Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VIII,** 11.

EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

ERSTE MITTEILUNG

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1929

Einleitung.

In meiner Arbeit »Neue Begründung der ebenen Geometrie« (Math. Ann. 64. Bd. 1907) wurde gezeigt, dass die ebene Geometrie unter ausschliesslicher Benutzung ebener Axiome ohne Stetigkeitsbetrachtungen, ganz unabhängig von der Parallelenfrage aufgebaut werden kann. Und tatsächlich bestehen meines Wissens bis jetzt keine andere Grundlagen, um die Sätze der ebenen Geometrie (z. B. den Höhenschnittpunktsatz, den Medianenschnittpunktsatz, u. dgl.), ohne räumliche Betrachtungen und ohne Stetigkeitsaxiome, unabhängig von der Parallelenfrage zu beweisen.

Schon in dieser Arbeit war sehr auffallend, wie geringe Rolle die Beziehungen der Anordnung spielten, und es hat sich schliesslich gezeigt, dass hierher gehörige Axiome ganz ausser Spiel gesetzt werden können[1]. In einer Reihe von Arbeiten soll nun gezeigt werden, wie das allgemeine Kongruenzproblem, das darin besteht, alle Geometrien zu erforschen, die eine Kongruenzlehre gestatten, wo aber sowohl die Anordnungsaxiome als auch das Axiom betreffs der eindeutigen Bestimmung der geraden Linie durch zwei Punkte (das Eindeutigkeitsaxiom) fortgelassen werden, gelöst werden kann.

Der Weg wurde angebahnt durch die Studien der

[1] Beretning om d. 2. skand. Matematikerkongres i Kjøbenhavn 1911 (cf. Jahrb. ü. d. Fortschr. d. Math. 43, S. 560).

Geometrie der Wirklichkeit, wo man das nächstliegende Beispiel einer hierher gehörigen Geometrie vor Augen hat, indem eben hier die Eindeutigkeit der Bestimmung der geraden Linie durch zwei Punkte keine unbedingte Gültigkeit hat. Diejenige Form der Kongruenzaxiome, welche sich als die fruchtbarste für die Behandlung des allgemeinen Kongruenzproblems herausgestellt hat, ist eben aus den einfachsten Tatsachen der Wirklichkeit entsprungen. Umgekehrt werden die hier dargestellten allgemeinen Untersuchungen geeignet sein, über die Probleme der Geometrie der Wirklichkeit neues Licht zu verbreiten.

Die in Rede stehenden sehr allgemeinen Geometrien sind als Nicht-Eudoxische Geometrien (sogenannte Nicht-Archimedische Geometrien) zu bezeichnen. Sie sind allerdings viel allgemeiner als die Nicht-Eudoxischen Geometrien im gewöhnlichen Sinne, insofern die Axiome der Anordnung ausser Betracht gestellt worden sind. Lässt man die Axiome der Anordnung zu, und nimmt man überdies auch das Eudoxische Axiom (das sogenannte Archimedische Axiom) an, so wird man im Stande, das Eindeutigkeitsaxiom zu beweisen.

Sehr überraschend wirkt in unserer allgemeinen Kongruenzlehre das Resultat betreffs der Existenz des Rechtecks: Auf Grund der Existenz zweier Geraden mit mehr als einem gemeinsamen Punkt lässt sich beweisen, dass Rechtecke existieren. Derjenige Beweis, der mit dem Eindeutigkeitsaxiom an der Spitze der Geometrie, nicht gelingen wollte, und nicht gelingen konnte, gelingt so in einfachster Weise, wenn man die gerade Linie ihre natürlichen Eigenschaften behalten lässt!

Es wird sozusagen hierdurch die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie »im Kleinen« festgestellt.

1. Das Axiomsystem.

1. Die allgemeine Kongruenzlehre wird auf folgendes Axiomsystem gegründet.

I. Es gibt *Punkte.* Es gibt Punktmengen, die *gerade Linien* (*Geraden*) heissen. Es gibt Transformationen welche *Bewegungen* heissen. Jede Bewegung ist eine Zuordnung, durch welche jeder Geraden und jedem in ihr gelegenen Punkte eine Gerade und ein in ihr gelegener Punkt umkehrbar eindeutig entspricht. Die Umkehrung einer Bewegung ist auch eine Bewegung. Die Bewegungen bilden eine Gruppe. Zwei Figuren, die durch eine Bewegung auseinander abgeleitet werden können, sollen *kongruent* heissen.

II. Ausser der Identität gibt es eine und nur eine Bewegung, welche alle Punkte einer geraden Linie stehen lässt. Diese Bewegung heisst eine *Spiegelung* an der geraden Linie. Die Linie wird als Achse der Spiegelung bezeichnet. Jede Gerade ist die Achse einer Spiegelung. Jeder Punkt ausserhalb der Achse geht bei der Spiegelung in einen von ihm verschiedenen Punkt über.

III. Eine Gerade b heisst *senkrecht* zu einer von ihr verschiedenen Geraden a (in Zeichen: $b \perp a$), wenn b bei der Spiegelung an a in sich selbst übergeht. Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Gerade b senkrecht zu einer gegebenen Geraden a; die beiden Geraden haben stets einen und nur einen Punkt gemein.

IV. Wenn zwei Punkte A und B einer geraden Linie l angehören, haben sie immer eine *Spiegelungsachse* m, derart dass A und B bei der Spiegelung an m ineinander übergehen, während l in sich selbst übergeführt wird ($l \perp m$). Diese Spiegelungsachse schneidet l in einem Punkt M, welcher als *Mittelpunkt* von A und B (oder von AB) auf l bezeichnet wird.

V. *Zwei kongruente Punktreihen* $ABC\ldots$ und $AB'C'\ldots$ auf einer oder auf zwei Geraden, mit dem gemeinsamen Punkt A, können immer durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden.

Es werden keine Voraussetzungen über eindeutige Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte aufgestellt. Es wird nicht einmal die Existenz einer Geraden durch zwei beliebig gewählte Punkte gefordert. Die Axiome der Anordnung sind ganz ausgeschaltet worden.

2. Beispiele. 1°. In der Cartesischen Ebene wählen wir die rationalen Punkte und die rationalen Geraden aus, und die Bewegungen lassen wir durch rationale orthogonale Substitutionen definiert sein. Alle unsere Axiome sind dann befriedigt. Es sei aber hervorgehoben, dass nicht jede Gerade in jede andere Gerade durch Bewegung übergehen kann. Man betrachte z. B. die beiden Geraden $y = 0$, $y = x$.

2°. In der Cartesischen Ebene nehme man die Punkte, deren Koordinaten geschlossene Dualbrüche sind, und die Geraden, deren Gleichungen auf eine der folgenden vier Formen geschrieben werden können: $x = a$, $y = b$, $y = \pm x + c$, wobei a, b, c geschlossene Dualbrüche bezeichnen. Die Bewegungen seien aus Spiegelungen an diesen Geraden zusammengesetzt. Für die so definierte Geometrie wird auch unser ganzes Axiomsystem erfüllt sein.

3°. In der gewöhnlichen komplexen Ebene nehmen wir alle Punkte, und alle Geraden mit Ausnahme der isotropen Linien $y = \pm ix + q$. Die Bewegungen seien wie gewöhnlich durch orthogonale Substitutionen definiert. Es gilt dann unser ganzes Axiomsystem. Es gibt aber Punkte ohne Verbindungsgerade. Die Axiome der Anordnung sind ungültig.

