Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser **VII,** 10.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS CYLINDRIQUES ET SUR CERTAINES FONCTIONS ANALOGUES

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1926

PREMIERE PARTIE

La fonction de Lommel.

I. Sur l'opération différentielle $R(x, y)$.

Dans ce qui suit, nous avons à étudier certaines équations différentielles linéaires et homogènes de la forme

$$(1)\quad P(x,y) \equiv x^n p_0(x) y^{(n)} + x^{n-1} p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0,$$

où les coefficients $p_s(x)$ sont holomorphes aux environs de l'origine, de sorte qu'il existe des séries de puissances de la forme

$$(2)\quad p_s(x) = p_{s,0} + p_{s,1} x + p_{s,2} x^2 + \ldots;\quad s = 0, 1, 2, \ldots n,$$

séries qui sont toutes convergentes, pourvu que $|x| < r$.

De plus, nous supposons

$$(3)\qquad p_0(0) = p_{0,0} \neq 0.$$

Quant à l'équation (1), nous cherchons comme ordinairement une intégrale de la forme

$$(4)\qquad y = c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + c_{k+2} x^{k+2} + \ldots$$

A cet effet, posons

$$(5)\quad A_s(k) = p_{0,s}\,\omega_n(k) + p_{1,s}\,\omega_{n-1}(k) + \ldots p_{n,s}\,\omega_0(k),$$

où les $\omega_m(k)$ désignent les factorielles ordinaires, savoir

$$\omega_0(k) = 1,\quad \omega_m(k) = k(k-1)\ldots(k-m+1).$$

Dans ce qui suit, nous désignons comme fonction caractéristique de l'équation (1) le polynome $A_0(k)$, et l'exposant k est à déterminer comme racine de l'équation algébrique du n-ième degré

$$A_0(k) = 0\,, \tag{6}$$

équation que nous désignons comme équation caractéristique de l'équation différentielle (1).

Quant aux coefficients c_{k+s} de la série (4), ils se déterminent, pour $s > 0$, à l'aide des formules récursives.

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=s} A_\mu(k+s-\mu)\, c_{k+s-\mu} = 0. \tag{7}$$

Nous savons qu'il existe toujours au moins une racine k de l'équation (6), qui permet de déterminer tous les coefficients c_{k+s}, à l'aide de c_k qui est arbitraire. De plus, la série de puissances (4), ainsi déterminée, a le même rayon de convergence r que l'ensemble des séries (2).

Cela posé, la méthode ordinaire conduira à un système d'intégrales indépendantes

$$y_1\, y_2\, y_3 \cdots y_n \tag{8}$$

de l'équation (1).

Désignons maintenant par

$$\varrho_1\, \varrho_2 \cdots \varrho_s \tag{9}$$

s paramètres quelconques, puis posons

$$\begin{aligned}
Q_1(x,y) &\equiv x\, D_x P(x,y) - \varrho_1 P(x,y) \\
Q_2(x,y) &\equiv x\, D_x Q_1(x,y) - \varrho_2 Q_1(x,y) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_s(x,y) &\equiv x\, D_x Q_{s-1}(x,y) - \varrho_s Q_{s-1}(x,y)\,,
\end{aligned}$$

je dis que $Q_s(x,y)$ est symétrique par rapport aux s paramètres ϱ_μ.

En effet, un calcul direct donnera

$$Q_2(x,y) \equiv x^2 D_x^2 P(x,y) - (\varrho_1 + \varrho_2 - 1)\, x D_x P(x,y) + \varrho_1 \varrho_2 P(x,y),$$

et $Q_s(x,y)$ est à former de $Q_{s-2}(x,y)$ par le même procédé qui conduira de $P(x,y)$ à $Q_2(x,y)$.

Posons pour abréger

$$R_m(x,y) = x y' - \varrho_m y\,, \tag{10}$$

puis posons ensuite

$$Q_s(x,y) \equiv P R_1 R_2 \ldots R_s(x,y) \tag{11}$$

les facteurs symboliques

$$R_1 R_2 \ldots R_s$$

sont permutables.

Soit maintenant

$$\eta_\mu = c_{\mu,0} x^{\varrho_\mu} + c_{\mu,1} x^{\varrho_\mu + 1} + c_{\mu,2} x^{\varrho_\mu + 2} + \ldots \tag{12}$$

une intégrale de l'équation différentielle non homogène

$$P(x, \eta_\mu) = \varphi(\varrho_\mu) x^{\varrho_\mu}, \tag{13}$$

les coefficients $c_{\mu,m}$ se déterminent généralement comme suit

$$c_{\mu,0} = \frac{\varphi(\varrho_\mu)}{A_0(\varrho_\mu)} \tag{14}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m} A_\nu(\varrho_s + m - \nu)\, c_{\mu, m-\nu}\,, \tag{14 bis}$$

et la série de puissances (12) a le même rayon de convergence r que la série (4).

Cela posé, il est évident que l'équation différentielle linéaire et homogène du $(n+1)$-ième ordre

$$P R_\mu(x, \eta) = 0$$

a généralement les $n+1$ intégrales indépendantes

$$y_1 y_2 \ldots y_n \eta_\mu .$$

Remarquons ensuite que les facteurs symboliques R_μ et R_ν sont permutables, l'équation du $(n+s)$-ième ordre

$$Q_s(x, y) = 0 \tag{15}$$

admet généralement les $n+s$ intégrales indépendantes

$$y_1 y_2 \ldots y_n \quad \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_s .$$

Quant à l'équation (15), introduisons, dans cette équation, la série de puissances (4), je dis que le coefficient de la puissance x^{k+m} deviendra

$$(k-\varrho_1+m)(k-\varrho_2+m)\ldots(k-\varrho_s+m)\sum_{\mu=0}^{\mu=m} A_\mu (k+m+\mu)\, c_{k+m-\mu}, \tag{16}$$

ce qui donnera immédiatement la formule récursive (14 bis).

