Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VIII,** 6.

ÜBER EINIGE BESONDERE KLASSEN VON FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN

VON

ELLEN PEDERSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1928

Harald Bohr hat in den Abhandlungen in Acta Mathematica, in welchen er die Theorie der fastperiodischen Funktionen begründet hat, folgende Sätze, welche Verallgemeinerungen des klassischen Weierstrassschen Satzes über rein periodische Funktionen sind, bewiesen:

I. (Approximationssatz): Damit die für $-\infty < x < \infty$ definierte Funktion $f(x)$ durch ein trigonometrisches Polynom

$$c_1 e^{i\lambda_1 x} + c_2 e^{i\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{i\lambda_n x} \tag{1}$$

(mit willkürlich wählbaren reellen Exponenten λ_i) gleichmässig für alle x mit vorgeschriebener Genauigkeit ε approximierbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass $f(x)$ fastperiodisch ist.

II. Damit die geforderte Approximation möglich sei mit Exponenten λ_i, die einer im voraus gegebenen Menge $\{\lambda\}$ von reellen Zahlen angehören, ist notwendig und hinreichend, dass (die Funktion fastperiodisch sei und) alle Exponenten in der Fourierreihe der Funktion Zahlen aus der Menge $\{\lambda\}$ sein sollen.

Von besonderem Interesse sind die Fälle, in denen $\{\lambda\}$ ein abzählbarer Modul ist. Für diesen Fall leitet man aus Satz II den folgenden Satz her:

IIa. Gegeben sei der abzählbare Modul

$$(2) \qquad \{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}.$$

Damit eine für $-\infty < x < \infty$ definierte Funktion $f(x)$ durch eine Summe von der Form (1) mit Exponenten, die (2) angehören, beliebig genau approximierbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass zu einem ε ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ und ein $N = N(\varepsilon)$ existieren, so dass jedes die Ungleichungen

$$|\tau \lambda_i| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

erfüllende τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(x)$ sein soll.

Das in Satz II a genannte Kriterium erhält eine einfachere und übersichtlichere Form, wenn über $\{\lambda\}$ weitere spezielle Annahmen gemacht werden.

Bohl[1] hat in einer grundlegenden Abhandlung den Fall betrachtet, in welchem die λ ganzzahlige Kombinationen einer endlichen Anzahl von linear unabhängigen α sind, während in den folgenden Überlegungen der Fall behandelt wird, wo der Modul $\{\lambda\}$ eine endliche oder unendliche Basis $\{\alpha\}$ hat, und wo die λ alle lineare Kombinationen der α mit entweder ganzzahligen oder rationalen Koeffizienten sind.

Beim Beweise der Sätze I—II a benutzt Bohr die vollständige Theorie der fastperiodischen Funktionen. Im folgenden sollen die für die genannten Spezialfälle geltenden Sätze direkt und mit verhältnismässig einfachen Hülfsmitteln begründet werden, indem dieselben Beweismethoden angewendet werden, welche Bohl in seiner Abhandlung benutzt hat.

[1] P. Bohl, Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten (Dorpat, 1893).

Was die im folgenden benutzten Begriffe der grenzperiodischen Funktionen von endlich vielen Variabeln sowie der rein- und grenzperiodischen Funktionen von unendlich vielen Variabeln betrifft, vergleiche man die zweite Arbeit von BOHR in Acta Mathematica.

I.

Gegeben ist eine abzählbar unendliche Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von linear unabhängigen Zahlen α; dieses heisst, dass $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_\nu\alpha_\nu = 0$ für ganze n_i nur erfüllt wird, wenn $n_1 = n_2 = \ldots = n_\nu = 0$ ist. Es sei $f(x)$ eine für $-\infty < x < \infty$ definierte stetige Funktion, welche durch ein trigonometrisches Polynom

$$(1) \qquad \sum c_{n_1 \ldots n_m} e^{i(n_1\alpha_1 + \ldots + n_m\alpha_m)x}$$

für alle x gleichmässig approximierbar ist. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit A.

Satz I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x)$ der Menge A angehört, ist folgende: Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ und $N = N(\varepsilon)$, so dass jedes τ, welches die N diophantischen Ungleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} |\tau\alpha_1| < \delta \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ |\tau\alpha_N| < \delta \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \end{cases}$$

erfüllt, eine zu ε passende Verschiebungszahl von $f(x)$ ist, das heisst die Ungleichung

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle x erfüllt.

