Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 4.

RECHERCHES

SUR CERTAINES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

DE FORMES SPÉCIALES

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

AVANT-PROPOS

Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement, je l'espère, j'ai développé les fondements d'une théorie générale des équations de LAGRANGE, fondements qui sont indispensables pour le calcul d'une table des solutions des équations susdites.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie Royale, j'étudie certaines classes d'équations de LAGRANGE de formes spéciales, mais néanmoins d'un caractère assez général pour donner des éclaircissements essentiels sur la nature des équations susdites, éclaircissements qui sont très désirables, parce qu'il n'existe que des traces, très rares et souvent trompeuses, d'une telle théorie.

La première Partie du présent Mémoire est consacrée à l'étude d'une classe de nombres fort intéressants, savoir les sommes de deux carrés premiers entre eux:

$$a = p^2 + q^2, \tag{1}$$

pour lesquels l'équation de FERMAT

$$x^2 - ay^2 = -1 \tag{2}$$

n'est pas résoluble. Ces nombres semblent être restés inaperçus jusqu'ici.

On dit généralement que, malgré les recherches de divers géomètres, on ne connaît pas encore complètement la condition nécessaire et suffisante que doit satisfaire la base a, pour que l'équation susdite soit résoluble.

Or, les résultats que j'ai obtenus semblent indiquer, par leur grande diversité, que l'établissement de cette condition suffisante et nécessaire est un problème extrêmement difficile, évidemment irrésoluble, à moins que l'on ne trouve des méthodes beaucoup plus profondes que celles appliquées jusqu'ici.

Remarquons, en passant, que, parmi les 243 bases de première espèce inférieures à 1500, on trouve 44 couples de la forme

$$4a+1, \quad 4a+5, \tag{3}$$

et le produit de ces deux nombres est toujours une base de seconde espèce.

Remarquons encore que les nombres de la forme (1) sont les seules bases de seconde espèce, pour lesquelles des équations de la forme

$$u^2-av^2 = \omega, \quad u^2-av^2 = -\omega \tag{4}$$

sont simultanément résolubles, et qu'il existe, pour chacune de ces bases, une infinité de nombres ω qui permettent de résoudre les deux équations susdites.

Dans les Tables jointes au présent Mémoire, je donne des éclaircissement numériques concernant les 41 bases de seconde espèce inférieures à 1500, savoir leur décomposition en facteurs premiers, en somme de deux carrés et, d'après les Tables de Degen[1] et de Cayley[2], leurs développements en fractions continues.

Et, chose curieuse, pour 17 de ces 41 nombres, on

[1] Canon Pellianus, Copenhague 1817.

[2] Report of the British Association for the advancement of Science 1893.

trouve immédiatement, à l'aide des nombres p et q qui figurent dans la décomposition (1), une solution de l'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = a - 1, \tag{5}$$

pour la base 221 même deux solutions de l'équation

$$u^2 - 221\,v^2 = 220.$$

De plus, il est facile de démontrer qu'il existe une infinité de bases de seconde espèce de la forme (1) qui possèdent la même propriété.

La seconde Partie de mon Mémoire est consacrée à l'étude des équations

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\,v^2 = \pm\,\omega, \tag{6}$$

où α est un positif entier quelconque. J'ai réussi à déterminer, quel que soit α, la plus petite valeur de ω, pour laquelle l'équation susdite soit résoluble, et à démontrer que l'équation (6) est, pour cette valeur minimum de ω, toujours du genre 2.

Soit, dans (6), α un nombre pair, cette valeur minimum est toujours déterminée par

$$\omega = 2\,\alpha,$$

de sorte que l'équation

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\,v^2 = \pm\,2\,\alpha \tag{7}$$

est toujours du genre 2, tandis que cette autre équation

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\,v^2 = \pm\,\alpha^2, \tag{8}$$

obtenue de (7) par l'opération itérative est, pour une infinité des valeurs de α, au moins du genre 4.

Dans la troisième Partie, je donne des généralisations des formules de Cayley et j'expose les propriétés curieuses des nombres A_{2r+1}, tirés de l'équation de Fermat

$$A_m^2 - aB_m^2 = (-1)^{m\varepsilon}, \tag{9}$$

où l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon}\, 4 \tag{10}$$

est supposée résoluble.

Quant à la quatrième Partie, elle contient des recherches sur diverses équations de Lagrange de formes spéciales, et je donne par exemple la solution complète de l'équation

$$(\alpha + 1)\, u^2 - (\alpha - 1)\, v^2 = 2, \tag{11}$$

où α est un nombre pair quelconque.

Copenhague, le 9 février 1923.

Niels Nielsen.

PREMIÈRE PARTIE

Sur les sommes de deux carrés.

I. Bases de seconde espèce.

Lagrange, dans sa résolution ingénieuse de l'équation de Fermat, a proposé à la postérité un problème très difficile, problème qui est évidemment encore très éloigné de sa résolution complète, savoir:

Trouver la condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par la base a, pour que l'équation indéterminée

$$x^2 - ay^2 = -1 \tag{1}$$

soit résoluble en positifs entiers.

En effet, abstraction faite de certaines règles, plus ou moins spéciales[1], on sait que l'équation (1) est toujours résoluble pour

$$a = (4k+1)^{2\varkappa+1}, \quad a = \alpha^2 + 1, \quad a = (2\alpha+1)^2 + 4, \tag{2}$$

où $4k+1$ est un nombre premier, tandis que α est un positif entier.

De plus, on sait que, dans l'équation (1) supposée résoluble, a doit être ou impair ou de la forme $4k+2$, et

[1] Voir par exemple G. Lejeune Dirichlet, dans les Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1834, p. 649—664; Werke t. I, p. 219—236; J. Sommer: Vorlesungen über Zahlentheorie, p. 167; Leipsic 1907.

que tous les facteurs premiers impairs de a sont nécessairement de la forme $4k+1$; c'est-à-dire que a est toujours, dans l'équation résoluble (1), la somme de deux carrés premiers entre eux.

Or, il est facile de voir que cette condition nécessaire n'est pas suffisante aussi, ce qui est mis en pleine lumière par la proposition:

I. L'équation indéterminée

$$(x+1)^2+(x-1)^2 = y^2-2 \tag{2}$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers.

Remarquons que l'équation proposée se présente sous la forme

$$2x^2 = y^2-4,$$

il est évident que x et y sont tous deux pairs. Posons donc

$$x = 2u, \quad y = 2v, \tag{3}$$

il résulte

$$v^2-2u^2 = 1, \tag{4}$$

ce qui donnera

$$v = A_{2n}, \quad u = B_{2n},$$

où nous avons posé généralement, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2-2B_m^2 = (-1)^m, \tag{5}$$

de sorte que nous aurons finalement, comme solution générale de l'équation (2),

$$x = 2B_{2n}, \quad y = 2A_{2n}. \tag{6}$$

Or, la proposition I donnera comme corollaire cette autre:

II. La somme de deux carrés, premiers entre eux,

$$(2B_{2n}+1)^2+(2B_{2n}-1)^2 \tag{7}$$

est toujours, quel que soit l'indice n, une base de seconde espèce.

On voit que les premiers des nombres de la forme (7) deviennent

$$34 = 5^2 + 3^2 = 6^2 - 2, \quad 1154 = 25^2 + 23^2 = 34^2 - 2$$
$$39202 = 141^2 + 139^2 = 198^2 - 2, \quad 131714 = 817^2 + 815^2 = 1154^2 - 2.$$

Étudions maintenant, à un autre point de vue, les bases que nous venons de mentionner.

A cet effet, supposons tout d'abord que a soit une base de première espèce, savoir que l'équation (1) soit résoluble, Legendre a remarqué que les deux équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = \omega, \quad u^2 - av^2 = -\omega \tag{8}$$

sont nécessairement en même temps résolubles ou non.

Or, cette condition suffisante pour la résolubilité simultanée des deux équations (8) n'est pas nécessaire, car il est facile de démontrer le théorème général:

III. *La condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité simultanée des équations de la forme (8) est que la base a soit la somme de deux carrés premiers entre eux.*

Pour mettre en pleine lumière cette propriété remarquable des sommes de deux carrés, nous avons à démontrer les deux lemmes suivants:

IV. *Supposons résolubles les deux équations (8), la base a est nécessairement la somme de deux carrés premiers entre eux.*

En effet, désignons par (u, v) respectivement (u_1, v_1) une solution quelconque de chacune des équations susdites, supposées résolubles, il résulte

$$(uu_1 \pm avv_1)^2 - a(uv_1 \pm u_1 v)^2 = -\omega^2. \tag{9}$$

Soit ensuite f le plus grand commun diviseur des deux nombres

$$uu_1 + (-1)^{\varepsilon} a v v_1, \quad u v_1 + (-1)^{\varepsilon} u_1 v,$$

f est aussi le plus grand commun diviseur et de u et ω et de v et ω. Supprimons donc, dans l'équation correspondante (8), le facteur f^2, commun aux deux membres de cette équation, il résulte une égalité de la forme

$$\alpha^2 - a\beta^2 = -\omega_1^2,$$

où α et ω_1 sont premiers entre eux, ce qui donnera

$$a\beta^2 = \alpha^2 + \omega_1^2,$$

donc a est nécessairement la somme de deux carrés premiers entre eux.

V. Soit la base a une somme de deux carrés premiers entre eux, il existe une infinité de valeurs de ω, telles que les équations (8) sont toutes deux résolubles.

Quant à cette proposition, M. G. Rasch m'a communiqué la démonstration suivante:

Posons

$$a = p^2 + q^2,$$

où p et q sont premiers entre eux, nous aurons, quels que soient les positifs entiers α et β,

$$a(\alpha^2 + \beta^2) = (p\alpha \pm q\beta)^2 + (p\beta \mp q\alpha)^2, \tag{10}$$

et il est possible de déterminer α et β tels que les deux nombres

$$p\alpha \pm q\beta, \quad p\beta \mp q\alpha$$

soient premiers entre eux, ce qui a par exemple lieu pour

$$p\beta - q\alpha = \pm 1$$

et cette équation indéterminée est toujours résoluble, ce qui donnera, en vertu de (10),

$$(11)\qquad a(\alpha^2+\beta^2)=\gamma^2+1,$$

et le nombre

$$\gamma = p\alpha + q\beta$$

est certainement premier avec a, α, β.

Posons ensuite

$$(12)\qquad \omega = a\beta^2-1,$$

il est évident que les équations

$$(13)\qquad u^2-av^2=\omega,\quad u^2-av^2=-\omega$$

sont toutes deux résolubles, ayant respectivement les solutions (γ, α) et $(1, \beta)$.

II. Sur la nature des sommes de deux carrés.

On voit que les propositions I et II de l'article précédent donnent immédiatement cette autre:

I. Il existe une infinité de bases de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés, premiers entre eux.

Or, il est facile de donner plusieurs autres classes de telles bases, comme le montrent clairement les propositions suivantes:

II. L'équation indéterminée

$$(1)\qquad x^2+(2x+1)^2=y^2+2$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers.

En effet, on aura, en vertu de (1),

$$5x^2+4x=y^2+1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2)\qquad x=\frac{-2+\sqrt{5y^2+9}}{5},$$

de sorte qu'il s'agit tout d'abord de résoudre l'équation de Lagrange

$$(3)\qquad z^2 - 5y^2 = 9,$$

Or, 5 n'étant pas résidu quadratique de 3, cette équation n'est résoluble, à moins que z et y ne soient tous deux multiples de 3. Soit donc

$$z = 3u, \quad y = 3v,$$

il résulte, en vertu de (3),

$$(4)\qquad u^2 - 5v^2 = 1,$$

ce qui donnera

$$(5)\qquad u = A_{2n}, \quad v = B_{2n},$$

où l'on aura, quel que soit l'indice m,

$$(6)\qquad A_m^2 - 5B_m^2 = (-1)^m.$$

Cela posé, reste encore à déterminer l'indice n qui figure dans les formules (5), tel que x devienne un positif entier, ce qui exige, en vertu de (2), que

$$x = \frac{3A_{2n} - 2}{5}$$

soit un nombre entier.

Or, les premières solutions de l'équation (6) étant

$$(2, 1), \ (9, 4), \ (38, 17), \ldots,$$

on aura

$$A_2 = 9,$$

de sorte qu'il résulte, en vertu des formules récursives de LAGRANGE,

$$A_{2n} \equiv 9^n \equiv (-1)^n \pmod{5},$$

ce qui donnera

$$3A_{2n} - 2 \equiv (-1)^n 3 - 2 \pmod{5};$$

c'est-à-dire que l'on aura généralement

$$3A_{4n-2} - 2 \equiv 0 \pmod{5},$$

quel que soit le positif entier n; donc la solution générale de l'équation proposée se présente sous la forme

$$x_n = \frac{3A_{4n-2} - 2}{5}, \quad y_n = 3B_{4n-2}. \tag{7}$$

Cette proposition démontrée, nous avons à revenir aux bases générales de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés premiers entre eux, savoir

$$a = a^2 + \beta^2;$$

nous savons dès à présent que a doit toujours contenir au moins deux facteurs premiers inégaux. Quant aux bases de première espèce, nous avons tout d'abord à démontrer le lemme fondamental:

III. Soient les trois nombres a, b, c, pris deux à deux, premiers entre eux, l'équation indéterminée

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = z^2 + c^2 \tag{8}$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers de x, y, z.

On voit, en effet, que l'équation proposée n'est autre chose que celle-ci

$$(ax \pm by)^2 + (ay \mp bx)^2 = z^2 + c^2,$$

de sorte que l'on aura à déterminer x et y, tels que

$$ax \pm by = \pm c, \tag{9}$$

ce qui donnera

$$ay \mp bx = \pm z. \tag{10}$$

Soit maintenant α et β une solution quelconque de l'équation indéterminée (9), toujours résoluble, les valeurs générales de x et y se présentent sous la forme

$$x = |\alpha + bk|, \quad y = |\beta + ak|, \tag{11}$$

où k est un nombre entier quelconque; donc on aura, en vertu de (10),

$$z = |a\beta + b\alpha + k(a^2 + b^2)|. \tag{12}$$

Cela posé, il est évident que la formule (8) donnera immédiatement plusieurs propositions intéressantes concernant les sommes de deux carrés premiers entre eux.

En effet, soit, en premier lieu, $c = 1$, nous aurons:

IV. Il existe une infinité de bases de première espèce qui contiennent un nombre quelconque de facteurs premiers inégaux.

V. Il existe une infinité des bases de première espèce qui contiennent comme facteurs un nombre quelconque de bases de seconde espèce.

Soit ensuite, dans la formule (8),

$$a = b = 1,$$

on aura, quel que soit le positif entier α,

$$2\left(\alpha^2 + (\alpha+1)^2\right) = (2\alpha+1)^2 + 1,$$

ce qui donnera la proposition, curieuse en comparaison avec la proposition II de l'article précédent:

VI. Le double de la somme de deux carrés consécutifs est toujours une base de première espèce.

Études maintenant le nombre

$$a(a+4) = (a+2)^2 - 4 \tag{13}$$

qui est toujours une base de seconde espèce; c'est pourquoi qu'il est très curieux, ce me semble, qu'il existe 44 couples de nombres consécutifs de la forme $4k+1$, inférieurs à 1500, qui sont tous deux des bases de première espèce, tandis que le produit de ces deux nombres consécutifs est toujours une base de seconde espèce. Et il existe seulement 243 bases de première espèce inférieures à 1500.

