Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V,** 6.

EIN SATZ ÜBER POTENZREIHEN UNENDLICH VIELER VARIABELN MIT ANWENDUNG AUF DIRICHLETSCHE REIHEN

VON

H. D. KLOOSTERMAN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

Einleitung*.

Von H. BOHR ist ein wichtiger Zusammenhang entdeckt zwischen der Theorie der DIRICHLETschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ einerseits und der Theorie der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln andrerseits[1].

Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it \tag{1}$$

eine gewöhnliche DIRICHLETsche Reihe und es sei gesetzt

$$x_1 = \frac{1}{2^s}, \quad x_2 = \frac{1}{3^s}, \; \ldots\ldots \; x_m = \frac{1}{p_m^s}, \; \ldots\ldots,$$

wo p_m die m-te Primzahl bedeutet. Ist $n = p_{n_1}^{\nu_1} p_{n_2}^{\nu_2} \ldots\, p_{n_r}^{\nu_r}$ die Zerlegung der ganzen Zahl n in Primfaktoren, so läszt sich die DIRICHLETsche Reihe mit Hilfe der Gröszen x_m $(m = 1, 2, \ldots)$ rein formal schreiben als eine Potenzreihe mit einer unendlichen Anzahl von Variabeln

$$P(x_1, x_2, \ldots\, x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \ldots\, x_{n_r}^{\nu_r} =$$

$$= c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha \leq \beta}} c_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots \\ \alpha \leq \beta \leq \gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma}\, x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots$$

* Ich möchte gerne Herrn Prof. Dr. H. BOHR danken für seine Hilfe bei der Bearbeitung dieser Abhandlung. Eine kurze Mitteilung der Resultate ist in den »Verslagen der Kon. Akad. van Wetenschappen, te Amsterdam, 24 Maart 1923« erschienen.

[1] H. BOHR, Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der DIRICHLETschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Gött. Nachr. 1913, p. 441—488.

Diese Potenzreihe nennt Bohr die zur Dirichletschen Reihe gehörige Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.$

Der Zusammenhang ist von Bohr u. a. angewendet auf das sogenannte absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, d. h. auf die Bestimmung der absoluten Konvergenzabszisse der Reihe (1) aus einfachen analytischen Eigenschaften der von der Reihe dargestellten Funktion. Es sei B die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1) und D die untere Grenze aller Zahlen α mit der Eigenschaft, dasz $f(s)$ für $\sigma \geqq \alpha$ regulär und beschränkt ist. Das absolute Konvergenzproblem ist gelöst, wenn man die Differenz $B-D$ kennt. Bohr beweist, dasz die Gleichung $B = D$ zutrifft für jede Dirichletsche Reihe, die rein formal eine Darstellung in einer der beiden Formen

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty}{}' \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}$$

oder

$$f(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right)$$

zuläszt, also für jede Dirichletsche Reihe, für welche die zugehörige Potenzreihe unendlich vieler Variabeln die Gestalt

$$P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \mathfrak{P}_n(x_n) \tag{2}$$

oder

$$P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \mathfrak{P}_n(x_n)\right) \tag{3}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ Potenzreihen sind in x_n allein ohne konstantes Glied. Der Beweis beruht auf dem folgenden Satze[2]: Damit für die Dirichletsche Reihe (1)

[2] Dieser Satz ist leicht den §§ 4 und 5 der sub[1]) zitierten Bohrschen Abhandlung zu entnehmen.

die Gleichung $B = D$ gültig sei, ist hinreichend, dasz die zu (1) gehörige Potenzreihe unendlich vieler Variabeln die folgende Eigenschaft hat: Wenn sie im Gebiete $|x_n| \leq G_n$ $(n = 1, 2, \ldots.; (G_n)$ ist eine positive Zahlenfolge) beschränkt[3] ist, ist sie im Gebiete $|x_n| \leq \theta G_n$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ absolut konvergent, wenn θ eine beliebige feste Zahl des Intervalles $0 < \theta < 1$ ist. Man braucht also nur zu beweisen, dasz die Reihen (2) und (3) diese Eigenschaft besitzen.

Betrachten wir die Potenzreihen (2) und (3), dann sehen wir, dasz hier die Variabeln x_n gewissermaszen separiert auftreten. Dies hat Bohr auf die Vermutung geführt, dasz die Gleichung $B = D$ zutrifft für jede Dirichletsche Reihe, bei der in der zugehörigen Potenzreihe unendlich vieler Variabeln, die Variabeln, (ungenau ausgedrückt) nicht zu sehr ineinander »eingefiltert« sind. Als Bestätigung dieser Vermutung wird nun in dieser Abhandlung bewiesen, dasz $B = D$ für jede Dirichletsche Reihe, die sich formal in der Gestalt

$$f(s) = \varphi\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right)$$

darstellen läszt. Hierin bezeichnet φ eine willkürliche, (nicht konstante[4]) ganze transzendente Funktion. Weil die zugehörige Potenzreihe unendlich vieler Variabeln die Gestalt $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots.)$ hat, wo die $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ Potenzreihen allein in x_n sind ohne konstantes Glied, ge-

[3] Der Begriff der Beschränktheit einer Potenzreihe unendlich vieler Variabeln ist von D. Hilbert definiert worden in seiner Abhandlung: Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen Variabeln, Palermo Rend. 27 (1909), p. 59–74. Die Definition wird in unserem § 1 noch einmal gegeben.

[4] Wenn $\varphi(y)$ konstant ist, ist der Satz trivial.

nügt es nach dem oben erwähnten Satze das Folgende zu beweisen:

Hauptsatz. Es sei φ eine ganze transzendente Funktion und $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ formale Potenzreihen in den Variabeln x_n ohne konstantes Glied. Ist dann die Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.) = \varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m) + \ldots.)$ im Gebiete $|x_n| \leqq G_n$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ beschränkt, dann ist sie für $|x_n| \leqq \theta G_n$ absolut konvergent, wenn θ eine willkürliche positive Zahl kleiner als 1 ist.

Der Beweis vorstehenden Satzes ist der Zweck dieser Abhandlung.

Im § 1 werden einige vorbereitende Bemerkungen gemacht. Besonders wird hervorgehoben der Unterschied zwischen »formalem« und »realem«.

Die folgenden §§ enthalten den eigentlichen Beweis des Satzes. Im § 2, der den »Übergang vom formalen zum realen« enthält, wird zuerst bewiesen, dasz aus der gegebenen Beschränktheit der Potenzreihe unendlich vieler Variabeln folgt, dasz die formalen Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ analytische Funktionen definieren, und es werden diese Funktionen näher untersucht. Es zeigt sich, dasz zwei verschiedene Fälle unterschieden werden müssen, nämlich: Entweder sind die Funktionen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ im Kreise $|x_n| < G_n$ alle regulär, oder sie lassen sich darstellen als Logarithmen von im Kreise $|x_n| < G_n$ regulären Funktionen.

Im § 3 wird der Beweis des Hauptsatzes für den ersten Fall und im § 4 für den zweiten Fall zu Ende geführt.