4°. In einer Koordinatengeometrie, wo die Koordinaten (x, y) Zahlen der Form $a + \varepsilon b$ darstellen, mit a reell, b reell, $\varepsilon^2 = 0$, wird auch unser Axiomsystem erfüllt sein, wenn die Geraden und die Bewegungen wie üblich definiert werden. Es gibt hier Punktepaare mit unendlich vielen Verbindungsgeraden (Beispiel: $(0, 0)$, $(\varepsilon, 0)$).

Erweitert man das System dahin, dass auch komplexe Werte für a und b in Betracht gezogen werden, können auch Punktepaare ohne Verbindungsgerade vorkommen.

5°. Dem vorhergehenden Beispiel kann man eine kinematische Deutung geben. In der Euklidischen Ebene denkt man sich »Punkt mit Geschwindigkeit« als Punkt einer Geometrie. Der Abstand zweier solchen Punkte wird dann »Strecke mit Streckengeschwindigkeit«. Mit anderen Worten ausgedrückt: Jeder Punkt der Grundebene wird mit einem Geschwindigkeitsvektor versehen, jede Grösse (Abstand, Winkel, ...) der Grundebene wird so mit einem Differential versehen. Die hierdurch hergestellte Geometrie, d. h. die ebene Kinematik, wird so in der allgemeinen Kongruenzlehre einbegriffen. Anwendungen auf höhere Differentiale erfolgen in ähnlicher Weise[1].

3. Schliesslich sei nur noch darauf hingewiesen, dass die Tragweite unseres Systems noch erheblich vergrössert werden kann, wenn die Forderung betreffs der Eindeutigkeit des Senkrechtfällens (auf eine Gerade von einem beliebigen Punkte aus) fortgelassen wird. Es werden dann auch Anwendungen auf die Liniengeometrie in derjenigen Form, wie sie von E. Study in seiner Geometrie der Dynamen behandelt worden ist, und auch Anwendungen auf ähnliche höhere Zweige der Geometrie in Betracht kommen.

[1] Vgl. hierzu meine Arbeit: Die Nicht-Eudoxische Mathematik (Den sjette Skandinaviske Matematikerkongres i København 1925).

Wir müssen aber zunächst das einfachere Problem, wie es hier aufgestellt wurde, eingehend behandeln.

4. Es sei endlich noch hervorgehoben, dass die besonderen Geometrieformen, wo die Axiome der Anordnung oder das Eindeutigkeitsaxiom oder andere spezielle Axiome, welche in unser System nicht aufgenommen sind, Gültigkeit haben, auch mit Vorteil mit den hier im folgenden dargestellten allgemeinen Hilfsmitteln behandelt werden können.

2. Zeichensprache.

5. Bei Rechnungen mit Transformationen wollen wir die Aufeinanderfolge der auszuführenden Transformationen von links nach rechts schreiben. Statt $U^{-1}\,T\,U$ schreiben wir oft T^U (die Transformierte von T durch U). Es wird dann

$$(T^U)^V = T^{UV}, \quad T^U \cdot V^U = (T\,V)^U.$$

Die in unserer Arbeit vorkommenden Transformationen werden gewöhnlich aus Spiegelungen zusammengesetzt. Gerade Linien bezeichnen wir mit den Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ Die zugehörenden Spiegelungen bezeichnen wir mit denselben Buchstaben. Z. B. soll abc eine Bewegung bezeichnen, welche dadurch entsteht, dass die Spiegelungen a, b, c nacheinander in der angegebenen Reihenfolge ausgeführt werden.

Jede Spiegelung ist involutorisch. Es wird somit

$$a^{-1} = a, \quad a^2 = 1, \quad b^a = aba,$$

b^a bezeichnet eine Spiegelung, deren Achse bei der Spiege lung an a der Geraden b entspricht.

6. Ist $b \perp a$, wird

$$b^a = b, \quad ab = ba,$$

und umgekehrt:

ist $$ab = ba, \quad \text{also} \quad b^a = b,$$

und b von a verschieden, so folgt $b \perp a$. Ist $b \perp a$, ist somit auch $a \perp b$.

Ist $ab = ba$, hat man entweder $a \perp b$ (und $b \perp a$), oder die beiden Geraden sind identisch.

7. Es ist
$$(abc)^a = a(abc)a = bca,$$
$$(abcd)^a = bcda, \text{ u. s. w.}$$

8. Die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen kann nicht durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden.

Aus $ab = c$, würde folgen $ab = ba$, $bc = cb$, $ca = ac$, d. h. (indem die drei Möglichkeiten $a = b$, $b = c$, $c = a$, ausgeschlossen sind)

$$a \perp b, \quad b \perp c, \quad c \perp a,$$

was unmöglich ist, weil zwei zu einander senkrechte Geraden immer einen Schnittpunkt aufweisen, und von einem Punkt nur eine Senkrechte auf eine Gerade gefällt werden kann.

Es folgt sofort, dass 3 Spiegelungen einander nicht aufheben können.

9. Zwei zueinander senkrechte Geraden a, b werden durch eine Bewegung U in zwei zueinander senkrechte Geraden transformiert.

Es ist nämlich

$$ab = ba,$$
$$(ab)^U = (ba)^U,$$
$$a^U b^U = b^U a^U.$$

3. Bewegungen mit einem festen Punkt.

10. Wenn bei einer Bewegung der Punkt A fest ist, so wird eine gerade Punktreihe $ABC\ldots$ auf einer Geraden g durch A in eine gerade Punktreihe $AB'C'\ldots$ auf einer Geraden g' durch A hinübergeführt. Die beiden Reihen haben eine Spiegelungsachse a. Die vorgelegte Bewegung muss dann entweder mit der Spiegelung a oder mit der Bewegung ga gleichwertig sein.

Also:

Wenn eine Bewegung einen Punkt fest lässt, muss sie entweder einer einzigen Spiegelung a durch diesen Punkt oder der Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen g, a durch den Punkt gleichwertig sein. Im letzteren Falle kann die erste Gerade g ganz beliebig durch den festen Punkt gewählt werden.

Nach 8 schliessen die beiden Fälle einander aus.

11. Es folgt nun unmittelbar: Wenn 3 Geraden a, b, c durch denselben Punkt O gehen, lässt sich immer eine vierte Gerade x durch O finden, derart dass $ab = cx$, oder $x = cab$. Es gilt also auch der Satz:

Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen a, b, c, deren Achsen durch denselben Punkt O hindurch gehen, kann durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden. Die Achse der Spiegelung geht durch O.

Es folgt nun auch, dass die Gleichung $ab = xc$ lösbar ist; es wird nämlich $x = abc$.

12. Ist $a \perp b$, so wird auch $x \perp c$; weil $ab = ba$, ist nämlich auch $xc = cx$.

Hieraus schliesst man:

Zwei beliebige zueinander senkrechte Geraden

a, b durch den Punkt O, bestimmen eine Bewegung ab, welche jede Gerade c durch O stehen lässt. Die Bewegung ist involutorisch, weil $ab = ba$.

Diese Bewegung soll als Umwendung um den Punkt O bezeichnet werden. Die Umwendung selbst soll mit O bezeichnet werden.

13. Die Umwendung O lässt keinen von O verschiedenen Punkt stehen. Wäre P ein fester Punkt, könnte die Bewegung durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen r und s durch P ersetzt werden, und die Gerade l von O senkrecht auf r müsste bei der Bewegung rs fest bleiben, d. h. sie müsste auch senkrecht auf s stehen, was unmöglig ist, weil r und s nicht zusammenfallen. Der Fall $l = s$ ist ausgeschlossen, weil zwei zueinander senkrechte Geraden nur einen Punkt gemein haben.

