt hieraus

$$b'_1 c' = c'_1 b',$$

woraus man wiederum schliesst, dass die 4 Geraden b'_1, c', c'_1, b' einen Punkt gemein haben. Es folgt dann, dass alle 6 Geraden a', b', c', a'_1, b'_1, c'_1 einen Punkt P' gemein haben. Die Achsen der 3 Spiegelungen (1), (2), (3) gehen alle durch P'; sie gehen aber auch, nach der Form der rechten Seiten, durch den Punkt P^p, und da dieser Punkt sicher von P' verschieden ist, weil z. B. b' durch P', aber nicht durch P^p geht, so müssen die 3 Spiegelungen (1), (2), (3) identisch ausfallen, d. h.

$$a_1 b_1 c = a_1 c_1 b = bac,$$

woraus folgt

$$a_1 b_1 = ba, \quad a_1 c_1 = ca, \quad \text{w. z. b. w.}$$

13. Der Satz wird natürlich auch gültig, wenn P ein Idealpunkt ist, überhaupt wenn alle vorkommenden Punkte Idealpunkte sind, unter der Voraussetzung natürlich, dass alle vorkommenden Verbindungsgeraden existieren.

Der Satz wird z. B. eine wichtige Anwendung haben in dem Falle, wo P der absolute Pol einer Geraden p darstellt. Der Satz wird dann die folgende Formulierung erhalten:

Wenn die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits auf eine Gerade p projiziert werden, und wenn zwei von den hierdurch entstehenden Punktepaaren gemeinsamen Mittelpunkt haben, so wird das dritte Paar denselben Mittelpunkt haben.

14. Wir wollen diesen Satz für einen *Beweis des Mittelliniensatzes eines Dreiecks* verwenden. Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC seien mit P, Q, R bezeichnet (Fig. 5). Durch Umwendung um R entsteht das Dreieck ABC', wo die Seiten AC' und BC' die Mittelpunkte Q' und P' haben. Auf der Geraden CR errichten wir in R das Lot r; r wird auch $\perp QQ'$ und PP'. Projizieren wir Q und P auf r in S und T, A und B in M und N, ist sofort ersichtlich, dass die Umwendung um R, S mit T, und M mit N vertauscht.

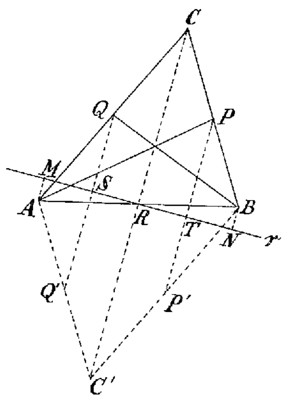

Fig. 5.

Durch Verwendung des obigen Satzes auf das vollständige Vierseit, welches von den Geraden AC, BC, und die beiden Mittellinien AP, BQ gebildet wird, schliesst man dann, dass die Projektion des Schnittpunktes von AP und BQ auf r nach R fällt, d. h. der Schnittpunkt von AP und BQ fällt auf CR, was zu beweisen war.

15. Der allgemeine Satz der Gegenpaarung wird überhaupt sehr wichtig für die Beweise der Schnittpunktsätze, indem er ein Hilfsmittel gibt zur Entdeckung von Gegenpaaren von einem Punkte aus. Wenn man z. B. weiss, dass AB und AC Gegenpaare derselben Paarung für P sind, folgt hieraus, dass P, B und C in einer Geraden liegen. Eben diese

Betrachtung wird für den folgenden Beweis des Pascalschen Satzes Anwendung finden.

