Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VII,** 16.

OM
V. STAUDT'S DEFINITIONER

AF

C. JUEL

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1927

Det imaginære Punkt paa en reel ret Linie betyder efter v. Staudt som bekendt en med Løb forsynet — eller som man kortere kan sige — en orienteret Involution af Punktpar, der ikke indeholder noget reelt Dobbeltpunkt. Man har senere opstillet andre Definitioner. Saaledes har F. Klein foreslaaet en vilkaarlig cyklisk Projektivitet[1], og senere har Amadeo[2] foreslaaet at benytte en vilkaarlig Projektivitet uden reelle Dobbelpunkter, idet denne tages sammen med alle sine Potenser. Ved de følgende Bemærkninger ønsker jeg at gøre klart, hvad der er det fælles for disse forskellige Fremstillinger, der jo endda hver for sig kan varieres paa forskellige Maader.

Ser man nu paa, hvorledes dette bruges, lægger man Mærke til, at det ikke er de uendelig mange Led i Definitionen, der benyttes, men at man kun har Brug for 3 Punkter. Ved v. Staudts Definition vælger Involutionen i Reglen bestemt ved to Punktpar, der skiller hinanden harmonisk; men ved 3 Punkter bestemmes jo det fjerde harmoniske Punkt — svarende til en bestemt Anordning af Punkterne.

Det fælles for alle Fremstillingsmaaderne er nu ogsaa det, at der paa den reelle rette Linie findes en Samling af reelle Trepunktsgrupper — vi kan kalde dem Triader, der tilfredsstiller følgende Betingelser:

[1] Mathem. Annalen Bd. 22 (p. 242) 1882.

[2] I gennemført Form i »Geometria projettiva«, (1905) p. 164 og ff.

1) Der findes en Triade udgaaende fra ethvert reelt Punkt af Linien; er A, B, C en Triade — hvor Punkterne følger paa hinanden i en bestemt Omløbsretning paa Linien — kan A altsaa være et vilkaarligt af Liniens Punkter.
2) To Punkter af en og samme Triade maa ikke falde sammen.
3) Enhver projektiv Transformation, der fører én Triade af Samlingen over i en anden, skal føre hele Samlingen over i sig selv, og alle disse Transformationer skal være ombyttelige.

Vi vil nu antage, at Punkterne i Stedet for at ligge paa en ret Linie ligger paa et Keglesnit k. Projektivitet paa et Keglesnit er bestemt ved sin Projektivitetsakse p og ét Par tilsvarende Punkter, idet Krydslinier skal skære hinanden paa p. Lad nu Projektivitetsaksen for en projektiv Transformation T_1, der fører en Triade ABC over i en anden $A_1B_1C_1$ være p, og lad den Transformation T_2, der fører ABC over i en ny Triade $A_2B_2C_2$ af Rækken have Projektivitetsaksen p_2: Vi skal nu udtrykke den ovenfor nævnte Betingelse, at de to Transformationer skal være ombyttelige. (Fig. 1). Det Punkt M_1 der ved T_1 svarer til M, bestemmes ved, at M_1A og MA_1 skærer hinanden i et Punkt R af p_1; det Punkt M_{12}, der ved T_2 svarer til M_1 derved at $M_{12}A$ og A_2M_1 skærer hinanden paa p_2. Ifald man ombytter T_1 og T_2, vil der til M svare et Punkt M_2 bestemt ved, at M_2A og MA_2 skærer hinanden i et Punkt T af p_2. Skal nu M_2 ved T_1 føres over i M_{12}, maa Linierne $M_{12}A$ og M_2A_1 skære hinanden i et Punkt S af p_1. Men Punkterne $M_1A\,M_2A_1\,MA_2$ danner en Paskals Sekskant, saa at R, S og T ligger ud i ret Linie. Heraf følger, idet M er et vilkaarligt Punkt paa Keglesnittet, at p_1 og p_2 maa falde sammen. Vi ser hermed, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at to projektive Transformationer paa et Keglesnit er ombyttelige, er at de har fælles Projektivitetsakse.