14. Folgerung: Ist $P^Q = P$, oder $PQ = QP$, hat man notwendig $Q = P$.

15. Bei Rechnungen mit Spiegelungen und Umwendungen ist es nützlich, die folgenden einfachen Sätze zu kennen:

Ist $P^a = P$, muss P auf a liegen.

Der Satz besagt nur, dass die Spiegelung a keine anderen Punkte stehen lässt, als die Punkte von a.

16. Ist $a^P = a$, liegt P auf a.

Es ist nämlich

$$PaP = a, \quad aPa = P, \quad P^a = P,$$

d. h. P liegt auf a (15).

17. Ist Pa involutorisch, muss P auf a liegen.

Es ist nämlich

$$P^{aP} = P^{Pa},$$
$$(P^a)^P = (P^P)^a = P^a$$

also $$P^a = P,$$
d. h. P liegt auf a.

4. Bewegungen, die eine Gerade fest lassen.

18. Wenn die Gerade l fest bleibt, muss eine Punktreihe $ABC\ldots$ auf l in eine entsprechende Punktreihe $A'B'C'\ldots$ auf l übergehen. Die Senkrechte auf l in A und die Mittelsenkrechte der Punkte AA' auf l seien mit a bezw. m bezeichnet. Die Punktreihe $ABC\ldots$ muss dann in $A'B'C'\ldots$ hinübergehen entweder durch die Spiegelung m allein, oder durch die Aufeinanderfolge von a und m. Die vorgelegte Bewegung lässt sich dann sicher auf eine der folgenden Formen darstellen:

$$m, \quad ml, \quad am, \quad aml.$$

Es gibt also nur 4 Möglichkeiten:

Eine Bewegung, die eine Gerade l stehen lässt, ist entweder eine Spiegelung an einer Achse senkrecht zu l, oder eine Umwendung um einen Punkt von l, oder sie kann durch zwei Spiegelungen, deren Achsen senkrecht zu l sind, oder durch zwei solche Spiegelungen und eine nachfolgende Spiegelung an l selbst ersetzt werden.

Fallen a und m zusammen, gehen die letzten zwei Formen in die Identität bezw. die Spiegelung l hinüber.

19. Die Aufeinanderfolge von 3 Spiegelungen a, b, c, deren Achsen senkrecht zu einer Geraden l stehen, ist eine involutorische Bewegung.

Nach dem vorhergehenden Satz bestehen nämlich nur folgende Möglichkeiten:

$$abc = \begin{cases} m \\ ml \end{cases} \qquad abc = \begin{cases} am \\ aml \end{cases} \qquad m \perp l.$$

Die beiden letzten Möglichkeiten können durch die folgenden ersetzt werden

$$bc = \begin{cases} m \\ ml \end{cases}$$

also bc involutorisch, $b \perp c$, was unmöglich ist, oder $b = c$, was kein Interesse hat.

Es bleiben also nur die folgenden Möglichkeiten übrig:

$$abc = \begin{cases} m \\ ml \end{cases}$$

d. h. eine Spiegelung, oder eine Umwendung, womit der Satz bewiesen ist.

20. Nach diesem vorbereitenden Satz können wir nun den folgenden Hauptsatz beweisen:

Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen a, b, c, deren Achsen senkrecht zu einer Geraden l sind, lässt sich durch eine einzige Spiegelung ersetzen, deren Achse senkrecht auf l steht.

Zunächst bestimmen wir eine Gerade x dergestalt, dass

$$ax = xc;$$

x ist senkrecht zu l und Spiegelungsachse für a und c.

Wir bestimmen ferner eine Gerade $d \perp l$ derart, dass die Gleichung

$$bx = xd$$

erfüllt wird; d wird durch Spiegelung von b an x erzeugt

Dann folgt

$$(ax)\,(xb) = (xc)\,(dx),$$

oder

$$ab = (xcd)\,x;$$

da ferner xcd involutorisch ist (19), also

$$xcd = dcx,$$

so ergibt sich

$$ab = (dcx)x = dc,$$

d. h.

$$abc = d,$$

w. z. b. w.

21. Zwei Spiegelungen a und b, deren Achsen senkrecht auf einer Geraden l stehen, können durch zwei andere Spiegelungen dergestalt ersetzt werden, dass die Achse der ersten oder der zweiten dieser Spiegelungen in irgendeine gegebene Gerade $c \perp l$ fällt.

Die Gleichungen $ab = cx$, und $ab = xc$ sind in der Tat gleichbedeutend mit

$$cab = x, \text{ bzw. } abc = x.$$

22. Zwei Umwendungen A und B um zwei Punkte einer Geraden l können durch zwei Spiegelungen, deren Achsen in die Lote von l in A und B fallen, ersetzt werden.

Die beiden Lote a und b erfüllen nämlich die folgenden Gleichungen:

$$al = A, \quad lb = B,$$

woraus folgt

$$allb = AB,$$

oder

$$ab = AB.$$

23. Die Aufeinanderfolge von drei Umwendungen A, B, C, um Punkte einer Geraden l, kann durch eine einzige Umwendung um einen Punkt derselben Geraden ersetzt werden,

Die Lote von l und A, B, C seien mit a, b, c bezeichnet. Es wird dann

$$ABC = allbcl = (abc)l,$$

wo

$$abc = n \perp l,$$

also

$$ABC = nl = D,$$

indem D den Schnittpunkt von n und l bezeichnet. Die Gleichungen $AB = CX$, $AB = DX$, lassen sich hiernach lösen.

24. Wenn A und B auf l liegen, und $r \perp l$, so ist ABr eine Spiegelung, deren Achse senkrecht auf l steht.

Die Lote von l in A und B seien mit a bezw. b bezeichnet. Es ist dann

$$A = al, \quad B = lb, \quad ABr = abr.$$

25. Die Bewegung Op lässt sich in eine ihr gleichwertige Bewegung $O'p'$ (oder $p'O'$) umändern dergestalt, dass p' durch einen beliebig vorgeschriebenen Punkt P geht.

Das Lot Op (d. h. das Lot von O auf p) sei q, und das Lot Pq sei p'. Es ist dann möglich, einen Punkt O' auf q zu finden, dergestalt, dass $Op = O'p'$ oder $p'O'$.

26. Wenn ABr eine involutorische Bewegung darstellt, so muss das Lot von A auf r durch den Punkt B laufen.

Beweis. Statt Br kann man $r'B'$ schreiben, wo r' durch A geht. Es wird dann

$$ABr = Ar'B' = sB' \ (s \perp r' \text{ in } A).$$

Soll diese Bewegung involutorisch sein, muss B' auf s liegen (17), d. h. das Lot Br (oder $r'B'$) fällt mit s zusammen, und enthält somit den Punkt A.

27. Wenn $a \perp n$ $(an = A)$, $b \perp n$ $(bn = B)$, und abc involutorisch ist, so gibt es eine Gerade durch A und B senkrecht auf c.

Es ist nämlich

$$a = An, \quad b = Bn, \quad abc = AnnBc = ABc,$$

wodurch der Satz auf den vorigen zurückgeführt wird.