Beweis: Die Menge der Funktionen $f(x)$, welche der genannten (ε, δ, N)-Bedingung genügen, bezeichnen wir mit B. Zunächst beweisen wir, dass A eine Teilmenge von B ist. Es sei nämlich $f(x)$ eine Funktion aus A und $S(x)$ ein trigonometrisches Polynom von der Form (1), welches $f(x)$ mit der Genauigkeit $\frac{\varepsilon}{3}$ approximiert. $S(x+\tau)$ entsteht aus $S(x)$, indem jeder Faktor $e^{ik\alpha x}$ in jedem der Glieder einen Zusatzfaktor $e^{ik\alpha\tau}$ erhält. Daher wird $|S(x+\tau)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ausfallen, wenn jeder dieser Zusatzfaktoren hinreichend nahe an 1 liegt, das heisst: die Bedingung $|k\alpha\tau| < \delta^*$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ für hinreichend kleines δ^* erfüllt. Wir erreichen also $|S(x+\tau)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ und damit $|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon$, wenn wir N so gross wählen, dass alle in $S(x)$ auftretenden α mitkommen, und $\delta = \frac{\delta^*}{M}$ setzen, wo M das grösste aller in Betracht kommenden k ist.

Die Identität der Mengen A und B wird nun dadurch bewiesen, dass wir zeigen, dass sowohl A wie B identisch mit einer Funktionenmenge C sind, die wie folgt definiert wird: Eine für $-\infty < x < \infty$ definierte stetige Funktion soll dann und nur dann C angehören, wenn

$$f(x) = P(x, x, \ldots) \tag{3}$$

ist, wo $P(x_1, x_2, \ldots.)$ eine im Raume von abzählbar unendlich vielen Dimensionen definierte stetige periodische Funktion mit dem Periodensystem

$$(p_1, p_2, \ldots.) = \left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots.\right) \tag{4}$$

ist.

Die Menge C ist in der Menge A enthalten. Auf Grund des Weierstrassschen Approximationssatzes für Funktionen von m Variabeln lässt sich nämlich ohne weiteres zeigen, dass $P(x_1, x_2, \ldots.)$ im ganzen Raume durch ein Polynom $\sum c_{n_1 \dots n_m} e^{i(n_1 \alpha_1 x_1 + \dots + n_m \alpha_m x_m)}$ mit ε-Genauigkeit approximierbar ist. Ist nun $f(x)$ eine Funktion aus C und $= P(x, x, \dots)$, erhält man, indem in der Ungleichung

$$\left| P(x_1, x_2, \dots) - \sum c_{n_1 \dots n_m} e^{i(n_1 \alpha_1 x_1 + \dots + n_m \alpha_m x_m)} \right| < \varepsilon$$

x_i durch x entsetzt wird,

$$\left| f(x) - \sum c_{n_1 \dots n_m} e^{i(n_1 \alpha_1 + \dots + n_m \alpha_m) x} \right| < \varepsilon,$$

das heisst $f(x)$ ist eine Funktion aus A.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass die Menge B eine Teilmenge von C ist. Wir nehmen eine willkürliche Funktion $f(x)$ aus B und definieren zunächst $P(x_1, x_2, \dots)$ auf der Hauptdiagonalen $x_1 = x_2 = \dots$ durch die Gleichung

$$P(x, x, \dots) = f(x).$$

Hiernach definieren wir die Punktmenge Ξ wie folgt: Der Punkt $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ soll zu Ξ gehören, wenn es ein x giebt, so dass alle Kongruenzen

$$\xi_\nu \equiv x \pmod{p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots) \tag{5}$$

erfüllt sind. Auf Ξ definieren wir $P(x_1, x_2, \dots)$ durch

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots) = P(x, x, \dots) = f(x), \tag{6}$$

wo $\xi_1, \xi_2, \dots$ und x durch (5) verbunden sind. Die lineare Unabhängigkeit der Zahlen α führt mit sich, dass ein Punkt $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ von Ξ nicht mit zwei Punkten $(x', x', \dots)$ und $(x'', x'', \dots)$ der Hauptdiagonalen äquivalent sein kann, sonst müsste nämlich $x' - x''$ ein gemeinsames Vielfaches aller p sein, was nicht möglich ist, da das Verhältniss von p_i und p_k irrational ist.