Es ist interessant, dasz die Potenzreihe (2) speziell (mit $\varphi(y) = y$) zum ersten Falle gehört und die Potenzreihe (3) (mit $\varphi(y) = e^y$) zum zweiten Falle. Am Ende des § 2 wird dies deutlicher hervortreten.

§ 1.

Es sei

$$P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.) =$$
$$= c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots\\ \alpha\leqq\beta}} c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots\\ \alpha\leqq\beta\leqq\gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots.$$

eine Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ Nach Hilbert[3] nennt man m-ten Abschnitt dieser Potenzreihe diejenige Potenzreihe $P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ der m Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_m$, die man erhält, wenn man in P die Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots.$ sämtlich durch Null ersetzt. Es sei $G_1, G_2, \ldots. G_m, \ldots.$ eine Folge positiver Zahlen. Die Potenzreihe P heiszt dann beschränkt im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots. |x_m| \leqq G_m, \ldots..$ wenn sie den beiden folgenden Bedingungen genügt:

a) Die Potenzreihen $P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$, die m-ten Abschnitte, sind bei jedem $m \geqq 1$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1$, $|x_2| \leqq G_2, \ldots. |x_m| \leqq G_m$ absolut konvergent.

b) Es existiert eine von m unabhängige Zahl K, derart, dasz bei jedem $m \geqq 1$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots. |x_m| \leqq G_m$ die Ungleichung

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)| < K$$

gilt.

Im Folgenden werden wir weiter Behauptungen von der folgenden Form aussprechen: Die Ausdrücke $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x_n)\right)$ und $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \Phi_n(x_n)\right)\right)$, wo φ und V ganze Transzendenten sind, und $\mathfrak{P}_n(x_n)$ und $\Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ Potenzreihen ohne konstantes Glied, definieren gewisse Potenzreihen von unendlich vielen Variabeln.

Betrachten wir zuerst den ersten Ausdruck, nämlich $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{P}_n(x_n)\right)$. Hier ist φ eine ganze Transzendente, die etwa die folgende Potenzreihenentwicklung hat: $\varphi(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \ldots$.

Die Reihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ haben die folgende Form:

$$\mathfrak{P}_n(x_n) = a_1^{(n)} x_n + a_2^{(n)} x_n^2 + a_3^{(n)} x_n^3 + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Setzen wir nun den Ausdruck $y = \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{P}_n(x_n)$ in die Potenzreihe für $\varphi(y)$ ein, und ordnen wir alles formal nach wachsenden Potenzen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$, so bekommen wir eine eindeutig bestimmte Potenzreihe der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$, denn die Koeffizienten entstehen als Summen von endlich vielen Zahlen, von denen jede ein Produkt ist einer Zahl β mit Zahlen der Form $a_k^{(n)}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Ausdrücklich musz hervorgehoben werden, dasz die Anzahl der Summanden nur daher endlich ausfällt, weil die Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ kein konstantes Glied haben.

Etwas komplizierter ist der Nachweis, dasz auch $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$ eine Potenzreihe definiert. Denn weil die Potenzreihen $R_n(x_n) = 1 + \Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein konstantes Glied (nämlich das Glied 1) haben, bekommt man durch formales Ausschreiben von $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$ eine Potenzreihe $R(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$, worin die Koeffizienten als Summen von unendlichen Reihen auftreten. Diese haben also nicht eine unmittelbare »reale« Bedeutung, weil es möglich ist, dasz die unendlichen Reihen divergieren. Wir werden aber beweisen, dasz die Reihen in unserem Falle alle absolut konvergieren. In unserem Falle sind nämlich (vergl. § 4) die Potenzreihen

$\Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ in gewissen Kreisen $|x_n| \leqq H_n$ konvergent.

Es genügt offenbar, zu zeigen, dasz die Entwicklung von

$$V\left((1+\Phi_1(x_1))\,(1+\Phi_2(x_2))\;\ldots.\;(1+\Phi_m(x_m))\right)$$

für jedes m eindeutig zu einer Potenzreihe $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ führt, die dann den m-ten Abschnitt in $R(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.)$ bestimmt; oder, was dasselbe besagt, dasz die unendlichen Reihen, die die Koeffizienten in $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ bestimmen, alle absolut konvergieren.

Ist

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n,\; 1 + \Phi_s(x_s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(s)} x_s^{(n)},\; (s = 1, 2, \ldots..),$$

so bekommt man $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ durch formales Ausschreiben von

$$\sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r \left((1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} x_1^n)\,(1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)} x_2^n)\;\ldots.\;(1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(m)} x_m^n)\right)^r.$$

Die unendlichen Reihen, die die Koeffizienten bestimmen, sind also absolut konvergent, weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_r| \left((1+\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(1)} x_1^n|)\,(1+\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(2)} x_2^n|)\;\ldots.\;(1+\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(m)} x_m^n|)\right)^r$$

für $|x_s| < H_s$ $(s = 1, 2, \ldots. m)$ konvergiert.

§ 2.

Mit Hilfe der Transformation $x_n = \dfrac{G_n}{G} x_n'$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ ist es unmittelbar einleuchtend, dasz es gestattet ist, die Gröszen G_n alle gleich einer willkürlichen positiven Zahl G zu nehmen. Wir wählen diese Zahl G gröszer als 1, aber nur so viel, dasz θG (wo θ die in der Formulierung des Hauptsatzes erwähnte Zahl ist) kleiner als 1 ist. Wir setzen $\theta G = \Theta$.

Wie wir in § 1 bemerkt haben, wird durch den Ausdruck $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots + \mathfrak{P}_m(x_m) + \ldots)$ eine Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ bestimmt. Wollen wir die Beschränktheit dieser Potenzreihe zum Ausdruck bringen, dann haben wir nach § 1 die m-ten Abschnitte zu bilden. Es sei $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ der m-te Abschnitt $(m = 1, 2, \ldots)$ von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$. Wir können dann $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ erhalten durch formales Ausrechnen von $\varphi\big(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots + \mathfrak{P}_m(x_m)\big)$, und die Beschränktheit besagt dann, dasz für $|x_n| < G$ $(n = 1, 2, \ldots m)$ die Potenzreihen $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ absolut konvergieren, und dasz

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| < K, \tag{4}$$

wo K eine von m unabhängige Konstante ist.

Aus der Voraussetzung der Beschränktheit, ausgedrückt durch (4) und aus der Voraussetzung, dasz φ eine ganze Transzendente ist, können wir nacheinander einige Sätze über die $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ beweisen. Wir können hierbei annehmen, dasz unendlich viele der x_n tatsächlich in P vorkommen (d. h. dasz ihre entsprechende Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ nicht identisch null sind), denn für eine endliche Anzahl von Variabeln ist der Hauptsatz offenbar richtig. Auch können wir annehmen, dasz alle Variabeln wirklich vorkommen (denn wir können immer die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ nennen).

Satz 1. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1)$ (und daher auch alle anderen $\mathfrak{P}_n(x_n)$[5]) hat ein gewisses Konvergenzgebiet. Sie definiert also eine analytische Funktion. Diese Funktion[6]

[5] Weil die Beschränktheit einer Potenzreihe von unendlich vielen Variabeln eine Eigenschaft ist, die unabhängig ist von der Reihenfolge der Variabeln.