5. Der Mittelpunkt.

28. Zwei Punkte A, B einer Geraden l haben nach Voraussetzung immer einen Mittelpunkt auf dieser Geraden. Wenn mehrere Verbindungsgeraden der beiden Punkte A, B vorhanden sind, könnte die Möglichkeit bestehen, dass auch mehrere Mittelpunkte den verschiedenen Verbindungsgeraden entsprechend existieren. Es ist aber dem nicht so. In der Tat, haben die beiden Punkte A, B die Mittelpunkte M, M_1, den beiden Verbindungsgeraden l, l_1 entsprechend, müssen die Punkte A und B bei der Bewegung MM_1 fest bleiben. Die Bewegung MM_1 ist nun der Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen l, r (r durch A) gleichwertig (10, 14). Es folgt dann

$$lr = MM_1, \quad M = ls \ (s \perp l \text{ in } M),$$
$$lr = lsM_1, \ r = sM_1,$$
$$M_1 \text{ auf } s, \quad r \perp s, \quad r = l, \quad M = M_1.$$

29. Haben die beiden Punkte A, B keine Verbindungsgerade, gibt es doch einen Mittelpunkt, d. h. es gibt eine Umwendung, durch welche A und B in einander übergehen. Um das zu beweisen, ziehen wir durch A und B zwei zueinander senkrechte Geraden a, b, die einander in C kreuzen. n ist die Mittelsenkrechte von A, C auf der Geraden a, P der Mittelpunkt von B, C auf der Geraden b. s ist das Lot von P auf n. Die Bewegung nP, welche die Gerade s stehen lässt, führt nun A in B über; sie führt deshalb auch die senkrechte AA_1 auf s in die senkrechte BB_1 auf s hinüber. Die Punkte A_1B_1 haben auf s den Mittelpunkt M. Die Bewegung nP lässt sich nun in eine Bewegung xM umändern, wo x senkrecht auf s steht, und da A_1 bei dieser Bewegung in B_1 übergehen muss, so fällt x mit der senkrechten AA_1 auf s zusammen. A geht nun bei der Bewegung xM in B über; die Spiegelung x lässt aber

A ungeändert, und die Umwendung M allein muss also A nach B führen.

Wir haben also den Satz:

Zwei Punkte haben immer einen eindeutig bestimmten Mittelpunkt, unabhängig davon, ob die Punkte eine, mehrere oder gar keine Verbindungsgerade haben.

30. Haben zwei gerade Linien zwei Punkte A und B gemein, haben sie auch den Punkt A^B (d. h. den Punkt, nach welchem A durch die Umwendung B geführt wird) gemein. Durch fortgesetzte Umwendung wird dann eine ganze Reihe von gemeinsamen Punkten erzeugt. Ebenso müssen die beiden Geraden auch den Mittelpunkt von A, B enthalten, und durch fortgesetzte Mittelpunktkonstruktion entsteht ein ganze Menge von Punkten, welche alle in den beiden Geraden enthalten sind. Wir kommen später auf diese Frage zurück.

31. Wenn man die Axiome der Anordnung in geeigneter Fassung zu unserem Axiomsystem hinzufügt, wird sich zeigen, dass eine Strecke durch ihre Endpunkte eindeutig bestimmt wird. Der Beweis ist sehr einfach: Wenn die Endpunkte A, B einer Strecke gemeinsame Projektion auf eine gerade Linie haben, so müssen alle Punkte der Strecke dieselbe Projektion haben; es würde sonst durch die Projektion die Ordnung der Punkte gestört. Würde man ausserdem das Eudoxische Axiom (sogenannte Archimedische Axiom) heranziehen, würden auch die Verlängerungen der Strecke eindeutig bestimmt. Also:

Bei Annahme der Anordnungsaxiome und des Eudoxischen Axioms ist die Eindeutigkeit der Bestimmung der geraden Linie durch zwei Punkte beweisbar.

6. Das Rechteck.

32. Zwei Geraden l, m haben die beiden Punkte A, B gemein. Auf l wählen wir einen Punkt C, welcher nicht auf m liegt. Wir fällen das Lot p von C auf m; der Schnittpunkt mit m werde mit D bezeichnet.

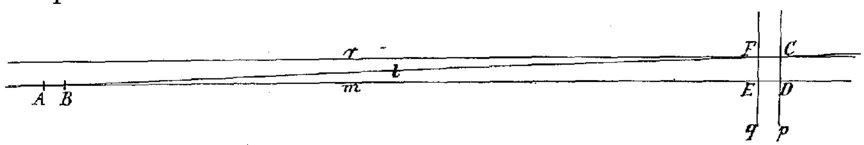

Fig. 1.

Es wird nun

$$ABD = E,$$

wo E ein Punkt von m ist. Hieraus folgt

$$ABC = EDC,$$

und da A, B, C einer Geraden angehören, ist ABC, also EDC eine involutorische Bewegung (23).

Errichtet man nun das Lot q auf m in E, und das Lot r auf p in C, so wird

$$E = qm, \quad D = mp, \quad C = pr,$$

also

$$EDC = qmmppr = qr.$$

qr ist also eine involutorische Bewegung, d. h. $q \perp r$. Setzt man $qr = F$, haben wir ein Rechteck $CDEF$ konstruiert.

Die Existenz des Rechtecks ist hiermit gesichert.

33. Durch Spiegelung des gefundenen Rechtecks an einer der Seiten m, p, q, r wird ein neues Rechteck gebildet, und durch fortgesetzte Spiegelungen dieser Art bildet man zwei Reihen äquidistanter Linien, die einander rechtwinklig durchkreuzen. Das System lässt sich so erweitern, dass

man die Spiegelungsachsen je zweier Geraden jeder Reihe hinzufügt. Es gilt nämlich der folgende Satz:

34. Jedes Rechteck hat zwei Spiegelungsachsen.

Beweis: Es sei $ABCD$ ein Rechteck (AB auf a, BC auf p, CD auf b, DA auf q; $p \perp a$, $p \perp b$, $q \perp a$, $q \perp b$). r und s seien die Mittelsenkrechten von AB (auf a) bezw. CD (auf b). Es soll dann gezeigt werden, dass r und s zusammenfallen müssen. Die Bewegung rs lässt sowohl p wie q ungeändert. Sie ist keine Spiegelung, weil zwei Spiegelungen sich überhaupt nicht durch eine Spiegelung ersetzen lassen. Sie ist auch keine Umwendung, weil sie zwei einander nicht schneidende Geraden stehen lässt. Es bleiben dann nur noch folgende Möglichkeiten übrig (18):

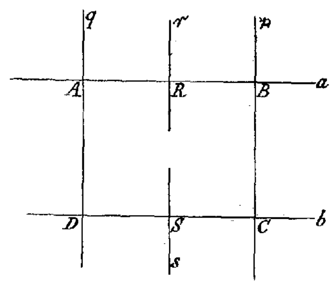

Fig. 2.

$$rs = ak, \quad \text{oder} \quad rs = akq,$$

wo k ein Lot von q bezeichnet. Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$ars = k, \quad \text{bezw.} \quad ars = kq,$$

d. h.

$$Rs = \begin{cases} k, \\ K, \end{cases}$$

indem $ar = R$, $kq = K$ gesetzt wird.

Nur der erste Fall ist möglich, und es wird

$$Rs = k, \quad R = ks,$$
$$R \text{ auf } s, \quad R \text{ auf } k, \quad k = a,$$
$$ars = a, \quad r = s.$$

35. Die beiden Spiegelungsachsen des Rechtecks sind senkrecht zueinander. Ihr Schnittpunkt ist Mittelpunkt

einer Umwendung, welche die Gegenecken in einander überführt.

36. Haben die beiden Ecken A und B nur eine Verbindungsgerade, dann gilt dasselbe von den Ecken C und D. Jedes Lot x von a ist dann auch Lot von b. pqx ist nämlich eine involutorische Bewegung. Es folgt nun der Satz:

Gibt es ein Rechteck $ABCD$, wo die geraden Linien AB und AD eindeutig bestimmt sind, so gibt es ein Rechteck mit der Ecke A und mit zwei anderen Ecken X und Y in beliebig gewählten Punkten von diesen beiden Geraden.