Die Punkte von Ξ liegen im Raume überall dicht, da man nach Angabe eines Punktes $(a_1, a_2, \dots)$, eines N und beliebig kleiner $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_N$ Punkte $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N, \ldots)$ finden kann, welche die N Ungleichungen

$$|\xi_\nu - a_\nu| < \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots N)$$

oder die N diophantischen Ungleichungen

$$|x - a_\nu| < \delta_\nu \qquad (\mathrm{mod}\ p_\nu)$$

erfüllen, welche letztere auch in der Form

$$|\alpha_\nu x - \alpha_\nu a_\nu| < \delta_\nu |\alpha_\nu| \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

geschrieben werden können; und diese haben immer eine Lösung, da die α linear unabhängig sind. Es soll nun gezeigt werden, dass P in Ξ gleichmässig stetig ist. Hierbei benutzen wir die Voraussetzung, dass $f(x)$ der Menge B angehört. Wir zeigen, dass wir zu einem willkürlichen $\varepsilon > 0$ ein N und Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ so finden können, dass die Ungleichung

$$|P(\xi_1', \xi_2', \ldots) - P(\xi_1'', \xi_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

für zwei willkürliche Punkte $(\xi_1', \xi_2', \ldots)$ und $(\xi_1'', \xi_2'', \ldots)$ von Ξ erfüllt ist, sobald für die ersten N Koordinaten die Ungleichungen

$$|\xi_\nu' - \xi_\nu''| < \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

gelten.

Wir bezeichnen mit x' und $x'' = x' + \tau$ die zwei Werte von x, von welchen aus die Punkte $(\xi_1', \xi_2', \ldots)$ und $(\xi_1'', \xi_2'', \ldots)$ hergeleitet wurden. Zu beweisen ist, dass

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - f(x' + \tau)| < \varepsilon,$$

sobald die N Bedingungen

$$|x' - x''| = |\tau| < \delta_\nu \qquad (\mathrm{mod}\ p_\nu)$$

oder

$$|\alpha_\nu \tau| < \delta_\nu |\alpha_\nu| \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

erfüllt sind, und dieses trifft zu, wenn man die Zahlen $N, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_N$ so wählt, dass in den durch $f(x)$ erfüllten Bedingungen (2) $N = N(\varepsilon)$ und $\delta_\nu |\alpha_\nu| = \delta(\varepsilon)$ ist. Da $P(x_1, x_2, \ldots)$ in Ξ gleichmässig stetig ist, und Ξ im Raume überall dicht liegt, gibt es eine und nur eine im ganzen Raume definierte stetige Funktion, die auf Ξ mit der daselbst schon definierten Funktion übereinstimmt. Damit ist gezeigt, dass B eine Teilmenge von C ist; die gefundene Funktion $P(x_1, x_2, \ldots.)$ erfüllt nämlich alle gestellten Bedingungen: Sie ist periodisch mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, sie erfüllt die Gleichung $P(x, x, \ldots) = f(x)$ und sie ist stetig im ganzen Raume; denn wählen wir $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass

$$|P(\xi_1', \xi_2', \ldots) - P(\xi_1'', \xi_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

erfüllt wird für zwei beliebige Punkte von Ξ, für welche $|\xi_\nu' - \xi_\nu''| < \delta$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ gilt, wird für dasselbe δ und N auch die Ungleichung

$$|P(x_1', x_2', \ldots) - P(x_1'', x_2'', \ldots)| \leq \varepsilon$$

erfüllt sein, sobald $|x_\nu' - x_\nu''| < \delta$ $(\nu = 1, 2, \ldots N)$.

II.

Gegeben seien m reelle, linear unabhängige Zahlen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Wir betrachten die Menge aller Schwingungen $e^{i\alpha x}$, wo α die Form

$$\alpha = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \ldots + r_m \alpha_m$$

hat, und wo $r_1, r_2, \ldots, r_m$ rationale Zahlen bedeuten. Es sei $f(x)$ eine für $-\infty < x < \infty$ definierte stetige Funktion, welche gleichmässig für alle x durch eine endliche Summe von der Form

$$\sum c_{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{i(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m)x} \tag{8}$$

approximiert werden kann. Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit A.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktion $f(x)$ der Menge A angehört, ist folgende: Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ und ein ganzzahliges $M = M(\varepsilon)$ so, dass jede Zahl τ, welche die m diophantischen Ungleichungen

$$|\tau\alpha_\nu| < \delta \quad (\text{mod } 2\pi M) \quad (\nu = 1, 2, \ldots m) \tag{9}$$

erfüllt, eine zu ε passende Verschiebungszahl von $f(x)$ ist, das heisst der Ungleichung

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

genügt.