6. Der Realfall des Pascalschen Satzes.

16. Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf

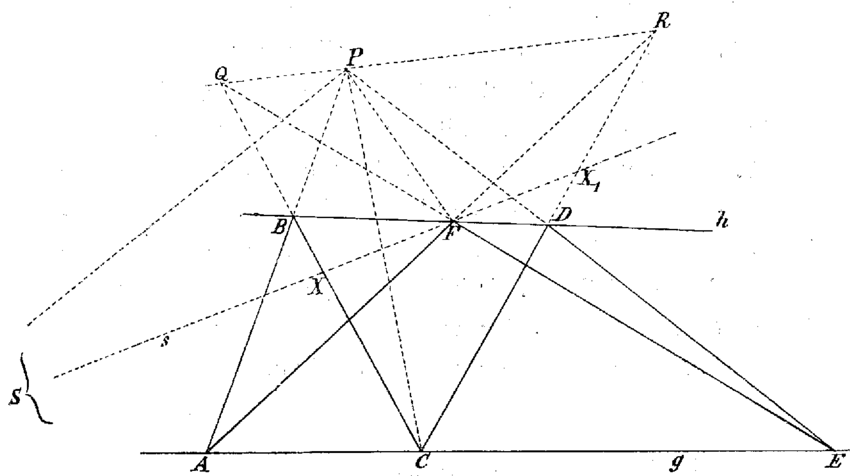

Fig. 6.

zwei Geraden liegen, und wenn ferner die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eigentliche Punkte sind, dann liegen diese 3 Punkte auf einer und derselben Geraden.

Der Beweis wird hier ganz wie früher nach dem Vorgange von HESSENBERG gegeben (Fig. 6).

Das Sechseck $ABCDEF$ sei dem Geradenpaar gh eingeschrieben, und die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten seien mit P, Q, R bezeichnet. Auf g bestimmen wir einen Punkt S derart, dass die Geradenpaare PS, PQ und PC, PF gegengepaart sind, d. h. das Paar SQ ist dem Paar CF für den Punkt P gegengepaart.

Die Gerade $FS = s$ schneidet die Geraden CB und CD in bezw. X und X_1. Die Gerade s bildet mit jedem der Dreiecke CQE, BCD, ACR ein vollständiges Vierseit, und wenn wir den Satz der Gegenpaarung auf diese Vierseite anwenden, erhalten wir der Reihe nach folgende Paare derselben Gegenpaarung (von P aus):

CF, SQ, XE, XD (aus XE durch einfache Projektion aus P), BX_1, AX_1 (aus BX_1 durch Projektion aus P), SR.

Da also SQ und SR derselben Gegenpaarung für P angehören, liegen Q und R mit P auf einer Geraden.

17. Bei dem Beweise braucht man nicht die Voraussetzung dass alle vorkommenden Punkte Realpunkte seien. Es kommt nur darauf an, dass die in Rede stehenden geraden Linien existieren. Es könnten sogar sämtliche Punkte P, Q, R Idealpunkte sein; wenn nur eine Gerade PQ existiert, dann wird sie auch durch R gehen.

7. Idealgeraden.

18. Wir wählen einen festen eigentlichen Punkt O als festen Mittelpunkt von direkten und inversen Halbdrehungen. Wir wissen, dass je zwei solche Halbdrehungen vertauschbar sind (Erste Mitteilung S. 30).

Wir definieren nun eine Idealgerade als ein System von Punkten, welches entweder durch eine Halbdrehung um den Fundamentalpunkt O in die Gesamtheit der Punkte einer gewöhnlichen Geraden übergehen kann, oder mit der Gesamtheit der absoluten Pole aller Geraden durch O zusammenfällt. Im letzteren Fall soll die Idealgerade als Fundamentalgerade bezeichnet werden.

Es lässt sich nun leicht — wie in meiner alten Arbeit — erweisen, dass 3 Punkte einer so definierten Idealgeraden durch Halbdrehungen um P in drei Punkte einer Geraden (gewöhnlichen oder Idealgeraden) übergehen.

Nach Einführung der Idealgeraden gelten ferner folgende Sätze: Irgend zwei Punkte haben eine und nur eine Verbindungsgerade. Irgend zwei Geraden haben einen und nur einen Punkt gemein. Beide Sätze lassen sich durch Verwendung von Halbdrehungen beweisen.

19. Die absoluten Pole aller Geraden durch einen festen eigentlichen Punkt P liegen auf einer Geraden. Diese Gerade soll die absolute Polare von P heissen.

Wenn P in den Fundamentalpunkt O fällt, ist der Satz eine unmittelbare Folge unserer Definition.

Fällt P nicht in O, so ziehen wir (Fig. 7) die Gerade $OP = a$, das Lot b auf a in P, und schliesslich zwei beliebige aufeinander senkrechte Geraden c und d durch P. Es wird nun genügen zu beweisen, dass die absoluten Pole der Geraden a, b, c auf einer Geraden liegen.