7. Die allgemeine Bewegung.

37. Eine Bewegung, durch welche der Punkt A in den Punkt A_1 übergeht, kann durch eine Umwendung um den Mittelpunkt M von A und A_1 und eine nachfolgende Bewegung, die den Punkt A_1 stehen lässt, ersetzt werden. Die letztere Bewegung ist entweder durch eine oder zwei Spiegelungen darstellbar. Hieraus folgt:

Jede Bewegung lässt sich ersetzen durch eine Umwendung M und eine einzige Spiegelung a oder durch eine Umwendung M und zwei Spiegelungen a, b, deren Achsen einen Punkt gemein haben.

Im ersteren Falle kann man auch die Ordnung der Umwendung und der Spiegelung umkehren, indem

$$Ma = aaMa = a(aMa) = aM',$$

wo $M' = M^a$ (Spiegelbild von M durch die Achse a).

Es folgt hieraus, dass man auch im letzteren Falle die Ordnung der Umwendung und der beiden Spiegelungen ändern kann.

Der Typus Ma soll als Um-Bewegung bezeichnet werden, der Typus Mab als In-Bewegung. Die Spiegelung ist eine Um-Bewegung, die Identität eine In-Bewegung.

38. Um zu zeigen, dass die beiden Typen wirklich verschieden sind, wird es nötig zu beweisen, dass eine In-Bewegung und eine Um-Bewegung einander nicht gleichwertig sein können. Wir müssen also zeigen, dass die Gleichung

$$Mab = On$$

unmöglich ist, indem die Geraden a und b einen gemeinsamen Punkt P haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass n durch P geht. Wäre dies nämlich nicht der Fall, könnten wir On durch $O'n'$ ersetzen, wo n' das Lot von P auf das Lot On bezeichnet. Hiernach wird die obige Gleichung

$$M(abn) = O,$$
$$Mc = O,$$

was unmöglich ist.

39. Die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen a, b ist eine In-Bewegung.

Beweis. Vom Punkte B auf b fällen wir die senkrechte c auf a. Es ist dann

$$ab = (ac)cb = Ocb.$$

40. Die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen a, b, c ist eine Um-Bewegung.

Wir schreiben

$$bc = bmC,$$

wo b und m einen gemeinsamen Punkt P haben, $m \perp c$. Statt bm schreiben wir xy, wo x (und y) durch P geht und $x \perp a$. Est ist nun

$$abc = axyC = AyC,$$

wo A der Schnittpunkt (ax) bezeichnet. Ay lässt sich nun in $A'y'$, wo y' durch C geht, umändern, und es wird dann

$$abc = A'y'C = A'z.$$

41. Die Aufeinanderfolge von vier Spiegelungen ist eine In-Bewegung.

Folgt sofort aus dem vorigen Satz, indem $A'zd$ immer so umgeändert werden kann, dass $A'z = A''z'$, wo z' durch einen Punkt von d gelegt wird.

42. Wenn man zu einer Um-Bewegung eine Spiegelung hinzufügt, erhält man eine In-Bewegung. Und wenn man umgekehrt zu einer In-Bewegung eine Spiegelung hinzufügt, kommt eine Um-Bewegung heraus. In der Tat ist

$$(Mab)c = M(abc) = MA'z = Mz'A'',$$

wo z' durch M gelegt ist, und hieraus folgt:

$$Mz' = s,$$
$$(Mab)c = sA''.$$

Ferner:

Die Aufeinanderfolge einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen ist eine In-Bewegung oder Um-Bewegung, je nachdem die Anzahl der Spiegelungen gerade oder ungerade ist.

43. Jede Um-Bewegung, welche keine Spiegelung ist, lässt eine und nur eine gerade Linie fest bleiben. Diese Gerade enthält den Mittelpunkt eines jeden Paares bei der Bewegung einander entsprechender Punkte.

Die Bewegung sei Op. Die senkrechte l von O auf p ist eine feste Gerade. Dass keine andere Gerade fest bleiben kann, folgt aus folgender Betrachtung. Soll die Gerade x bei einer Um-Bewegung fest bleiben, und einfache Spiegelungen nicht in Betracht kommen, so muss die Bewegung aus einer Umwendung um ein Punkt O_1 auf l und einer Spiegelung an eine Achse p_1 senkrecht zu l hervorgehen.

Da nun $$Op = O_1p_1, \quad O_1Op = p_1,$$

so folgt, dass die senkrechte von O auf p auch durch O_1 geht und senkrecht auf p_1 steht, d. h. $x = l$. Es gibt also nur eine feste Gerade.

Der zweite Teil des Satzes wird folgendermassen bewiesen. Der Punkt A gehe bei unserer Bewegung in A_1 über. Durch A_1 ziehen wir das Lot n auf l. Es lässt sich dann ein Punkt P auf l finden, derart dass

$$Op = Pn.$$

Da nun A bei diesen Bewegung in A_1 übergeht, muss schon die Umwendung P den Punkt A nach A_1 führen, d. h. P ist der Mittelpunkt von A und A_1. Der Mittelpunkt von A und A_1 liegt also auf l.

44. Die Mittelpunkte entsprechender Punkte in zwei kongruenten geradlinigen Punktreihen liegen immer auf einer Geraden; speziell können sie in einen einzigen Punkt zusammenfallen.

Die beiden geradlinigen Punktreihen können zur Dekkung gebracht werden, durch eine Umwendung, welche einen Punkt der einen Reihe in den entsprechenden Punkt der anderen Reihe überführt, und eine Spiegelung, wo letzterer Punkt fest bleibt. Der Satz wird hiermit auf den vorhergehenden zurückgeführt.

45. Wenn eine Um-Bewegung einen Punkt fest stehen lässt, ist sie einer einfachen Spiegelung gleichwertig.

Die bei der Bewegung fest stehende Gerade g muss nach dem vorigen Satz den Punkt O enthalten, und die Bewegung ist somit eine Spiegelung, deren Achse senkrecht auf g in O steht.

8. Involution von drei Spiegelungen.

46. Wir haben schon gesehen, dass die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen, deren Achsen durch denselben Punkt hindurchgehen, oder senkrecht auf derselben Gerade stehen, einer einzigen Spiegelung gleichwertig ist. Wir wollen jetzt den allgemeinen Fall untersuchen, wo die Aufeinanderfolge von 3 Spiegelungen a, b, c eine involutorische Bewegung darstellt. Diese Bewegung muss dann eine Spiegelung sein, weil es keine andere involutorische Um-Bewegung gibt.

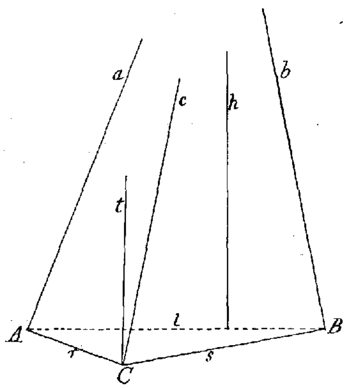

Fig. 3.

Durch den Punkt C auf c fällen wir die Lote r, s auf a bezw. b. Sie schneiden a und b in A bezw. B. Es gilt dann

$$acb = arrcssb = (ar)(rcs)(sb) = A(rcs)B.$$

rcs ist einer Spiegelung t gleichwertig ($rcs = t$, $rt = cs$), und es folgt

$$acb = AtB.$$

Diese Transformation soll nun involutorisch sein, und das wird nach 26 bedeuten, dass d a s L o t d u r c h A a u f t d u r c h B h i n d u r c h g e h e n m u s s.