Die Menge aller Funktionen mit der genannten (ε, δ, M)-Eigenschaft wollen wir wieder mit B bezeichnen. A ist eine Teilmenge von B; ist nämlich $f(x)$ eine Funktion aus A, kann diese mit $\frac{\varepsilon}{3}$ Genauigkeit durch eine Summe $S(x)$ von der Form (8) angenähert werden. Ist M ein Hauptnenner der in $S(x)$ auftretenden r, kann man $\delta > 0$ so klein wählen, dass für jedes τ, welches die Ungleichungen

$$|\alpha_\nu \tau| < \delta \quad (\text{mod } 2\pi M) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt, gilt, dass

$$|S(x+\tau) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (-\infty < x < \infty)$$

und für ein solches τ hat man also

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Mengen A und B identisch sind, indem wir beweisen, dass beide mit einer

Funktionenmenge C zusammenfallen, welche wie folgt definiert ist: Die Funktion $f(x)$ gehört zu C, wenn sie in der Form

$$f(x) = G(x, x, \ldots, x) \tag{10}$$

geschrieben werden kann, wo $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine stetige grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\alpha_m}\right) \tag{11}$$

ist.

C ist eine Teilmenge von A; denn eine Funktion $f(x) = G(x, x, \ldots, x)$ aus C kann ja durch eine Summe von der Form (8) mit ε-Genauigkeit approximiert werden; die Menge der grenzperiodischen Funktionen $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ mit dem Periodensystem (11) besteht nämlich eben aus denjenigen Funktionen, welche durch endliche Summen der Form $\sum c_{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{i(r_1\alpha_1 x_1 + \cdots + r_m\alpha_m x_m)}$ gleichmässig approximiert werden können; also braucht man nur die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ im ganzen m-dimensionalen Raume mit ε-Genauigkeit durch eine endliche Summe von der Form $\sum c_{r_1 \ldots r_m} e^{(r_1\alpha_1 x_1 + \cdots + r_m\alpha_m x_m)}$ zu approximieren und danach in der Ungleichung

$$\left| G(x_1, \ldots, x_m) - \sum c_{r_1 \ldots r_m} e^{i(r_1\alpha_1 x_1 + \cdots + r_m\alpha_m x_m)} \right| < \varepsilon$$

$x_i = x$ zu setzen.

Um die Identität von A und B zu beweisen, erübrigt es noch zu zeigen, dass B eine Teilmenge von C ist. Ist also $f(x)$ eine willkürliche Funktion aus B, soll gezeigt werden, dass es eine grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ mit dem Periodensystem (11) gibt, für welche $f(x) = G(x, x, \ldots, x)$.

Für ein willkürlich gegebenes x und ein gegebenes

$s\ (= 1, 2, \ldots)$ bestimmen wir alle die Punkte $\xi^{(s)} = (\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_m^{(s)})$, deren Koordinaten die Bedingungen

$$(12)\quad \begin{cases} \xi_1^{(s)} \equiv x \pmod{s!\, p_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_m^{(s)} \equiv x \pmod{s!\, p_m} \end{cases}$$

erfüllen. Indem nun x alle Werte durchläuft, entsteht eine Menge Ξ_s von Punkten $\xi^{(s)}$; in Ξ_s definieren wir eine Funktion $g_s = g_s(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_m^{(s)})$ durch die Gleichung

$$(13)\qquad g_s(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_m^{(s)}) = f(x)$$

Da einem $\xi^{(s)}$ nur ein x entspricht, da die α linear unabhängig sind, ist die Funktion g_s eindeutig bestimmt.

Die Funktion g_s ist in Ξ_s unstetig, doch in der Weise, dass für $s \to \infty$ die Funktion g_s »mehr und mehr stetig wird«, womit folgendes gemeint ist: $|g_s(\xi') - g_s(\xi'')|$ wird für $s > M = M(\varepsilon)$ kleiner als ε ausfallen, sobald die Punkte ξ' und ξ'' von Ξ_s so nahe an einander liegen, dass $|\xi'_\nu - \xi''_\nu| < \delta_\nu = \dfrac{\delta(\varepsilon)}{|\alpha_\nu|}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ ist.

Jede der Mengen $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ liegt überall dicht im Raume; Ξ_{n+1} ist eine Teilmenge von Ξ_n,

$$\Xi_1 > \Xi_2 > \ldots,$$

und nur Punkte der Hauptdiagonalen sind in allen Ξ_s enthalten. Ist also $p > q$, wird der Punkt $(\xi_1^{(p)}, \ldots, \xi_m^{(p)})$ von Ξ_p auch in Ξ_q enthalten sein, und es gilt

$$(14)\qquad g_p(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_m^{(p)}) = g_q(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_m^{(p)}).$$

Die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ wird in einem willkürlichen Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ wie folgt definiert: Wir wählen eine Punktfolge $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)})$, $(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_m^{(2)}), \ldots,$

welche gegen $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ konvergiert, und wo der s-te Punkt $(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_m^{(s)})$ der Menge Ξ_s angehört, und setzen

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lim_{n \to \infty} g_n(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}). \tag{15}$$

Dass zu einem willkürlich gegebenen Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine solche Folge $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}), (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_m^{(2)}), \ldots$ existiert, folgt daraus, dass jede der Mengen Ξ_n im ganzen Raume überall dicht liegt. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir zur Approximation des Punktes $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ solche spezielle Folgen benutzen, für welche die m Ungleichungen

$$|x_\nu - \xi_\nu^{(s)}| < \frac{1}{s\,|\alpha_\nu|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{16}$$

erfüllt sind.