Mais y a-t-il une infinité de tels couples de bases consécutives de première espèce?

Ce problème est peut-être aussi difficile que le problème concernant les couples de nombres impairs consécutifs qui sont tous deux des nombres premiers.

Quant aux nombres (13), il est facile de démontrer la proposition curieuse:

VII. Il existe une infinité de nombres de la forme (13) dont le double est une base de première espèce.

A cet effet, nous avons à résoudre en positifs entiers l'équation indéterminée

$$2x(x+4) = y^2+1, \tag{14}$$

ce qui donnera

$$x = -2+\sqrt{\frac{y^2+9}{2}},$$

de sorte qu'il s'agit de résoudre en positifs entiers cette autre équation

$$y^2-2z^2 = -9. \tag{15}$$

Or, 2 n'étant pas résidu quadratique de 3, l'équation (15) n'est résoluble à moins que y et z ne soient tous deux multiples de 3.

Posons donc

$$y = 3u, \quad z = 3v,$$

il résulte, en vertu de (15),

$$u^2-2v^2 = -1, \tag{16}$$

de sorte que nous aurons

$$u = A_{2n-1}, \quad v = B_{2n-1},$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2-2B_m^2 = (-1)^m$$

donc la solution générale de l'équation (14) se présente sous la forme

$$x_n = 3B_{2n+1} - 2, \quad y_n = 3A_{2n+1}. \tag{17}$$

III. Des équations du genre 4.

Revenons maintenant aux équations générales dont la base, étant la somme de deux carrés premiers entre eux, est de seconde espèce, nous avons tout d'abord à démontrer le lemme fondamental:

I. Supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = -p^{2\varrho}, \tag{1}$$

où p est un nombre premier impair, puis désignons par ω un positif entier qui n'est pas multiple de p, les deux équations

$$u^2 - av^2 = p^\varrho \omega, \quad u^2 - av^2 = -p^\varrho \omega \tag{2}$$

sont en même temps résolubles ou non.

En effet, supposons résoluble l'équation

$$u_1^2 - av_1^2 = (-1)^\delta p^\varrho \omega, \tag{3}$$

nous aurons, en multipliant (1) et (3),

$$(uu_1 \pm avv_1)^2 - a(u_1 v \pm u_1 v)^2 = (-1)^{\delta+1} p^{3\varrho} \omega. \tag{4}$$

De plus, il résulte, en vertu de (1) et (3),

$$u^2 u_1^2 - a^2 v^2 v_1^2 = p^\varrho \left((-1)^\delta a v^2 \omega - p^\varrho a v_1^2 - (-1)^\delta p^{2\varrho} \omega\right)$$
$$a(u^2 v_1^2 - u_1^2 v^2) = p^\varrho \left((-1)^\delta u^2 \omega + p^\varrho a v_1^2 + (-1)^\delta p^{2\varrho} \omega\right),$$

ce qui donnera les congruences

$$\begin{cases} u^2 u_1^2 - a^2 v^2 v_1^2 \equiv 0 \pmod{p^\varrho} \\ u^2 v_1^2 - u_1^2 v^2 \equiv 0 \pmod{p^\varrho}, \end{cases} \tag{5}$$

et il est évident qu'aucun des nombres qui figurent aux premiers membres de ces congruences ne peut être divisible par une puissance du nombre premier p, plus élevée que p^{ϱ}.

Remarquons ensuite que les nombres

$$uu_1 + avv_1, \quad uu_1 - avv_1$$

ne sont jamais tous deux multiples de p, parce que leur somme $2uu_1$ est premier avec p, il existe un exposant ε, tel que l'on aura, en vertu de (3) et (5),

$$uu_1 + (-1)^{\varepsilon} avv_1 = p^{\varrho}\alpha, \quad uv_1 + (-1)^{\varepsilon} uv_1 = p^{\varrho}\beta, \tag{6}$$

où ni α ni β ne peuvent être divisibles par p, de sorte qu'il ne s'agit que de démontrer que α et β sont premiers entre eux.

A cet effet, supposons que λ soit un nombre premier qui divise à la fois α et β, nous aurons, en vertu de (1) et (6),

$$p^{\varrho} u_1 = av\beta - u\alpha, \quad p^{\varrho} v_1 = (-1)^{\varepsilon}(v\alpha - u\beta);$$

c'est-à-dire que λ, étant nécessairement différent de p, doit être facteur commun de u_1 et v_1, ce qui est impossible, parce que l'équation (3) est supposée résoluble.

Quant au nombre premier 2, on aura, au lieu de I, la proposition analogue:

II. Supposons résoluble l'équation

$$u^2 - av^2 = -2^{2\sigma-2}, \tag{7}$$

où σ est un positif entier quelconque, puis désignons par ω un nombre impair, les deux équations

$$u^2 - av^2 = 2^{\sigma}\omega, \quad u^2 - av^2 = -2^{\sigma}\omega \tag{8}$$

sont en même temps résolubles ou non.

Remarquons tout d'abord que les valeurs spéciales

$$\sigma = 1, \quad \sigma = 2$$

ne présentent aucun intérêt, parce que, dans ce cas, a est nécessairement une base de première espèce.

Soit donc $\sigma \geqq 3$, et soit l'équation

$$(9) \qquad u_1^2 - a v_1^2 = (-1)^{\delta} 2^{\sigma} \omega$$

résoluble, on aura en vertu de (7),

$$(10) \qquad (uu_1 \pm a vv_1)^2 - a(uv_1 \pm u_1 v)^2 = (-1)^{\delta+1} 2^{3\sigma-2} \omega.$$

Or, u et v, u_1 et v_1 étant des nombres impairs, il existe un exposant ε, tel que

$$|uu_1 - (-1)^{\varepsilon} a vv_1| = 4k+2, \quad |uv_1 - (-1)^{\varepsilon} u_1 v| = 4l+2,$$

de sorte que les congruences

$$u^2 u_1^2 - a^2 v^2 v_1^2 \equiv 0 \pmod{2^{\sigma}}$$
$$u^2 v_1^2 - u_1^2 v^2 \equiv 0 \pmod{2^{\sigma}},$$

tirées directement des équations (7) et (9), donnent

$$(11) \quad |uu_1 + (-1)^{\varepsilon} a vv_1| = 2^{\sigma-1} \alpha, \quad |uv_1 + (-1)^{\varepsilon} u_1 v| = 2^{\sigma-1} \beta,$$

où α et β sont des nombres entiers.

Cela posé, il résulte, en vertu de (10),

$$(12) \qquad \alpha^2 - a\beta^2 = (-1)^{\delta+1} 2^{\sigma} \omega,$$

et l'on démontrera, comme dans le lemme I, que α et β ne peuvent jamais avoir un facteur commun qui n'est pas une puissance de 2, de sorte qu'il s'agit de démontrer que α et β sont tous deux des nombres impairs.

A cet effet, remarquons tout d'abord que les équations (11) donnent, résolues par rapport à u et v,

$$(13) \qquad 2\omega u = |u_1 \alpha \pm a v_1 \beta|, \quad 2\omega v = |v_1 \alpha \pm u_1 \beta|,$$

puis posons

$$\alpha = 2^{\mu} \alpha_1,$$

où α_1 est impair, il résulte, en vertu de (12),

$$\beta = 2^{\mu} \beta_1,$$

où β_1 est aussi un nombre impair, de sorte que les équations (13) donnent

$$2\omega u = 2^{\mu}|u_1\alpha_1 \pm a v_1\beta_1|, \quad 2\omega v = 2^{\mu}|u_1\beta_1 \pm v_1\alpha_1|.$$

Or, remarquons que les facteurs de 2^{μ} qui figurent aux seconds membres de ces deux équations sont tous deux des nombres pairs, nous aurons nécessairement $\mu = 0$, parce que ω et u, v sont impairs.

Posons maintenant, dans les développements précédents

$$\omega = q^{\sigma},$$

où q est un nombre premier impair, nous aurons, en vertu de I et II, ces deux propositions plus spéciales:

III. Supposons résolubles les deux équations

$$(14) \qquad u^2 - av^2 = -p^{2\varrho}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} p^{\varrho} q^{\sigma},$$

où p et q sont des nombres premiers impairs et inégaux, ces deux autres équations

$$(15) \qquad u^2 - av^2 = -q^{2\sigma}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta+1} p^{\varrho} q^{\sigma}$$

sont aussi résolubles.

IV. Supposons résolubles les deux équations

$$(16) \qquad u^2 - av^2 = -2^{2\varrho-2}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 2^{\varrho} q^{\sigma},$$

où $\varrho \geqq 3$, tandis que q est un nombre premier impair, ces deux autres équations

$$(17) \qquad u^2 - av^2 = -q^{2\sigma}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta+1} 2^{\varrho} q^{\sigma}$$

sont aussi résolubles, et inversement.

Quant aux équations spéciales que nous venons de considérer, il nous reste encore de démontrer la proposition curieuse:

V. Supposons résolubles les deux équations

$$(18) \qquad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} p^{\varrho}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon} q^{\sigma},$$

où a est une base de seconde espèce, tandis que p et q sont des nombres premiers inégaux, cette autre équation

(19) $$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varkappa} p^{\varrho} q^{\sigma}$$

n'est résoluble que pour une seule valeur de l'exposant $\varkappa$, savoir

(20) $$\varkappa \equiv \delta + \varepsilon \pmod 2.$$

En effet, les solutions de l'équation (19), toujours résoluble, sont obtenues par la multiplication des deux équations (18), ce qui donnera immédiatement la seule valeur possible de $\varkappa$.

Supposons que les puissances p^{ϱ} et q^{σ} soient toutes deux plus grandes que 2, l'équation (19) est toujours du genre 4.

IV. Sur l'équation $u^2 - a v^2 = a - 1$.

Quant aux bases de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés premiers entre eux, nous avons encore à démontrer un théorème curieux qui se rattache au paramètre

$$\omega = a - 1.$$ [1]

A cet effet, posons

(1) $$q + (-1)^{\varepsilon} = p \beta,$$

où les positifs entiers p et β sont premiers entre eux, mais quelconques du reste, nous avons à étudier la base

(2) $$a = p^2 + q^2.$$

Remarquons tout d'abord que les formules (1) et (2) donnent immédiatement

[1] Remarquons, en passant, que l'équation

$$u^2 - a v^2 = a - 1$$

n'est jamais résoluble, à moins que la base a ne soit une somme de deux carrés premiers entre eux, parce que cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = 1 - a$$

est toujours résoluble, ayant la solution évidente (1, 1).

$$a-1 = p^2+p^2\beta^2-(-1)^\varepsilon 2p\beta$$
$$q+(-1)^\varepsilon a = q+(-1)^\varepsilon+(-1)^\varepsilon(a-1),$$

de sorte que nous aurons

$$q+(-1)^\varepsilon a = p\big(-\beta+(-1)^\varepsilon p\,(\beta^2+1)\big),$$

ou, ce qui est la même chose,

(3) $q+(-1)^\varepsilon a=\pm p\alpha\,,\quad \alpha=|\beta-(-1)^\varepsilon p(\beta^2+1)|=p+aq.$

De plus, il est évident que les deux positifs entiers α et β ainsi définis sont premiers entre eux, car un facteur commun de α et β divise nécessairement p, ce qui est impossible.

Multiplions maintenant les deux équations évidentes

$$1^2-a\cdot 1^2 = -(a-1)\,,\quad q^2-a\cdot 1^2 = -p^2\,,$$

il résulte

$$(q\pm a)^2-a(q\pm 1)^2 = p^2(a-1)\,,$$

ce qui donnera, en vertu de (1) et (3),

(4) $$\alpha^2-a\beta^2 = a-1\,,$$

donc nous venons de démontrer le théorème susdit, savoir:

I. Supposons que la base a, définie par les formules (1) et (2), soit de seconde espèce, les équations

(5) $$u^2-av^2 = a-1\,,\quad u^2-av^2 = -(a-1)$$

sont toutes deux résolubles, ayant la solution $(p+q\beta,\ \beta)$ respectivement $(1,\ 1)$.

Soit, au contraire, a une base de première espèce, il peut arriver que les deux solutions susdites deviennent réciproques, ce qui a certainement lieu, pourvu que la base a soit une puissance impaire d'un nombre premier de la forme $4k+1$.

Exemples

$$13 = 2^2+3^2\,,\quad 41 = 4^2+5^2.$$

Or, il est très curieux, ce me semble, que 17 des 41 bases de seconde espèce de ce genre plus petites que 1500 sont de la forme susdite.

De plus, nous avons à démontrer la proposition:

II. Il existe une infinité de bases de seconde espèce qui se déterminent à l'aide des formules (1) et (2).

En effet, posons

$$a = \alpha^2 + (\alpha + 1)^2 = 2\alpha(\alpha + 1) + 1, \tag{6}$$

où α est un positif entier quelconque, il est évident que cette base satisfait aux conditions susdites, car nous aurons par exemple

$$q = \alpha + 1, \quad \varepsilon = 0, \quad \beta = 1, \quad p = \alpha.$$

De plus, l'équation

$$u^2 - av = a - 1 \tag{7}$$

est, dans ce cas, satisfaite par

$$u = 2\alpha + 1, \quad v = 1, \tag{8}$$

de sorte qu'il ne nous reste que de déterminer α, de sorte que la base a, définie par la formule (6), soit de seconde espèce.

Quant à cette détermination de α, nous nous proposons de résoudre, en positifs entiers, l'équation indéterminée

$$2\alpha(\alpha + 1) + 1 = \beta^2 - 4, \tag{9}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2\alpha + 1)^2 - 2\beta^2 = -9. \tag{10}$$

Or, 2 n'étant pas résidu quadratique du nombre premier 3, cette équation est irrésoluble, à moins que $2\alpha + 1$ et β ne soient tous deux multiples de 3. Posons donc

$$2\alpha + 1 = 3x, \quad \beta = 3y,$$

l'équation susdite se transforme en celle-ci

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

de sorte que nous aurons

$$x = A_{2n+1}, \quad y = B_{2n+1},$$

où généralement

$$A_m^2 - 2B_m^2 = (-1)^m,$$

ce qui donnera finalement, comme solution générale de l'équation (10),

$$\alpha_n = \frac{3A_{2n+1} - 1}{2}, \quad \beta_n = 3B_{2n+1}, \tag{11}$$

et pour la base a,

$$a_n = \frac{9A_{2n+1}^2 + 1}{2} = (3B_{2n+1} + 1)^2 - 4, \tag{12}$$

où il faut supposer $n > 0$, car l'hypothèse $n = 0$ donnera

$$a_0 = 5 = 3^2 - 4$$

qui est une base de première espèce.