[6] D. h. derjenige Funktionszweig, der durch das Element $\mathfrak{P}_1(x_1)$ definiert ist und aus $\mathfrak{P}_1(x_1)$ durch Fortsetzung erhalten werden kann, ohne dabei den Kreis $|x_1| = G$ zu überschreiten.

kann für $|x_1| < G$ nur logarithmische Singularitäten und Pole haben.

Beweis. *a.* Wir benutzen die Ungleichung (4) für $m = 2$ und betrachten also $P_2(x_1, x_2)$, das durch formales Ausrechnen von $\varphi\left(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2)\right)$ entsteht. Es sei x_2^λ die niedrigste in $\mathfrak{P}_2(x_2)$ vorkommende Potenz von x_2 und $a_\lambda^{(2)}$ ihr Koeffizient. Die Summe derjenigen Glieder aus $P_2(x_1, x_2)$, die x_2 in der Potenz λ enthalten, hat die Form $a_\lambda^{(2)} x_2^\lambda \psi_2(x_1)$, wo $\psi_2(x_1)$ eine Potenzreihe in x_1 ist, die durch formales Ausrechnen von $\varphi'\left(\mathfrak{P}_1(x_1)\right)$ erhalten werden kann. Weil $P_2(x_1, x_2)$ für $|x_1| < G$, $|x_2| < G$ absolut konvergiert ist auch $a_\lambda^{(2)} x_2^\lambda \psi_2(x_1)$ als Teilreihe einer absolut konvergenten Reihe für $|x_1| < G$ absolut konvergent. Also:

Die Potenzreihe $\psi_2(x_1)$, die durch formales Ausrechnen von $\varphi'\left(\mathfrak{P}_1(x_1)\right)$ erhalten werden kann, ist für $|x_1| < G$ konvergent und verschwindet nicht identisch.

b. Nach den Voraussetzungen ist die Potenzreihe, die man durch formales Ausrechnen von $\varphi\left(\mathfrak{P}_1(x_1)\right)$ erhält, für $|x_1| < G$ konvergent. Dasselbe gilt daher für ihre Ableitung, die man durch formales Ausrechnen von $\varphi'\left(\mathfrak{P}_1(x_1)\right)\mathfrak{P}_1'(x_1)$ erhalten kann. Also:

Die Potenzreihe $\psi_1(x_1)$, die man erhält, wenn man $\varphi'\left(\mathfrak{P}_1(x_1)\right)\mathfrak{P}_1'(x_1)$ formal nach Potenzen von x_1 entwickelt, ist für $|x_1| < G$ konvergent.

c. Wir kombinieren nun die Resultate aus *a.* und *b.* Nach *a.* und *b.* werden durch $\psi_1(x_1)$ und $\psi_2(x_1)$ im Kreise $|x_1| < G$ reguläre Funktionen dargestellt. Durch $\dfrac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)}$ wird also eine analytische Funktion dargestellt, die für $|x_1| < G$ nur Pole haben kann. In einer gewissen Umgebung des Nullpunktes musz also eine Laurent-Entwicklung der folgenden Form gültig sein:

$$\frac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)} = \frac{A_{-m}}{x_1{}^m} + \frac{A_{-(m-1)}}{x_1{}^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{x_1} + A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots$$

Weiter gilt die formale Beziehung[7]

$$\frac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)} = \mathfrak{P}_1{}'(x_1) = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_1^2 + \ldots.$$

Durch Vergleich ergibt sich $\mathfrak{P}_1{}'(x_1) = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots$, so dasz die — bis jetzt nur formale — Potenzreihe $\mathfrak{P}_1{}'(x_1)$ ein gewisses Konvergenzgebiet besitzen musz und also eine analytische Funktion definiert. Durch die — nun nicht mehr formale — Beziehung

$$\mathfrak{P}_1{}'(x_1) = \frac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)}$$

wird diese Funktion von der Umgebung des Nullpunktes aus im Kreise $|x_1| < G$ fortgesetzt, so dasz $\mathfrak{P}_1{}'(x_1)$ im Kreise $|x_1| < G$ nur Pole haben kann.[8]

Durch Integration folgt hieraus, dasz $\mathfrak{P}_1(x_1)$[6] für $|x_1| < G$ höchstens logarithmische Singularitäten und Pole haben kann.

Satz 2. $\mathfrak{P}_1(x_1)$[6] (und daher auch alle anderen $\mathfrak{P}_n(x_n)$) kann für $|x_1| < G$ keine Pole haben. In den logarithmischen Singularitäten kann auch kein Pol-Bestandteil vorhanden sein.

Beweis. Die Funktion $\psi_3(x_1)$, deren Potenzreihenentwicklung durch formales Ausrechnen von $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1))$ erhalten werden kann, ist für $|x_1| < G$ regulär.

Es sei nun α ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(x_1)$, so dasz

[7] Formale Division ist das Umgekehrte von formaler Multiplikation. Die Gleichung des Textes bedeutet also, dasz die formale Beziehung $\psi_1(x_1) = \psi_2(x_1)\,\mathfrak{P}_1{}'(x_1)$ gilt, wenn für $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_1)$ und $\mathfrak{P}_1{}'(x_1)$ die Potenzreihen eingesetzt werden. Formale Division zweier Potenzreihen (von denen der Divisor nicht identisch verschwindet) führt offenbar zu einer eindeutigen Entwicklung nach steigenden Potenzen von x_1, mit höchstens endlich vielen negativen Exponenten.

[8] Dieselbe Bemerkung über $\mathfrak{P}_1{}'(x_1)$ wie in [6] über $\mathfrak{P}_1(x_1)$.

in einer Umgebung dieses Punktes eine Entwicklung von der Form

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A \log (x_1 - \alpha) + \sum_{n=1}^{m} \frac{A_n}{(x_1 - \alpha)^n} + \mathfrak{P}(x_1 - \alpha)$$

gilt ($\mathfrak{P}(x_1 - \alpha)$ ist eine in einer Umgebung von $x_1 = \alpha$ konvergente Potenzreihe in $x_1 - \alpha$). Es handelt sich dann darum, zu beweisen, dasz alle A_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$ null sind. Wir werden zeigen, dasz die ganze transzendente Funktion φ sich auf eine Konstante reduziert, wenn dies nicht der Fall ist.

Zuerst bemerken wir, dasz, weil $\psi_3(x_1)$ im Kreise $|x_1| < G$ regulär ist, $\lim\limits_{x_1 \to \alpha} \varphi\big(\mathfrak{P}_1(x_1)\big) = \lim\limits_{x_1 \to \alpha} \psi_3(x_1)$ existiert und einen gewissen endlichen Wert β hat, und zwar unabhängig davon, in welcher Weise sich x_1 dem Punkte α nähert.