Et Bundt Triader, der kan tjene til Bestemmelse af et imaginært Punkt, er altsaa bestemt ved to Triader ABC og $A_1B_1C_1$, idet disse bestemmer en Projektivitet, der indeholder Punktparrene AA_1, BB_1, CC_1. Ligger Punkterne paa et Keglesnit, er herved fastlagt en Projektivitetsakse, der ogsaa skal

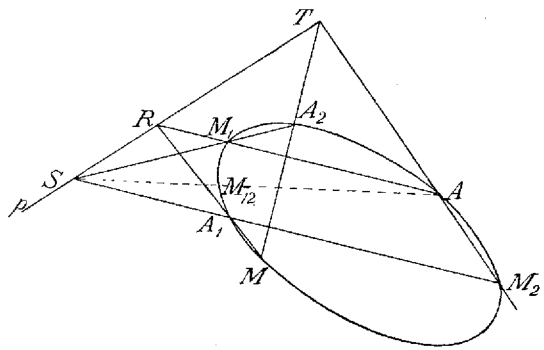

Fig. 1.

være Projektivitetsakse for alle de projektive Transformationer, der fører Bundtet over i sig selv.

Man man naturligvis i en bestemt Undersøgelse holde sig til en bestemt Type af Triadebundtet. Man maa én Gang for alle vælge et Triadebundt, lad os sige paa et fast Keglesnit K_0 og vedtage, at alle andre i den foreliggende Undersøgelse benyttede Triadebundter skal dannes af den valgte ved en projektiv Transformation. Har man gjort det, er ethvert Triadebundt d. v. s. hvert imaginært Punkt paa en reel ret Linie — og ligeledes hver imaginær ret Linie gennem et reelt Punkt — bestemt ved en enkelt Triade.

Vi vil nu se, hvorledes dette omfatter de nævnte Fremstillinger af et imaginært Punkt.

Det er en elliptisk Involution, der oprindelig af v. Staudt benyttes til Definition, men det, som stadig kommer til Anvendelse, er som ovenfor nævnt denne Involutions harmoniske Bestemmelse ved to Punktpar AA_1, BB_1. Som Type paa denne Fremstillingsmaade kan man simplest tage en Cirkel k_0, hvorpaa man vælger A og A_1 som et Par diametralt modstaaende Punkter og B som et Endepunkt for den paa AA^1 vinkelrette Diameter; tillige vælges den uendelig fjerne Linie som Projektivitetsakse for alle de projektive Transformationer, der fører Triaderne ABA^1 over i sig selv. Alle v. Staudt'ske harmoniske Fremstillinger af et imaginært Element er altsaa projektivt identiske med denne.

Ved Kleins Fremstilling faar man den typiske Form ved at dele en Cirkel i n ligestore Dele; hvis nu A, B og C er 3 paa hinanden følgende Delingspunkter, og man fastholder den uendelig fjerne rette Linie som Projektivitetsakse som før, vil Triaden ABC bestemme Gruppen. Punkterne behøver naturligvis ikke at følge paa hinanden, man kan f. Eks. vælge det 2det, 4de og 7de Delingspunkt. Simplest er det at benytte $n = 3$.

Vælger man 3 vilkaarlige Punkter paa Cirklen A, B og C, men fastholder den uendelig fjerne rette Linie som Projektivitetsakse, har man Typen for Amadeos Fremstilling i Triaderne A_1B_1C. Man ser, at den sidste Metode er den almindeligste, man kan faa. At Amadeo ikke nøjes med Triaden ABC, men medtager i Bestemmelsen alle de Punkter, der udledes af A ved Iteration af den Transformation, der fører ABC over BCD, har en særlig Grund. Antager man nemlig, at en Projektivitet har reelle Dobbeltpunkter, vil man ved Iteration af Transformationen ud fra et vilkaarligt Punkt M faa Punkter, der konvergerer enten mod det ene eller mod andet af Dobbelpunkterne alt efter som man itererer den direkte eller den inverse Transformation. Man altsaa sige, at et reelt og et imaginært Dobbelpunkt begge kan fremstilles paa samme Maade, hvad der er ganske smukt. Efter v. Staudt's Definition af det imaginære Punkt ved en Involution er Forbindelsen mellem et reelt og et imaginært Punkt, om man vil, noget abrupt.