En effet, posons

$$Q(x, y) \equiv PR(x, \eta) \equiv xD_x P(x, y) - \varrho P(x, y), \tag{17}$$

nous aurons

$$Q(x, \eta) \equiv \sum_{\mu=0}^{\mu=n+1} x^{n-\mu+1} q_\mu(x)\, y^{(n-\mu+1)}, \tag{18}$$

où nous avons posé généralement, pour $1 \leqq \mu \leqq n$,

$$q_\mu(x) = p_\mu(x) + x p'_{\mu-1}(x) + (n-\mu-\varrho+1)\, p_{\mu-1}(x), \tag{19}$$

tandis qu'il faut admettre

$$\left\{\begin{array}{l} q_0(x) = p_0(x) \\ q_{n+1}(x) = x p'_n(x) - \varrho p_n(x). \end{array}\right. \tag{19 bis}$$

Posons ensuite

$$q_\mu(x) = q_{\mu,0} + q_{\mu,1} x + q_{\mu,2} x^2 + \ldots, \tag{20}$$

il résulte généralement, pour $1 \leqq \mu \leqq n$,

$$q_{\mu,m} = p_{\mu,m} + (n+m-\mu-\varrho+1)\, p_{\mu-1,m}, \tag{21}$$

tandis qu'il faut admettre

$$\left\{\begin{aligned} q_{0,m} &= p_{0,m} \\ q_{n+1,m} &= (m-\varrho)\, p_{n,m}; \end{aligned}\right. \tag{21 bis}$$

c'est-à-dire que nous avons à appliquer ici, au lieu des $A_m(k)$, les polynomes analogues

$$B_m(k) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n+1}{}' q_{\mu,m}\, \omega_{n-\mu+1}(k),$$

savoir, en appliquant les formules (21), puis ordonnant d'après les coefficients $p_{\mu,m}$,

$$B_m(k) = (k-\varrho+m)\, A_m(k),$$

ce qui conduira immédiatement à l'expression (16), parce que les facteurs symboliques $R_\alpha(x,y)$ et $R_\beta(x,y)$ sont permutables.

Nous avons encore à étudier l'hypothèse

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_\mu = \varrho \mp \varrho_{\mu+\nu}, \quad \nu > 0;$$

dans ce cas, les intégrales

$$\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\mu$$

deviennent identiques, mais on voit immédiatement que l'équation (15) admet généralement les μ intégrales indépendantes

$$\eta_1,\ D_\varrho \eta_1,\ D_\varrho^2 \eta_1,\ \ldots,\ D_\varrho^{\mu-1} \eta_1.$$

II. Sur les fonctions hypergéométriques.

Malmstén[1] a étudié, le premier je le crois, les équations différentielles linéaires et homogènes de la forme

[1] Journal de Crelle, t. 39, p. 99—107; 1850.

$$(1)\qquad P(x, y) \equiv \sum_{s=0}^{s=n} (a_s + b_s x) x^{n-s} y^{(n-s)} = 0,$$

où les a_s et les b_s sont des constantes par rapport à x, de sorte que

$$a_0 \mp 0.$$

Supposons tout d'abord

$$b_0 \mp 0,$$

nous avons à appliquer, dans ce cas spécial, les deux fonctions

$$(2)\quad A_0(k) = \sum_{s=0}^{s=n} a_s \omega_{n-s}(k) = a_0 (k-\alpha_1)(k-\alpha_2)\ldots(k-\alpha_n)$$

$$(3)\quad A_1(k) = \sum_{s=0}^{s=n} b_s \omega_{n-s}(k) = b_0 (k-\beta_1)(k-\beta_2)\ldots(k-\beta_n),$$

ce qui donnera les formules récursives

$$A_0(k+m) c_{k+m} + A_1(k+m-1) c_{k+m-1} = 0.$$

Appliquons ensuite la racine

$$k = \alpha_\mu$$

de l'équation caractéristique

$$A_0(k) = 0,$$

puis choisissons convenablement le coefficient c_k, les fonctions

$$(4)\quad y_\mu = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(-\frac{b_0}{a_0}\right)^s F_s(\alpha_\mu) x^{\alpha_\mu + s}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots n,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(5)\qquad F_s(\alpha_\mu) = \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\Gamma(\alpha_\mu - \beta_\nu + s)}{\Gamma(\alpha_\mu - \alpha_\nu + s + 1)},$$

forment généralement un système d'intégrales indépendantes de l'équation (1).

Il saute aux yeux que le dénominateur de $F_s(\alpha_\mu)$ contient le facteur $s!$, provenu de la fonction gamma qui correspond à $\nu = \mu$.

Étudions maintenant l'équation non homogène

$$\sum_{s=0}^{s=n} (a_s + b_s x) x^{n-s} y^{(n-s)} = \varphi(\varrho) x^\varrho, \tag{6}$$

Frobenius[1] a démontré qu'il est possible de choisir la fonction $\varphi(\varrho)$ de sorte que l'intégrale particulière de (6) se présente sous la forme

$$\eta = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(-\frac{b_0}{a_0}\right)^s F(\varrho + s) x^{\varrho+s}, \tag{7}$$

où nous avons posé pour abréger

$$F(\varrho) = \prod_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\Gamma(\varrho - \beta_\mu)}{\Gamma(\varrho - \alpha_\mu + 1)}; \tag{8}$$

c'est-à-dire que η est intégrale de l'équation du $(n+1)$-ième ordre

$$PR(x, y) = 0, \quad R(x, y) \equiv xy' - \varrho y. \tag{9}$$

C.-R. Ette[2], dans son édition danoise du Mémoire de Frobenius, a corrigé une faute qui défigure une formule fondamentale de l'éminent géomètre allemand.