Wir setzen

$$w_1 = \sum_{n=1}^{m} \frac{A_n}{(x_1 - \alpha)^n} + \mathfrak{P}(x_1 - \alpha), \quad w_2 = A \log (x_1 - \alpha),$$
$$w = w_1 + w_2.$$

Wenn dann x_1 einen kleinen Kreis um den Punkt α durchläuft, so durchläuft w_1 eine »grosze«[9] geschlossene Kurve, während w_2 sich um $2\pi i A$ ändert; die Summe w von w_1 und w_2 beschreibt also eine »grosze« Kurve um den Nullpunkt, und den Endpunkt erhält man aus dem Anfangspunkt durch Verschiebung um $2\pi i A$. Wir können nun x_1 den kleinen Kreis nochmals durchlaufen lassen. Dann durchläuft w wieder eine »grosze« Kurve, und der Endpunkt ist wieder aus dem Anfangspunkt entstanden

[9] Das Wort »grosze« Kurve bedeutet, dasz die Kurve nach und nach in das Unendliche rückt, wenn der von x_1 beschriebene Kreis kleiner und kleiner, zuletzt beliebig klein genommen wird.

durch Verschiebung um $2\pi i A$. Wir können dies beliebig oft wiederholen, auch in negativem Sinne; w beschreibt dann eine Spiralkurve γ. Wenn wir nun den Radius des von x_1 um den Punkt α beschriebenen Kreises stetig nach Null abnehmen lassen, so zieht sich die Kurve γ in das Unendliche und durchstreift dabei sämtliche Werte, die einen Modul haben, der gröszer ist als eine gewisse endliche Zahl. Hieraus folgt, dasz, wenn nicht alle A_n $(n = 1, 2, \ldots . m)$ null sind, die Funktion $\mathfrak{P}_1(x_1)$ in der Umgebung des Punktes α sämtliche Werte einer gewissen Umgebung des unendlich fernen Punktes der w-Ebene annimmt. Wenn $w = \mathfrak{P}_1(x_1)$ sich also über einen beliebigen Weg in das Unendliche bewegt, strebt $\varphi(w)$ der konstanten Zahl β zu, unabhängig davon, welchen Weg w dabei durchläuft. Nach einem bekannten Satze musz $\varphi(w)$ sich dann auf eine Konstante reduzieren, was nach den Voraussetzungen nicht der Fall ist.

Bevor wir weiter gehen, seien nun zuerst zwei Bemerkungen gemacht. Wie eben bewiesen ist, können die $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ im Kreise $|x_n| < G$ nur logarithmische Singularitäten »ohne Pol-Bestandteil« haben. Die Anzahl der Singularitäten kann sehr gut unendlich sein. Weil aber $G > 1$ gewählt ist, ist die Anzahl der Singularitäten im Kreise $|x_n| \leq 1$ endlich.

Die zweite Bemerkung ist die folgende: Wenn es zu einer (nicht konstanten) ganzen Transzendenten $\varphi(y)$ eine Zahl M_1 gibt, derart, dasz $\varphi(y)$ in der Form $V(e^{\frac{y}{M_1}})$ geschrieben werden kann, wo $V(z)$ eine ganze Transzendente von z ist, so gibt es unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z. B. $2M_1, 3M_1, \ldots .$ Unter allen diesen Zahlen gibt es aber gewisz eine (und nur eine) Zahl M mit der Eigenschaft, dasz jede andre Zahl M_1 ein positives ganzes Multiplum von M ist[10]. Wenn wir in dem folgenden Satz 3 von einer Funktion $\varphi(y)$ sprechen, die in der Form $V(e^{\frac{y}{M}})$ (V ganze Transzendente) geschrieben werden kann, so werden wir uns hierbei M als die oben charakterisierte, d. h. als die »kleinste« unter den möglichen Zahlen denken.

Satz 3. Wenn die ganze transzendente Funktion $\varphi(y)$ nicht die Form $V(e^{\frac{y}{M}})$ hat (wo V wieder eine ganze Transzendente ist), so ist $\mathfrak{P}_1(x_1)$ für $|x_1| \leqq 1$ regulär. Wenn dagegen $\varphi(y)$ in der Form $V(e^{\frac{y}{M}})$ darzustellen ist, so können wir nur schlieszen, dasz $\mathfrak{P}_1(x_1)$ die Form $M \log f_1(x_1)$ hat, wo $f_1(x_1)$ für $|x_1| \leqq 1$ regulär ist (dasselbe gilt natürlich wieder für die anderen Funktionen $\mathfrak{P}_n(x_n)$, $n = 2, 3, \ldots.$).

Beweis: Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dasz, falls $\mathfrak{P}_1(x_1)$ logarithmische Singularitäten hat, immer $\varphi(y)$ die Gestalt $V(e^{\frac{y}{M}})$ und $\mathfrak{P}_1(x_1)$ die Gestalt $M \log f_1(x_1)$ hat.

Es sei α eine logarithmische Singularität von $\mathfrak{P}_1(x_1)$. Nach Satz 2 wird dann $\mathfrak{P}_1(x_1)$ in der Umgebung dieses Punktes dargestellt durch

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A \log(x_1 - \alpha) + R_\alpha(x_1)$$

wo $R_\alpha(x_1)$ eine Funktion ist, die in $x_1 = \alpha$ regulär ist. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$S_\alpha(x_1) = e^{\frac{1}{A} R_\alpha(x_1)}, \quad T_\alpha(x_1) = (x_1 - \alpha) S_\alpha(x_1).$$

Dann ist $S_\alpha(\alpha) \neq 0$, so dasz $T_\alpha(x_1)$ im Punkte α eine einfache Nullstelle hat. Ist also $x_1 = U_\alpha(v)$ die Um-

[10] Man erhält M folgendermaszen: Unter den Perioden der periodischen Funktion $\varphi(y) = V(e^{\frac{y}{M_1}})$ gibt es zwei »primitive Perioden« $\pm 2\pi i M_0$. M ist dann diejenige der beiden Zahlen $+M_0$ und $-M_0$ von welcher M_1 ein positives Multiplum ist.

kehrung von $v = T_\alpha(x_1)$, so ist $U_\alpha(v)$ eine analytische Funktion, die in einer Umgebung des Nullpunktes regulär ist.

Nun ist nach den Voraussetzungen $\psi_3(x_1) = \varphi(\mathfrak{P}_1(x_1))$ eine im Kreise $|x_1| < G$, also auch für $|x_1| \leqq 1$, reguläre Funktion, und $\psi_3(x_1) = \varphi(A \log T_\alpha(x_1))$, oder, wenn wir noch $A \log T_\alpha(x_1) = y$ setzen:

$$\varphi(y) = \psi_3\left(U_\alpha(e^{\frac{y}{A}})\right) = V_\alpha(e^{\frac{y}{A}}). \tag{5}$$

Hierin haben wir zur Abkürzung das Funktionszeichen V_α statt $\psi(U_\alpha)$ eingeführt.