Wir fällen die Lote $OC = c_1$ auf c, und $OD = d_1$ auf d, ziehen die Gerade $CD = z$, und fällen die Lote x von O, und y von P, auf die Gerade z. Wir fällen ferner das Lot $DB = p$ auf b, und $OA = a_1$ auf p. In dem Falle wo $OA \perp a$, haben die Geraden a und p zwei gemeinsame Lote b und a_1; die absoluten Polen der Geraden durch P werden dann mit den absoluten Polen der Geraden durch O zusammenfallen, und sie bilden dann die Fun-

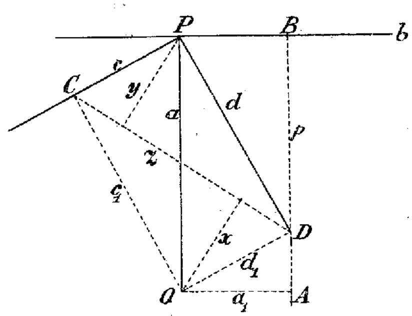

Fig. 7.

damentalgerade. In allen anderen Fällen gibt es eine Halbdrehung um O, welche a nach a_1 führt. Und durch diese Halbdrehung werden die absoluten Pole von a, b und c in 3 Punkte der Geraden p übergeführt. Erstens geht der Pol von a, in der Pol von a_1 über, zweitens geht der Pol von b als Schnittpunkt der beiden Geraden a und p in den Punkt A über, und drittens soll nun gezeigt werden, dass der Pol von c in den Punkt D übergehen wird.

Es wird nämlich:

$$P = ab = cd, \quad \text{also} \quad ca = db; \tag{1}$$

ferner

$$\begin{aligned} yd &= ca \quad \text{(Lotensatz)} \\ &= db; \text{ also } d \text{ Spiegelungsachse von } y \text{ und } b; \\ zd &= dp \quad (d \text{ Spiegelungsachse von } z \text{ und } p), \\ zd_1 &= d_1 p \ (d_1 \text{ zweite Spiegelungsachse von } z \text{ und } p), \\ xd_1 &= d_1 a_1, \\ &= c_1 a \ \text{(Lotensatz)}, \\ c_1 a &= d_1 a_1, \quad \text{oder} \quad c_1 d_1 = aa_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber, dass der Schnittpunkt von c_1 und d durch unsere Halbdrehung in D übergeführt wird.

8. Die projektive Geometrie.

20. Um die Begründung der projektiven Geometrie für das erweiterte System von Punkten und Geraden durchführen zu können, brauchen wir ausser dem Realfall des Pascalschen Satz noch einen anderen Sonderfall dieses Satzes, und zwar den folgenden:

Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf zwei Geraden liegen, deren Schnittpunkt ein eigentlicher Punkt O ist, und wenn ferner zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks je ein gemeinsames Lot haben, das durch O läuft, dann hat auch das dritte Paar von Gegenseiten ein gemeinsames Lot durch O.

Der Beweis dieses Satzes gelingt mit Hilfe des Lotensatzes, oder mit Hilfe einer Reihe von Halbdrehungen um O, ganz wie der bekannte Hilbertsche Beweis für den Pascalschen Satz in der Euklidischen Ebene.[1]

21. Für den singulären Fall unserer Geometrie beweist man dann den folgenden Satz:

Hat ein Sechseck seine Ecken abwechselnd auf zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S, und liegen zwei von drei Schnittpunkten der Gegenseitenpaare auf der Fundamentalgeraden, dann muss auch der dritte Schnittpunkt auf dieser Geraden liegen.

Der Satz wurde schon oben für den speziellen Fall behandelt, wo alle Ecken wie auch der Punkt S eigentlich sind; der allgemeine Fall kann aber durch Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt auf den speziellen Fall zurückgeführt werden. In der Tat kann, da keine der Ecken auf der Fundamentalgeraden liegt, durch die Aufeinanderfolge von geeigneten Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt erzielt werden, dass alle Ecken in eigentliche Punkte übergehen, während der Punkt S entweder nach einem eigentlichen Punkt geführt wird oder auf der Fundamentalgeraden liegt. Tritt der erstere Fall ein, so ist der Beweis mithin zu Ende, und für den letzteren Fall lässt sich dann der Beweis indirekt führen.