Quant à l'hypothèse

$$b_0 = 0,$$

supposons

$$b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{m-1} = 0, \quad b_m \neq 0,$$

[1] Journal de Crelle, t. 76, p. 228—230; 1873.

[2] Om Integration af lineære Differentialligninger ved Rækkeudviklinger; Kjøbenhavn 1903.

le polynome $A_1(k)$ se présente sous la forme

$$A_1(k) = b_m(k-\beta_1)(k-\beta_2)\ldots(k-\beta_{n-m}),$$

de sorte que tous les séries hypergéométriques généralisées sont toujours convergentes.

Remarquons encore que nous obtenous des résultats analogues pour l'équation différentielle linéaire et homogène

$$P(x,y) \equiv \sum_{s=0}^{s=n}{}' (a_s + b_s x^2) x^{n-s} y^{(n-s)} = 0 \tag{10}$$

et pour l'équation non homogène correspondante

$$P(x,y) = \varphi(\varrho) x^{\varrho}. \tag{11}$$

Dans ce cas, il faut chercher une intégrale de la forme

$$y = \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' c_{k+2s} x^{k+2s}. \tag{12}$$

De plus, remarquons que plusieurs des équations différentielles qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions cylindriques sont précisément de la forme (10).

1° L'équation des fonctions cylindriques

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \tag{13}$$

toujours satisfaite par la fonction cylindrique de première espèce

$$J^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}, \tag{14}$$

et la seconde intégrale indépendante de (13) est généralement représentée par la fonction $J^{-\nu}(x)$.

Mais, soit ν égal à un entier n, on aura

$$J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x),$$

ce qui conduira à introduire la fonction cylindrique de seconde espèce

$$(15)\qquad Y^{\nu}(x) = \frac{\cos\nu\pi\, J^{\nu}(x) - J^{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

de sorte que nous aurons, pour $\nu = n \geqq 0$,

$$(16)\quad \pi\, Y^{n}(x) = \left(D_{\nu} J^{\nu}(x)\right)_{\nu=n} + (-1)^{n}\left(D_{\nu} J^{\nu}(x)\right)_{\nu=-n}.$$

Or, posons comme ordinairement

$$\Psi(\nu) = D_{\nu} \log \Gamma(\nu) = \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)},$$

il résulte, pour $n \geqq 0$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(D_{\nu} J^{\nu}(x)\right)_{\nu=n} = \\ &= J^{n}(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s}\,\Psi(n+s+1)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera immédiatement, pour $n = 0$,

$$(18)\quad \frac{\pi}{2}\, Y^{0}(x) = J^{0}(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s}\,\Psi(s+1)}{s!\,s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}.$$

Quant au cas général, appliquons la valeur limite

$$D_{\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)}\right)_{\nu=-r} = (-1)^{r} r; \quad r \geqq 0,$$

nous aurons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^{n}\left(D_{\nu} J^{\nu}(x)\right)_{\nu=-n} = \\ &= J^{n}(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s}\,\Psi(s+1)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} - \\ &\qquad - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}, \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera immédiatement l'expression de $Y^{n}(x)$.

2° L'équation du troisième ordre

$$(20)\qquad x^3 y''' + 3x^2 y'' + (4x^2 - 4\nu^2 + 1)xy' + 4x^2 y = 0$$

qui admet toujours les trois intégrales indépendantes

$$(21)\qquad \left(J^\nu(x)\right)^2,\quad J^\nu(x)\,Y^\nu(x),\quad \left(Y^\nu(x)\right)^2.$$

3° L'équation du quatrième ordre

$$(22)\begin{cases} x^4 y^{\text{IV}} + 6x^3 y''' + (4x^2 + 7 - 2\nu^2 - 2\varrho^2)x^2 y'' + \\ + (16x^2 + 1 - 2\nu^2 - 2\varrho^2)xy' + \left(8x^2 - (\nu^2 - \varrho^2)^2\right) y = 0, \end{cases}$$

satisfaite par les quatre produits

$$(23)\quad J^\nu(x)\,J^\varrho(x),\quad J^\nu(x)\,Y^\varrho(x),\quad Y^\nu(x)\,J^\varrho(x),\quad Y^\nu(x)\,Y^\varrho(x).$$

Les équations (20) et (22) sont développées dans mon Traité des fonctions cylindriques[1], tandis que la discussion des quatre intégrales (23) est établie dans une publication récente[2].

4° L'équation du quatrième ordre

$$(24)\quad x^4 y^{\text{IV}} + 4x^3 y''' + (1 - 4\nu^2)x^2 y'' + (1 - 4\nu^2)xy' + 4x^4 y = 0,$$

ayant les intégrales toujours indépendantes

$$(25)\quad J^\nu(x)J^\nu(ix),\quad J^\nu(x)Y^\nu(ix),\quad Y^\nu(x)J^\nu(ix),\quad Y^\nu(x)Y^\nu(ix),$$

équation que j'ai étudiée dans le Mémoire récent susdit.