Quant à la valeur générale a_n, définie par la formule (12), la plus petite solution de l'équation (7) correspondante est déterminée par

$$u = 2A_{2n+1}, \quad v = 1. \tag{13}$$

Remarquons ensuite que cette autre équation de LAGRANGE

$$u^2 - a_n v^2 = 4 \tag{14}$$

est, quel que soit l'indice n, satisfaite par

$$u = 3B_{2n+1} + 1, \quad v = 1, \tag{15}$$

puis observons que $a_n - 1$ est multiple de 4, nous aurons, en multipliant (14) par chacune des équations résolubles

$$u^2 - a_n v^2 = \pm(a_n - 1),$$

cette autre proposition:

III. Déterminons, par les formules (12), la base a_n de seconde espèce, les équations

$$(16)\quad u^2 - a_n v^2 = \frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{2}, \quad u^2 - a_n v^2 = -\frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{2}$$

sont toutes deux résolubles.

Soit par exemple $n = 1$, on aura

$$A_3 = 7, \quad B_3 = 5, \quad a_1 = 221, \quad \alpha_1 = 10,$$

ce qui donnera pour les équations

$$(17)\qquad u^2 - 221 v^2 = 220, \quad u^2 - 221 v^2 = -220$$

les solutions (21, 1) respectivement (1, 1).

Multiplions ensuite les deux équations (17) par celle-ci

$$14^2 - 221 \cdot 1^2 = -5^2,$$

nous aurons les deux autres solutions primitives de chacune des équations (17)

$$(47, 3), \quad (105, 7).$$

V. Sur la somme de deux carrés consécutifs.

Dans l'article II, nous avons démontré que le double d'une somme de deux carrés consécutifs est toujours une base de première espèce, et nous venons de démontrer, dans l'article précédent, qu'il existe une infinité de bases de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés consécutifs.

Or, pour mettre en pleine lumière la nature très différente de telles nombres, nous avons encore à démontrer la proposition:

I. Il existe une infinité de bases de première espèce qui sont la somme de deux carrés consécutifs.

On voit immédiatement que cette proposition est une conséquence immédiate de celle-ci:

II. L'équation indéterminée

(1) $$x^2+(x+1)^2 = y^2+4$$

admet une infinité de solutions.

A cet effet, remarquons que l'équation (1) se présente aussi sous la forme

(2) $$(2x+1)^2-2y^2 = 7,$$

nous avons à étudier l'équation de LAGRANGE

(3) $$u^2-2v^2 = \pm 7$$

qui a ses deux solutions réciproques déterminées par les égalités

(4) $$1^2-2\cdot 2^2 = -7, \quad 3^2-2\cdot 1^2 = 7.$$

Multiplions ensuite ces deux équations par

$$A_m^2-2B_m^2 = (-1)^m,$$

il résulte respectivement

(5) $$(A_{n-1}+4B_{n-1})^2-2(2A_{n-1}+B_{n-1})^2 = (-1)^n 7,$$

(6) $$(3A_{n-1}+2B_{n-1})^2-2(A_{n-1}+B_{n-1})^2 = (-1)^{n-1} 7,$$

de sorte que les formules récursives

$$A_m = A_{m-1}+2B_{m-1}, \quad B_m = A_{m-1}+B_{m-1}$$

donnent

(7) $$(A_n+2B_{n-1})^2-2(B_n+A_{n-1})^2 = (-1)^n 7$$

(8) $$(A_n+2A_{n-1})^2-2(A_n+B_{n-1})^2 = (-1)^{n-1} 7.$$

Cela posé, les solutions générales de l'équation (1) se présentent sous la forme

(9) $$\begin{cases} 2x_{2n}+1 = A_{2n}+2B_{2n-1}, & y_{2n} = B_{2n}+A_{2n-1} \\ 2x_{2n+1}+1 = A_{2n+1}+2A_{2n}, & y_{2n+1} = A_{2n+1}+B_{2n}. \end{cases}$$

Quant aux nombres (7) et (8) qui correspondent à n impair respectivement à n pair et qui représentent les solutions de l'équation

(10) $$(2x+1)^2-2y^2 = -7,$$

posons $y = 2z$, il résulte

$$(11) \qquad \frac{x(x+1)}{2} = z^2 - 1\,,$$

et cette équation indéterminée admet donc les solutions générales

$$(12) \begin{cases} 2x_{2n+1} + 1 = A_{2n+1} + 2B_{2n}\,, & 2z_{2n+1} = B_{2n+1} + A_{2n} \\ 2x_{2n} + 1 = A_{2n} + 2A_{2n-1}\,, & 2z_{2n} = A_{2n} + B_{2n-1}\,, \end{cases}$$

de sorte que nous venons de démontrer la proposition:

III. Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont égaux à un carré moins 1.

Il est évident du reste que la plupart des nombres triangulaires sont des bases de seconde espèce, ce qui a lieu par exemple, pourvu que le nombre en question soit multiple de 3.

Mais nous avons encore à démontrer cette autre proposition:

IV. Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont des bases de première espèce.

A cet effet, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

$$(13) \qquad (x+1)(2x+1) = y^2 + 1\,,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(14) \qquad x(2x+3) = y^2.$$

Remarquons que les deux facteurs x et $2x+3$ sont premiers entre eux, à moins que x ne soit multiple de 3, et que les deux facteurs en question ont, dans ce cas, le plus grand commun diviseur 3, la première de ces hypothèses donnera

$$(15) \qquad x = \alpha^2, \quad 2x+3 = \beta^2. \quad y = \alpha\beta\,,$$

où α et β sont premiers entre eux.

Or, les deux premières des équations (15) donnent

$$\beta^2 - 2\alpha^2 = 3,$$

et cette équation étant irrésoluble, nous avons seulement à étudier le second cas, savoir

(16) $$x = 3\alpha^2, \quad 2x+3 = 3\beta^2, \quad y = 3\alpha\beta,$$

de sorte que nous aurons

$$\beta^2 - 2\alpha^2 = 1,$$

savoir

(17) $$\beta = A_{2n}, \quad \alpha = B_{2n}$$

(18) $$x = 3B_{2n}^2, \quad y = 3A_{2n}B_{2n}.$$

On voit que $325 = 13 \cdot 25$ est le plus petit nombre triangulaire qui se détermine par les formules précédentes.

DEUXIÈME PARTIE

Sur les bases $a = \alpha^2+1$.

VI. Formules récursives générales.

Les nombres de la forme

$$a = \alpha^2+1\,,$$

où α est un positif entier quelconque, sont évidemment les plus simples de toutes les bases, parce que la période de leur fraction continue ne contient que le seul nombre 2α. Dans nos développements précédents, nous avons plusieurs fois appliqué les bases de la forme susdite, et, dans nos recherches suivantes, nous avons à déduire de l'équation

$$u^2-(\alpha^2+1)\,v^2 = \pm\,\omega \tag{1}$$

des éclaircissements intéressants sur les équations générales de Lagrange.

A cet effet, nous avons tout d'abord à indiquer l'expression générale des solutions (A_n, B_n) de l'équation de Fermat correspondante

$$A_n^2-(\alpha^2+1)\,B_n^2 = (-1)^n. \tag{1}$$

Posons, pour $n \geqq 2$,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_n(\alpha) &= 2^{n-1}\alpha^n + \sum_{s=1}^{\leqq\frac{n}{2}} \frac{n}{2s}\binom{n-s-1}{s-1}(2\alpha)^{n-2s} \\ \psi_n(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}} \binom{n-s-1}{s}(2\alpha)^{n-2s-1}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et particulièrement, pour $n = 1$,

(3 bis) $$\varphi_1(\alpha) = \alpha, \quad \psi_1(\alpha) = 1,$$

nous aurons, quel que soit l'indice n,

(4) $$A_n = \varphi_n(\alpha), \quad B_n = \psi_n(\alpha).$$

Quant à l'équation (1), il est facile de démontrer le lemme fondamental:

I. L'équation (1) est toujours irrésoluble, à moins que

(5) $$\omega \geqq 2\alpha.$$

A cet effet, étudions tout d'abord les équations (1) qui ont des solutions (u, v) situées dans l'intervalle I_1, ce qui exige

(6) $$u = \alpha - r, \quad v = 1, \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1,$$

tandis que la valeur correspondante de ω deviendra

(7) $$\omega_r = 2r\alpha - r^2 + 1,$$

ce qui donnera immédiatement

$$\omega_r > \omega_s,$$

pourvu que $r > s$; c'est-à-dire que nous aurons constamment

(8) $$\omega_r \geqq 2\alpha, \quad 1 \leqq r \leqq \alpha - 1.$$

Soit ensuite (u, v) et (u_1, v_1) deux solutions réciproques de l'équation (1), dont aucune n'appartient à l'intervalle I_1, nous aurons

$$u \geqq \alpha, \quad v \geqq 1, \quad u_1 \geqq \alpha, \quad v_1 \geqq 1,$$

où les signes d'égalité ne sont pas simultanées, il résulte

$$\omega = uv_1 + u_1 v > 2\alpha.$$

On voit immédiatement que la proposition I donnera, comme corollaire, cette autre:

II. L'équation de LAGRANGE

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\, v^2 = \pm 4 \tag{9}$$

est toujours irrésoluble, à moins que

$$\alpha = 2, \quad a = 5. \tag{10}$$

Revenons maintenant aux solutions générales (A_n, B_n) de l'équation (2), il résulte, en vertu des formules récursives de LAGRANGE,

$$A_n = \alpha A_{n-1} + (\alpha^2 + 1)\, B_{n-1}$$
$$B_n = \alpha B_{n-1} + A_{n-1}.$$

Soit ensuite

$$(u_1, v_1), \quad (u_2, v_2), \ldots, \quad (u_n, v_n), \ldots \tag{11}$$

une suite quelconque, formée des solutions de l'équation (1), nous aurons de même

$$u_n = \alpha u_{n-1} + (\alpha^2 + 1)\, v_{n-1}$$
$$v_n = \alpha v_{n-1} + u_{n-1},$$

ce qui donnera la proposition curieuse:

III. Les solutions (s_n, t_n) d'une suite quelconque appartenant ou à l'équation (1) ou à l'équation (2) satisfont aux formules récursives

$$s_n = \alpha t_n + t_{n-1}, \quad t_n = \alpha t_{n-1} + s_{n-1}, \quad n \geqq 2. \tag{12}$$

On voit, en effet, que la dernière de ces formules est la même que celles des B_n et des v_n, et l'on démontre facilement, par la conclusion de n à $n+1$, la formule des s_n.

Revenons maintenant à la suite (11), puis désignons par (u_1', v_1') la solution réciproque de (u_1, v_1) qui satisfait à l'équation

$$u_1^2 - (\alpha^2 + 1)\, v_1^2 = -\omega,$$

les formules fondamentales

$$u_1 u_1' + (\alpha^2+1) v_1 v_1' = \alpha\omega, \quad u_1 v_1' + v_1 u_1' = \omega$$

donnent immédiatement ces deux systèmes d'équations

$$(13) \qquad u_1 = \alpha v_1 - v_1', \quad v_1 = u_1' - \alpha v_1'$$

$$(14) \qquad u_1' = v_1 - \alpha v_1', \quad v_1' = \alpha v_1 - u_1.$$

M. C. Moreau[1], dans son essay maladroit de démontrer la proposition II, a trouvé par hasard, et appliqué sans critique, la première des formules récursives (12), car il ne voit pas que cette formule est inapplicable pour $n = 1$, et qu'elle doit, pour cette valeur de n, être remplacée par la formule correspondante (13) ou (14).

Remarquons, en passant, que M. Didier, qui a proposé de démontrer l'impossibilité de l'équation (9), abstraction faite de la seule valeur $\alpha = 2$, et la rédaction des Nouvelles Annales acceptent sans critique la démonstration manquée de M. Moreau, tandis que le *Jahrbuch*[2] indique, sans commentaire, que M. Moreau aurait résolu le problème susdit.

Cette manque de critique est du reste bien explicable, parce que les auteurs susdits n'ont pas connu les idées des suites coordonnées et des solutions réciproques.

Comme première application des développements précédents, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

$$(15) \qquad x^2 + (\alpha x + 1)^2 = y^2,$$

où α est un positif entier quelconque.

On aura immédiatement, en vertu de (15),

$$x = \frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2+1) y^2 - 1}}{\alpha^2+1},$$

ce qui exige tout d'abord

$$(\alpha^2+1) y^2 - 1 = z^2,$$

[1] Nouvelles Annales (2) t. 12, p. 330—331; 1873.

[2] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 5, p. 106; 1873.

où z est un positif entier, de sorte que nous aurons

$$x = \frac{A_{2n+1} - \alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad y = B_{2n+1}, \quad z = A_{2n+1},$$

et il nous reste encore de déterminer l'indice n, de sorte que x devienne un nombre entier.

Or, la formule de LAGRANGE

$$A_{2n+1} = \alpha^{2n+1} + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{2n+1}{2s} (\alpha^2+1)^s \alpha^{2n-2s+1}$$

donnera immédiatement

$$A_{2n+1} \equiv \alpha^{2n+1} \equiv (-1)^n \alpha \quad \left(\operatorname{mod} (\alpha^2+1)\right),$$

d'où il résulte

$$A_{2n+1} - \alpha \equiv \left((-1)^n - 1\right) \alpha \quad \left(\operatorname{mod} (\alpha^2+1)\right),$$

de sorte que n doit être un nombre pair, et la solution générale de l'équation (15) se présente sous la forme

$$x = \frac{A_{4n+1} - \alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad y = B_{4n+1}. \tag{16}$$

Comme seconde application, nous avons à démontrer que l'équation indéterminée

$$u^2 - (\alpha^2 + 1) v^2 = \pm 36 \tag{17}$$

n'est résoluble, à moins que

$$\alpha = 6, \quad a = 37; \quad \alpha = 18, \quad a = 325.$$

En effet, on aura $\alpha \leq 18$, tandis que α doit être de la forme $6k$ et $4l + 2$, ce qui donnera $\alpha = 12\nu + 6$, valeur qui n'est applicable, à moins que $\nu = 0$, $\nu = 1$.

VII. Valeur minimum du paramètre ω.

Il est bien curieux, ce me semble, qu'il soit possible de déterminer, quel que soit le positif entier α, la plus petite valeur de ω, pour laquelle l'équation de LAGRANGE

$$u^2-(\alpha^2+1)v^2=\pm\omega \tag{1}$$

est résoluble.

A cet effet, nous avons tout d'abord à étudier les équations susdites qui admettent la solution

$$u_1=r\alpha+s, \quad v_1=r, \tag{2}$$

où r et s sont des positifs entiers, ce qui donnera

$$\omega=2rs\alpha-r^2+s^2, \tag{3}$$

tandis que la solution réciproque de (u_1, v_1) deviendra

$$u_1'=s\alpha-r, \quad v_1'=s. \tag{4}$$

Quant aux éléments généraux (u_n, v_n) et (u_n', v_n') des deux suites coordonnées ainsi définies, les formules récursives donnent

$$\left\{\begin{aligned} u_n &= rA_n+sA_{n-1}, & v_n &= rB_n+sB_{n-1}\\ u_n' &= sA_n-rA_{n-1}, & v_n' &= sB_n-rB_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

de sorte que nous pouvons déduire (u_n', v_n') de (u_n, v_n), en changeant le signe α, puis permutant r et s.