Vi vil nu gaa over til i Korthed at se paa, hvorledes Theorien om den projektive Transformation har udviklet sig efter v. Staudt og ud fra v. Staudt's Principer.

Her maa da først nævnes en særlig Udvikling, som skyldes den italienske Mathematiker Pieri[1]. Den Fremstilling, Pieri giver, er rent formel logisk — delvis skrevet med logiske Tegnsprog — saa at det kun er Navnene, der gør det til Geometri. En saadan formel Metode er naturligvis fuldt berettiget og er i dette Tilfælde særlig interessant ved sin fuldstændige Gennemførelse[2]. Ved det store Antal af Postulater bortskæres aksiomatisk de fleste af de Spørgsmaal, man ellers naturligt vil stille i Anledning af v. Staudts Theori, saa vi i denne Forbindelse ikke skal gaa ind herpaa.

Jeg maa ogsaa nævne en anden begyndende Udviklingsrække, som endnu ikke har sat sine Spor i Lærebøgerne, men utvivlsomt ved Lejlighed vil gøre det. Her gaar man ikke direkte ud fra v. Staudt, men fra Møbius. Denne definerer den projektive Sammenhæng i Planen — for at holde os dertil, — som en saadan, hvor Punkt svarer til Punkt, og til Punkter ud i ret Linie atter svarer Punkter ud i ret Linie: Hermed føres man ad naturlig Vej til Defini-

[1] Amadeo l. c.

[2] Nuovi principii di geometria projektiva complessa, Accademia di Torino 1905 p. 189—233.

tion af Projektivitet paa en ret Linie ved harmoniske Punktpar. De Beviser, som Møbius giver, mangler ikke meget i at være fuldt tilfredsstillende, men en Fremstilling ud fra dette Grundlag er fuldt gennemført af Zindler, Wiener Ber. 98 (1899).

Men som den vigtigste af alle Nyskabninger i ren v. Staudt'sk Forstand maa nævnes M. Pasch's: »Vorlesungen über neuere Geometrie«. (1882). I denne opbygges Projektivgeometrien paa Forudsætninger om Figurer beliggende i et forud givet endeligt Rum; indføres dernæst metriske — særlig Kongruen-axiomer, sammen med Archimedes Postulat, kan Projektivgeometriens Hovedsætning bevises uden yderligere Kontinuitetsforudsætninger.

Vi vil nu gaa over til den meget mindre Opgave, at betragte selve den Definition, v. Staudt giver af Projektivitet; herved vil vi indtil videre holde os til Punkter paa en reel ret Linie. Den lyder som bekendt, at to Punktrækker er projektive, naar der til 4 harmoniske Punkter i den ene Figur svarer 4 harmoniske Punkter i den anden. Det er nu ikke ganske klart, hvorledes dette skal opfattes. Det er sikkert, at det i Definitionen ligger, at der til hvert Punkt i den ene Figur — lad os sige den første — svarer et Punkt i den anden, men der rejser sig, som det første Spørgsmaal:

Er det nødvendigt allerede i Definitionen udtrykkelig at postulere, at der ogsaa til ethvert Punkt i den anden Figur skal svare et Punkt i den første?

Hertil kommer saa et andet Spørgsmaal:

Er det nødvendigt i Definitionen at medoptage, at Afhængigheden skal være kontinuert?