Dans ce qui suit, nous avons à appliquer cette autre équation du quatrième ordre

$$(26)\begin{cases} x^4 y^{\text{IV}} + 6x^3 y''' + (7 - \nu^2 - \varrho^2 + 2x^2)x^2 y'' + \\ + (1 - \nu^2 - \varrho^2 + 6x^2)xy' + [\nu^2\varrho^2 + (4 - \nu^2 - \varrho^2)x^2 + x^4]\,y = 0, \end{cases}$$

étudiée dans le Mémoire susdit, où le second terme du premier membre est par erreur d'écriture indiqué comme $4x^3 y'''$.

[1] Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen; Leipzig 1904.
[2] Bulletin des Sciences Mathématiques, 1925.

Dans le cas général $\nu \mp \varrho$, l'équation (26) admet toujours les quatre intégrales indépendantes

$$(27) \qquad J^{\nu}(x), \ Y^{\nu}(x), \ J^{\varrho}(x), \ Y^{\varrho}(x).$$

Soit, au contraire, $\nu = \varrho$, ν n'étant pas un nombre entier, l'équation (26) a les quatre intégrales indépendantes

$$(28) \qquad J^{\nu}(x), \ J^{-\nu}(x), \ D_{\nu} J^{\nu}(x), \ D_{\nu} J^{-\nu}(x),$$

tandis que l'hypothèse $\nu = n$, n étant un positif entier, donnera les intégrales indépendantes

$$(29) \left\{ \begin{array}{c} J^{n}(x), \ \big(D_{\nu} J^{\nu}(x)\big)_{\nu=n}, \ \big(D_{\nu} J^{\nu}(x)\big)_{\nu=-n}, \\ \big[D_{\nu}^{2} J^{\nu}(x) - (-1)^{n} D_{\nu}^{2} J^{-\nu}(x)\big]_{\nu=n}. \end{array} \right.$$

Reste encore le cas particulier $\nu = 0$.

Posons pour abréger

$$(30) \qquad J^{0}(x) = j(x), \ \big(D^{n} J^{\nu}(x)\big)_{\nu=0} = j_{n}(x),$$

les quatre intégrales indépendantes deviennent

$$(31) \qquad j(x), \ j_1(x), \ j_2(x), \ j_3(x).$$

III. Sur la fonction de Lommel.

Posons pour abréger

$$(1) \qquad P(x,y) \equiv x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y,$$

puis appliquons l'identité évidente

$$(2) \qquad P\big(x, x^{k}\big) = 4 \frac{k+\nu}{2} \frac{k-\nu}{2} x^{k} + x^{k+2},$$

il saute aux yeux que l'équation différentielle linéaire et non homogène

$$(3) \qquad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho}$$

admet l'intégrale particulière

$$(4)\quad \Pi^{\nu,\varrho}(x,y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s+1\right)},$$

fonction que nous désignons comme fonction de Lommel, parce que l'éminent géomètre et physicien allemand a introduit une fonction obtenue de $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$, en y supprimant un facteur simple, facteur qui est néanmoins essentiel pour l'étude systématique de la fonction en question.

Du reste, j'ai donné, dans mon Traité fonctions des cylindriques, les fondements d'une théorie de $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$.

Quant à la fonction de Lommel, elle est une généralisation de la fonction cylindrique de première espèce $J^{\nu}(x)$, car on aura, n étant un entier non négatif,

$$(5)\qquad \Pi^{\nu,\nu-2n}(x) = (-1)^n J^{\nu}(x)$$

$$(6)\qquad \Pi^{\nu,-\nu-2n}(x) = (-1)^n J^{-\nu}(x).$$

De plus, désignons par n un positif entier, puis posons

$$(7)\quad A_n^{\varrho,\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s+1\right)},$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (4),

$$(8)\qquad \Pi^{\nu,\nu+2n}(x) = (-1)^n \left[\Pi^{\nu,\varrho}(x) - A_n^{\nu,\varrho}(x)\right].$$

Supposons ensuite que la série de puissances

$$(9)\quad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+s}{2}+1\right)}$$

ait, abstraction faite du facteur x^{ϱ}, le rayon de convergence r, il résulte, en vertu de l'identité différentielle (2),

$$(10)\quad P\left(x, f(x)\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{4(a_s + a_{s-2})}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+s}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s},$$

où l'accent fixé au signe sommatoire indique qu'il faut supprimer les coefficients a_{-1} et a_{-2}, ce qui donnera

$$(11)\quad f(x) = a_0 \Pi^{\nu,\varrho}(x) + a_1 \Pi^{\nu,\varrho+1} + \sum_{s=0}^{s=\infty}{}'(a_s + a_{s-2})\Pi^{\nu,\varrho+s}(x),$$

développement qui est également convergente pourvu que $|x| < r$.

Cela posé, il est évident que ces formules permettent de développer en série de fonctions de Lommel une série de puissances quelconque

$$(12)\qquad F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots,$$

ayant le rayon de convergence $r > 0$.

A cet effet, posons

$$(13)\qquad a_s = 2^s \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+s}{2}+1\right) b_s,$$

le coefficient A_s de la série

$$(14)\qquad F(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\varrho} \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \Pi^{\nu,\varrho+s}(x)$$

se présente sous la forme

$$(15)\qquad A_0 = a_0,\quad A_1 = a_1,\quad A_s = a_s + a_{s-2}.$$

Posons ensuite

$$\Pi^{\nu,\varrho+n}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+n}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+n}{2}+1\right)}(1+\delta_n),$$

nous démontrerons sans peine que la série (14) est convergente, pourvu que $|x| < r$ et seulement dans ce cas.