[1] Hilbert, Grundlagen d. Geometrie 6. Aufl. S. 36—40. Vgl. auch F. Schur, Grundlagen der Geometrie S. 159, wo eine andere Beweisanordnung gegeben wird.

Mit diesem Beweis können wir die Begründung der projektiven Geometrie im singulären Fall als erledigt betrachten.

22. Was nun den ordinären Fall anbetrifft, beweisen wir den allgemeinen Pascalschen Satz über das einem Geradenpaare eingeschriebene Sechseck:

Hat ein Sechseck seine Ecken abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Geraden.

Durch die Aufeinanderfolge geeigneter Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt können wir eine derartige Verwandlung der Figur erzielen, dass unter den zu betrachtenden neun Punkten jedenfalls keine anderen uneigentlichen Punkte vorhanden sind als solche, die auf der Fundamentalgeraden liegen; unter den Verbindungsgeraden der neun Punkte findet man alsdann höchstens eine uneigentliche Gerade, nämlich die Fundamentalgerade.

Durch kongruente Verschiebung der in dieser Weise erhaltenen Figur kann man ferner erreichen, dass die zurückgebliebenen uneigentlichen Punkte nach Punkten ausserhalb der Fundamentalgeraden geführt werden; da durch diese Verschiebung die Fundamentalgerade in die absolute Polare eines eigentlichen Punktes übergeht, also nach dem Satz 19 in eine uneigentliche Gerade, und da ferner die eigentlichen Punkte und Geraden in ebensolche übergehen, so wird es genügen, unseren Satz für die nach der Verschiebung erhaltenen Figur zu beweisen.

Schliesslich kann nun diese Figur wiederum durch Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt derart verwandelt werden, dass sämtliche neun Punkte und deren Verbindungsgeraden in lauter eigentliche Elemente übergehen, und da der Pascalsche Satz für die solchergestalt verwandelte Figur Geltung hat, so muss er auch für die ursprüngliche Figur gelten.

9. Über die Axiome der Anordnung.

23. Wir haben unsere Begründung der projektiven Geometrie ohne Axiome der Anordnung zu Ende gebracht.

Wie steht es nun aber mit diesen Axiomen? Sind sie von der Kongruenzlehre ganz unabhängig? Ich habe die Frage schon in meiner alten Arbeit aufgestellt, und ich habe damals angezeigt, dass die Frage im wesentlichen davon abhängen würde, ob es Zahlensysteme gibt, für welche folgende Sätze gültig sind:

A. Die Sätze der Verknüpfung sind sämtlich befriedigt.

B. Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung.

C. Die Sätze der Anordnung können nicht befriedigt werden.

Kürzlich hat mir Herr G. Thomsen, der sich für diese Sache interessierte, brieflich mitgeteilt, dass die betreffende Frage neuerdings durch eine Arbeit von Artin und Schreier[1] ihre Beantwortung gefunden haben dürfte. In dieser Arbeit wurde nämlich bewiesen, dass die in Rede stehenden Zahlensysteme nicht existieren, indem die Bedingungen A und B notwendig die Folgerung nach sich ziehen, dass die Zahlen des betreffenden Systems geordnet werden können, derart, dass die gewöhnlichen Gesetze der Ungleichungen gültig sind, obwohl diese Ordnung auf verschiedener Weise ausgeführt werden kann.

Dieses Resultat wird tatsächlich für unsere geometrische Frage von wesentlicher Bedeutung sein.

Fügen wir zu unserer Kongruenzlehre ausser dem Ein-

[1] E. Artin u. O. Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper Abhdl. aus d. Math. Seminar d. Hamburgischen Univ. V, 1926, S. 85—91