Betrachten wir eine Umgebung des Punktes $x_1 = \alpha$ in der x_1-Ebene. Diese wird durch $v = T_\alpha(x_1)$ auf eine Umgebung des Nullpunktes in der v-Ebene abgebildet und weiter durch $y = A \log v$ auf eine Halbebene E in der y-Ebene. In dieser Halbebene ist $U_\alpha(e^{\frac{y}{A}})$ regulär, und, weil $\psi_3(x_1)$ für $|x_1| \leqq 1$ regulär ist, ist auch $V_\alpha(e^{\frac{y}{A}})$ in E regulär. In E gilt die Gleichung (5). Speziell geht daraus hervor, dasz in E:

$$\varphi(y + 2\pi i A) = \varphi(y). \tag{6}$$

Die Funktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen sind aber ganze Transzendenten. (6) musz also in der ganzen y-Ebene gültig sein.

Die Gleichung (5) kann aber auch so aufgefaszt werden, dasz sie die Fortsetzung von V_α in der ganzen Ebene gibt. Setzen wir $e^{\frac{y}{A}} = v$, dann wird (5):

$$V_\alpha(v) = \varphi(A \log v).$$

Dies gilt in einer Umgebung des Nullpunktes der v-Ebene. Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach (6) eine in der ganzen v-Ebene eindeutige, reguläre Funktion mit Ausnahme vielleicht des Nullpunktes. Dasselbe gilt daher für

$V_\alpha(v)$. Leicht ergibt sich, dasz $V_\alpha(v)$ auch im Nullpunkte regulär ist, denn $\lim\limits_{v \to 0} V_\alpha(v) = \lim\limits_{v \to 0} \varphi(A \log v) = \lim\limits_{x_1 \to \alpha} \psi_3(x_1)$ hat einen bestimmten endlichen Wert, unabhängig von der Weise, in der v sich dem Nullpunkte nähert. Hieraus folgt aber nach einem bekannten Satze, dasz $V_\alpha(v)$ im Nullpunkte regulär ist.

Die Funktion V_α ist also eine ganze Transzendente.

Führen wir die in der vorausgeschickten Bemerkung eingeführte Zahl M ein, dann ergibt sich $\varphi(y) = V(e^{\frac{y}{M}})$ (V = ganze Transzendente), und $A = aM$, wo a eine ganze positive Zahl ist.

Sind α_n $(n = 1, 2, \ldots . r)$ die andern singulären Stellen von $\mathfrak{P}_1(x_1)$ im Kreise $|x_1| \leqq 1$, (wie schon bemerkt, ist die Anzahl dieser Stellen endlich) und gilt in einer Umgebung von α_n, dasz

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A_n \log(x_1 - \alpha_n) + R_{\alpha_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \ldots r),$$

wo $R_{\alpha_n}(x_1)$ in $x_1 = \alpha_n$ regulär ist, so können wir in derselben Weise $A_n = a_n M$ $(n = 1, 2, \ldots . r)$ beweisen, wo alle a_n $(n = 1, 2, \ldots . r)$ ganze positive Zahlen sind. Die Funktion $\mathfrak{P}_1(x_1)$ läszt sich nun wie folgt schreiben:

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A \log(x_1 - \alpha) + A_1 \log(x_1 - \alpha_1) + A_2 \log(x_1 - \alpha_2) + \ldots . + A_r \log(x_1 - \alpha_r) + G_1(x_1)$$

(wo $G_1(x_1)$ im Kreise $|x_1| \leqq 1$ regulär ist), oder

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = M \log(x_1 - \alpha)^a (x_1 - \alpha_1)^{a_1} (x_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots . (x_1 - \alpha_r)^{a_r} e^{G_1(x_1)} = M \log f_1(x_1).$$

Weil $(x_1 - \alpha)^a (x_1 - \alpha_1)^{a_1} (x_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots . (x_1 - \alpha_r)^{a_r} e^{G_1(x_1)}$ im Kreise $|x_1| \leqq 1$ regulär ist, ist Satz 3 hiermit bewiesen.

§ 3.

Bei dem Beweise des Hauptsatzes werden wir den folgenden, von H. BOHR[11] bewiesenen Satz gebrauchen:

Es sei die Funktion $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $f(0) = 0$, regulär im Kreise $|z| \leqq 1$. Es sei $M(\varrho)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreise $|z| = \varrho$ $(0 < \varrho < 1)$. Ist dann r der Radius des gröszten Kreises, dessen Punkte sämtlich Werte repräsentieren, die von $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ angenommen werden, so gilt: $r \geqq k\,M(\varrho)$, wo k eine nur von ϱ abhängige Konstante ist (die also gleichmäszig gilt für alle Funktionen $f(z)$, die den Voraussetzungen des Satzes genügen).

In diesem § werden wir den Hauptsatz beweisen für den ersten der beiden nach Satz 3 möglichen Fälle. Es seien also die Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ Elemente von für $|x_n| \leqq 1$ regulären Funktionen[12]. Dann gilt der

Satz 4. Ist r_n $(n = 1, 2, \ldots.)$ der Radius des gröszten Kreises in der $\mathfrak{P}_n$-Ebene, dessen Punkte sämtlich Werte repräsentieren, die von $\mathfrak{P}_n(x_n)$ im Kreise $|x_n| \leqq 1$ angenommen werden, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent.

Beweis. Zuerst sei bemerkt, dasz die Gleichung

$$P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m) =$$
$$= \varphi\big(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m)\big) \quad (m = 1, 2, \ldots.),$$

die im Anfang nur einen formalen Sinn hatte, jetzt, wo die $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ wirkliche Funktionen (und nicht mehr formale Potenzreihen) sind, eine »reale« Bedeutung erworben hat, d. h. dasz sie benutzt werden kann, um

[11] H. BOHR, Über einen Satz des Herrn LANDAU, (Noch nicht publiziert).

[12] Dieselbe Bemerkung über $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, die in [6] über $\mathfrak{P}_1(x_1)$ gemacht ist.

$P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ zu berechnen. Dies geht sofort daraus hervor, dasz die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\beta_r| \left(\sum_{n=1}^{m} \sum_{s=1}^{\infty} |a_s^{(n)} x_n^s| \right)^r$$

für $|x_n| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots. m)$ konvergiert.

Die Ungleichung (4) wird also

$$|\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m))| < K. \tag{7}$$

Weil $\varphi(y)$ eine ganze Transzendente ist, können wir eine Zahl L so grosz annehmen, dasz das Maximum von $|\varphi(y)|$ für $|y| = L$ gröszer als K ist. Wenn nur $x_n (n = 1, 2, \ldots.)$ die respektiven Einheitskreise $|x_n| \leqq 1$ durchlaufen, nehmen die Funktionen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ nach Voraussetzung alle Werte an, die durch $|\mathfrak{P}_n(x_n)| = r_n$ bestimmt sind. Hieraus folgt, dasz $\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m)$ alle Werte annimmt, deren absoluter Betrag $r_1 + r_2 + \ldots. + r_m$ ist.