Um die Konvergenz der Folge $g_1(\xi^{(1)}), g_2(\xi^{(2)}), \ldots$ einzusehen, betrachten wir die Differenz zwischen dem q-ten und dem p-ten Glied in der Folge, für welche, wenn $p > q$, gilt, dass

$$|g_p(\xi^{(p)}) - g_q(\xi^{(q)})| = |g_q(\xi^{(p)}) - g_q(\xi^{(q)})|.$$

Diese letztere Differenz ist aber kleiner als die gegebene Zahl $\varepsilon > 0$, sobald q so gross gewählt wird, dass $\frac{2}{q} < \delta(\varepsilon)$ und gleichzeitig $q > M(\varepsilon)$ ist, wobei $\delta(\varepsilon)$ und $M(\varepsilon)$ durch die Funktion $f(x)$, welche B angehört, bestimmt sind. Demzufolge ist

$$|g_p(\xi^{(p)}) - g_q(\xi^{(q)})| = |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

denn x' und x'' erfüllen die m diophantischen Ungleichungen

$$|x' - x''| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|\alpha_\nu|} \quad (\mathrm{mod}\ M!\, p_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

oder

$$|(x' - x'')\,\alpha_\nu| < \delta(\varepsilon) \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi M!) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Da $\lim g_s(\xi^{(s)})$ für jede Folge mit $\xi^{(s)} \to (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ existiert, ist der Grenzwert $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ unabhängig von der gewählten Folge, wenn nur diese die genannten Bedingungen erfüllt.

Die auf diese Weise definierte Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ist stetig, denn für zwei Punkte $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ und $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_m)$ mit

$$|x'_\nu - x''_\nu| < \frac{\delta(\varepsilon)}{3|\alpha_\nu|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

gilt

$$|\xi'^{(s)}_\nu - \xi''^{(s)}_\nu| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|\alpha_\nu|}$$

für jedes $s \geq s_0$, sobald $\frac{1}{s_0} < \frac{\delta(\varepsilon)}{3}$, und ist ausserdem $s_0 > M(\varepsilon)$, erhalten wir für alle $s \geq s_0$

$$|g_s(\xi'^{(s)}) - g_s(\xi''^{(s)})| = |f(x'^{(s)}) - f(x''^{(s)})| < \varepsilon,$$

denn wir haben

$$|\alpha_\nu(x'^{(s)} - x''^{(s)})| < \delta(\varepsilon) \quad \big(\mathrm{mod}\ M(\varepsilon)!\, 2\pi\big), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

woraus zuletzt folgt

$$|G(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) - G(x''_1, x''_2, \ldots, x''_m)| \leq \varepsilon.$$

Die auf diese Weise im ganzen Raume definierte Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ist von der gewünschten Art: sie ist stetig, grenzperiodisch mit dem Periodensystem $\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\alpha_m}\right)$ und erfüllt auf der Hauptdiagonalen die Gleichung $G(x, x, \ldots, x) = f(x)$. Dies letztere ist unmittelbar ersichtlich, da man für einen beliebigen Punkt $(x, x, \ldots, x)$ auf der Hauptdiagonalen als Punkt $(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_m^{(s)})$ den Punkt $(x, x, \ldots, x)$ wählen kann, so dass $G(x, x, \ldots, x)$ der Grenzwert einer Folge ist, in der jedes Glied $f(x)$ ist. Dass die Funktion grenzperiodisch mit dem gegebenen