Die Achse h der Spiegelung acb ist senkrecht auf l, und es gilt $At = hB$. Die beiden entsprechenden »Abstände« sind einander gleich.

47. Es seien zwei Geraden a, b und ein Punkt C beliebig vorgelegt. Durch C wollen wir eine Gerade c legen, welche mit a und b in Involution ist (d. h. die Bewegung abc — und somit abc, bca, u. s. w. — soll involutorisch sein). Durch C fällen wir die Lote r, s auf a, b. Die Schnittpunkte mit a, b sind A, B. Ist nun l eine Verbindungsgerade von A und B, und fällen wir durch C das Lot t zu l, und konstruieren wir ferner die Gerade c so, dass

$$c = rts,$$

wird diese Gerade der vorgeschriebenen Bedingung genügen. Es wird nämlich

$$acb = AtB,$$

was eben eine involutorische Bewegung vorstellt. Umgekehrt weiss man, dass es keine anderen Linien gibt als diejenigen, die auf diese Weise erhalten werden.

48. Haben die beiden Punkte A, B keine Verbindungsgerade, hat die Aufgabe keine Lösung. Haben sie mehrere Verbindungsgeraden, entspricht jeder von diesen eine Gerade c, welche der Aufgabe genügt.

In dem Falle, wo a und b einen Punkt O und nur diesen Punkt, gemein haben, werden die Verbindungsgeraden $c = OC$ und $l = AB$ einander so entsprechen, dass die Geraden rcs und l paarweise aufeinander senkrecht stehen.

49. Schliesslich wollen wir noch eine andere Konstruktion von der gesuchten Gerade c ableiten: Aus

$$abc = cba,$$

folgt

$$C^{abc} = C^{cba}$$

d. h.

$$(C^{ab})^c = C^{ba};$$

c wird also Spiegelungsachse der beiden Punkte C^{ab} und C^{ba}.[1]

[1] Vgl. die grundlegende Konstruktion in Math. Ann. 64, S. 450.

9. Das Dreieck.

50. Es sei vorgelegt ein Dreieck ABC, d. h. ein System von drei Punkten A, B, C mit bestimmten festgelegten Verbindungsgeraden BC, CA, AB. Diese Verbindungsgeraden (die Seiten des Dreiecks) sollen mit a, b, c bezeichnet werden. Es gibt bestimmte Mittelpunkte R, S, T für BC, CA, AB. Diese Mittelpunkte sind immer eindeutig durch die Punkte A, B, C bestimmt (unabhängig von den Verbindungsgeraden, die mehrdeutig sein können). Die Mittelsenkrechten durch R, S, T, den Seiten a, b, c entsprechend, bezeichnen wir mit r, s, t. Die Bewegung rst ist eine Um-Bewegung, und da der Punkt B bei dieser Bewegung fest steht, kann die Bewegung durch eine Spiegelung ersetzt werden (45). Die Bewegung rst ist also involutorisch. Haben zwei von den drei Geraden r, s, t einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, muss die dritte durch denselben Punkt hindurch gehen.

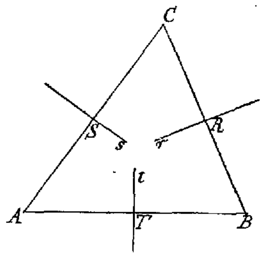

Fig. 4.

Die Bewegung RtS ist eine Um-Bewegung, und zwar, da der Punkt C fest bleibt, eine Spiegelung. Es gibt sonach eine Gerade durch R und S, welche senkrecht auf t steht. Dies ist die allgemeine Form des Mittelpunktstransversalensatzes.

51. ABC ist ein Dreieck mit festgelegten Seiten a, b, c. Ob zwei beliebige von diesen Seiten, z. B. b und c überhaupt eine Spiegelungsachse haben, können wir nach unseren Voraussetzungen nicht wissen. Haben sie aber eine, haben sie auch eine andere senkrecht zu der ersteren. Wir nehmen nun an, dass jedes Paar bc, ca, ab zwei Spiegelungsachsen hat: Durch A gehen zwei Spiegelungsachsen x, x_1 für b und c; durch B zwei Achsen y, y_1 für c und a,

und durch C zwei Achsen z, z_1 für a und b. Es seien nun die Bezeichnungen so gewählt, dass x, y, z nicht involutorisch sind. Es lässt sich dann zeigen, dass x, y, z_1 notwendig involutorisch sein müssen. Die Aufeinanderfolge der Spiegelungen xyz führt b in sich selbst über. Und die Aufeinanderfolge xyz_1 ebenso. Da nun ferner

$$xyz_1 = xyzC,$$

muss jedenfalls eine der Bewegungen xyz und xyz_1 einen festen Punkt auf b haben; das heisst, die Bewegung muss eine Spiegelung darstellen.

Ist also xyz keine Spiegelung, muss dies mit xyz_1 der Fall sein, und umgekehrt.

Ist also xyz nicht involutorisch, so wird xyz_1 involutorisch, xy_1z_1 hingegen nicht, während wiederum $x_1y_1z_1$ involutorisch wird. Hiermit haben wir dann die 4 Gruppen von involutorischen Linien, welche bei den 6 Spiegelungsachsen des Dreiecks auftreten:

$$xyz_1, \quad xy_1z, \quad x_1yz, \quad x_1y_1z_1.$$

52. Um die Höhen des Dreiecks, d. h. die Geraden, welche von den Ecken senkrecht zu den festgelegten gegenüberliegenden Seiten gefällt werden, zu untersuchen, betrachten wir die Aufeinanderfolge der Spiegelungen a, b, c. Die Bewegungen abc, bca, cab werden auseinander durch Spiegelungen gebildet, indem

$$(abc)^a = bca, \quad (bca)^b = cab.$$

Die erste Bewegung abc hat eine feste Gerade y, die zweite eine feste Gerade z, und die dritte cab eine feste Gerade x, und den obigen Gleichungen zufolge ergibt sich

$$y^a = z, \quad z^b = x, \quad x^c = y,$$

d. h. y und z haben die Spiegelungsachse a, z und x die Spiegelungsachse b, x und y die Spiegelungsachse c.

Die Gerade x muss durch die beiden Höhenfusspunkte N und P hindurchgehen. In der Tat, wenn C durch die Umwendung P in C' übergeht, so wird C' durch die Bewegung cab nach C geführt. Die feste Gerade der Bewegung cab ist x. Sie muss also den Mittelpunkt P von CC' enthalten. Ebenso zeigt sich, dass sie auch den Punkt N enthalten muss. Ähnlich zeigt sich, dass y durch M und P, z durch M und N hindurchlaufen. Die drei Geraden xyz bilden demnach die Seiten eines Dreiecks MNP, wo a, b, c Spiegelungsachsen der Seitenpaare sind. Die anderen Spiegelungsachsen sind die Höhen des gegebenen Dreiecks; und müssen nach dem vorhergehenden Satz involutorisch sein.

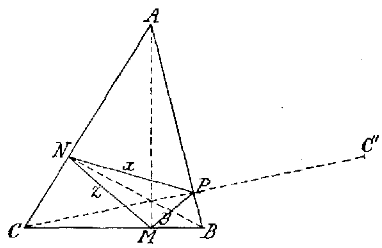

Fig. 5.

In der allgemeinen Kongruenzlehre gilt also folgender Satz:

Die Höhen eines in beliebiger Weise fixierten Dreiecks sind immer involutorisch.

Haben zwei von den Höhen einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, geht die dritte Höhe durch diesen Punkt hindurch.