Nous aurons par exemple le développement toujours convergente

$$(16)\quad \Pi^{\nu,\sigma}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma-\varrho}\left(A_0 \Pi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{\varrho-\sigma}{2}\sum_{s=1}^{s=\infty} A_s \Pi^{\nu,\varrho+2s}(x)\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(17)\qquad A_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}+1\right)}$$

$$(17\text{ bis})\quad A_n = (\varrho+\sigma+n)\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}+n+1\right)}.$$

Du reste, on voit immédiatement que les séries de fonctions $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ sont entièrement différentes des séries neumanniennes et des séries kapteyniennes, étudiées dans mon Traité des fonctions cylindriques.

Partons par exemple de la série

$$(18)\quad \varphi(x) = a_0 \Pi^{\nu,\varrho}(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}(a_{2s}+a_{2s-2})\,\Pi^{\nu,\varrho+2s}(x)$$

puis supposons

$$(19)\qquad \lim_{n=\infty} a_{2n} = 0,$$

il résulte, en vertu de (8), un développement de la forme

$$(20)\qquad \varphi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}(a_{2s}+a_{2s-2})\,A_s^{\nu,\varrho}(x),$$

ayant le même rayon de convergence que la série de puissances qui représente $\varphi(x)$.

DEUXIÈME PARTIE

Équations différentielles.

IV. Équation du troisième ordre.

Revenons maintenant à l'équation différentielle qui définit la fonction de Lommel, savoir

$$(1)\quad P(x,y) \equiv x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho},$$

puis posons

$$(2)\qquad R(x,y) = xy' - \varrho y,$$

l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$(3)\qquad PR(x,y) = 0,$$

savoir

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & x^3 y''' + (3-\varrho)\, x^2 y'' + (1-\varrho-\nu^2+x^2)\, xy' + \\ & \qquad + [\varrho\nu^2 + (2-\varrho)\, x^2]\, y = 0 \end{aligned}\right.$$

a généralement les trois intégrales indépendantes

$$(5)\qquad J^{\nu}(x),\ Y^{\nu}(x),\ \Pi^{\nu,\varrho}(x).$$

Étudions tout d'abord le cas spécial

$$\varrho = \nu + 2n,$$

n étant un positif entier, puis posons pour abréger

$$(6)\qquad A_n^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)},$$

il résulte, en vertu de la formule (8) de l'article III, que les fonctions

$$J^\nu(x), \; Y^\nu(x), \; A_n^\nu(x) \tag{7}$$

représentent généralement trois intégrales indépendantes de (4).

Soit ν égal au nombre entier p, plus grand que $-n$, $A_n^p(x)$ est un polynome entier de x; soit ensuite $\nu = -p$, $p \geqq n$, la fonction $A_n^\nu(x)$ s'annule; mais, pour une valeur quelconque de ν, la fonction

$$\frac{\pi A_n^\nu(x)}{\sin \nu\pi} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+s+1) \sin \pi(\nu+s)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\pi A_n^\nu(x)}{\sin \nu\pi} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\Gamma(-\nu-s)}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$$

est certainement intégrale de (4), de sorte que la valeur limite obtenue, en posant $\nu = -p$, savoir

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(p-s-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2s} \tag{8}$$

représente la troisième intégrale de (4).

Dans le cas spécial $p = n$, la fonction (8) est, en vertu des formules (16) et (19) de l'article II, la partie rationnelle de la fonction cylindrique de seconde espèce $\pi Y^n(x)$, de sorte que cette fonction rationnelle est intégrale de l'équation différentielle du troisième ordre obtenue de (4), en y posant

$$\nu = -n, \quad \varrho = -3n.$$

Quant à la partie fractionnaire de cette fonction rationnelle, Schläfli[1] a démontré que cette fonction satisfait à

[1] Mathematische Annalen, t. 3; 1871.

une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre, équation qui est de forme différente selon que n est pair ou impair.

Dans une publication récente[1], j'ai démontré que la partie fractionnaire susdite satisfait toujours à une équation du quatrième ordre, quelle que soit la parité de n.

Il est évident que l'hypothèse

$$\varrho = -\nu + 2n,$$

n étant un positif entier quelconque, conduira à des résultats analogues aux précédents.

Revenons maintenant à l'équation (4), puis désignons par n un entier non négatif, nous aurons

$$\Pi^{\nu, \pm\nu - 2n}(x) = (-1)^n J^{\pm\nu}(x),$$

de sorte qu'il faut étudier plus profondément ces valeurs spéciales de ϱ.

Posons tout d'abord

$$\varrho = \nu - 2n,$$

la fonction

$$\frac{\Pi^{\nu,\varrho}(x) - (-1)^n J^\nu(x)}{\varrho - \nu + 2n} \tag{9}$$

est, pour des valeurs quelconques de ν et ϱ, certainement intégrale de l'équation (4), ce qui donnera la troisième intégrale

$$\left(D_\varrho \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu-2n} = -\left(D_\nu \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu-2n} + (-1)^n D_\nu J^\nu(x). \tag{10}$$

Multiplions ensuite par $(-1)^n 2$ ces valeurs limites, l'intégrale cherchée se présente sous la forme

[1] Bulletin des Sciences Mathématiques, 1925.

$$(11)\quad G_0^\nu(x) = 2J^\nu(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-s)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\left[\Psi(\nu+s+1)+\Psi(s+1)\right]$$

$$(12)\quad G_n^\nu(x) = G_0^\nu(x) - \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(n-s-1)!}{\Gamma(\nu-n+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2s},$$

selon que n est zéro ou positif entier, et cette intégrale est certainement indépendante des deux fonctions cylindriques, pourvu que ν ne soit pas un nombre entier.