Periodensystem ist, das heisst mit ε-Genauigkeit durch eine stetige reinperiodische Funktion mit dem Periodensystem $\left(n!\,\frac{2\pi}{\alpha_1}, n!\,\frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots, n!\,\frac{2\pi}{\alpha_m}\right)$ approximierbar ist, zeigen wir wie folgt: Wir definieren zunächst eine reinperiodische, aber unstetige Funktion Π_n mit dem Periodensystem $\left(n!\,\frac{2\pi}{\alpha_1}, n!\,\frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots, n!\,\frac{2\pi}{\alpha_m}\right)$, welche im Bereich $0 \leq x_\nu < < n!\,|p_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ mit $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ zusammenfällt. Um nun eine stetige periodische Funktion P_n zu erhalten, nehmen wir eine Ausglättung von Π_n vor, indem wir P_n in jedem Punkte des Raumes definieren als den Mittelwert der Funktion Π_n im Inneren einer Kugel mit dem Mittelpunkt in $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und Radius δ. Ist n so gross, dass im ganzen Raume gilt

$$|G(x_1, x_2, \ldots, x_m) - g_n(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

ist gleichzeitig $n > M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, und wählen wir $\delta < \frac{\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\,\alpha}$, wo α die grösste unter den Zahlen $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|$ ist wird in jedem Punkte

$$|P_n - \Pi_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten; denn die Differenz $|\Pi_n(x_1, x_2, \ldots x_m) - \Pi_n(y_1, y_2, \ldots y_m)|$, wo $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ein Punkt der genannten Kugel ist, wird $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ sein, denn wir haben

$$|\Pi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) - \Pi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)|$$
$$= |G(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) - G(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)|,$$

wo

$$0 \leq x'_\nu < n!\,p_\nu \quad \text{und} \quad 0 < y'_\nu < n!\,p_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

und wo ausserdem gilt

$$|x'_\nu - y'_\nu| < \frac{\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\,|\alpha_\nu|} \qquad (\text{mod } n!\,p_\nu).$$

Wenn nun die Punkte $\xi'^{(1)}, \xi'^{(2)}, \ldots$ und $\eta'^{(1)}, \eta'^{(2)}, \ldots$ gegen $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$, bez. $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$ konvergieren, wird für alle s von einer gewissen Stelle an die Ungleichung

$$|\xi'^{(s)}_\nu - \eta'^{(s)}_\nu| < \frac{\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{|\alpha_\nu|} \quad \left(\operatorname{mod}\ M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)!\ p_\nu\right)$$

gelten, was zur Folge hat, dass

$$|g_s(\xi'^{(s)}) - g_s(\eta'^{(s)})| = |f(x^{(s)}) - f(y^{(s)})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

indem

$$|x^{(s)} - y^{(s)}| < \frac{\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{|\alpha_\nu|} \quad \left(\operatorname{mod}\ M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)!\ p_\nu\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

woraus zuletzt folgt, dass

$$|\Pi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) - \Pi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass P_n eine Funktion der gewünschten Art ist, das heisst sie approximiert G im ganzen Raume mit ε-Genauigkeit. Ist nämlich $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ein willkürlicher Punkt im Raume, $(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$ ein Punkt in Ξ_n, der die m Ungleichungen $|x_\nu - \xi_\nu^{(n)}| < \frac{1}{n|\alpha_\nu|}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ erfüllt, und ist $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ und $(\xi_1'^{(n)}, \xi_2'^{(n)}, \ldots, \xi_m'^{(n)})$ die mit ihnen äquivalenten Punkte im Bereich $0 \leq x_\nu < n!\,|p_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, hat man

$$\begin{aligned}|G(x_1, x_2, \ldots, x_m) - P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)| &= |G(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ - g_n(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}) + g_n(\xi_1'^{(n)}, \xi_2'^{(n)}, \ldots, \xi_m'^{(n)}) &- G(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) \\ + \Pi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) - P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)| &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass B eine Teilmenge von C ist, und auf Grund des vorhergehenden, dass A und B identisch sind.

III.

Gegeben ist eine abzählbar unendliche Folge von linear unabhängigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Wir wollen die Menge aller Funktionen bestimmen, welche gleichmässig für alle x durch eine endliche Summe $\sum c_\alpha e^{i\alpha x}$ approximiert werden können. Hierbei bedeutet α eine Zahl von der Form $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m$ mit rationalen Koeffizienten r. Die zu untersuchende Funktionenmenge bezeichnen wir wieder mit A. Das dem in II entwickelten analoge Kriterium ist hier das folgende: Damit $f(x)$ zu A gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass zu einem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, $N = N(\varepsilon)$ und $M = M(\varepsilon)$ existieren, so dass jedes τ, welches die N diophantischen Ungleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} |\tau\alpha_1| < \delta \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi M) \\ |\tau\alpha_2| < \delta \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi M) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |\tau\alpha_N| < \delta \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi M) \end{cases}$$

erfüllt, eine zu ε passende Verschiebungszahl von $f(x)$ ist, das heisst die Ungleichung

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \qquad -\infty < x < \infty$$

erfüllt.