I det Hele er v. Staudts Stilling til Kontinuitet uklar. Hele hans »Geometrie der Lage« viser, at han i hvert Fald vil have det mindst mulige at gøre med Kontinuitet og Grænsebestemmelse. Overalt senere i Bogen bliver specielle Tilfælde ikke betragtede som Grænsetilfælde, men behandlede særskilt, medmindre da Beviset for det specielle Tilfælde kan føres paa selvsamme Maade som i det almindelige. Men paa den anden Side kan han ligeledes efter Bogens Plan ikke slippe for Kontinuitet. Ganske vist kan han paa flere Steder slippe uden om ved at erstatte et Kontinuitets- med et Skæringspostulat. Naar han i »Beiträge« Nr. 12 ved nogle faa Bemærkninger vil bevise en saa dybtliggende Sætning som den, at to plane Kurver af ulige Orden liggende i samme Plan altid mindst maa have ét Punkt fælles, betyder dette i Nutidens Øjne kun en tydeliggørende Forklaring af et Postulat. Men netop ved Beviset for Projektivgeometriens Fundamentalsætning slaar dette ikke til, og her findes da et af de meget faa Steder i Bogen, hvor Ordet »stetig« forekommer. Han vil bevise, at to projektive Punktrækker, der har 3 tilsvarende Punkter fælles, maa være identiske. Hans bekendte Bevis derfor er følgende; naar ikke ethvert Punkt falder sammen med sit tilsvarende, saa lad A og B være to paa hinanden følgende af dem, der gør det. Dette indeholder allerede en Modsigelse, da et fjerde harmonisk Punkt til et af 3 givne Sammenfaldspunkter med Hensyn til A og B ogsaa maatte svare til sig selv og tillige ligge mellem A og B. Dette Bevis er allerede af den Grund ikke tilfredsstillende, at man maa nære Tvivl om Berettigelsen til at tale om paa hinanden følgende Punkter i en ubegrænset Samling.

Et tredie Spørgsmaal, der kan rejses, er det: Er det nødvendigt at forudsætte, at der til enhver harmonisk Firpunktsgruppe i den ene Figur skal svare en saadan i den anden Figur?

Det har nu vist sig, at samtlige tre Spørgsmaal i det væsentlige skal besvares benægtende, idet man dog herved gaar ud fra, at den reelle Plan repræsenterer en afsluttet Talplan, hvor hvert Punkt bestemmes ved to sædvanlige reelle Tal-, og omvendt.

Det var det andet af de ovennævnte Spørgsmaal, der først blev taget op til Behandling af F. Klein i 1873[1].

Han var først tilbøjelig til at mene, at Fordringen om Kontinuitet maatte føjes til v. Staudts Definition, men noget efter klargjorde baade han og andre, at dette ikke var nødvendigt. Lad der nemlig til tre Punkter A, B, C i den ene Punktrække L svare tre Punkter A_1, B_1, C_1 i den anden L_1. Man kan da ved fortsat Konstruktion af et fjerde harmonisk Punkt faa f. Eks. det Liniestykke AB, der ikke indeholder C, saaledes fyldt med ubegrænset mange Punkter, at ethvert Punkt af Liniestykket enten falder sammen med et af Punkterne i Samlingen M eller med et Fortætningspunkt for disse. Dette ser man hurtigst ved at tillægge A, B og C Koordinaterne 0,1 og ∞, hvorved Koordinaterne til Samlingens Punkter bliver de Tal, der kan skrives i et Totalsystem. Punkterne paa det projektive Liniestykke ABC udledes af de nævnte.

I geometrisk Form er det vist af Zeuthen og Lüroth, at Samlingen er overalt tæt[2].

Behandler man de tilsvarende projektive Liniestykker af L_1 paa samme Maade, ser man, at L og L_1 dækkes af en overalt tæt Mængde af indbyrdes tilsvarende Punkter i Overensstemmelse med v. Staudt's Definition. Det eneste, der bliver Spørgsmaal om, er om ogsaa tilsvarende Fortætningspunkter svarer til hinanden i den projektive For-

[1] Math. Ann. 6. (1873). Bd. 7. (1874) p. 531.
[2] Math. Ann. 7. (1874). p. 535.; Bd. 17. (1880) p. 57.

bindelse. Men Rækkefølgen af tilsvarende Punkter i de to nævnte Samlinger er den samme ifølge Konstruktionen. Det kommer da kun an paa, om Rækkefølgen af alle tilsvarende Punkter maa blive uforandret ved at gaa over fra L til L_1; man skal med andre Ord vise, at naar 4 vilkaarlige Punkter A, B, C og D af L følger paa hinanden i en bestemt Orden, da de tilsvarende Punkter $A_1B_1C_1D_1$ ogsaa maa følge paa hinanden i den nedskrevne Orden. Men dette følger af v. Staudt's Definition. Har man nemlig to Punktpar AB og CD, kan man ved Kontinuitetsbetragtninger bestemme — eller ikke bestemme — et Par Punkter XY, der skiller baade AB og CD harmonisk, eftersom de givne Punktpar ikke skilles eller skiller hinanden. Da disse Bestemmelser gaar uforandret over, følger Rigtigheden af Paastanden.