Étudions tout d'abord l'hypothèse $\nu = p > n$, nous aurons

$$(13)\quad G_n^p(x) = \pi Y^p(x) + \sum_{s=0}^{s=p-n-1}\frac{(p-s-1)!}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2s};$$

c'est-à-dire que la troisième intégrale est représentée par la fonction rationnelle

$$(14)\quad \sum_{s=0}^{s=p-n-1}\frac{(p-s-1)!}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2s},$$

ce qui deviendra, pour $n=0$, la partie rationnelle de $\pi Y^p(x)$.

Soit ensuite $\nu = p \leqq n$, nous aurons

$$G_n^p(x) = \pi Y^p(x),$$

de sorte qu'il faut étudier la fonction

$$\frac{\Pi^{p,\varrho}(x) - (-1)^n J^p(x) - \pi(\varrho-p+2n)\,Y^p(x)}{(\varrho-p+2n)^2},$$

étant, pour une valeur quelconque de ϱ, intégrale de l'équation obtenue de (4), en y posant $\nu = p$, ce qui donnera l'intégrale particulière

$$(15)\quad \left(D_\varrho^2\,\Pi^{p,\varrho}(x)\right)_{\varrho=p-2n},$$

toujours indépendante des deux fonctions cylindriques $J^p(x)$ et $Y^p(x)$.

Et il est évident que l'hypothèse

$$\varrho = -\nu - 2n$$

conduira à des résultats analogues.

Dans le cas spécial $\nu = \varrho = 0$, l'équation (4), savoir l'équation

$$(16) \qquad x^3 y''' + 3x^2 y'' + (1+x^2) xy' + 2x^2 y = 0,$$

admet les trois intégrales indépendantes

$$(17) \qquad \Pi^{0,0}(x), \quad \left(D_\varrho \Pi^{0,\varrho}(x)\right)_{\varrho=0}, \quad \left(D_\varrho^2 \Pi^{0,\varrho}(x)\right)_{\varrho=0}.$$

V. Équation du quatrième ordre.

Soit

$$R_1(x,y) = xy' - \sigma y,$$

nous avons, en appliquant les désignations de l'article précédent, à étudier l'équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre

$$PRR_1(x,y) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1) \quad \begin{cases} x^4 y^{\mathrm{IV}} + (6-\varrho-\sigma) x^3 y''' + (7-\nu^2+\varrho\sigma-3\varrho-3\sigma+x^2) x^2 y'' + \\ \qquad + [(\nu^2-1)(\varrho+\sigma-1) + (5-\varrho-\sigma) x^2] xy' + \\ \qquad\quad + [(4-2\varrho-2\sigma+\varrho\sigma) x^2 - \varrho\sigma\nu^2] y = 0, \end{cases}$$

équation qui admet généralement les quatre intégrales indépendantes

$$(2) \qquad J^\nu(x), \quad Y^\nu(x), \quad \Pi^{\nu,\varrho}(x), \quad \Pi^{\nu,\sigma}(x).$$

Supposons inégaux les deux paramètres ϱ et σ, puis posons

$$\sigma - \varrho = \alpha + i\beta,$$

nous pouvons admettre ou $\alpha > 0$ ou $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

Dans l'article précédent, nous avons discuté les trois premières des intégrales (2), et ces intégrales sont toujours indépendantes de $\Pi^{\nu,\sigma}(x)$, ce qui est évident, pourvu que $\sigma - \varrho$ ne soit pas un positif entier pair. Soit maintenant

$$\sigma = \varrho + 2n,$$

n étant un positif entier, la quatrième intégrale de l'équation (2) est représentée par la fonction

$$(3) \qquad A_n^{\nu,\varrho}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s+1\right)},$$

introduite dans l'article III et discutée dans l'article précédent.

Soit maintenant $\sigma = \varrho$, il s'agit de l'équation différentielle

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^4 y^{\mathrm{IV}} + (6-2\varrho)x^3 y''' + (7-\nu^2+\varrho^2-6\varrho+x^2)x^2 y'' + \\ & \quad + [(1-\nu^2)(1-2\varrho)+(5-2\varrho)x^2]xy' + \\ & \quad + [(4-4\varrho-\varrho^2)x^2-\nu^2\varrho^2]\,y = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui a généralement les quatre intégrales indépendantes

$$(5) \qquad J^\nu(x),\ Y^\nu(x),\ \Pi^{\nu,\varrho}(x),\ D_\varrho \Pi^{\nu,\varrho}(x),$$

ce qui a toujours lieu, à moins que

$$\varrho = \pm\nu - 2n,$$

n étant un entier non négatif.

Dans ce cas, nous aurons, en supposant $\varrho = \nu - 2n$, les quatre intégrales

(6) $J^{\nu}(x)$, $Y^{\nu}(x)$, $\left(D_{\varrho} \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu-2n}$, $\left(D_{\varrho}^{2} \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu-2n}$,

qui sont toujours indépendantes, pourvu que ν ne soit pas égal à un nombre entier $p \leqq n$.

Nous ne nous arrêtons pas à des calculs assez longs exigés par cette dernière hypothèse.

VI. Équation du cinquième ordre.

Revenons maintenant à la fonction cylindrique de seconde espèce. Posons

$$\pi Y^{n}(x) = 2 J^{n}(x) \log \frac{x}{2} - H^{n}(x), \tag{1}$$

nous avons à étudier la fonction $H^{n}(x)$, transcendante entière pour $n = 0$, mais méromorphe pour $n > 0$.