Wie im vorhergehenden wollen wir die Menge aller Funktionen, welche die genannte ε-δ-M-N-Bedingung erfüllen, mit B bezeichnen. Es ist leicht zu zeigen, dass A eine Teilmenge von B ist; es sei nämlich $f(x)$ eine Funktion aus A; diese kann mit $\frac{\varepsilon}{3}$ Genauigkeit durch eine Summe $S(x) = \sum c_{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{i(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m)x}$ approximiert werden. Hiernach wähle man N so gross, dass alle die α-Zahlen, die in $S(x)$ vorkommen, in (17) mitberüchsichtigt werden, und als M wähle man den Hauptnenner aller in S vorkommenden r-Zahlen; endlich wähle man δ so klein, dass für jedes τ, welches die Ungleichungen (17) erfüllt, gelten soll, dass

$$|S(x+\tau)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

für ein solches τ hat man

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon.$$

Wir gehen nun dazu über die Identität von A und B nachzuweisen, indem wir analog mit dem vorhergehenden zeigen, dass beide identisch sind mit der Menge C bestehend aus den Funktionen

$$f(x) = G(x, x, \ldots),$$

wo $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige grenzperiodische Funktion im Raume von abzählbar unendlich vielen Dimensionen mit dem Periodensystem

$$(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots\right) \tag{18}$$

ist.

C ist auch hier eine Teilmenge von A, denn ist $f(x)$ eine Funktion aus C, also $f(x) = G(x, x, \ldots)$, kann sie gewiss mit einer endlichen Summe von der Form $\sum c_{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{i(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)x}$ approximiert werden. Hierzu braucht man nur die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ gleichmässig im ganzen Raume durch eine Summe von der Form $S(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum c_{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{i(r_1\alpha_1 x_1 + r_2\alpha_2 x_2 + \cdots + r_m\alpha_m x_m)}$ anzunähern, was zufolge der Annahme, dass $G(x_1, x_2, \ldots)$ grenzperiodisch mit dem Periodensystem (18) ist, gewiss geschehen kann. $S(x, x, \ldots, x)$ ist dann eine approximierende Summe der behaupteten Art. Es erübrigt also nur zu zeigen, dass B eine Teilmenge von C ist.

Wir bestimmen für ein willkürlich gegebenes x und ein gegebenes s $(s = 1, 2, \ldots)$ alle Punkte $(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots)$ des Raumes, deren Koordinaten für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ die Kongruenzen

$$\xi_\nu^{(s)} \equiv x \pmod{s!\, p_\nu} \tag{19}$$

erfüllen. Die Punktmenge, welche wir erhalten, indem x alle Werte durchläuft, bezeichnen wir mit Ξ_s. Danach definieren wir die Funktion $g_s(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots)$ in der Menge Ξ_s durch die Gleichung

$$g_s(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots) = f(x),$$

wo x der dem Punkte $(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots)$ im Sinne von (19) entsprechende Wert ist. Wie im vorhergehenden Fall ist auch jetzt Ξ_s eine in unserem jetzigen Raume überall dicht liegende Punktmenge, und wiederum gilt sowohl, dass

$$\Xi_1 > \Xi_2 > \ldots,$$

wie auch, wenn $p > q$, dass

$$g_p(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots) = g_q(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots).$$

Die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ wird dann in einem beliebigen Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ wie folgt definiert: Wir wählen eine Folge von Punkten $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots)$, $(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots)$, ..., welche gegen $(x_1, x_2, \ldots)$ konvergiert, und wo der s-te Punkt Ξ_s angehört. $G(x_1, x_2, \ldots)$ soll dann der Grenzwert von $g_1(\xi^{(1)})$, $g_2(\xi^{(2)})$, ... sein:

$$G(x_1, x_2, \ldots) = \lim_{s \to \infty} g_s(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots).$$

Im folgenden werden nicht willkürliche Folgen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$, sondern solche spezielle benutzt, bei welchen

$$|x_\nu - \xi_\nu^{(s)}| < \frac{1}{s|\alpha_\nu|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

ist; man erreicht dadurch, dass alle Berechnungen wesentlich einfacher werden.

Um die Konvergenz einer Folge $g_1(\xi^{(1)}), g_2(\xi^{(2)}), \ldots$ zu zeigen, betrachten wir die Differenz zwischen dem p-ten und dem q-ten Glied der Folge, für welche wir, wenn $p > q$, haben, dass

$$|g_p(\xi^{(p)}) - g_q(\xi^{(q)})| = |g_q(\xi^{(p)}) - g_q(\xi^{(q)})| = |f(x^{(p)}) - f(x^{(q)})|.$$

Hierbei gilt

$$|\alpha_\nu(x^{(q)} - x^{(p)})| < \frac{2}{q} \pmod{2\pi q!} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

und hat man q so gross gewählt, dass $\frac{2}{q} < \delta(\varepsilon)$, $q > M(\varepsilon)$ und $q > N(\varepsilon)$, gilt $|g_p(\xi^{(p)}) - g_q(\xi^{(q)})| < \varepsilon$. Ähnlich wie zuvor zeigt man, dass der die Funktion G definierende Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ ist.