Soit par exemple, dans (4), $s=1$, on aura

$$\omega=2r\alpha-r^2+1, \tag{6}$$

et les solutions réciproques déviennent

$$u_1=\alpha-r, \quad v_1=1; \quad u_1'=r\alpha+1, \quad v_1'=r, \tag{6 bis}$$

ce qui donnera généralement

$$\left\{\begin{aligned} u_n &= A_n-rA_{n-1}, & v_n &= B_n-rB_{n-1}\\ u_n' &= rA_n-A_{n-1}, & v_n' &= rB_n-B_{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Posons ensuite, dans (3), $r=1$, puis remplaçons s par r, il résulte

$$\omega=2\alpha r+r^2-1, \tag{8}$$

tandis que les solutions réciproques deviennent

(8 bis) $u_1 = \alpha + r, \quad v_1 = 1; \quad u_1' = r\alpha - 1, \quad v_1' = r,$

et nous aurons généralement

$$(9) \qquad \begin{cases} u_n = A_n + rA_{n-1}, & v_n = B_n + rB_{n-1} \\ u_n' = rA_n - A_{n-1}, & v_n' = rB_n - B_{n-1}. \end{cases}$$

Cela posé, nous avons à étudier séparément les dernières formules qui correspondent à $r = 1$ et $r = 2$, parce que les résultats ainsi obtenus sont nécessaires pour nos recherches suivantes.

Quant à l'hypothèse $r = 1$, les formules (6 bis) et (8 bis) donnent le même couple de solutions réciproques, savoir

(10) $u_1 = \alpha - 1, \quad v_1 = 1; \quad u_1' = \alpha + 1, \quad v_1' = 1, \quad \omega = 2\alpha,$

tandis que nous aurons respectivement, pour $r = 2$,

(11) $u_1 = \alpha - 2, \quad v_1 = 1; \quad u_1' = 2\alpha + 1, \quad v_1' = 2; \quad \omega = 4\alpha - 3$

(12) $u_1 = \alpha + 2, \quad v_1 = 1; \quad u_1' = 2\alpha - 1, \quad v_1' = 2; \quad \omega = 4\alpha + 3.$

Remarquons ensuite que l'équation (1) qui correspond à ces valeurs spéciales n'est résoluble, à moins que u_1 et ω ne soient premiers entre eux, nous aurons à considérer les trois valeurs susdites de ω.

1° $\omega = 2\alpha$; l'équation (1) est résoluble, pourvu que α soit un nombre pair, et seulement dans ce cas.

2° $\omega = 4\alpha - 3$; l'égalité $\omega - 4u_1 = 5$ montre que u_1 et ω sont premiers entre eux, pourvu qu'ils ne soient pas tous deux multiples de 5, ce qui donnera

$$(13) \qquad \alpha = 10k + 7.$$

3° $\omega = 4\alpha + 3$; on aura ici $4u_1 - \omega = 5$, de sorte que l'équation (1) est résoluble, à moins que

$$(14) \qquad \alpha = 10k + 3.$$

Cela posé, nous avons à démontrer le théorème fondamental:

I. La plus petite valeur du paramètre ω, pour lequel l'équation (1) est résoluble, se détermine comme suit:

1° $\omega = 2\alpha$, pour une valeur paire quelconque de α.

2° $\omega = 4\alpha - 3$, pour α impair, plus grand que 1 et n'étant pas de la forme $10k + 7$.

3° $\omega = 4\alpha + 3$, pour $\alpha = 1$, $\alpha = 10k + 7$.

En effet, remarquons tout d'abord que l'inégalité

$$2r\alpha + r^2 - s^2 > 4\alpha + 3 \tag{15}$$

est applicable pour

$$r \geqq 2, \quad \alpha \geqq s \geqq 2,$$

ce qui donnera

$$r^2 > 3, \quad s\alpha \geqq s^2,$$

de sorte que l'inégalité (15) est certainement établie, pourvu que

$$(2r - 1) s\alpha > 4\alpha,$$

inégalité qui est évidente.

Il nous reste encore d'étudier les cas suivants, où nous supposons constamment $\alpha > 2$, et où nous désignons par (u, v) une solution primitive de l'équation (1):

1° $u \geqq 2\alpha^2 + 1$; dans ce cas, nous aurons

$$\omega = vu_1 + uv_1 > 2\alpha^2 + 2 > 4\alpha + 3;$$

car la solution (u_1, v_1) réciproque de (u, v) satisfait évidemment aux conditions $u_1 \geqq 1$, $v_1 \geqq 1$.

2° $u = \alpha - r$, $v = t$; $1 \leqq r \leqq \alpha - 1$, $t \geqq 2$, ce qui donnera

$$\omega = t^2(\alpha^2 + 1) - (\alpha - r)^2 = (t^2 - 1)\alpha^2 + 2r\alpha + t^2 - r^2 > 3\alpha^2 + 4.$$

3° $u = r\alpha + s$, $v = t$; $r \geqq 1$, $1 \leqq s \leqq \alpha - 1$.

Soit tout d'abord $2\alpha > r > t$ on aura

$$\omega = (r^2 - t^2)\alpha^2 + 2rs\alpha + s^2 - t^2,$$

et l'inégalité évidente

$$2rs\alpha - t^2 > r(2s\alpha - r) \geqq r(2\alpha - r) \geqq 0$$

donnera immédiatement

$$\omega > (r^2 - t^2)\alpha^2 + s^2 \geqq (2t+1)\alpha^2 + 1 > 4\alpha + 3.$$

Soit, au contraire, $t > r$, on aura

$$\omega = (t^2 - r^2)\alpha^2 - 2rs\alpha + t^2 - s^2,$$

et les inégalités évidentes

$$t^2 - r^2 \geqq 2r + 1, \quad t^2 \geqq 4, \quad s \leqq \alpha - 1$$

donnent

$$\omega \geqq (2r+1)\alpha^2 - 2r\alpha(\alpha - 1) - (\alpha - 1)^2 + 4,$$

savoir

$$\omega \geqq 2r\alpha + 2\alpha + 3 \geqq 4\alpha + 3.$$

Cela posé, nous avons encore à étudier la valeur spéciale $\alpha = 1$, car cette hypothèse donnera $4\alpha - 3 = 1$, et enfin nous avons à comparer la valeur $4\alpha + 3$ et le nombre $6\alpha - 8$, obtenu de ω en y posant $r = 3$.

Quant aux hypothèses $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, la plus petite valeur applicable de ω deviendra respectivement $4\alpha + 3 = 7$ et $2\alpha = 4$.

Dans le second cas indiqué, on aura évidemment

$$6\alpha - 8 \geqq 4\alpha + 3,$$

pourvu que $\alpha \geqq 6$, de sorte qu'il ne nous reste à étudier que les valeurs $\alpha = 3$, $\alpha = 5$, qui donnent tous deux la valeur minimum $\omega = 4\alpha - 3$.

VIII. Genre des équations au paramètre minimum.

Les résultats que nous venons d'obtenir, dans l'article précédent, nous permettent de déterminer, quel que soit α, le genre des équations qui correspondent à la valeur minimum du paramètre ω.

A cet effet, nous avons à demontrer les propositions suivantes:

I. Soit α un nombre pair quelconque, l'équation résoluble

$$(1)\qquad u^2-(\alpha^2+1)\,v^2=\pm 2\,\alpha$$

est toujours du genre 2.

Remarquons que l'équation (1) admet les deux solutions réciproques

$$(2)\qquad (\alpha-1\,,\,1)\,,\quad (\alpha+1\,,\,1)\,,$$

il s'agit de démontrer que cette équation ne peut admettre aucun autre couple des solutions réciproques (u, v) et (u_1, v_1).

Or, nous savons dès à présent qu'aucune de ces solutions ne peut être située dans l'intervalle I_1; c'est-à-dire que nous aurons

$$u\geqq\alpha\,,\quad v\geqq 1;\quad u_1\geqq\alpha\,,\quad v_1\geqq 1\,,$$

où les signes d'égalité ne sont pas simultanées, mais cette hypothèse conduira à l'absurdité

$$2\,\alpha\,=\,uv_1+u_1v>2\,\alpha.$$

II. Désignons par α un positif entier qui n'est pas de la forme $5k+2$, mais quelconque du reste, l'équation résoluble

$$(3)\qquad u^2-(\alpha^2+1)\,v^2\,=\,\pm(4\,\alpha-3)$$

est toujours du genre 2.

Nous aurons ici les deux solutions réciproques

$$(4)\qquad (\alpha-2\,,\,1)\,,\quad (2\,\alpha+1\,,\,2)\,,$$

et l'équation (3) ne possède aucune autre solution située dans l'intervalle I_1.

Soient ensuite (u, v) et (u_1, v_1) deux autres solutions réciproques de l'équation (3), de sorte que l'on aura par exemple

$$(5)\qquad u^2-(\alpha^2+1)\,v^2\,=\,4\,\alpha-3\,,$$

je dis que

$$u>3\,\alpha\,,\quad v\geqq 3\,.$$

En effet, l'hypothèse $v = 1$ conduira, en vertu de (5), à l'absurdité

$$u^2 = \alpha^2 + 4\alpha - 2 = (\alpha + 2)^2 - 6,$$

et la valeur $v = 2$ est dès à présent exclue, parce qu'elle conduira à la seconde des solutions (4).

Soit donc $v \geqq 3$, l'équation (5) donnera immédiatement $u > 3\alpha$, tandis que l'on aura, pour la solution réciproque,

$$u_1 \geqq \alpha, \quad v_1 \geqq 1,$$

ce qui conduira à l'absurdité

$$4\alpha - 3 = uv_1 + u_1 v > 6\alpha.$$

Changeons maintenant, dans l'équation (3), le signe de α, il résulte cette autre proposition:

III. Désignons par α un positif entier qui n'est pas de la forme $5k-2$, mais étant quelconque du reste, l'équation résoluble

$$u^2 - (\alpha^2 + 1) v^2 = \pm (4\alpha + 3) \tag{6}$$

est toujours du genre 2.

Nous avons encore à multiplier les deux équations (3) et (6), ce qui nous conduira à des résultats curieux concernant l'équation ainsi obtenue

$$u^2 - (\alpha^2 + 1) v^2 = \pm (16\alpha^2 - 9). \tag{7}$$

Les solutions primitives des deux équations susdites étant

$$(\alpha - 2, 1), \quad (\alpha + 2, 1),$$

l'équation (7), supposée résoluble, aura les deux solutions primitives

$$(5, 4), \quad (\alpha^2 - 3, 2\alpha), \tag{8}$$

dont la première est indépendante de α.

Quant à la résolubilité de l'équation (7), remarquons que les deux paramètres $4\alpha + 3$ et $4\alpha - 3$ ne sont premiers entre eux, à moins que α ne soit pas multiple de 3, nous aurons nécessairement

$$\alpha = 3k \pm 1. \tag{9}$$

De plus, la base $\alpha^2 + 1$ et le paramètre $(4\alpha + 3)(4\alpha - 3)$ sont premiers entre eux, pourvu que α ne soit pas de la forme $5k \pm 2$, nous aurons donc

$$\alpha = 5k, \quad \alpha = 5k \pm 1, \tag{10}$$

et une combinaison des deux formules (9) et (10) donnera la proposition:

IV. *L'équation* (7) *est résoluble pour*

$$\alpha = 15k \pm 1, \quad \alpha = 15k \pm 4, \quad \alpha = 15k \pm 5, \tag{11}$$

et seulement dans ces cas.

Quant à l'équation (7), nous avons encore à démontrer cette autre proposition:

V. *L'équation* (7), *supposée résoluble, est toujours du genre* 4.

En effet, multiplions l'équation (7) par une quelconque des deux équations (3) et (6), nous aurons nécessairement la seconde de ces deux équations, ce qui exige que (7) soit précisément du genre 4.

Quant à la multiplication des équations (3) et (6), où α n'est pas une des valeurs indiquées dans la formule (11), supposons par exemple

$$\alpha = 3\varkappa, \quad \varkappa = 5k, \quad \varkappa = 5k \pm 1,$$

la multiplication susdite donnera, pour l'équation

$$u^2 - (9\varkappa^2 + 1)v^2 = \pm 9(16\varkappa^2 - 1), \tag{12}$$

la solution primitive (5, 4) et, pour l'équation

$$u^2 - (9\varkappa^2 + 1)v^2 = \pm(16\varkappa^2 - 1), \tag{13}$$

la solution primitive $(6\varkappa^2 - 1, 2\varkappa)$, et chacune des équations (12) et (13) est toujours du genre 2, quel que soit le nombre $\varkappa$.

IX. Sur les solutions des équations précédentes.

Nous avons encore à étudier la nature algébrique des solutions des trois équations du rang 2 que nous venons de considérer.

A cet effet, désignons par

(1) $$\left(s_n(\alpha),\, t_n(\alpha)\right), \quad \left(\sigma_n(\alpha),\, \tau_n(\alpha)\right)$$

les solutions générales de l'équation

(2) $$u^2-(\alpha^2+1)\,v^2 = \pm 2\,\alpha\,,$$

de sorte que

$$s_1(\alpha) = \alpha-1\,, \quad t_1(\alpha) = 1$$

est la solution située dans l'intervalle I_1.

Cela posé, il est évident que l'intervalle I_2 contient les deux solutions

$$\sigma_2(\alpha) = \alpha+1\,, \qquad \tau_2(\alpha) = 1$$
$$s_2(\alpha) = 2\,\alpha^2-\alpha+1\,, \quad t_2(\alpha) = 2\,\alpha-1\,,$$

et que nous aurons, quel que soit l'indice n,

(3) $$s_n^2(\alpha)-(\alpha^2+1)\,t_n^2(\alpha) = \sigma_n^2(\alpha)-(\alpha^2+1)\,\tau_n^2(\alpha) = (-1)^n 2\,\alpha\,,$$

où les solutions appartiennent toutes deux à l'intervalle I_n,

Quant aux polynomes entiers ainsi définis, les formules récursives générales de l'article VII donnent

(4) $$s_n(\alpha) = \varphi_n(\alpha)-\varphi_{n-1}(\alpha)\,, \qquad t_n(\alpha) = \psi_n(\alpha)-\psi_{n-1}(\alpha)$$

(5) $$\sigma_n(\alpha) = \varphi_{n-1}(\alpha)+\varphi_{n-2}(\alpha)\,, \quad \tau_n(\alpha) = \psi_{n-1}(\alpha)+\psi_{n-2}(\alpha)\,,$$

où $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$ sont les polynomes entiers introduits dans l'article VI, et où il faut poser, comme ordinairement,

$$\varphi_0(\alpha) = 1\,, \quad \psi_0(\alpha) = 0.$$

On voit que les formules générales (4) et (5) donnent immédiatement les identités

(6) $$(-1)^n s_n(-\alpha) = \sigma_{n+1}(\alpha)\,, \quad (-1)^{n-1}\, t_n(-\alpha) = \tau_{n+1}(\alpha)\,,$$

qui s'accordent bien avec les formules (3).