Men herved bliver ogsaa det første af de 3 opstillede Spørgsmaal besvaret. Ethvert Punkt af Linien L_1 er jo enten et Punkt af den ovenfor nævnte ud fra tre Punkter A, B og C konstruerede Samling M eller ogsaa et Fortætningspunkt i denne. Det har altsaa et bestemt tilsvarende Punkt i L:

Den v. Staudt'ske Definition i sin oprindelige Udtalelsesform har altsaa med Glans bevaret sin Stilling.

Der er dog ét Punkt, som der i det foregaaende ikke er taget Hensyn til, og som særlig er fremhævet af Pieri, nemlig den Mulighed, at det kunne være opgivet, at der til to forskellige Punkter A og B af L svarede et og samme Punkt $A_1 = B_1$ af L_1. Her kommer det an paa, hvad man i Definitionen vil forstaa ved 4 harmoniske Punkter, naar lad os sige to af disse Punkter falder sammen. Man plejer da i Reglen at sige, at i saa Fald maa et tredie Punkt falde sammen med de to første, medens det fjerde bliver fuldstændigt ubestemt, og der kan ikke være noget i Vejen for rent definitionsmæssig at slaa dette fast. Gør man dette, kan v. Staudts Definition ogsaa i saa Fald bibeholdes, (hvorved man naturligvis bortkaster den singulære Projektivitet). Lad nemlig som ovenfor nævnt to adskilte Punkter A og B af L svarer til samme Punkt $A_1 = B_1$ af L_1. Til et tredie Punkt C af L skal svare et Punkt af L_1, der enten kan være forskelligt fra A_1, eller falde sammen med A_1. I det første Tilfælde vil der til det Punkt C^1 af L, der er harmonisk skilt fra C ved A og B svare Punktet A_1. Til Punktet C vil der da efter den formelt fastholdt Definition svare et vilkaarligt Punkt af L d. v. s. Afhængigheden $L—L_1$ er ikke entydig. Det samme ses endnu hurtigere, naar C_1 falder sammen med A_1; v. Staudt's Definition udelukker altsaa Muligheden af, at der til to adskilte Punkter af L kan svare et og samme Punkt af L_1. Noget andet er det, naar man slet ikke vil tale om, at 4 Punkter er harmoniske i det Tilfælde, at nogle af Punkterne falder sammen; i saa Fald maa den omtalte Fordring tilføjes Definitionen. Vi kan f. Eks. holde os til den første Vedtægt.

Paa dette Sted kan vi benytte Lejligheden til at gøre opmærksom paa, at det i det Hele er karakteristisk for v. Staudt, at han kun interesserer sig for de tilstrækkelige Definitioner; medens han ikke lægger Vægt paa at give de nødvendige ɔ: dem, der forlanger de færreste Betingelser. Dette medfører, da Definitionerne derved almindeligvis indeholder overflødige Led, at der bagefter maa føres et Eksistensbevis. Et saadant føres i det her behandlede Tilfælde let ved paa sædvanlig Maade at reducere den projektive Transformation til paa hinanden følgende perspektiviske.

Ad analytisk Vej har Darboux[1] i en overordentlig ele-

[1] Sur le théorène fondamental de la geometric projective. Malh Ann. Bd. 17 p. 55.

gant lille Artikel vist det samme som ovenfor er udviklet — forøvrigt i Forbindelse med en geometrisk Udvikling, der væsenlig falder sammen med den ovenstaaende. Men Darboux har i Virkeligheden ved sin analytiske Metode vist mere, end han selv siger, idet han nemlig ikke benytter, at der til enhver Gruppe af 4 harmoniske Punkter i den ene Figur skal svare 4 harmoniske Punkter i den anden.