Hieraus folgt $r_1 + r_2 + \ldots. + r_m < L$. Denn wäre $r_1 + r_2 + \ldots. + r_m \leqq L$, dann wäre das Maximum von $|\varphi(y)|$ auf dem Kreise $|y| = r_1 + r_2 + \ldots. + r_m$ gröszer als K, und weil $\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m)$ alle Werte auf diesem Kreis annimmt, würden Werte $x_1', x_2', \ldots. x_m'$ existieren müssen $(|x_n'| \leqq 1,\ n = 1, 2, \ldots. m)$ wofür $|\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1') + \mathfrak{P}_2(x_2') + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m'))| > K$ wäre. Dies kann nach (7) nicht der Fall sein. Daher ist $\sum_{n=1}^{m} r_n < L$. Weil L (ebenso wie K) von m unabhängig ist, musz also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergieren.

Aus diesem Ergebnis läszt sich nun die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.)$ leicht mit Hilfe des Bohrschen Satzes ableiten.

Beweis des Hauptsatzes für den ersten Fall.

Es sei $\Theta = \theta G$ die in § 2 definierte Zahl. Wir wollen die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .)$ im Gebiete $|x_n| \leqq \Theta\, (n = 1, 2, \ldots .)$ beweisen. Dazu wählen wir eine Zahl ϱ derart, dasz $\Theta < \varrho < 1$, z. B. $\varrho = \frac{1+\Theta}{2}$. Es sei $M_n(\varrho)$ das Maximum von $|\mathfrak{P}_n(x_n)|$ auf dem Kreise $|x_n| = \varrho$ $(n = 1, 2, \ldots .)$. Dann ist nach dem BOHR-schen Satze:

$$M_n(\varrho) \leqq \frac{r_n}{k} = r_n k_1, \tag{8}$$

wo k_1 eine nur von ϱ (oder nur von Θ) abhängige Zahl ist.

Von $M_n(\varrho)$ gehen wir auf Majoranten über. Es sei $\mathfrak{P}_n(x_n) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(n)} x_n^s$, $(n = 1, 2, \ldots .)$. Dann gilt nach CAUCHY die Ungleichung

$$|a_s^{(n)}| \leqq \frac{M_n(\varrho)}{\varrho^s} \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots . . \\ s = 1, 2, \ldots . . \end{pmatrix},$$

also

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_s^{(n)}|\, \Theta^s \leqq M_n(\varrho) \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^s = \frac{2\,\Theta M_n(\varrho)}{1-\Theta},$$

oder nach (8):

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_s^{(n)}|\, \Theta^s \leqq \frac{2\, k_1 \Theta r_n}{1-\Theta}. \tag{9}$$

Nun ist nach Satz 4 die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent; also ist nach (9) auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |a_s^{(n)}|\, \Theta^s$$

konvergent. Ist weiter $\varphi(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r y^r$, so ist $\sum_{r=0}^{\infty} |\beta_r|\, |y|^r$ für jeden endlichen Wert von y konvergent. Dies ergibt die Konvergenz von

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\beta_r| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |a_s^{(n)}|\, \Theta^s\right)^r.$$

Man darf also die Reihenfolge der Glieder der Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(n)} x_n^s \right)^r \tag{10}$$

für $|x_n| \leqq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ willkürlich ändern und in willkürlicher Weise verschiedene Glieder in eines zusammenfügen: immer erhält man eine absolut konvergente Reihe. Durch diese Operationen kann (10) nach Definition in die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .)$ übergeführt werden, die also im Gebiete $|x_n| \leqq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ absolut konvergiert.

§ 4.

Es liege nun der zweite der nach Satz 3 möglichen Fälle vor. Dann ist

$$\varphi(y) = V(e^{\frac{y}{M}}) \text{ und } \mathfrak{P}_n(x_n) = M \log f_n(x_n), \; (n = 1, 2, \ldots .),$$

wo V wieder eine ganze transzendente Funktion ist, und die Funktionen $f_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ für $|x_n| \leqq 1$ regulär sind. Wir schreiben

$$e^{\frac{1}{M}\mathfrak{P}_n(x_n)} = f_n(x_n) = 1 + \Phi_n(x_n) \; (n = 1, 2, \ldots .). \tag{10}$$

Die Funktionen $\Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ sind dann für $|x_n| \leqq 1$ regulär und verschwinden im Nullpunkt, wie sofort aus (10) hervorgeht.

Wie schon in § 1 bewiesen ist, erhält man durch formales Ausrechnen von $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$ eine Potenzreihe unendlich vieler Variabeln.

Satz 5. Die Potenzreihen, die man durch formales Ausrechnen von $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x_n)\right)$ und $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$ erhält, sind identisch.

Beweis. Es genügt offenbar, zu beweisen, dasz $P_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$ für jedes $m \geqq 1$ dieselbe Potenzreihe ist, wie der m-te Abschnitt $R_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$ der aus

$V\left(\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))\right)$ erhaltenen Potenzreihe. Wir werden beweisen, dasz (nicht nur »formal«, sondern auch »real«)

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{m}\mathfrak{P}_n(x_n)\right) = V(e^{\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{m}\mathfrak{P}_n(x_n)}) =$$

$$= V\left(\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))\right) \text{ für } |x_n| \leqq 1 \ (n = 1, 2, \ldots\ldots m).$$

Ist $\varphi(y) = \sum_{r=0}^{\infty}\beta_r y^r$ und $V(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\gamma_r z^r$, so gilt für alle y die Identität

$$\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r y^r = \sum_{r=0}^{\infty}\gamma_r\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{y}{M}\right)^p\right]^r.$$

Sind also die Reihen $\mathfrak{P}_n(x_n) = \sum_{s=1}^{\infty}a_s^{(n)}x_n^s$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ für $|x_n| \leqq k_n$ konvergent, so ist für $|x_n| \leqq k_n$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}a_s^{(n)}x_n^s\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\gamma_r\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{M^p}\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}a_s^{(n)}x_n^s\right)^p\right]^r. \qquad (11)$$

Weil die Reihen

$$\sum_{r=0}^{\infty}|\beta_r|\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}|a_s^{(n)}x_n^s|\right)^r$$

und $$\sum_{r=0}^{\infty}|\gamma_r|\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{M^p}\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}|a_s^{(n)}x_n^s|\right)^p\right]^r$$

für $|x_n| < k_n$ $(n = 1, 2, \ldots. m)$ konvergieren, darf man auf jeder der beiden Seiten von (11) für $|x_n| < k_n$ die Reihenfolge der Glieder willkürlich ändern und Glieder zusammenfassen. Hieraus ersieht man:

$$P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m) = R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$$

für $|x_n| < k_n$ $(n = 1, 2, \ldots . m)$. Dasz dies für $|x_n| \leqq 1$ gültig bleibt, folgt durch analytische Fortsetzung. Denn $P_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$ ist nach (4) eine für $|x_n| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots m)$ reguläre Funktion von $x_1, x_2, \ldots . x_m$, und dasselbe gilt daher für $R_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$, weil R_m für $|x_n| < k_n$ regulär ist.

Hiermit ist der Satz 5 bewiesen. Speziell kann man die Ungleichung (4) nun wie folgt schreiben:

$$\left| V\left(\prod_{n=1}^{m} \left(1 + \Phi_n(x_n)\right)\right) \right| < K. \tag{12}$$

Ist r_n $(n = 1, 2, \ldots .)$ der Radius des gröszten Kreises, dessen Punkte Werte repräsentieren, die von $\Phi_n(x_n)$ im Kreise $|x_n| \leqq 1$ angenommen werden, so gilt der

Satz 6. Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + r_n)$, oder, was dasselbe besagt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ ist konvergent.