Appliquons maintenant les formules récursives

$$\varphi_n(\alpha) = 2\alpha\varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha)$$
$$\psi_n(\alpha) = 2\alpha\psi_{n-1}(\alpha) + \psi_{n-2}(\alpha),$$

tirées directement de la fraction continue qui représente $\sqrt{\alpha^2+1}$, il résulte, en vertu de (4),

$$\left\{\begin{array}{l} s_n(\alpha) = (2\alpha-1)\varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha) \\ t_n(\alpha) = (2\alpha-1)\psi_{n-1}(\alpha) + \psi_{n-2}(\alpha), \end{array}\right. \tag{7}$$

ce qui donnera la fraction continue

$$\frac{s_n(\alpha)}{t_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ 2\alpha-1) \tag{8}$$

valable, pourvu que $n > 2$.

En effet, on voit que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue ne sont, abstraction faite des derniers, autre chose que les polynomes $\varphi_m(\alpha)$ et $\psi_m(\alpha)$, de sorte que la fraction continue (8) est une conséquence immédiate des formules récursives (7).

Le même procédé donnera, en vertu de (5), cette autre fraction continue

$$\frac{\sigma_n(\alpha)}{\tau_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ 1), \tag{9}$$

où il faut également supposer $n > 2$.

Quant à l'équation

$$u^2 - (\alpha^2+1)v^2 = \pm(4\alpha+3), \tag{10}$$

elle n'admet aucune solution située dans l'intervalle I_1.

Posons donc

$$k_2(\alpha) = 2\alpha-1,\quad l_2(\alpha) = 2;\quad \varkappa_2(\alpha) = \alpha+2,\quad \lambda_2(\alpha) = 1, \tag{11}$$

les solutions générales de l'équation (10) se présentent sous la forme

$$(12)\quad \begin{cases} k_n(\alpha) = 2\varphi_{n-1}(\alpha) - \varphi_{n-2}(\alpha), & l_n(\alpha) = 2\psi_{n-1}(\alpha) - \psi_{n-2}(\alpha) \\ \varkappa_n(\alpha) = \varphi_{n-1}(\alpha) + 2\varphi_{n-2}(\alpha), & \lambda_n(\alpha) = \psi_{n-1}(\alpha) + 2\psi_{n-2}(\alpha) \end{cases}$$

et nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$(13)\quad \begin{cases} k_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\, l_n^2(\alpha) = (-1)^{n+1}(4\alpha+3) \\ \varkappa_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\, \lambda_n^2(\alpha) = (-1)^n(4\alpha+3), \end{cases}$$

tandis que les formules (12) donnent immédiatement les fractions continues

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{k_n(\alpha)}{l_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ -2) \\ \dfrac{\varkappa_n(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)} = \left(\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ \dfrac{1}{2}\right), \end{cases}$$

où il faut supposer $n > 2$.

Quant à la troisième des équations susdites, nous avons seulement à changer le signe de α, dans les formules précédentes, de sorte que les derniers quotients des fractions continues, obtenues de (14), deviennent 2 et $-\frac{1}{2}$ respectivement.

X. Sur le paramètre $\omega = \alpha^2$.

Nous avons encore à appliquer l'opération itérative sur l'équation (1) de l'article VIII.

A cet effet, multiplions les deux équations

$$u^2 - (\alpha^2+1)\, v^2 = (-1)^{\varkappa}\, 2\alpha, \quad u_1^2 - (\alpha^2+1)\, v_1^2 = (-1)^{\lambda}\, 2\alpha,$$

il résulte

$$(1)\quad \left(uu_1 \pm (\alpha^2+1)\, vv_1\right)^2 - (\alpha^2+1)(uv_1 \pm u_1 v)^2 = (-1)^{\varkappa+\lambda}\, 4\alpha^2,$$

ce qui conduira à cette autre équation de Lagrange

$$(2)\quad u^2 - (\alpha^2+1)\, v^2 = \pm\, \alpha^2,$$

toujours résoluble, parce qu'elle admet, dans l'intervalle I_1, une solution $\left(c_1(\alpha),\ d_1(\alpha)\right)$, déterminée par

$$(3)\quad c_1(\alpha) = 1, \quad d_1(\alpha) = 1.$$

Cela posé, il est évident que les deux suites coordonnées, dont l'élément primitif est la solution susdite, dans l'intervalle I_2, ont les deux solutions

$$(4)\qquad \begin{cases} \gamma_2(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1, & \delta_2(\alpha) = \alpha - 1 \\ c_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1, & d_2(\alpha) = \alpha + 1, \end{cases}$$

donc l'intervalle I_n contient aussi (pour $n > 1$) deux solutions des suites susdites

$$(5)\qquad \big(\gamma_n(\alpha),\ \delta_n(\alpha)\big),\quad \big(c_n(\alpha),\ d_n(\alpha)\big),$$

de sorte que nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$(6)\quad \gamma_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\,\delta_n^2(\alpha) = c_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\,d_n^2(\alpha) = (-1)^n\alpha^2.$$

Quant à la détermination des solutions générales (5) que nous désignons souvent par (γ_n, δ_n) respectivement (c_n, d_n), prenons pour point de départ les formules spéciales

$$\begin{gathered} s_1 s_1 + (\alpha^2+1)\,t_1 t_1 = 2\gamma_2, \quad s_1 t_1 + t_1 s_1 = 2\delta_2 \\ \sigma_2\sigma_2 + (\alpha^2+1)\,\tau_2\tau_2 = 2c_2, \quad \sigma_2\tau_2 + \tau_2\sigma_2 = 2d_2, \end{gathered}$$

établies par un calcul direct, les formules récursives de Lagrange donnent généralement

$$(7)\quad s_n s_p + (\alpha^2+1)\,t_n t_p = 2\gamma_{n+p}, \quad s_n t_p + t_n s_p = 2\delta_{n+p}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma_{n+1}\sigma_{p+1} + (\alpha^2+1)\,\tau_{n+1}\tau_{p+1} = 2c_{n+p}, \\ \sigma_{n+1}\tau_{p+1} + \tau_{p+1}\sigma_{n+1} = 2d_{n+p}, \end{cases}$$

formules qui donnent des éclaircissements intéressants sur les quatre polynomes en question.

En premier lieu, les formules spéciales (4) donnent immédiatement, en vertu de (6),

$$(9)\quad (-1)^m c_m(-\alpha) = \gamma_m(\alpha), \quad (-1)^m d_m(-\alpha) = \delta_m(\alpha).$$

De plus, soit, dans (7) et (8), $p = n$, il résulte

$$(10)\quad \gamma_{2n}(\alpha) = s_n^2(\alpha) - (-1)^n\alpha, \quad \delta_{2n}(\alpha) = s_n(\alpha)\,t_n(\alpha)$$

$$(11)\quad c_{2n}(\alpha) = \sigma_{n+1}^2(\alpha) + (-1)^n\alpha, \quad d_{2n}(\alpha) = \sigma_{n+1}(\alpha)\,\tau_{n+1}(\alpha).$$

Appliquons ensuite les formules speciales

$$s_1\sigma_2 - (\alpha^2+1)\,t_1\tau_2 = -2c_1, \quad s_1\tau_2 - t_1\sigma_2 = -2 < d_1,$$
$$s_2\sigma_2 - (\alpha^2+1)\,t_2\tau_2 = 2\gamma_2, \quad t_2\sigma_2 - s_2\tau_2 = 2\delta_2,$$

les formules récursives de LAGRANGE donnent, pour $n > p$,

$$(12) \qquad \begin{cases} \sigma_n s_p - (\alpha^2+1)\,\tau_n s_p = (-1)^p\, 2\gamma_{n-p}, \\ s_p t_n - t_p\sigma_n = (-1)^p\, 2\delta_{n-p}, \end{cases}$$

et pour $n \leqq p$,

$$(13) \qquad \begin{cases} s_p\sigma_n - (\alpha^2+1)\,t_p\tau_n = (-1)^n\, 2\gamma_{p-n+2}, \\ s_p\tau_n - t_p\sigma_n = (-1)^n\, 2\delta_{p-n+2}, \end{cases}$$

de sorte qu'il résulte, pour $p = n$, les deux formules curieuses

$$(14) \quad s_n\sigma_n - (\alpha^2+1)\,t_n\tau_n = (-1)^n\, 2\gamma_2, \quad s_n\tau_n - t_n\sigma_n = (-1)^n\, 2\delta_2,$$

valables pour $n \geqq 2$.

Quant aux quatre polynomes qui nous occupent ici, nous aurons les expressions explicites

$$(15) \qquad \begin{cases} c_n(\alpha) = \varphi_n(\alpha) - (\alpha-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha), \\ d_n(\alpha) = \psi_n(\alpha) - (\alpha-1)\,\psi_{n-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$(16) \qquad \begin{cases} \gamma_n(\alpha) = \varphi_n(\alpha) - (\alpha+1)\,\varphi_{n-1}(\alpha), \\ \delta_n(\alpha) = \psi_n(\alpha) - (\alpha+1)\,\psi_{n-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$(17) \qquad \begin{cases} c_n(\alpha) = (\alpha+1)\,\varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha), \\ d_n(\alpha) = (\alpha+1)\,\psi_n(\alpha) + \psi_{n-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$(18) \qquad \begin{cases} \gamma_n(\alpha) = (\alpha-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha), \\ \delta_n(\alpha) = (\alpha-1)\,\psi_{n-1}(\alpha) + \psi_{n-2}(\alpha). \end{cases}$$

En effet, soit $n = 2$, ces quatre formules ne sont autre chose que les expressions (4), donc les formules générales sont les conséquences immédiates des formules récursives ordinaires.

Remarquons, en passant, qu'il résulte, en vertu de (17) et (18), les deux fractions continues

$$\frac{c_n(\alpha)}{d_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ \alpha+1) \tag{19}$$

$$\frac{\gamma_n(\alpha)}{\delta_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ \alpha-1), \tag{20}$$

où il faut supposer $n > 2$, et, dans la dernière $\alpha > 1$.

Dans le cas spécial

$$\alpha = 2, \quad a = 5,$$

et seulement dans ce cas, l'équation (2) est identique à l'équation (2) de l'article précédent, de sorte que les solutions $(s_n,\ t_n)$ et $(\sigma_n,\ \tau_n)$ coïncident avec $(c_n,\ d_n)$ et $(\gamma_n,\ \delta_n)$ respectivement.

On voit du reste que l'hypothèse $\alpha = 2$ conduira à l'équation

$$u^2 - 5v^2 = \pm 4, \tag{21}$$

que nous avons mentionnée dans l'article VI et que nous retrouverons encore une fois, dans l'article XIV.

Quant à l'équation (2), il est évident que les fonctions

$$\big(c_n(\alpha),\ d_n(\alpha)\big), \quad \big(\gamma_n(\alpha),\ \delta_n(\alpha)\big),$$

représentent la solution complète, en polynomes entiers, de l'identité algébrique

$$\big(f_n(\alpha)\big)^2 - (\alpha^2+1)\big(g_n(\alpha)\big)^2 = \pm\alpha^2, \tag{22}$$

mais nous remarquons expressément que cette solution complète de l'identité algébrique (22) ne donne pas toujours toutes les solutions, en positifs entiers, de l'équation (2), ce qui est très curieux, ce me semble.

En effet, soit $2\alpha^2+1$ un carré exact, savoir

$$2\alpha^2 + 1 = \beta^2,$$

ce qui donnera

$$\alpha = B_{2n}, \quad \beta = A_{2n}, \tag{23}$$

où nous avons posé généralement

$$A_m^2 - 2B_m^2 = (-1)^m,$$

l'équation (2) admet évidemment la solution

$$u = B_{2n}, \quad v = 1 \tag{24}$$

qui ne coïncide, pour $\alpha > 2$ et $n > 1$, avec aucune des solutions (c_n, d_n) et (γ_n, δ_n).

Soit, au contraire $\alpha = 2$, ce qui donnera, en vertu de (16),

$$u = 1, \quad \beta = 3,$$

nous retrouvons de nouveau la base singulière

$$a = 5,$$

et, dans ce cas, les valeurs (24) ne représentent aucune solution nouvelle de l'équation (2),

Soit par exemple $n = 2$, on aura

$$A_4 = 17, \quad B_4 = 12,$$

ce qui conduira à l'équation indéterminée

$$u^2 - 145v^2 = \pm 144 \tag{25}$$

qui est par conséquent du genre 4, ayant ses deux couples de suites coordonnées déterminées par les solutions primitives

$$(1, 1), \quad (17, 1).$$

Ce résultat est très intéressant, ce me semble, parce qu'il donnera une infinité d'équations du genre 4 obtenues par l'opération itérative des équations du genre 2.

XI. Détermination du rang de certains nombres.

Il nous reste encore, dans notre étude sur la base

$$a = \alpha^2 + 1, \tag{1}$$

de déterminer le rang de certains nombres spéciaux, problème qui est facile à résoudre à l'aide des valeurs

(2) $$B_1 = 1\,,\quad B_2 = 2\alpha\,,\quad B_3 = 4\alpha^2 + 1\,,$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - (\alpha^2 + 1)\, B_m^2 = (-1)^m.$$

Nous aurons, en effet, les propositions suivantes:

I. Le nombre premier 2 est, par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, toujours du rang 2.

II. Supposons que α se présente sous la forme

(3) $$\alpha = 3\varkappa \pm \lambda\,,\quad \lambda = 0\,,\,1\,.$$

le nombre 3 est. par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, du rang $2\lambda + 2$.

En effet, soit α multiple de 3, B_2 aura la même propriété, donc 3 est du rang 2. Soit, au contraire $\alpha = 3\varkappa \pm 1$, on aura

$$a = \alpha^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3,$$

et il résulte immédiatement, en vertu d'un théorème connu, que 3 est par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, du rang 4.

III. Supposons que α se présente sous la forme

(4) $$\alpha = 5\varkappa \pm \lambda\,,\quad \lambda = 1\,,\,2\,,$$

le nombre premier 5 est par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, du rang $2\lambda + 1$.

Soit tout d'abord $\lambda = 1$, on aura, en vertu de (2),

$$B_2 \equiv \pm 2 \pmod 5,\quad B_3 \equiv 0 \pmod 5,$$

et 5 est du rang 3. Soit ensuite $\lambda = 2$, on trouve

$$a \equiv 0 \pmod 5,$$

de sorte que 5 est diviseur premier régulier de la base a, donc 5 est, par rapport à $\alpha^2 + 1$, du rang 5.

Cela posé, on aura immédiatement, comme corollaire, cette autre proposition:

IV. Supposons que α ne soit pas multiple de 5, le nombre

$$a_n = 5^{2n}(\alpha^2 + 1) \tag{5}$$

est toujours une base de première espèce.

En effet, on voit que a_1 est certainement une base de première espèce, et 5 est diviseur premier régulier de la base a_n, quel que soit l'indice n.

Quant à la base a_n, où α est multiple de 5, la valeur générale de B_2 donnera immédiatement la proposition:

V. Soient p, q, n des positifs entiers quelconques, le nombre

$$a_n = p^{2n}(p^2 q^2 + 1) \tag{6}$$

est toujours une base de seconde espèce.

On voit que cette dernière proposition donnera immédiatement la règle suivante pour la formation des bases de seconde espèce qui sont une somme de deux carrés, premiers entre eux:

VI. Soit α_1 un diviseur, impair et plus grand que l'unité, du nombre

$$\alpha = p^2 + q^2, \tag{7}$$

où p et q sont premiers entre eux, la base de seconde espèce

$$\alpha_1^{2n}(\alpha^2 + 1) \tag{8}$$

est, quel que soit le positif entier n, une somme de deux carrés premiers entre eux.