I Overensstemmelse hermed kan man give følgende Definition af projektive Punktrækker, der er fuldt tilstrækkelig.

To Punktrækker er projektive naar følgende Betingelser er tilfredsstillede:

1) Til hvert Punkt i den ene Række L skal svare et Punkt i den anden L_1.

2) Der findes to Par tilsvarende Punkter A og A_1, B og B_1 saaledes, at der til 4 harmoniske Punkter, der indeholder mindst et af Punkterne A og B_1 atter svarer 4 harmoniske Punkter[1].

Pieri giver herfor lc. et Bevis knyttet til hans ovenfor nævnte logiske Formuleringer[1]. I det følgende benytter jeg en lidt anden Formulering. Herved vil vi ved lovlige Konstruktioner forstaa saadanne Konstruktioner af fire harmoniske Punkter, hvori mindst et af de fremhævede Punkter A og B indgaar. Man kan nu først ved lovlige Konstruktioner bestemme den ovenfor nævnte Punktsamling M, lad os sige paa det projektive Liniestykke ACB. Man kan da først vise, at der til ethvert Punkt X af dette Liniestykke maa svare et Punkt, der ligger paa Liniestykket $A_1C_1B_1$. Der findes nemlig efter Valget af X et Punktpar EF, der

[1] Hvis man ikke vil have harmoniske Grupper med sammenfaldende Elementer, maa den ovenfor Side 12 nævnte Betingelse tilføjes.

skiller baade AB og CX harmonisk. Der findes da ogsaa et Punktpar, der skiller A_1B_1 og C_1X_1 harmonisk d. v. s. X_1 ligger paa Stykket $A_1C_1B_1$. Det kommer dernæst kun an paa at vise, naar to Punkter X og Y paa Stykket ACB ligger saaledes, at $AXYB$ danner en Følge, da ogsaa de tilsvarende Punkter $A_1X_1Y_1B_1$ vil danne en Følge Fig. 2.

Lad nu X og Z være to Punkter paa Stykket ACB valgte saaledes, at $AXZB$ danner en Følge. Lad U være et Punkt, der er harmonisk skilt fra B ved XZ, og lad Y vare et Punkt, der er harmonisk skilt fra A ved B og U. Da nu Punktparrene XZ og AY begge er harmonisk skilte ved BU, vil de selv ikke skille hinanden d. v. s. Y maa

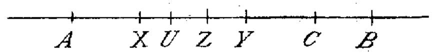

Fig. 2.

ligge udenfor Stykket XUZ. Men Y maa tillige ligge udenfor det Stykke BU, der indeholder A, og da Punkterne AXU følger paa hinanden i Ordenen ACB, maa Y ogsaa ligge udenfor Stykket AXU. Y maa altsaa ligge paa det projektive Stykke ZB der ikke indeholder X, saa at $AXYB$ danner en Følge. Men de nævnte lovlige Konstruktioner viser da ogsaa, at naar X og Y ligger saaledes, at $AXYB$ danner en Følge, man da paa Stykket ACB kan finde Punkter U og Z, som paa dèn nævnte Maade fører fra X til Y.

Da lovlige Konstruktioner gaar uforandret over fra L til L_1, er Paastanden nu godtgjort for Punkter beliggende paa det projektive Liniestykke ACB, men dette er aabenbart ogsaa tilstrækkeligt.

Adskilligt kortere og overskueligere er ganske vist det analytiske Bevis Darboux giver.

Lad os antage, at der paa en ret Linie findes en saadan Afhængighed, at der til ethvert Punkt x — ɔ: et Punkt med Abscissen x — findes et èntydigt bestemt Punkt $f(x)$. Idet man nu antager, at Punkterne $0_1\ 1_1\ \infty$ svarer til sig selv, og at der til 4 harmoniske Punkter atter svarer 4 harmoniske, kommer det an paa at vise, at man maa have $f(x) = x$ for enhver (reel) Værdi af x.