deutigkeitsaxiom noch das Parallelenaxiom hinzu, so lassen sich tatsächlich die Axiome der Anordnung beweisen in dem Sinne, dass man eine Anordnung für die Punkte einer Geraden definieren kann, derart, dass alle gewöhnlichen Axiome der Anordnung (auch das Axiom von Pasch) hieraus folgen werden. Wenn wir aber die Geometrie auf Grund der allgemeinen Kongruenzlehre, unter Annahme des Eindeutigkeitsaxioms, aber ohne das Parallelenaxiom (oder andere Parallelenaxiome), behandeln sollen, wird die Sache nicht so einfach. Erstens können wir, wie wir gesehen haben, das System der Punkte und geraden Linien derart erweitern, dass für das erweiterte System die projektive Geometrie (die Schnittpunktsätze) gültig ist. In der so hergestellten projektiven Ebene lässt sich dann in projektiver Weise eine Euklidische Geometrie definieren, indem wir eine beliebige (uneigentliche) Gerade als die »unendlich ferne Gerade« einführen. Nach den Artin-Schreierschen Untersuchungen kann man nun in dieser Euklidischen Geometrie eine Anordnung einführen. Durch diese Anordnung wird dann auch in der projektiven Ebene eine Anordnung definiert, und schliesslich lässt sich die Strecke AB, welche zwei Realpunkte A und B verbindet, als diejenige projektive Strecke AB definieren, welche den Mittelpunkt von A und B enthält. Es ist aber hier unsicher, ob alle Punkte dieser Strecke reell sind. Es kommen also noch verschiedene Fragen in Betracht, auf die wir aber nicht hier eingehen wollen.

10. Über das Eindeutigkeitsaxiom.

24. Zum Schluss möchte ich noch einige Bemerkungen über das Eindeutigkeitsaxiom hinzufügen.

Verschiedene Versuche sind gemacht worden, um das

Eindeutigkeitsaxiom zu beweisen. Wir erinnern an den bekannten Halbkreisbeweis von Proklos, welcher Beweis auch bei Euklid XI, 1 (Elementa, Ausgabe von J. L. Heiberg) zum Vorschein kommt. Ferner an die Bemerkungen Leibnizens in seiner Abhandlung: In Euclidis *ΠΡΩΤΑ*[1]. Auch Saccheri hat sich eingehend aber sehr unklar mit der Frage beschäftigt.[2] Schliesslich sei nur angeführt, dass Legendre in seinen Éléments de Géométrie die Eindeutigkeit der Strecke AB als Axiom angenommen, die Eindeutigkeit der Verlängerung aber als beweisbare Eigenschaft der geraden Linie aufgestellt hat.

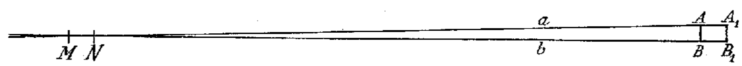

Fig. 8.

Wir haben in der ersten Mitteilung erwiesen, dass das Eindeutigkeitsaxiom auf Grund der allgemeinen Kongruenzlehre mit Hinzunahme der Axiome der Anordnung in Verbindung mit dem Eudoxischen Axiom, beweisbar ist. Wir wollen hier nur noch hinzufügen, dass wenn ausser den Axiomen der Anordnung (ohne das Eudoxische Axiom) noch die Euklidischen Grössenaxiome angenommen werden, dann wird hieraus das Eindeutigkeitsaxiom folgen.

Wir brauchen nämlich nur auf folgende Tatsache hinzuweisen: Wenn zwei Geraden a, b zwei Punkte M, N gemeinsam haben, so gibt es Bewegungen, durch welche beide Geraden in sich verschoben werden, z. B. so, dass M in N übergeht. Ein Lot AB auf b wird dabei in das Lot A_1B_1 übergehen. Die von den Geraden AB, a, b begrenzte Fläche wird dann mit der von den Geraden A_1B_1, a, b be-

[1] Leibnizens mathematische Schriften, herausg. v. Gerhardt. Zw. Abt. Bd. I. S. 207, 209.

[2] Siehe Engel-Stäckel, Parallellinien, S. 109—119.

grenzten Fläche zur Deckung gebracht. Das Ganze würde also einem Teil gleich werden, was den Grössenaxiomen widerspricht.

Hierdurch würde also im wesentlichen innerhalb des Rahmens der Euklidischen Darstellung ein wirklicher Beweis für die Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier Geraden (ohne das Eudoxische Axiom) hergestellt sein.

In der nächsten Mitteilung soll nun die weitere Entwicklung der allgemeinen Kongruenzlehre verfolgt werden, indem wir die im Schlusswort der ersten Mitteilung erwähnten »Grossgeometrie« entwickeln werden.

Forelagt paa Mødet den 19. Oktober 1928.
Færdig fra Trykkeriet den 5. November 1929.