A cet effet, introduisons, dans l'équation différentielle des fonctions cylindriques

$$x^{2} y'' + x y' + (x^{2} - n^{2}) y = 0,$$

l'expression (1), il résulte, pour la fonction

$$z = H^{n}(x),$$

l'équation non homogène

$$x^{2} z'' + x z' + (x^{2} - n^{2}) z = 4 x D_{x} J^{n}(x). \tag{2}$$

Cela posé, nous avons à étudier l'équation différentielle linéaire non homogène

$$P_{\nu}(x, y) \equiv x^{2} y'' + x y' + (x^{2} - \nu^{2}) y = x D_{x} J^{\varrho}(x), \tag{3}$$

ν et ϱ étant des paramètres quelconques.

A cet effet, posons

$$z = J^{\varrho}(x),$$

puis différentions par rapport à x l'équation

$$P_\varrho(x,z) \equiv x^2 z'' + xz' + (x^2 - \varrho^2) z = 0,$$

il résulte

$$x^2 z''' + 3xz'' + (1 - \varrho^2 + x^2) z' + 2xz = 0.$$

Divisons ensuite par x les deux membres de cette équation, puis différentions de nouveau par rapport à x, nous aurons, en multipliant par x,

$$x^3 z^{\text{IV}} + 4x^2 z''' + (x^2 + 1 - \nu^2) xz'' + (\nu^2 - 1 + 3x^2) z' = 0;$$

c'est-à-dire que la fonction

$$y = D_x J^\varrho(x) \tag{4}$$

satisfait toujours à l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' + (x^2 - 1 + \nu^2) xy' + (\varrho^2 - 1 + 3x^2) y = 0. \tag{5}$$

Mais, dans le cas spécial $\varrho = 0$, on aura

$$D_x J^0(x) = -J^1(x),$$

de sorte qu'il faut remplacer l'équation (5) par cette autre du second ordre

$$P_1(x,y) \equiv x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1) y = 0. \tag{5 bis}$$

Revenons maintenant à l'équation (3), nous avons à transformer (5), en y posant

$$y = \frac{z}{x},$$

ce qui conduira à l'équation

$$\left\{ \begin{aligned} Q_\varrho(x,z) \equiv x^3 z''' + x^2 z'' + (x^2 - 1 - \varrho^2) xz' + \\ + 2(\varrho^2 + x^2) z = 0, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

équation qui admet toujours les deux intégrales particulières

(7) $$xD_x J^{\varrho}(x), \quad xD_x Y^{\varrho}(x).$$

Or, remarquons que l'équation (6) appartient à la classe d'équations étudiées dans l'article II, et que nous aurons ici

$$A(k) = (k-2)(k^2-\varrho^2)$$
$$A_1(k) = k+2,$$

la troisième intégrale de (6) se présente généralement sous la forme

(7 bis) $$xD_x \Pi^{0,\varrho}(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (2s)\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{\varrho}{2}\right)\Gamma\left(s+1-\frac{\varrho}{2}\right)}.$$

Dans le cas spécial $\varrho = -2n$, n étant un entier non négatif, l'intégrale (7 bis) et la première des intégrales (7) sont identiques, et nous aurons les trois intégrales indépendantes

(8) $$xD_x J^{2n}(x), \; xD_x Y^{2n}(x), \; xD_x\left(D_{\varrho}^2 \Pi^{0,\varrho}(x)\right)_{\varrho=-2n}.$$

Combinons maintenant les équations (3) et (6), il résulte l'équation différentielle linéaire et homogène du cinquième ordre

(9) $$P_\nu Q_\varrho(x,y) = 0,$$

toujours satisfaite par les deux fonctions cylindriques $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$.

Quant à l'équation (9), sa fonction caractéristique est

$$A(k) = (k-2)(k^2-\nu^2)(k^2-\varrho^2);$$

c'est-à-dire que (9) admet comme intégrale particulière une transcendante entière, toujours indépendante de $J^\nu(x)$, à moins que $\nu = 2$.

Soit maintenant

$$\nu = \varrho = n,$$

n étant un positif entier, la fonction méromorphe $H^n(x)$, définie par (1), satisfait toujours à l'équation différentielle linéaire et homogène du cinquième ordre

$$P_n Q_n(x, y) = 0. \tag{10}$$

VII. Équation du sixième ordre.

Nous avons encore à démontrer que la fonction

$$\eta = D_\nu \Pi^{\nu,\varrho}(x) \tag{1}$$

satisfait à une équation différentielle homogène et linéaire du sixième ordre.

A cet effet, partons de l'équation différentielle de $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$, savoir

$$P(x,y) \equiv x^2 y'' + xy' + (x^2 - y^2)\, y = \frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^\varrho}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{1}\right)}, \tag{2}$$

nous aurons immédiatement, pour η, une équation non homogène de la forme

$$P(x,\eta) \equiv x^2 \eta'' + x\eta' + (x^2 - \nu^2)\, \eta = a\Pi^{\nu,\varrho}(x) + bx^\varrho, \tag{3}$$

a et b étant des constantes par rapport à x.

Cela posé, éliminons tout d'abord la fonction $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$, il résulte, en vertu de (2),

$$PP(x,\eta) = a_1 x^\varrho + b_1 x^{\varrho+2}, \tag{4}$$

a_1 et b_1 étant des constantes par rapport à x.