Dass $G(x_1, x_2, \ldots.)$ stetig ist, ersieht man wie folgt: Hat man zwei Punkte $(x'_1, x'_2, \ldots)$ und $(x''_1, x''_2, \ldots)$ mit den Koordinatendifferenzen

$$|x'_\nu - x''_\nu| < \delta, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots N),$$

hat man auch

$$|G(x'_1, x'_2, \ldots) - G(x''_1, x''_2, \ldots)| \leq \varepsilon, \tag{20}$$

wenn nur $\delta < \frac{1}{3} \frac{\delta(\varepsilon)}{|\alpha_\nu|}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ und $N \geq N(\varepsilon)$, denn wir können in diesem Falle ein $s_0 > N$ so bestimmen, dass für alle $s > s_0$ sowohl

$$|\xi_\nu'^{(s)} - \xi_\nu''^{(s)}| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|\alpha_\nu|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

wie $s > M(\varepsilon)$ erfüllt ist. Dann gilt

$$|g_s(\xi'^{(s)}) - g_s(\xi''^{(s)})| = |f(x'^{(s)}) - f(x''^{(s)})| < \varepsilon,$$

denn für $s > s_0$ hat man

$$|\alpha_\nu(x'^{(s)} - x''^{(s)})| < \delta(\varepsilon) \pmod{2\pi\, M(\varepsilon)!} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)),$$

woraus (20) folgt.

Um nun zu zeigen, dass die so definierte Funktion auch grenzperiodisch ist, benutzen wir das folgende Kriterium: Damit eine stetige Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$ sei, ist (notwendig und) hinreichend, dass es zu einem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N und eine rationale Zahl $r \neq 0$ geben soll, so dass in zwei Punkten $(x'_1, x'_2, \ldots)$ und $(x''_1, x''_2, \ldots)$, deren Koordinaten die N Kongruenzen

$$x'_\nu \equiv x''_\nu \pmod{r\, p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

erfüllen, gilt

$$|G(x'_1, x'_2, \ldots) - G(x''_1, x''_2, \ldots)| < \varepsilon.$$

Durch die Benutzung dieses Satzes kann die Konstruktion der reinperiodischen Annäherungsfunktion wie auch die hierbei nötige Glättung gespart werden, da diese im Laufe des Beweises des genannten Satzes vorgenommen werden.

Betrachten wir zwei willkürliche Punkte $(x'_1, x'_2, \ldots)$ und $(x''_1, x''_2, \ldots)$, für welche die T Kongruenzen

$$x'_\nu \equiv x''_\nu \pmod{T!\, p_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, T) \tag{21}$$

gelten, können in den Folgen $\xi'^{(1)}, \xi'^{(2)}, \ldots$ und $\xi''^{(1)}, \xi''^{(2)}, \ldots$, welche zur Bestimmung der Funktionswerte verwendet werden, die T-ten Punkte $\xi'^{(T)}$ und $\xi''^{(T)}$ so gewählt werden, dass auch

$$\xi'^{(T)}_\nu \equiv \xi''^{(T)}_\nu \pmod{T!\, p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, T)$$

gilt, indem die Forderung, dass ein Punkt der T-te Annäherungspunkt für einen Punkt $(x_1, x_2, \ldots)$ sein soll, nur die T ersten Koordinaten betrifft. Die Punkte $\xi'^{(T)}$ und $\xi''^{(T)}$ sind dann äquivalent mit demselben Punkt $(x, x, \ldots)$ der Hauptdiagonalen, und man hat

$$g_T(\xi'^{(T)}) = g_T(\xi''^{(T)}).$$

Wurde also T so gross gewählt, dass gleichmässig im ganzen Raume gilt

$$|G(x_1, x_2, \ldots) - g_T(\xi_1^{(T)}, \xi_2^{(T)}, \ldots)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wird für zwei Punkte, welche (21) erfüllen, auch

$$|G(x_1', x_2', \ldots) - G(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

richtig sein. Hiermit ist gezeigt, dass $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine Funktion der gewünschten Art ist und damit, dass B eine Teilmenge von C ist, woraus die Identität von A und B folgt.

Færdig fra Trykkeriet den 12. Marts 1928.