53. Der Satz kann auch folgendermassen formuliert werden: Es werden 3 Punkte A, B, C vorgelegt (sie können untereinander verschieden sein oder nicht). Eine Gerade a gehe durch B und C, eine Gerade b durch C und A, eine Gerade c durch A und B (diese Geraden können vielleicht in mannigfacher Weise gewählt werden; wir setzen voraus, dass wir für jedes Paar der Punkte eine Verbindungs-

gerade herausgewählt haben). Die drei senkrechten von A, B, C auf bezw. a, b, c, werden dann immer involutorisch sein. Der Satz gilt für jede Lage von A, B, C; auch bei zusammenfallenden Punkten hat der Satz seine Gültigkeit. Überhaupt ist es bemerkenswert, dass die Sätze der Geometrie eine grössere Allgemeinheit erhalten, wenn das Eindeutigkeitsaxiom wegfällt, in dem Sinne, dass der Ausdruck »zwei Punkte« nunmehr nicht notwendig »zwei verschiedene Punkte« bedeutet.

10. Halbdrehungen.

54. Eine Halbdrehung um den Punkt O ist eine Transformation, welche folgendermassen durch zwei gerade Linien a, a_1, welche beide durch O gehen und nicht zueinander senkrecht sind, bestimmt wird. Jeder geraden Linie l soll eine neue gerade Linie l_1 entsprechen derart, dass das Lot m von O auf l, l in einem Punkt trifft, durch welchen l_1 gehen soll. Ferner soll l_1 zu derjenigen Geraden m_1 durch O senkrecht stehen, welche durch die Gleichung $mm_1 = aa_1$ bestimmt wird. Auf Grund dieser Festsetzung wird jeder geraden Linie l eine eindeutig entsprechende Linie l_1 zugewiesen. Speziell wird sich hieraus ergeben, dass jeder geraden Linie p durch O eine gerade Linie p_1 durch O entspricht, derart dass $pp_1 = aa_1$.

Ferner: Jedem Punkt P wird ein entsprechender Punkt P_1 zugewiesen, derart dass P_1 als Mittelpunkt von P und P', wo P' der zu P bei der Bewegung aa_1 entsprechende Punkt ist, bestimmt wird. Bei der so erklärten Transformation, wo jeder Geraden eine Gerade und jedem Punkt ein Punkt entsprechen wird, zeigt sich nun, das eine Gerade l und ein Punkt P in ihr, in eine Gerade l_1 und einen in dieser gelegenen Punkt P_1 übergehen werden. l_1 ist nämlich die feste Gerade bei der Bewegung $lmm_1 = laa_1$, und es folgt dann, dass P_1 in l_1 enthalten ist (43).

Der Punkt P_1 lässt sich aus P in folgender Weise ableiten: Man zieht eine Gerade $OP = p$, bestimmt die Gerade p_1 mittels der Gleichung $pp_1 = aa_1$; P_1 wird nun als Fusspunkt des Lotes von P auf p_1 bestimmt. Die Konstruktion setzt voraus, dass die Punkte O und P wenigstens eine Verbindungsgerade haben. Haben die Punkte O und P mehrere Verbindungsgeraden $p, q, r, \ldots.$, und die entsprechenden Linien bei der Halbdrehung mit $p_1, q_1, r_1, \ldots.$ bezeichnet werden, so müssen diese Linien alle den Punkt P_1 enthalten.

55. Zwei Halbdrehungen um denselben Punkt O sind miteinander vertauschbar. Dies folgt unmittelbar aus der Untersuchung in 46—48. Wir zeichnen hier die Figur auf (Fig. 6); aus

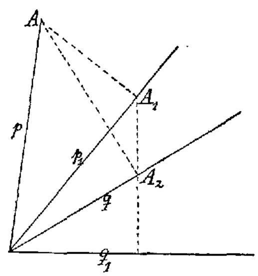

Fig. 6.

$$pp_1 = qq_1,$$

$$AA_1 = a_1 \perp p_1, \qquad AA_2 = a_2 \perp q,$$

folgt

$$A_1A_2q_1 = p_1a_1a_2qq_1 = p_1(a_1a_2p)p_1;$$

diese Bewegung ist eine involutorische Bewegung (weil a_1a_2p eine Spiegelung ist). Nach 26 müssen dann die von A_1 und A_2 auf q_1 gefällten Lote zusammenfallen.

56. Die inverse Transformation einer Halbdrehung ist nicht immer eindeutig, und es wird nicht immer möglich sein, die Transformation auf beliebige Punkte oder gerade Linien anzuwenden. Wenn die in Rede stehenden Transformationen aber eindeutig und möglich sind, wird die Reihenfolge von beliebigen direkten oder inversen Halbdrehungen um denselben Punkt willkürlich sein, natürlich

unter der Voraussetzung, dass die hierdurch entstehenden Transformationen der in Betracht kommenden Punkten oder geraden Linien immer möglich und eindeutig sind.

11. Die Fixpunkte einer Bewegung.

56. Eine Um-Bewegung ist entweder eine Spiegelung oder nicht. Im ersten Falle gibt es unendlich viele Fixpunkte, nämlich die Punkte der Spiegelungsachse. Im zweiten Falle gibt es keinen Fixpunkt; es gibt wohl eine feste Gerade, aber keinen festen Punkt.

57. Hat eine In-Bewegung zwei Fixpunkte A und B, so lässt sich folgendes aussagen. Zunächst muss der Mittelpunkt von A und B auch fest bleiben, und der Punkt A^B (und B^A) ebenfalls; auf dieser Weise findet man schon eine ganze Reihe von Fixpunkten. Wir legen nun durch A und B zwei Geraden, bezw. a und b, welche einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt C haben (a und b können z. B. senkrecht zueinander gewählt werden, es gibt aber auch andere Möglichkeiten). Der Punkt C wird bei unserer Bewegung notwendig fest bleiben. In der Tat weil A fest ist, lässt sich die vorgelegte Bewegung durch zwei Spiegelungen a und a_1 (durch A) ersetzen, ebenso durch zwei Spiegelungen b und b_1 (durch B). Aus $aa_1 = bb_1$, folgt aber

$$baa_1 = b_1,$$

und da b und a der Voraussetzung zufolge einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt C haben, muss also a_1 durch diesen Punkt gehen (ebenso natürlich auch b_1). Der Punkt wird somit fest. Gleichzeitig hat sich herausgestellt, dass unsere Bewegung durch zwei Spiegelungen a, a_1 dargestellt werden kann, deren Achsen die Punkte A und C, also mehrere Punkte gemein haben.

Wir können deshalb folgenden Satz aussprechen: Hat eine In-Bewegung zwei Fixpunkte (A, B), ist sie entweder die Identität, oder sie lässt sich durch zwei verschiedene Spiegelungen a, a_1 darstellen, deren Achsen unendlich viele Punkte gemein haben. Die gemeinsamen Punkte von a und a_1 sind alle Fixpunkte. Jede Gerade, welche einen Fixpunkt enthält, enthält unendlich viele Fixpunkte. Zwei Geraden, welche Fixpunkte enthalten, schneiden sich, wenn der Schnittpunkt eindeutig ist, in einem Fixpunkt.

58. Unter die Fixpunktmenge (A, B) verstehen wir nun alle Punkte, die notwendig fest bleiben bei jeder Bewegung, wo A und B fest bleiben.

Nach den eben erwähnten Eigenschaften leuchtet unmittelbar ein, dass die Fixpunktmenge eine Geometrie ausmachen, für welche unser ursprünglich aufgestelltes Axiomsystem gültig wird, wenn wir unter gerade Linie die Punkte der Menge verstehen, welche einer ursprünglichen geraden Linie angehören, und unter Bewegung eine beliebige Transformation der Menge (A, B) in sich, die durch eine ursprüngliche Bewegung erzeugt wird.