Beweis. *a.* Aus (12) können wir zuerst schlieszen, dasz — ungenau ausgedrückt — unabhängig von m, die Funktion $\prod_{n=1}^{m}\left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ nicht in jeder Richtung Werte annehmen kann, die unendlich fern liegen, oder genauer: Wenn N grosz genug gewählt ist, kann keine geschlossene Kurve γ (der den Nullpunkt in ihrem Innern enthält) in einer z-Ebene existieren mit den beiden folgenden Eigenschaften:

1°. Für jeden Punkt z' der Kurve ist $|z'| \geqq N$.

2°. Wenn z' ein willkürlicher Punkt von γ ist, ist $\prod_{n=1}^{m}\left(1 + \Phi_n(x_n')\right) = z'$ bei passender Wahl von $m, x_1', x_2', \ldots x_m'$. $(|x_n| \leqq 1,\ n = 1, 2, \ldots . m)$.

Denn nehmen wir an, es existiere eine solche Kurve γ. Es sei dann L so grosz gewählt, dasz $\max\limits_{|z| = L} |V(z)| > K$, was möglich ist, weil V eine ganze Transzendente ist. Es sei $N \geqq L$. Dann ist das Maximum von $|V(z)|$ auf der Kurve γ gröszer als K. Es sei z' ein Punkt auf der Kurve γ, wo $|V(z')| > K$. Dann würden nach 2°. Werte m, $x_1, x_2, \ldots . x_m$ ($|x_n| \leqq 1$, $n = 1, 2, \ldots . m$) existieren wofür

$$\left| V\left(\prod_{n=1}^{m}\left((1+\Phi_n(x_n)\right)\right)\right| > K,$$

was nach (12) unmöglich ist.

Der Satz (6) wird also bewiesen sein, wenn wir zeigen können, dasz, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ divergiert, eine Kurve γ mit den beiden Eigenschaften 1°. und 2°. existiert.

b. Wir werden drei Fälle unterscheiden:

A. Keine der Zahlen r_n ist > 1, und es gibt nur eine endliche Anzahl der r_n, die gleich eins sind.

Bei der Betrachtung der Wertmenge, die von $\prod_{n=1}^{m}\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ angenommen wird, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dasz keines der r_n gleich 1 ist. Denn wenn $r_s = 1$, können wir $x_s = 0$ nehmen. Dann trägt $1+\Phi_s(x_s)$ zum Produkt $\prod_{n=1}^{m}\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ mit dem Faktor eins bei, und diesen können wir fortlassen.

Es seien also alle r_n kleiner als eins. Wir schneiden alle x_n-Ebenen ($n = 1, 2, \ldots .$) längs der negativen reellen Achse auf und betrachten die Wertmenge $\sum_{n=1}^{m} \log\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$, wenn die x_n ($n = 1, 2, \ldots .$) die Kreise $|x_n| \leqq 1$ durchlaufen, und die Logarithmen ihren Hauptwert haben.

Nun gehört zur Menge der Werte, die von $1+\Phi_n(x_n)$ im Kreise $|x_n| \leqq 1$ angenommen werden, sicher ein Kreis mit dem Radius r_n um den Punkt 1. Wenn $1+\Phi_n(x_n)$ diesen Kreis durchläuft, durchläuft $\log\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ eine konvexe Kurve um den Nullpunkt. Um die Wertmenge

$\sum_{n=1}^{m} \log\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ zu bekommen, müssen wir m konvexe Kurven addieren. Hierüber ist von H. Bohr der folgende Satz bewiesen[13]: Die Summe von m konvexen Kurven ist entweder ein Gebiet, das von einer einzigen konvexen Kurve Y_m begrenzt wird, oder ein Gebiet, das von zwei konvexen Kurven Y_m und I_m begrenzt wird, von denen I_m gänzlich innerhalb Y_m gelegen ist. Wenn alle die m ursprünglichen konvexen Kurven den Nullpunkt in ihrem Innern enthalten und e_n der Minimum-Abstand vom Nullpunkt zur n-ten Kurve ($n = 1, 2, \ldots m$) ist, so enthält die Kurve Y_m in ihrem Innern (inkl. Rand) einen Kreis mit dem Zentrum im Nullpunkte und dem Radius $\sum_{n=1}^{m} e_n$.

Diesen Satz können wir unmittelbar auf unsern Fall anwenden. Wir können leicht beweisen, dasz eine von n unabhängige Zahl c existiert derart, dasz $e_n > c r_n$, z. B. wie folgt:

Es sei γ_n die von $\log\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ durchlaufene Kurve, wenn $\Phi_n(x_n)$ den Kreis mit dem Radius r_n um den Punkt eins durchläuft. Diese Kurve ist konvex und enthält den Nullpunkt in ihrem Innern. Es seien A, B, C, D die Schnittpunkte von γ_n mit der pos. reellen, pos. imag., neg. reellen und neg. imag. Achse. Dann ergibt eine leichte Rechnung: $OA = \log(1+r_n)$, $OB = OD = 2 \arcsin \frac{r_n}{2}$, $OC = -\log(1-r_n)$. Es existieren also Konstanten c_1, c_2, c_3, derart dasz $OA > c_1 r_n$, $OB = OD > c_2 r_n$, $OC > c_3 r_n$. Hieraus folgt aber, dasz, wenn OE, OF, OG, OH Geraden sind, die vom Nullpunkt aus $\perp$ AB, BC, CD, DA gezogen werden, auch Konstanten c_4, c_5 existieren derart, dasz $OE = OH > c_4 r_n$, $OF = OG > c_5 r_n$. Weil aber die Kurve γ_n konvex ist, musz e_n göszer sein

[13] H. Bohr. Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver, Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl., (1913). p. 350).

als die kürzeste der Strecken OE, OF, OG, OH, so dasz auch $e_n > c r_n$.

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ divergiert, ist also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ divergent, so dasz wir m so grosz wählen können, dasz $\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{m} e_n\right)^2 - \pi^2} > \log N$. Wir wählen nun auf der positiven reellen Achse auszerhalb Y_m einen veränderlichen Punkt P mit der Abszisse p und ziehen die Gerade UPV, die die Punkte $U = p + i\pi$ und $V = p - i\pi$ verbindet. Wir verschieben dann UPV so weit nach links, dasz U auf Y_m fällt. Weil die Kurve Y_m symmetrisch zur reellen Achse ist (sie ist ja die Summe von m zur reellen Achse symmetrischen Kurven), fällt dann auch V auf Y_m. Wir betrachten nun denjenigen Teil T der Kurve Y_m, der rechts von UV gelegen ist. Ist dann w ein beliebiger Punkt auf diesem Kurvenstück, so ist $Rw \geqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{m} e_n\right)^2 - \pi^2} > \log N$. Bilden wir also das Kurvenstück T, das in der Ebene von $\log \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ liegt, auf die Ebene von $\prod_{n=1}^{m} \left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ ab, so erhalten wir eine grosze geschlossene Kurve, deren Punkte sämtlich weiter als N vom Nullpunkt entfernt sind. Hiermit ist die Existenz einer Kurve mit den beiden Eigenschaften 1°. und 2°. nachgewiesen.