Quant aux bases

$$\alpha_1(\alpha^2 + 1), \tag{9}$$

formées à l'aide des nombres α et α_1 qui figurent dans la règle précédente, elles sont tantôt de première tantôt de seconde espèce.

J'ai par exemple examiné les onze nombres

$$
\begin{array}{ll}
5(5^2+1) = 130 & 5(10^2+1) = 505 \\
5(15^2+1) = 1130 & 5(20^2+1) = 2005 \\
5(25^2+1) = 3130 & 5(30^2+1) = 4505 \\
5(35^2+1) = 6130 & 5(40^2+1) = 8005 \\
5(45^2+1) = 10130 & 5(50^2+1) = 12505 \\
\multicolumn{2}{l}{5(55^2+1) = 15130 = 123^2+1.}
\end{array}
$$

et trouvé que seulement trois de ces bases sont de seconde espèce, savoir

$$505 \quad 2005 \quad 12505.$$

Dans le dernier article de ce Mémoire, nous avons à revenir à la forme singulière du nombre 15130.

Remarquant, en passant, que nous aurons

$$403^2 - 2005 \cdot 9^2 = 4$$

$$1141^2 - 4505 \cdot 17^2 = -64, \quad 4497^2 - 4505 \cdot 67^2 = 64,$$

de sorte que 2005 est une base de seconde espèce, 4505 une base de première espèce.

Il nous reste d'étudier un peu plus profondément la base 2005, parce qu'elle nous donnera des éclaircissements intéressants sur les équations de Lagrange, dont le paramètre contient deux facteurs premiers impairs.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la fraction continue de $\sqrt{2005}$ deviendra, avec les significations de Degen,

$$
\begin{array}{cccccc}
44, & 1, & 3, & 2, & 21, & (1) \\
1 & 69 & 30 & 39 & 4 & 81
\end{array}
$$

de sorte que nous aurons les réduites de cette fraction continue

$$\frac{44}{1} \quad \frac{45}{1} \quad \frac{179}{4} \quad \frac{403}{9} \quad \frac{8642}{193},$$

et ces réduites donnent

$$(10) \qquad 44^2 - 2005 \cdot 1^2 = -69 \quad 179^2 - 2005 \cdot 4^2 = -39$$

$$(11) \qquad 8642^2 - 2005 \cdot 193^2 = -81.$$

De plus, nous aurons, en multipliant les deux équations (10),

$$(12) \qquad 48^2 - 2005 \cdot 1^2 = 299.$$

Désignons ensuite pour abréger par p_α, p_β, p_γ les trois nombres premiers 3, 13, 23, pris dans un ordre quelconque, nous aurons les résultats suivants:

1° Les trois équations

$$(13) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^\delta p_\alpha p_\beta, \quad a = 2005,$$

sont non-décomposables et du genre 2.

2° Les trois équations

$$(14) \qquad u^2 - a v^2 = \pm p_\alpha^2 p_\beta^2$$

sont non-décomposables et du genre 4.

3° Aucune des trois équations

$$(15) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^\delta p_\alpha^k$$

n'est résoluble, à moins que l'exposant k ne soit multiple de 4.

4° Les trois équations

$$(16) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta+1} p_\alpha^3 p_\beta$$

sont non-décomposables et du genre 2.

Cela posé, l'opération itérative donnera immédiatement les résultats généraux concernant la base $a = 2005$, où m et n désigneront des nombres entiers non négatifs:

1° Les équations

$$(17) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^\delta p_\alpha^{2m+1} p_\beta^{2n+1}$$

sont non-décomposables et du genre 2.

2° Les équations

$$u^2 - a v^2 = \pm p_\alpha^{4m+2} p_\beta^{4n+2} \tag{18}$$

sont non-décomposables et du genre 4.

3° Les équations

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\delta p_\alpha^{4m} p_\beta^{4n} \tag{19}$$

ne sont résolubles, à moins que δ et $m+n$ ne soient de même parité; dans ce cas, les équations (19) sont décomposables et par conséquent du genre 4.

TROISIÈME PARTIE

Propriétés singulières du paramètre 4.

XII. Généralisations des formules de Cayley.

Dans nos recherches précédentes, nous avons plusieurs fois observé que le nombre 4 joue un rôle singulier, dans la théorie des équations de Lagrange. C'est pourquoi nous nous sommes proposé d'étudier plus amplement les équations de la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta} (8k + 4), \tag{1}$$

qui ne sont résolubles, à moins que $a = 8\nu + 5$.

Soit tout d'abord, dans l'équation (1), $k = 0$, nous avons à étudier séparément les trois cas suivants:

1° La base a est de première espèce et plus grande que 5.

Dans ce cas, un intervalle quelconque contient précisément un élément de chacune des deux suites coordonnées, formées des solutions de l'équation susdite.

On voit, en effet, que l'équation qui correspond à la plus petite valeur des bases en question, savoir $a = 13$, a cette propriété, et toutes les autres bases sont plus grandes que $16 = 4^2$.

2° $a = 5$. Pour cette valeur spéciale de la base, l'intervalle I_1 ne contient que la seule solution (1, 1).

3° La base a est de seconde espèce.

Dans ce cas, le paramètre -4 n'est jamais applicable, mais a étant au moins égal à 21, un intervalle quelconque contient précisément un élément de chacune des deux suites coordonnées, formées des solutions de l'équation en question.

Cela posé, nous avons tout d'abord à étudier le premier des trois cas susdits lequel correspond à l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm 4. \tag{2}$$

Soient

$$\begin{cases} (s_1,\ t_1),\ (s_2,\ t_2),\ \ldots,\ (s_n,\ t_n),\ \ldots \\ (\sigma_1,\ \tau_1),\ (\sigma_2,\ \tau_2),\ \ldots,\ (\sigma_n,\ \tau_n),\ \ldots \end{cases} \tag{3}$$

les deux suites coordonnées appartenant à cette équation, nous avons, en premier lieu, à démontrer la proposition due à Cayley[1]:

I. La solution primitive (s_1, t_1) de l'équation (2) correspond au paramètre -4, savoir

$$s_1^2 - a t_1^2 = -4, \tag{4}$$

et nous aurons pour la première solution de l'équation de Fermat correspondante

$$A_1 = \frac{s_1(s_1^2+3)}{2}, \quad B_1 = \frac{t_1(s_1^2+1)}{2}. \tag{5}$$

En effet, il résulte immédiatement, en vertu de (4),

$$(s_1^2 + a t_1^2)^2 - a(2 s_1 t_1)^2 = 16, \tag{6}$$

de sorte que les deux nombres

$$\alpha = s_1^2 + 2, \quad \beta = s_1 t_1 \tag{7}$$

satisfont à l'équation

$$\alpha^2 - a\beta^2 = 4. \tag{8}$$

Multiplions ensuite les équations (4) et (8), nous aurons, en vertu de (7),

[1] Journal de Crelle, t. 53, p. 369—371; 1857.

(9) $$\left(\frac{s_1(s_1^2+3)}{2}\right)^2 - a\left(\frac{t_1(s_1^2+1)}{2}\right)^2 = -1,$$

de sorte que les inégalités

$$\alpha = s_1^2+2 = \frac{s_1^2+at_1^2}{2} < \frac{A_2}{2}$$

$$\beta = s_1 t_1 < A_1 B_1 = \frac{B_2}{2}$$

donnent immédiatement

$$\frac{s_1^3+3s_1}{2} < \frac{A_3}{8}, \quad \frac{t_1(s_1^2+1)}{2} < \frac{B_3}{8};$$

c'est-à-dire que l'équation (9) correspond à la plus petite solution de l'équation de Fermat

$$A_m^2 - aB_m^2 = (-1)^m,$$

et les formules (5) sont évidentes.

De plus, on aura, en vertu de (4),

$$\alpha < A_1, \quad \beta < B_1,$$

de sorte que la solution (α, β) n'est autre chose que (σ_1, τ_1), ce qui donnera

(10) $$\sigma_1 = s_1^2+2, \quad \tau_1 = s_1 t_1,$$

et l'équation (4), suppléée par celle-ci

(11) $$\sigma_1^2 - a\tau_1^2 = 4,$$

donne immédiatement les formules générales

(12) $$s_n^2 - at_n^2 = (-1)^n 4, \quad \sigma_n^2 - a\tau_n^2 = (-1)^{n+1} 4.$$

Cela posé, nous avons à démontrer les formules générales

(13) $$s_n s_p + a t_n t_p = 2\sigma_{n+p-1}, \quad s_n t_p + s_p t_n = 2\tau_{n+p-1}$$

(14) $$\sigma_n \sigma_p + a\tau_n \tau_p = 2s_{n+p}, \quad \sigma_n \tau_p + \sigma_p \tau_n = 2t_{n+p},$$

valables, quels que soient les indices n et p.

A cet effet, remarquons que les formules (6) et (10) donnent

$$s_1 s_1 + a t_1 t_1 = 2\sigma_1, \quad s_1 t_1 + t_1 s_1 = 2\tau_1,$$

les formules générales (13) sont une conséquence immédiates des formules récursives de LAGRANGE.

Quant aux formules (14), il résulte, en vertu de (11),

$$(\sigma_1^2 + a\tau_1^2)^2 - a(2\sigma_1\tau_1)^2 = 16,$$

et les inégalités $\sigma_1 < A_1$ et $\tau_1 < B_1$ donnent évidemment

$$\sigma_1^2 + a\tau_1^2 < A_2, \quad 2\sigma_1\tau_1 < B_2,$$

de sorte qu'il résulte, en vertu de (12),

$$\sigma_1\sigma_1 + a\tau_1\tau_1 = 2s_2, \quad \sigma_1\tau_1 + \tau_1\sigma_1 = 2t_2,$$

et les formules récursives de LAGRANGE conduiront sans peine aux formules générales (14).

Posons ensuite, dans les formules générales ainsi obtenues, $p = n$, nous aurons la proposition:

II. *Les solutions de l'équation* (2) *satisfont aux conditions:*

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} \sigma_{2n-1} = s_n^2 - (-1)^n 2, & \tau_{2n-1} = s_n t_n \\ s_{2n} = \sigma_n^2 + (-1)^n 2, & t_{2n} = \sigma_n \tau_n. \end{cases}$$

Appliquons maintenant les formules, fondamentales dans la théorie des suites coordonnées

$$s_n \sigma_p + a t_n \tau_p = 4A_{n+p-1}, \quad s_n \tau_p + t_n \sigma_p = 2B_{n+p-1},$$

puis posons $p = 2n$, respectivement $p = 2n-1$, il résulte, en vertu des formules (15):

III. *Supposons résoluble l'équation* (2), *les solutions de l'équation de* FERMAT *ayant la base* a *se présentent sous la forme*

$$\text{(16)} \quad \begin{cases} A_{3n-1} = \dfrac{\sigma_n\left(\sigma_n^2 + (-1)^n 3\right)}{2}, & B_{3n-1} = \dfrac{\tau_n\left(\sigma_n^2 + (-1)^n\right)}{2} \\[2ex] A_{3n-2} = \dfrac{s_n\left(s_n^2 - (-1)^n 3\right)}{2}, & B_{3n-2} = \dfrac{t_n\left(s_n^2 - (-1)^n\right)}{2}, \end{cases}$$

tandis qu'il n'existe, pour les solutions (A_{3n}, B_{3n}), aucune expression analogue.

Revenons encore une fois aux formules (13), nous aurons, en résolvant par rapport à s_n et t_n ces deux équations, puis remplaçant n par $n-p+1$,

$$(17) \qquad \begin{cases} s_p \sigma_n - a t_p \tau_n = (-1)^p 2 s_{n-p+1}, \\ s_p \tau_n - t_p \sigma_n = (-1)^p 2 t_{n-p+1}, \end{cases}$$

où il faut supposer bien entendu $n \geqq p$; l'hypothèse $p = n$ donnera les formules curieuses

$$(18) \quad s_n \sigma_n - a t_n \tau_n = (-1)^n 2 s_1, \quad s_n \tau_n - t_n \sigma_n = (-1)^n 2 t_1,$$

valables quel que soit l'indice n.

Le même procédé donnera, en vertu de (14),

$$(19) \quad a t_p \tau_n - s_p \sigma_n = (-1)^n 2 \sigma_{p-n}, \quad s_p \tau_n - t_p \sigma_n = (-1)^n 2 \tau_{p-n},$$

où il faut supposer $p > n$.

Remarquons, en passant, que les formules (5) permettent de déterminer s_1 et t_1, pourvu que A_1 et B_1 soient connus.

En effet, s_1 est déterminé en extrayant par défaut la racine cubique de $2A_1$, puis la seconde formule (5) donnera immédiatement la valeur de t_1.

Dans l'article XIV, nous avons à revenir à cette question.

XIII. L'équation $u^2 - 5v^2 = \pm 4$.

La base spéciale 5 est d'une forme très singulière, car

$$5 = 2^2 + 1 = 1^2 + 4 = 3^2 - 4,$$

de sorte que 5 est à la fois représentant de trois formes différentes des nombres qui nous occupent ici. De plus, 5 est le seul nombre de la forme $(2\alpha + 1)^2 - 4$ qui est une base de première espèce et la seule base de la forme $\alpha^2 + 1$

qui admette le paramètre 4, nous l'avons déjà remarqué dans l'article VI.

Quant à l'équation de Lagrange

$$u^2 - 5v^2 = \pm 4 \tag{1}$$

elle n'admet, dans l'intervalle I_1, que la seule solution (s_1, t_1), savoir

$$s_1 = 1, \quad t_1 = 1; \quad s_1^2 - 5t_1^2 = -4. \tag{2}$$

Soient ensuite $(\sigma_{n-1}, \tau_{n-1})$ et (s_n, t_n) les deux solutions de l'équation (1) qui appartiennent, pour $n > 1$, à l'intervalle I_n, on aura, quel que soit l'indice n,

$$\sigma_{n-1}^2 - 5\tau_{n-1}^2 = s_n^2 - 5t_n^2 = (-1)^n 4. \tag{3}$$

Mais, avec cette exception, tous les résultats, obtenus dans l'article précédent, sont applicables aussi pour $a = 5$, tandis que cette valeur spéciale de la base a conduira à d'autres propriétés des solutions de l'équation (1).

Nous nous bornerons à citer les formules

$$s_n = A_n - A_{n-1}, \qquad t_n = B_n - B_{n-1} \tag{4}$$

$$\sigma_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \quad \tau_n = B_{n-1} + B_{n-2}, \tag{5}$$

tirées de (4) et (5) de l'article VII, et

$$s_n = 3A_{n-1} + A_{n-2}, \quad t_n = 3B_{n-1} + B_{n-2} \tag{6}$$

tirée de (7) de l'article VIII; il est évident du reste que (6) est une conséquence immédiate de (4).

Citons encore les fractions continues

$$\frac{\sigma_n}{\tau_n} = (2, 4, 4, \ldots, 4, 1) \tag{7}$$

$$\frac{s_n}{t_n} = (2, 4, 4, \ldots, 4, 3) \tag{8}$$

qui sont les conséquences immédiates des développements (8) et (9) de l'article IX.