Posons ensuite

$$R(x,y) \equiv xy' - \varrho y, \quad R_1(x,y) = xy' - (\varrho + 2)\, y, \tag{5}$$

il résulte immédiatement, en vertu de (4), l'équation cherchée

$$PPRR_1(x,\eta) = 0. \tag{6}$$

Revenons maintenant à l'équation (3), puis éliminons x^{ϱ}, il résulte

$$PR(x,\eta) = a\left(xD_x \Pi^{\nu,\varrho}(x) - \varrho \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right), \tag{7}$$

a étant une constante par rapport à x; c'est-à-dire qu'il faut déterminer l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$S(x,y) = 0 \tag{8}$$

qui a les trois intégrales particulières

$$xy' - \varrho y, \tag{9}$$

y étant une quelconque des trois fonctions

$$J^{\nu}(x),\ Y^{\nu}(x),\ \Pi^{\nu,\varrho}(x).$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que la fonction caractéristique de l'équation (8) est

$$(k-\nu)(k+\nu)(k-\varrho-2),$$

tandis que les séries de puissances qui représentent une quelconque des trois fonctions (9) se déterminent à l'aide des formules récursives

$$(k-\varrho)(k-\nu+2)(k+\nu+2)c_{k+2} + (k-\varrho+2)c_k = 0,$$

il est évident que l'expression différentielle $S(x,y)$ se présente sous la forme

$$S(x,y) \equiv x^3 y''' + ax^2 y'' + (b+x^2)xy' + (c+\gamma x^2)y,$$

a, b, c, γ étant des constantes par rapport à x, ce qui donnera les identités algébriques

$$k(k-1)(k-2)+ak(k-1)+bk+c = (k+\nu)(k-\nu)(k-\varrho-2)$$

$$k+\gamma = \varrho-k+2,$$

savoir

$$a = 1-\varrho, \quad b = 1-\varrho-\nu^2, \quad c = \nu^2(\varrho+2), \quad \gamma = 2-\varrho,$$

et nous aurons finalement

$$(10)\left\{\begin{aligned} S(x,y) \equiv x^3y'''+(1-\varrho)x^2y''+(x^2-1-\nu^2-\varrho)xy'+ \\ +[(\varrho+2)\nu^2+(2-\varrho)x^2]\,y. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, il est évident que l'équation (6) se présente aussi sous la forme

$$(11) \qquad PRS(x,y) = 0,$$

de sorte que nous aurons l'identité différentielle curieuse

$$(12) \qquad PPRR_1(x,y) \equiv PRS(x,y).$$

Quant à l'équation différentielle (6) ou (11), elle admet généralement les six intégrales indépendantes

$$(13) \quad J^\nu(x),\ Y^\nu(x),\ D_\nu J^\nu(x),\ D_\nu J^{-\nu}(x),\ \Pi^{\nu,\varrho}(x),\ D_\nu \Pi^{\nu,\varrho}(x).$$

Dans le cas spécial $\nu = 0$, la dernière de ces intégrales s'évanouira, parce que $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ est une fonction paire de ν; mais, pour une valeur quelconque de ν, la fonction

$$\frac{1}{\nu} D_\nu \Pi^{\nu,\varrho}(x)$$

est aussi intégrale de (6), de sorte que nous aurons généralement, pour $\nu = 0$, les six intégrales indépendantes

$$(14) \quad j(x),\ j_1(x),\ j_2(x),\ j_3(x),\ \Pi^{\nu,\varrho}(x),\ \left(D_\nu^2 \Pi^{0,\varrho}(x)\right)_{\nu=0}.$$

Et, quels que soient les deux paramètres ν et ϱ, nous connaissons toujours cinq intégrales indépendantes de l'équation (6).

Nous avons déjà remarqué que l'équation non homogène

$$PP(x,y) = x^{\varrho} \tag{15}$$

n'appartient pas aux équations étudiées dans l'article II; mais nos développements précédents permettent d'intégrer immédiatement l'équation (13).

A cet effet, posons

$$z = \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)\Pi^{\nu,\varrho}(x),$$

il résulte, en vertu de (2),

$$x^2 z'' + xz' + (x^2-\nu^2)z = 4\left(\frac{x}{2}\right)^{\delta}; \tag{16}$$

posons ensuite

$$y = \frac{D_\nu z}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)},$$

il résulte, en vertu de (16),

$$P(x,y) \equiv x^2 y^2 + xy' + (x^2-\nu^2)y = 4\nu\Pi^{\nu,\varrho}(x),$$

de sorte que nous aurons finalement

$$PP(x,y) = \frac{8\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}, \tag{17}$$

équation non homogène qui admet généralement l'intégrale particulière

$$\eta = D_\nu\Pi^{\nu,\varrho}(x) - \left[\psi\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right) - \psi\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)\right]\Pi^{\nu,\varrho}(x), \tag{18}$$

de sorte que l'équation différentielle linéaire et homogène du cinquième ordre

$$PPR_1(x, y) = 0 \tag{19}$$

admet généralement les cinq intégrales indépendantes

$$J^\nu,\ Y^\nu(x),\ D_\nu J^\nu(x),\ D_\nu Y^\nu(x),\ \eta. \tag{20}$$

Soit $\nu = 0$, la fonction (18) s'évanouira, de sorte qu'il faut admettre, dans ce cas,

$$\eta = \left(D_\nu^2 \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\nu=0} - \Psi'\left(\frac{\varrho}{2}\right) \Pi^{0,\varrho}(x). \tag{21}$$

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

La fonction de Lommel.

DEUXIÈME PARTIE

Équations différentielles.

Forelagt paa Mødet den 15. Januar 1926.
Færdig fra Trykkeriet den 28. Juni 1926.