B. Unendlich viele der r_n sind gleich eins. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dasz alle r_n gleich eins sind. Denn wenn eines der $r_n \neq 1$ ist (z. B. $r_s \neq 1$), können wir $x_s = 0$ annehmen, und der Faktor $1 + \Phi_s(x_s)$ trägt dann zum Produkt mit dem Faktor eins bei.

Wir betrachten $\left(1 + \Phi_1(x_1)\right) \left(1 + \Phi_2(x_2)\right)$. $1 + \Phi_1(x_1)$ nimmt alle Werte von der Form $1 + e^{i\theta_1} (-\pi < \theta_1 \leq \pi)$ im Einheitskreise $|x_1| \leq 1$ an. Ebenso nimmt $1 + \Phi_2(x_2)$

alle Werte von der Form $1+e^{i\theta_2}(-\pi<\theta_2\leqq\pi)$ an im Kreise $|x_2|\leqq 1$. Das Produkt $\left(1+\Phi_1(x_1)\right)\left(1+\Phi_2(x_2)\right)$ kan also alle Werte von der Form $(1+e^{i\theta_1})(1+e^{i\theta_2})$ annehmen. Zu diesen Werten gehört aber der Halbkreis mit dem Radius 2 und dem Zentrum im Nullpunkt, der rechts von der imaginären Achse gelegen ist. Denn, wenn man θ_1 und θ_2 derart bestimmen will, dasz

$$(1+e^{i\theta_1})(1+e^{i\theta_2}) = 2e^{i\varphi}\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

so musz gelten $\arg(1+e^{i\theta_1})+\arg(1+e^{i\theta_2}) = \varphi$, oder

$$\theta_1+\theta_2 = 2\varphi, \tag{13}$$

und wenn man nun θ_2 aus der ursprünglichen Gleichung eliminiert, erhält man

$$\cos(\theta_1-\varphi) = 1-\cos\varphi. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) kann man immer Werte θ_1 und θ_2 finden, weil $-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$, und also $0\leqq\cos\varphi\leqq 1$ ist.

Betrachten wir in derselben Weise die Wertmenge $\left(1+\Phi_3(x_3)\right)\left(1+\Phi_4(x_4)\right)$, so gehört auch hierzu der Halbkreis mit dem Radius 2. Wenn man aber zwei solcher Halbkreise mit einander multipliziert, bekommt man sämtliche Punkte des Kreises mit dem Radius 4 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Dieser letzte Kreis gehört also zur Menge der Werte von $\prod_{n=1}^{4}\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$, und hieraus folgt, dasz zur Wertmenge von $\prod_{n=1}^{4s}\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ sämtliche Punkte eines Kreises mit dem Radius 2^{2s} um den Nullpunkt gehören. Weil 2^{2s} mit $4s$ ins Unendliche wächst, ist hiermit auch für den zweiten Fall die Existenz einer Kurve γ mit den Eigenschaften 1°. und 2°. bewiesen.

C. Einer der Radien r_n ist gröszer als 1.

Wenn nur einer der Radien r_n gröszer als 1 ist, können wir die Beweisführung des Falles A oder B anwenden und dabei denjenigen Faktor, wofür $r_n > 1$, aus dem Produkte $\Pi\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ fortlassen. Wir können also annehmen, dasz zwei Radien r_n gefunden werden können, die gröszer als 1 sind, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dasz dies r_1 und r_2 sind. Wir betrachten die Wertmenge von $\left(1+\Phi_1(x_1)\right)\left(1+\Phi_2(x_2)\right)$. Zu dieser Menge gehört im besondern die Produktmenge, die man erhält, wenn man die zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 um den Punkt 1 mit einander multipliziert, und noch spezieller: die Produktmenge, die man bekommt, wenn man alle Punkte des Kreises mit dem Radius r_1 multipliziert mit dem Punkte $1+r_2$ des Kreises mit dem Radius 2. Diese letzte Menge ist aber eine geschlossene Kurve, die den Nullpunkt in ihrem Innern enthält und gänzlich auszerhalb des Kreises mit dem Radius $(r_1-1)(1+r_2)$ um den Nullpunkt liegt.

Hieraus folgt, dasz zur Menge $\prod\limits_{n=1}^{m}\left(1+\Phi_n(x_n)\right)$ eine Kurve γ gehört, die den Nullpunkt in ihrem Innern enthält und gänzlich auszerhalb des Kreises mit dem Radius $(r_1-1)\prod\limits_{n=2}^{m}(1+r_n)$ liegt, weil man $x_n\,(n=2,3\,\ldots\,.\,m)$ so wählen kann, dasz $1+\Phi_n(x_n)=1+r_n$ $(n=3,4,\ldots\,.\,m)$. Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ divergiert, kann man nun m so grosz nehmen, dasz $(r_1-1)\prod\limits_{n=2}^{m}(1+r_n) > N$, womit auch für den dritten Fall die Existenz einer Kurve γ mit den Eigenschaften 1°. und 2°. nachgewiesen ist.

Weil immer einer der 3 Fälle zutrifft, ist hiermit der Satz 6 bewiesen.

Hieraus können wir leicht die absolute Konvergenz der Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln beweisen. Dazu wenden wir wieder den am Anfang des § 3 genannten BOHR-schen Satz an.

Beweis des Hauptsatzes für den zweiten Fall.

Es sei wieder Θ die im Anfang des § 1 definierte Zahl des Intervalles $0 < \Theta < 1$. Wir wollen die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots . x_n, \ldots .)$ beweisen im Gebiete $|x_n| \leqq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots .)$. Dazu wählen wir eine Zahl ϱ derart, dasz $\Theta < \varrho < 1$, z. B. $\varrho = \frac{1+\Theta}{2}$.

Ist dann

$$\Phi_n(x_n) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(n)} x_n^s, \quad (n = 1, 2, \ldots .),$$

so können wir, gerade so wie im § 3 für $\mathfrak{P}_n(x_n)$ ausgeführt ist, beweisen, dasz

$$\sum_{s=1}^{\infty} |b_s^{(n)}| \Theta^s \leqq \frac{2 k_2 \Theta r_n}{1-\Theta},$$

wo k_2 eine nur von Θ abhängige Konstante ist.

Hieraus folgt nach Satz 6, dasz das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} |b_s^{(n)}| \Theta^s\right)$$

konvergiert. Daher ist auch, wenn $V(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r z^r$, die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\gamma_r| \left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} |b_s^{(n)}| \Theta^s\right)\right)^r$$

konvergent. Also ist die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ für $|x_n| \leqq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ absolut konvergent.

Haag, 22. Mai 1923.

H. D. KLOOSTERMAN.

Færdig fra Trykkeriet den 22. August 1923.