XIV. Le paramètre $\omega = 4$.

Soit maintenant $a = 8\nu + 5$ une base de seconde espèce, les équations de Lagrange au paramètre 4 se présentent exclusivement sous la forme

$$u^2 - av^2 = 4. \tag{1}$$

Remarquons que $a = 21$ est la plus petite des bases susdites, il est évident qu'un intervalle quelconque I_n contient précisément un élément de chacune des suites coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} (s_1, t_1)\ (s_2, t_2)\ \ldots\ (s_n, t_n)\ \ldots \\ (\sigma_1, t_1)\ (\sigma_2, \tau_2)\ \ldots\ (\sigma_n, \tau_n)\ \ldots, \end{array} \right. \tag{2}$$

formées des solutions de l'équation (1).

Supposons $(s_1, t_1) < (\sigma_1, \tau_1)$, nous aurons des formules parfaitement analogues à celles développées dans l'article XII, de sorte que nous pouvons nous borner à citer les relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{2n-1} = s_n^2 - 2, & \tau_{2n-1} = s_n t_n \\ s_{2n} = \sigma_n^2 - 2, & t_{2n} = \sigma_n \tau_n \end{array} \right. \tag{3}$$

et les expressions correspondantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_{3n-1} = \dfrac{\sigma_n(\sigma_n^2 - 3)}{2}, & B_{3n-1} = \dfrac{\tau_n(\sigma_n^2 - 1)}{2} \\[2ex] B_{3n-2} = \dfrac{s_n(s_n^2 - 3)}{2}, & B_{3n-2} = \dfrac{t_n(s_n^2 - 1)}{2}. \end{array} \right. \tag{4}$$

Les formules spéciales

$$A_1 = \frac{s_1^3 - 3s_1}{2}, \quad B_1 = \frac{t_1(s_1^2 - 1)}{2} \tag{5}$$

permettent de déterminer la valeur de s_1 en extrayant par excès la racine cubique de $2A_1$, puis de tirer la valeur de t_1 à l'aide de la dernière des formules (5).

CAYLEY[1], en appliquant la Table de DEGEN[2], a résolu toutes les équations résolubles de la forme

$$u^2 - av^2 = \pm 4, \quad u^2 - av^2 = +4, \tag{6}$$

qui correspondent à $a < 1000$.

Quant aux propriétés remarquables des nombres A_m et B_m, exprimées par les formules (4) et par les formules (16) de l'article XII, pourvu que l'équation correspondante (6) soit résoluble, il est intéressant, ce me semble, que ces propriétés sont réciproques.

En effet, prenons pour point de départ l'équation de FERMAT

$$A_m^2 - aB_m^2 = (-1)^\varepsilon, \tag{7}$$

nous avons à démontrer la proposition:

I. Supposons que le nombre A_m se présente sous la forme

$$A_m = \frac{u\left(u^2 - (-1)^\varepsilon 3\right)}{2}, \tag{8}$$

où u est un nombre impair, et où $u^2 - (-1)^\varepsilon$ est premier avec la base a, l'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon 4 \tag{9}$$

est résoluble.

On aura, en vertu de (8) et (9),

$$u^2\left(u^2 - (-1)^\varepsilon 3\right)^2 - 4aB_m^2 = (-1)^\varepsilon 4,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(u^2 - (-1)^\varepsilon\right)^2 \left(u^2 - (-1)^\varepsilon 4\right) = 4aB_m^2. \tag{10}$$

Or, le premier des facteurs qui figurent au premier membre de (10) étant premier avec a, le second de ces facteurs est nécessairement multiple de a, et la forme même de l'équation (10) donnera

[1] Journal de Crelle, t. 53, p. 369—371; 1857.

[2] Canon Pellianus, Copenhague 1817.

$$u^2-(-1)^\varepsilon 4 = av^2, \tag{11}$$

de sorte qu'il resulte, en vertu de (10)

$$B_m = \frac{\left(u^2-(-1)^\varepsilon\right)v}{2}, \tag{12}$$

et l'équation (11) n'est autre chose que l'équation dont il s'agit de démontrer la résolubilité.

Soit, dans (8), ε un nombre impair, a est nécessairement une base de première espèce, tandis que nous ne savons dès à présent rien sur la nature de cette base, dans le cas où ε est un nombre pair.

XV. Propriétés des équations résolubles.

Les équations résolubles de la forme

$$u^2-av^2 = (-1)^\delta 4 \tag{1}$$

que nous venons d'étudier possèdent plusieurs propriétés remarquables, dont nous avons à déduire quelques-unes, dans ce qui suit.

A cet effet, démontrons tout d'abord le lemme fondamental:

I. Supposons résoluble l'équation (1), une équation de la forme

$$u^2-av^2 = (-1)^\varepsilon 4\omega \tag{2}$$

est toujours au moins du genre 4.

Remarquons tout d'abord que la base a est nécessairement de la forme $8\nu+5$, il est évident que le nombre ω qui figure comme facteur du paramètre de l'équation (2) est impair. Multiplions donc les deux équations (1) et (2), une des équations ainsi obtenues se présente nécessairement sous la forme

$$u^2-av^2 = (-1)^{\delta+\varepsilon}\omega,$$

et, cette équation étant résoluble, l'équation (2) est décomposable, elle est par conséquent au moins du genre 4.

Cela posé, nous aurons immédiatement comme corollaire cette autre proposition:

II. Supposons résoluble l'équation (1), où $a > 5$, cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon}(a-1), \tag{3}$$

toujours résoluble pour $\varepsilon = 1$, est au moins du genre 4.

Quant aux bases de première espèce, nous avons à démontrer la proposition curieuse:

III. Supposons résoluble l'équation (1), où a est une base de première espèce plus grande que 5, ces deux autres équations

$$u^2 - a v^2 = \pm 2 A_{2\nu+1}, \quad u^2 - a v^2 = \pm \frac{A_{2\nu+1}}{2} \tag{4}$$

sont aussi résolubles, quel que soit l'indice ν, et la première est au moins du genre 4.

A cet effet, désignons par a une base quelconque de première espéce, par ω un paramètre, tel que l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm \omega \tag{5}$$

soit résoluble. Désignons ensuite par (s_n, t_n) et (σ_p, τ_p) deux solutions appartenant à chacune des deux suites coordonnées formées des solutions de l'équation (5), choisies telles que

$$n + p = 2\nu + 2,$$

nous aurons

$$s_n^2 - a t_n^2 = (-1)^{\delta} \omega, \quad \sigma_p^2 - a \tau_p^2 = (-1)^{\delta+1} \omega, \tag{6}$$

ce qui donnera

$$s_n^2 + \sigma_p^2 - a(t_n^2 + \tau_p^2) = 0. \tag{7}$$

De plus, il résulte, en vertu des formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées,

$$2 s_n \sigma_p + 2 a t_p \tau_p = 2 \omega A_{2\nu+1}, \tag{8}$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (7),

$$(s_n \pm \sigma_p)^2 - a (t_p \mp \tau_p)^2 = 2 \omega A_{2\nu+1}, \tag{9}$$

où les signes doubles correspondent.

Cela posé, nous avons à démontrer le lemme fondamental:

IV. Un facteur commun des deux nombres $s_n \pm s_p$ et $t_n \mp \tau_p$, où les signes doubles correspondent, divise nécessairement 2ω.

Soit, en effet, λ le plus grand commun diviseur des deux nombres susdits, et soit

$$s_n \pm \sigma_p = \lambda K, \quad t_n \mp \tau_p = \lambda L,$$

où K et L sont premiers entre eux, nous aurons, en vertu de la première des équations (6),

$$\lambda^2 (K^2 - a L^2) \mp 2 \lambda (K \sigma_p + L \tau_p) + \sigma_p^2 - a \tau_p^2 = (-1)^{\delta} \omega,$$

de sorte que la seconde des équations (6) donnera

$$\lambda^2 (K^2 - a L^2) \mp 2 \lambda (K \sigma_p + L \tau_p) = (-1)^{\delta} 2 \omega, \tag{10}$$

donc λ est nécessairement diviseur de 2ω.

Soit maintenant

$$\omega = 4,$$

on aura

$$\lambda = 2, \quad \lambda = 4.$$

De plus, il existe, en vertu de (9), un exposant ε_1 tel que

$$\begin{cases} s_n + (-1)^{\varepsilon} \sigma_p = 4k + 2, & t_n - (-1)^{\varepsilon} \tau_p = 4l + 2 \\ s_n - (-1)^{\varepsilon} \sigma_p = 4k_1, & t_n + (-1)^{\varepsilon} \tau_p = 4l_1, \end{cases} \tag{11}$$

car les nombres s_n et t_n, σ_p et τ_p sont impairs; donc les équations (4) sont toutes deux résolubles.

On voit qu'il est facile de généraliser en quelque mesure la proposition III, en remplaçant l'équation (1) par cette autre

(12) $$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varkappa}, \quad \varkappa \geqq 3,$$

ce qui donnera immédiatement:

V. Supposons résoluble l'équation (12), cette autre équation

(13) $$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varkappa - 1} A_{2\nu+1}$$

est aussi résoluble, quel que soit l'indice ν.

Dans le cas particulier $\varkappa = 3$, de sorte qu'il s'agit de l'équation

(14) $$u_1 - a v^2 = \pm 8,$$

nous avons à démontrer deux propositions curieuses, savoir:

VI. Supposons résoluble l'équation (14), puis supposons que A_1 soit multiple de 8, l'équation

(15) $$u^2 - a v^2 = \pm A_{2\nu+1}$$

est aussi résoluble, quel que soit l'indice ν.

En effet, posons

(16) $$A_1 = 2^{\varrho} K_1,$$

où K_1 est un nombre impair, nous aurons donc $\varrho \geqq 3$.

Appliquons ensuite la formule récursive de Lagrange

(17) $$A_{2\nu+1} = A_1 A_{2\nu} + a B_1 B_{2\nu},$$

il résulte, quel que soit ν,

(18) $$A_{2\nu+1} = 2^{\varrho} K_{2\nu+1},$$

où $K_{2\nu+1}$ est un nombre impair, car $A_{2\nu}$ est impair, tandis que $B_{2\nu}$ est divisible par $2^{\varrho+1}$.

Cela posé, il résulte, en vertu de (13) et (14) que les trois équations

$$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varrho+2} K_{2\nu+1}$$
$$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varrho+2}$$
$$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varrho}$$

sont résolubles; c'est-à-dire que cette autre équation

$$u^2 - av^2 = \pm K_{2\nu+1} \tag{19}$$

aura la même propriété, d'où il s'ensuit que l'équation (15) est aussi résoluble.

Soit, au contraire, dans (16), $\varrho = 2$, aucune des équations (15) ne peut être résoluble, tandis que (19) aura nécessairement cette propriété, ce qui donnera la seconde des propositions susdites:

VII. *Supposons résoluble l'équation (14), puis supposons que A_1 soit de la forme $8\nu + 4$, l'équation*

$$u^2 - av^2 = \pm \frac{A_{2\nu+1}}{4} \tag{20}$$

est toujours résoluble, quel que soit l'indice ν.

Soit par exemple $a = 41$, on aura

$$A_1 = 32, \quad B_1 = 5,$$
$$s_1 = 7, \quad t_1 = 9: \quad \sigma_1 = 19, \quad \tau_1 = 3,$$

ce qui donnera

$$13^2 - 41 \cdot 1^2 = 128, \quad 3^2 - 41 \cdot 1^2 = -32.$$

Soit, comme second exemple $a = 89$, nous aurons

$$A_1 = 500, \quad B_1 = 53,$$
$$s_1 = 9, \quad t_1 = 1; \quad \sigma_1 = 217, \quad \tau_1 = 23,$$

d'où il résulte

$$113^2 - 89 \cdot 11^2 = 2000, \quad 26^2 - 89 \cdot 3^2 = -125.$$

XVI. Des équations toujours résolubles.

Nous savons que, dans une équation résoluble de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 4, \tag{1}$$

la base a est toujours un nombre de la forme $8k + 5$, mais nous ne savons rien sur la condition nécessaire et suffisante que a doit satisfaire, pour que l'équation (1) soit résoluble; c'est-à-dire que, à ce point de vue, l'équation susdite est plus compliquée que les deux autres équations indéterminées

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\nu-1} 2\,, \quad a = 4\nu + 3\,, \tag{2}$$

$$u^2 - a v^2 = -1. \tag{3}$$

En effet, soit $4\nu + 3$ respectivement $4\nu + 1$ un nombre premier, nous savons que les équations (2) et (3) sont résolubles, pourvu que nous ayons respectivement

$$a = (4\nu + 3)^{2\varkappa+1}, \quad a = (4\nu + 1)^{2\lambda+1}, \tag{4}$$

où les exposants sont des positifs entiers impairs quelconques.

Quant à l'équation (1), posons

$$a = (8\nu + 5)^{2\mu+1}, \tag{5}$$

où $8\nu + 5$ est un nombre premier, nous ne savons dès à présent rien sur la résolubilité de cette équation; mais nous avons à démontrer, à une autre occasion, que la résolubilité de l'équation (1), qui correspond à la base (5), dépend du nombre pair dans un des développements

$$a = \alpha^2 + \beta^2. \tag{6}$$

Mais, quoi qu'il en soit, il est facile de démontrer la proposition:

I. *Il existe une infinité de bases, et de première et de seconde espèce, pour lesquelles l'équation (1) est résoluble.*

En effet, posons

$$a = (2\alpha + 1)^2 + (-1)^{\varepsilon} 4\,, \quad u = 2\alpha + 1\,, \quad v = 1\,, \tag{7}$$

nous aurons, quel que soit le positif entier α,

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon+1} 4. \tag{8}$$

Cela posé, il nous semble utile d'étudier plus amplement les deux équations de LAGRANGE qui correspondent à l'hypothèse susdite, mais ces équations sont si analogues que nous pouvons nous borner à étudier par exemple la seule valeur $\varepsilon = 0$, ce qui donnera

$$a = (2\alpha + 1)^2 + 4 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 5. \tag{9}$$

Appliquons les mêmes significations que dans l'article XII, nous aurons ici

$$s_1 = 2\alpha + 1, \quad t_1 = 1$$
$$\sigma_1 = (2\alpha + 1)^2 + 2, \quad \tau_1 = 4\alpha + 2$$
$$A_1 = \frac{(2\alpha + 1)^3 + 3(2\alpha + 1)}{2}, \quad B_1 = \frac{(2\alpha + 1)^2 + 1}{2}.$$

Étudions ensuite l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm (a - 1), \tag{10}$$

nous aurons, en multipliant ces deux autres

$$1^2 - a \cdot 1^2 = -(a - 1)$$
$$(2\alpha + 1)^2 - a \cdot 1^2 = -4,$$

pour u et v, les expressions

$$u = (4\alpha^2 + 4\alpha + 5) \pm (2\alpha + 1), \quad v = (2\alpha + 1) \pm 1,$$

de sorte que nous aurons, pour α pair,

$$\left\{\begin{aligned} &(2\alpha^2 + 3\alpha + 3)^2 - a(\alpha + 1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 4 \\ &\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} + 1\right)^2 - a\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \alpha + 1, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

tandis qu'il résulte pour α impair

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\alpha^2 + \frac{3\alpha + 3}{2}\right)^2 - a\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 \\ &(2\alpha^2 + \alpha + 2)^2 - a\alpha^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 4. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Quant aux équations (4) de l'article précédent, nous aurons ici

$$(4\alpha^2 + 6\alpha + 4)^2 - a(2\alpha)^2 = 8A_1;$$
$$(4\alpha^2 + 2\alpha + 2)^2 - a(2\alpha + 2)^2 = -8A_1,$$

ce qui donnera pour α pair

$$(13)\quad \begin{cases} \left(\alpha^2+\dfrac{3\alpha}{2}+1\right)^2-a\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{A_1}{2} \\ (2\alpha^2+\alpha+1)^2-a(\alpha+1)^2=-2A_1, \end{cases}$$

et, pour α impair

$$(14)\quad \begin{cases} (2\alpha+3\alpha+2)^2-a\alpha^2=2A_1 \\ \left(\alpha^2+\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^2-a\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=-\dfrac{A_1}{2}. \end{cases}$$

XVII. Des paramètres $4p^\varrho$.

Dans l'article X, nous avons indiqué une infinité d'équations de Lagrange du genre 2 qui conduiront, par l'opération itérative, à des équations du genre 4. Dans ce qui suit, nous avons à étudier des équations aux paramètres composés, l'opération itérative desquelles conduira toujours à des équations du genre 2.