Men af Forudsætninger følger, at

$$x_1 + x_2 = 2x_3$$

skal medføre

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right). \tag{1}$$

Denne Ligning giver for $x_2 = 0$

$$f(x_1) = 2f\left(\frac{x_1}{2}\right),$$

saa at (1) kan skrives

$$f(x_1) + f(x_1) = f(x_2 + x_2).$$

Af denne kan man endnu ikke finde $f(x)$, hvilket derimod — som bekendt fra Analysen — er Tilfældet, naar man ved, at $f(x)$ er en stadig voksende Funktion.

Men man kan ogsaa benytte, at $x_1\, x_2 = x_3{}^2$ maa medføre

$$f(x_1)\, f(x_2) = (f(x_3))^2.$$

Sætter man heri $x_2 = 1$, bliver x_1 positiv, og man faar

$$f(x_1) = \left(f(\sqrt{x_1})\right)^2$$

ɔ: $f(x_1)$ er ogsaa positiv naar x_1 er positiv.

Af $f(x + b) = f(x) + f(b)$ ser man saa, at $f(x)$ vokser med x.

Det er let at se, at man ikke herved har benyttet sig af 4 vilkaarlige harmoniske Punkter.

Ved det foregaaende har vi alene holdt os til reelle Punkter paa en reel ret Linie, det eneste, de nævnte Foff (undtagen Pieri) har beskæftiget sig med. Det er heller ikke meget, man behøver at tilføje for at medtage imaginære Elementer.

Vi vil først tænke paa den i Begyndelsen af dette Arbejde nævnte Bestemmelse af det imaginære Punkt ved en bestemt Type af Projektiviteter. Herved bliver ogsaa den imaginære Linie liggende i en reel Plan og den imaginære Plan bestemt. En imaginær Linie af anden Art bestemmes dernæst som Samlingen af de fælles Punkter for to imaginære Planer, hvis reelle Akser ikke skærer hinanden. For nu at komme videre, maa man vise, at Bærerne for Liniens Punkter danner en lineær Kongruens. Det sker hos v. Staudt ved i Overensstemmelse med Chasles at definere den lineære Kongruens som Samlingen af alle Involutionsakserne for de Punktpar, hvori en Involution af Frembringerpar paa en Hyperboloide skærer en vilkaarlig Plan. Man skal her blot ombytte de involutoriske Frembringerpar med Par af tilsvarende Frembringere i en Projektivitet. Dette maa imidlertid give samme Samling som oprindelig, thi enhver Projektivitet bestemmer jo ved sin Projektivitetsakse tillige en Involution med den sidstnævnte Linie til Involutionsakse; tillige bemærkes, at Typen bliver uforandret ved at gaa over fra et plant Snit til et andet.

Vi vil nu gaa over til at se paa den Definition, v. Staudt giver af Projektivitet, naar imaginære Punkter skal medtages. I det Øjemed indfører v. Staudt den Undergruppe k af en Linies Punkter, som han kalder Kæde; i algebraisk Tydning er en Kæde Samlingen af de Punkter, hvor alle de af 4 Punkter dannede Dobbeltforhold er reelle. Man kan vise, at ethvert Punkt i Linien udenfor en Kæde kan fremstilles ved en orienteret Involution af Punktpar paa k — i Overensstemmelse med, at ethvert imaginært Punkt paa en reel ret Linie kan fremstilles ved en reel Involution af Punktpar paa Linien. Naar altsaa A, B og C er tre Punkter af en Kæde k, D et Punkt udenfor denne, kan D fremstilles ved en orienteret Involution af Punktpar paa k. Naar denne Involutions Løb falder sammen med Løbet ABC, kan man sige, at Tetraden (Wurf) er positiv — ellers negativ. Naar D ligger i k, kaldes Tetraden neutral. Man kan nu — ikke efter v. Staudt's Ordlyd — men fuldstændig efter hans Mening definere:

To Punktrækker, hvor Punkt svarer til Punkt, er projektive, naar tilsvarende Tetrader enten begge er neutrale eller begge har det samme Fortegn.