59. Es folgt nun auch der folgende Satz:

Wenn zwei Punkte A und B mehr als eine Verbindungsgerade aufweisen, so gibt es eine ganze Reihe von Punkten, welche allen Geraden durch A und B angehören. Diese Reihe von Punkten wird durch den Schnitt der Fixpunktmenge (A, B) mit einer beliebigen Geraden durch A und B erzeugt.

Ist g eine beliebige Gerade durch A und B, und C ein

Punkt der Menge (A, B) ausserhalb g, so wird jede Gerade h durch C, welche g eindeutig schneidet, im Schnittpunkt mit g einen Punkt der genannten Reihe erzeugen.

60. Von anderen aus unseren Untersuchungen sofort fliessenden Tatsachen sollen nur noch hervorgehoben werden:

Wenn die Punkte A und B mehr als eine Verbindungsgerade haben, und zwei Geraden a und b, welche durch A bezw. B hindurchgehen, einander eindeutig in C schneiden, so haben A und C (bezw. B und C) mehrere Verbindungsgeraden.

61. Wenn 3 Geraden a, b, c in Involution sind, und a und b einander eindeutig in C schneiden, so wird c notwendig durch C gehen. Wenn aber a und b zwei Punkte C und D gemein haben (also eine ganze Reihe von gemeinsamen Punkten haben) so lässt sich von c nur behaupten, dass sie Fixpunkte der Bewegung ab enthalten muss. Fällt man von C das Lot a_1 auf c (Schnittpunkt E), so lässt sich schreiben

$$ab = a_1 b_1,$$

wo b_1 eine Gerade durch C bedeutet.

Es wird nun

$$abc = a_1 b_1 c,$$

und weil $a_1 \perp c$, haben die Geraden a_1 und c einen eindeutigen Schnittpunkt E; b_1 muss dann durch E gehen, und E wird somit ein Fixpunkt der Bewegung $a_1 b_1$, d. h. der Bewegung ab.

62. Haben zwei Geraden p, q mehrere Punkte $(A, B, \ldots)$ gemein, so werden die Lote x, y, welche von einem beliebigen Punkte P aus auf p und q

gefällt werden, auch mehrere Punkte gemein haben.

Es ist nämlich

$$ABx = yyABx = y(yAB)x = yzx,$$

wo $z \perp q$. Da nun die Bewegung ABx involutorisch ist (eine Spiegelung), wird auch yzx involutorisch. Hätten also

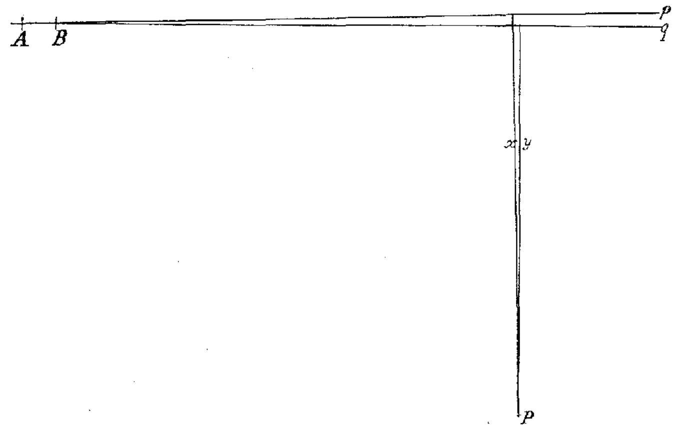

Fig. 7.

x und y nur den einzigen Punkt P gemein, müsste z durch P gehen, d. h. es gäbe zwei Lote y, z von P auf q, was unmöglich ist. Die beiden Geraden x, y müssen deshalb mehrere Punkte gemein haben.

In ähnlicher Weise zeigt man den folgenden Satz:

Haben zwei Geraden p, q zwei gemeinsame Lote r, s (also unendlich viele), so müssen die Lote x, y, welche von einem beliebigen Punkt P auf p und q gefällt werden, (entweder ganz zusammenfallen oder) unendlich viele Punkte gemein haben.

Es ist nämlich

$$rsx = yyrsx = y(yrs)x = yzx.$$

Schlusswort der ersten Mitteilung.

Die im vorhergehenden entwickelten allgemeinen Hilfsmittel werden nun zunächst für die Begründung der Geometrie in dem Falle, wo das Eindeutigkeitsaxiom erfüllt ist, d. h. wo zwei Punkte eine und nur eine Verbindungsgerade haben (oder etwa: höchstens eine Verbindungsgerade haben), anzuwenden sein. Es handelt sich hier von einer leichten Revision meiner Arbeit aus 1907 (Math. Ann. 64). Diese Revision ist aber sehr wichtig, und soll deshalb in ihren wesentlichen Einzelheiten in einer folgenden Mitteilung gegeben werden. Das wesentlich Neue wird das vollständige Unterdrücken der Axiome der Anordnung; aber auch andere Fragen kommen in Betracht.

Der nächste Schritt soll darauf hinausgehen, die Geometrie in dem Falle zu entwickeln, wo es sowohl Punktepaare AB mit einer eindeutig bestimmten Verbindungsgerade als auch Punktepaare AB mit mehreren Verbindungsgeraden vorkommen. Im ersten Falle wollen wir sagen, dass der Abstand AB gross ist, im zweiten Falle, dass der Abstand klein ist (oder, dass A und B »Nachbarpunkte« sind). Wir haben durch diese Namen schon angedeutet, in welche Richtung hin die Lösung sich gestalten wird. Jedem Punkt A wird ein Nachbargebiet A zugewiesen, welches aus allen Nachbarpunkten des Punktes A besteht, und jeder Geraden g wird ein Nachbargebiet g zugewiesen, welches aus allen Nachbarpunkten der Punkte von g bestehen. Bezeichnet man nun A als »Grosspunkt«, g als »Grossgerade«, wird man eine »Grossgeometrie« mit diesen Elementen entwickeln können, wo genau dasselbe Axiomsystem, wie das für unsere ursprüngliche Geometrie aufgestellte, erhalten werden kann. Zudem ergibt sich, dass für diese »Grossgeometrie« das Eindeutigkeitsaxiom gültig wird. Die Grossgeometrie wird also unmittelbar durch die früheren Untersuchungen zugänglich. Aus jedem Satz der gewöhnlichen projektiven Geometrie (und projektiven Trigonometrie) lässt sich sofort einen Satz unserer allgemeinen Geometrie ableiten, nämlich einen Satz von »Grosspunkten« und »Grosslinien«. Der letzte Teil unserer Untersuchungen wird nun darin bestehen, die Geometrie innerhalb des »Grosspunktes« und innerhalb der »Grosslinie« zu entwickeln. Hiervon soll nur an dieser Stelle gesagt werden, dass die Untersuchungen in mancher Hinsicht an infinitesimalgeometrische Untersuchungen erinnern werden, obgleich sie weit allgemeiner sind als die gewöhnlich bekannte Infinitesimalgeometrie, die, wie in der Einleitung angedeutet, als Anwendungen in unsere allgemeine Geometrie eingehen können.

Der Fall, wo alle Punktepaare unserer Geometrie mehrdeutige Verbindungsgeraden haben, wird durch die letztgenannten Untersuchungen auch erledigt werden.

Forelagt paa Mødet den 19. Oktober 1928.
Færdig fra Trykkeriet den 8. Maj 1929.