Her ser man nu først — idet man jo kan holde sig til en enkelt Kæde ligesom før, at Afhængigheden maa være kontinuert og entydig i begge Retninger, selv om dette ikke udtrykkelig fremhæves i Definitionen. Det er tillige tydeligt, at Definitionen forlanger alt for meget. For ikke at blive for vidtløftig skal jeg nøjes med følgende.

Det er omtrent, men ikke helt tilstrækkeligt at forlange, at der til enhver neutral Tetrade atter skal svare en neutral, d.v.s. at der til enhver Kæde atter skal svare en Kæde. Det maa endnu tilføjes, at et Par af tilsvarende ikke neutrale Tetrader skal have samme Fortegn[1].

Men det er endnu for meget at forlange, at enhver Kæde skal svare til en Kæde. Man kan holde sig til følgende Formulering i denne Form:

To retliniede Punktrækker, hvor der til et

[1] Dette er udtrykkelig fremhævet i min Disputats fra 1885, S. 13: »Bidrag til den imaginære Linies og den imaginære Plans Geometri«.

Punkt i den ene Figur svarer et Punkt i den anden, er projektive, naar der til enhver Kæde, der gaar gennem et Punkt A svarer en Kæde gennem et tilsvarende Punkt A_1, til en enkelt Kæde, der ikke indeholder A, svarer en Kæde der ikke indeholder A_1, og man endvidere om en eller anden ikke neutral Tetrade ved, at den har samme Fortegn som sin tilsvarende.

Man ser dette lettest ved at betragte Skæringspunkterne mellem en reel fast Plan π og Bærerne for Punkter af Kæder af en i en imaginær Plan liggende imaginær ret Linie L. Bærerne er Frembringere i en Hyperboloide, og disse skærer π i Keglesnit, der alle gaar gennem de to imaginære Punkter, hvori π skærer L og den konjugest imaginære Linie til L. Ved en reel Homografi kan man nu transformere de to faste imaginære Punkter over i Cirkelpunkterne, og man har da følgende Sætning at vise:

Naar der i en entydig Afhængighed mellem en reel Plans reelle Punkter til enhver Cirkel gennem et Punkt A svarer en Cirkel gennem et tilsvarende Punkt A_1, og desuden til en eller anden Cirkel, der ikke gaar gennem A, svarer en Cirkel, der ikke gaar gennem A_1, saa vil der til enhver Cirkel i den ene Figur svare en Cirkel i den anden. (Entydigheden forlanges kun den ene Vej). Rigtigheden heraf ser man hurtigt ved at invertere den ene Figur ud fra A, den anden ud fra A_1. Dermed dannes to nye Figurer, der maa være projektive, thi Punkt svarer til Punkt, og ret Linie til ret Linie; specielt ser man, at den uendelig fjerne rette Linie svarer til sig selv. Men da maa ifølge den sidstnævnte af Forudsætningerne Planens Cirkelpunktpar gaa over i sig selv og altsaa hver Cirkel svare til Cirkel. Denne Egenskab gaar ved Inversionerne over til de oprindelige Figurer.

Man kan naturligvis ogsaa definere Projektivitet mellem rette Liniers reelle og imaginære Punkter formelt paa andre Maader. Da fire harmoniske Punkter (med Dobbeltforholdet -1) maa ligge i samme Kæde, vil de Punkter, man ved fortsat Konstruktion af det fjerde harmoniske Punkt ud fra tre Punkter $A_1 B_1 C$, lægge en overalt tæt Punktmængde i Kæden (ABC). I Henhold til det tidligere kan man derfor ogsaa definere:

To Punktrækker er projektive, naar der til 4 harmoniske Punkter attersvarer fire harmoniske Punkter og man ved, at der findes 2 tilsvarende ikke neutrale Tetrader, der har samme Fortegn.

Man kan næsten undre sig over, at v. Staudt ikke har benyttet sig af denne Definition, der i saa høj Grad slutter sig til hans Definition af reelle projektive Punktrækker. Og dog er det fuldstændig forstaaeligt, thi v. Staudt foretrækker overalt tilstrækkelige Definitioner der tillige er de, der giver det korteste Udtryk.

Forelagt paa Mødet den 8. April 1927.
Færdig fra Trykkeriet den 30. Juni 1927.