A cet effet, nous supposons résoluble l'équation

$$(1)\qquad u^2-av^2=(-1)^\delta 4p^\varrho,$$

où p est un nombre premier impair, tandis que cette autre équation

$$(2)\qquad u^2-av^2=(-1)^\varepsilon 4$$

est irrésoluble, quel que soit l'exposant ε, ce qui entraîne que l'équation (1) est toujours du genre 2.

Or, l'équation (1) étant résoluble, toutes les équations des formes

$$(3)\qquad u^2-av^2=(-1)^{\delta_1}4p^{(3k\pm1)\varrho},\quad u^2-av^2=(-1)^{\delta_2}p^{3l\varrho},$$

déduites de (1) par l'opération itérative, sont aussi résolubles.

Et, chose curieuse, l'inversion de cette proposition est aussi vraie avec certaines modifications.

En effet, désignons par $\varkappa$ le plus petit exposant pour lequel une équation de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^\lambda 4p^\varkappa \tag{4}$$

soit résoluble, nous disons pour abréger que (4) est l'équation primitive appartenant au nombre premier p, et, cette définition adoptée, nous avons à démontrer la proposition curieuse:

I. Toutes les équations résolubles des deux formes

$$u^2 - av^2 = (-1)^\lambda 4p^\sigma, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\mu p^\tau \tag{5}$$

proviennent de l'équation primitive par l'opération itérative, de sorte que l'on aura

$$\sigma = (3r \pm 1)\varkappa, \quad \tau = 3s\varkappa. \tag{6}$$

Étudions par exemple tout d'abord la dernière des équations (5), nous avons à démontrer, en premier lieu, que cette équation n'est jamais résoluble pour $\tau < \varkappa$.

A cet effet, soit $\varkappa$ multiple de τ, savoir $\varkappa = m\tau$, l'opération itérative donnera, en vertu de l'équation (5) susdite, l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^\alpha p^{m\tau} = (-1)^\alpha p^\varkappa,$$

ce qui est impossible, parce que l'équation primitive n'est pas décomposable.

Soit ensuite

$$\varkappa = m\tau + n, \quad 1 < n < \tau < \varkappa, \tag{7}$$

on verra, par l'opération itérative, que l'équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^\beta p^{m\tau}$$

est résoluble, ce qui entraîne, en vertu de (4), que cette autre équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^\gamma 4p^n$$

est aussi résoluble, bien que $n < \varkappa$; c'est-à-dire que l'hypothèse (7) est inadmissible, de sorte que l'on aura nécessairement

$$\tau > \varkappa.$$

Posons maintenant

$$\tau = c\varkappa + b\,, \quad 0 < b < \varkappa \tag{8}$$

nous aurons, en vertu de (4), une des deux équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\alpha_1} 4p^{c\varkappa}\,, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\beta_1} p^{c\varkappa}\,,$$

ce qui donnera, en vertu de l'équation (5) en question, respectivement

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\alpha_2} 4p^{b}\,, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\beta_2} p^{b}\,,$$

équations qui sont toutes deux impossibles; c'est-à-dire que τ est nécessairement multiple de $\varkappa$, et, conformément aux propriétés fondamentales de l'opération itérative, τ est aussi multiple de 3.

On voit que la première des équations (5) peut être traitée suivant un procédé analogue au précédent.

Remarquons encore, en passant, qu'une équation résoluble, non-décomposable, de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 2p^{\varrho}\,,$$

où p est un nombre premier impair, a des propriétés analogues à celles de l'équation (1).

QUATRIÈME PARTIE

D'autres équations de formes spéciales.

XVIII. Le paramètre $\omega = a-1$.

Dans nos recherches précédentes, nous avons mis en pleine lumière l'insuffisance de la règle, rapportée sans critique par feu M. LAMPE[1], pour la formation des solutions de l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta}(a-1). \tag{1}$$

Néanmoins, il nous semble utile d'étudier un peu plus amplement les suites coordonnées de l'équation (1) qui correspondent à la solution évidente

$$u = 1, \quad v = 1. \tag{2}$$

A cet effet, multiplions l'équation susdite et l'équation générale de FERMAT, ayant la base a,

$$A_n^2 - a B_n^2 = (-1)^{n\varepsilon}, \tag{3}$$

nous aurons

$$(A_n \pm a B_n)^2 - a(A_n \pm B_n)^2 = (-1)^{n\varepsilon}(1-a), \tag{4}$$

ce qui nous conduira à étudier les deux solutions

$$\left\{\begin{array}{c} (A_n + a B_n, \quad A_n + B_n) \\ (|A_n - a B_n|, \quad |A_n - B_n|) \end{array}\right. \tag{5}$$

ainsi obtenues, et nous avons tout d'abord à démontrer les deux lemmes suivants:

[1] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 32, p. 197; 1901.

I. Soit $a > 5$ une base, quelconque du reste, nous aurons toujours

$$A_n > 2B_n, \tag{6}$$

inégalité qui est vraie aussi pour $a = 5$, $n > 1$.

En effet, remarquons que l'équation quadratique

$$f(x) \equiv x^2 - aB_n^2 - (-1)^{nk} = 0 \tag{7}$$

a les deux racines $x = \pm A_n$, et que nous aurons

$$f(2B_n) = (4-a)B_n^2 - (-1)^{nk} < 0,$$

pourvu que $a > 5$ ou $a = 5$, $n > 1$, l'inégalité (6) est évidente. Quant à l'hypothèse $a = 5$, $n = 1$, elle donnera

$$A_1 = 2B_1.$$

Démontrons maintenant le second des lemmes susdits.

II. Soit a une base plus grande que 3, mais quelconque du reste, nous aurons toujours, quel que soit l'indice n,

$$aB_n > 2A_n. \tag{8}$$

Appliquons les inégalités évidentes

$$B_n < A_n - B_n < A_n + B_n < B_1A_n + A_1B_n = B_{n+1},$$

nous aurons de même, en vertu de (4),

$$A_n < |aB_n - A_n| < A_{n+1},$$

de sorte que $aB_n - A_n$ est certainement positif, ce qui donnera

$$aB_n > 2A_n,$$

et l'inégalité (8) est évidente. On voit du reste que cette inégalité est aussi applicable pour $a = 5$, $n = 1$.

Quant aux deux cas exclus

$$a = 2, \quad a = 3,$$

je dis que nous aurons, pour $n > 1$,

$$\frac{a}{2} B_n < A_n < 2 B_n, \tag{9}$$

tandis que l'hypothèse $n = 1$ donnera

$$A_1(2) = B_1(2) = 1, \quad A_1(3) = 2 B_1(3) = 2. \tag{10}$$

En effet, soit $a = 2$ ou $a = 3$ et $n > 1$, on aura, en vertu de (7),

$$f(2 B_n) > 0,$$

tandis que l'hypothèse $a = 3$, $n = 1$ donnera

$$f(2B) = 0,$$

de sorte que nous aurons, le cas particulier susdit exclu, $A_n < 2 B_n$.

Soit ensuite $a = 2$, la seconde des inégalités est évidente, pourvu que $n > 1$, tandis que l'hypothèse $a = 3$ donne la formule récursive

$$2 A_n - 3 B_n = A_{n-1},$$

de sorte que $2 A_n > 3 B_n$.

Cela posé, nous avons démontré la proposition, curieuse en comparaison avec la règle insuffisante susdite:

II. Soit $a \geqq 5$, l'équation (1) admet toujours, dans l'intervalle I_{n+1}, où $n \geqq 1$, les deux solutions

$$(a B_n + A_n, \ A_n + B_n), \quad (a B_n - A_n, \ A_n - B_n), \tag{11}$$

tandis que l'intervalle I_1 ne contient que la solution évidente (1, 1).

Quant à la valeur exclue $a = 3$, l'équation (1) n'est que du genre 1; c'est-à-dire que l'ensemble de ses solutions forme une suite fermée, et, dans ce cas, la règle fameuse donne toutes les solutions de l'équation susdite.

XIX. Les paramètres $\omega = a + 1$, $\omega = a \pm 2$.

Dans nos recherches précédentes, nous avons souvent appliqué les solutions de l'équation

$$A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n; \tag{1}$$

il nous reste encore de démontrer, à l'aide de ces nombres, la résolubilité de certaines équations de LAGRANGE de formes singulières. Et, à cet effet, nous avons à démontrer les propositions suivantes:

I. L'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = a + 1 \tag{2}$$

est toujours résoluble pour les bases de seconde espèce

$$a = 2\alpha(\alpha + 1), \tag{3}$$

où $2\alpha + 1$ ne doit être égal à aucun des nombres $A_{2\nu}$.

On voit immédiatement que l'équation (2) est, pour la valeur susdite de a, satisfaite par

$$u = 2\alpha + 1, \quad v = 1, \tag{4}$$

de sorte qu'il ne s'agit que de déterminer le nombre α, de sorte que a ne devienne pas un carré exact, savoir

$$2\alpha(\alpha + 1) = \beta^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2\alpha + 1)^2 - 2\beta^2 = 1,$$

ce qui donnera

$$2\alpha + 1 = A_{2\nu}, \quad \beta = B_{2\nu}. \tag{5}$$

On voit que $\alpha = 1$ donnera l'équation

$$u^2 - 12v = 13,$$

satisfaite par $u = 5$, $v = 1$, tandis que l'hypothèse $\alpha = 4$ conduira à l'équation

$$u^2 - 40v^2 = 41$$

ayant la plus petite solution $u = 9$, $v = 1$.

II. L'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = a + 2 \tag{6}$$

est toujours résoluble pour les bases

$$a = 2\alpha^2 - 1, \tag{7}$$

où α ne doit être égal à aucun des nombres $B_{2\nu+1}$.

On voit immédiatement que l'équation (6) est, pour la valeur susdite de a, satisfaite par

$$u = 2\alpha, \quad v = 1, \tag{8}$$

et il est évident que l'hypothèse

$$2\alpha^2 - 1 = \beta^2$$

donnera

$$\beta = A_{2\nu+1}, \quad \alpha = A_{2\nu+1}, \tag{9}$$

de sorte que ces valeurs de α ne sont pas admissibles.

Remarquons qu'une infinité de nombres (7) sont des bases de première espèce, ce qui a par exemple certainement lieu, pourvu que

$$2\alpha^2 - 1 = 4\beta^2 + 1,$$

ce qui donnera

$$\alpha = A_{2\nu}, \quad \beta = B_{2\nu}. \tag{10}$$

Soit, par exemple $\alpha = 3$, on aura l'équation

$$u^2 - 17v^2 = \pm 19,$$

satisfaite par $u = 6$, $v = 1$.

Il est bien curieux, ce me semble, qu'il existe aussi une infinité de bases de seconde espèce qui sont de la forme (7), ce qui a par exemple certainement lieu, pourvu que

$$2\alpha^2 - 1 = \beta^2 - 2,$$

savoir

$$\alpha = B_{2\nu}, \quad \beta = A_{2\nu}. \tag{11}$$

On voit que, pour ces valeurs de α, le second nombre de l'équation (6) est toujours un carré exact, savoir

$$2B_{2\nu}^2 + 1 = A_{2\nu}^2.$$

Soit par exemple $\alpha = B_2 = 2$, on aura l'équation

$$u^2 - 7v^2 = 9,$$

satisfaite par $u = 4$, $v = 1$.

III. L'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = a - 2 \tag{12}$$

est toujours résoluble pour les bases

$$a = 2\alpha^2 + 1, \tag{13}$$

où α ne doit être égal à aucun des nombres $B_{2\nu}$.

Il est évident que l'équation (12) est, pour la valeur susdite de a, satisfaite par

$$u = 2\alpha, \quad v = 1, \tag{14}$$

et l'hypothèse

$$2\alpha^2 + 1 = \beta^2$$

donnera

$$\alpha = B_{2\nu}, \quad \beta = A_{2\nu}, \tag{15}$$

de sorte que ces valeurs de α sont exclues.

Quant à la base (13), on aura

$$2\alpha^2 + 1 = \beta^2 + 9, \tag{16}$$

pourvu que

$$\alpha = 2A_{2\nu}, \quad \beta = 4B_{2\nu},$$

mais j'ignore s'il existe une infinité de bases de première espèce de la forme

$$16B_{2\nu}^2 + 9.$$

On voit, au contraire, que la base (13) est certainement de seconde espèce, pourvu que

$$2\alpha^2 + 1 = \beta^2 + 2, \tag{17}$$

ce qui donnera

$$\beta = A_{2\nu+1}, \quad \alpha = B_{2\nu+1}. \tag{18}$$

Soit par exemple $\alpha = 6$, on aura l'équation

$$u^2 - 73v^2 = \pm 71$$

qui est satisfaite par $u = 12$, $v = 1$, tandis que l'hypothèse $\alpha = 3$ donnera

$$u^2 - 19v^2 = 17$$

ayant la solution $u = 6$, $v = 1$.

XX. La base $a = \alpha^2 - 1$.

Étudions maintenant les équations de Fermat et de Lagrange qui correspondent à la base

$$a = \alpha^2 - 1,$$

où α est un nombre entier, plus grand que l'unité.

A cet effet, revenons aux polynomes $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$ définis dans l'article VI, puis posons

$$f_n(\alpha) = i^{-n}\varphi_n(i\alpha), \quad g_n(\alpha) = i^{1-n}\psi_{n-1}(i\alpha),$$

nous aurons pour $n \geqq 2$

$$(1) \quad \begin{cases} f_n(\alpha) = 2^{n-1}\alpha^n + \sum\limits_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} (-1)^s \dfrac{n}{2s}\dbinom{n-s-1}{s-1}(2\alpha)^{n-2s} \\ g_n(\alpha) = \sum\limits_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \dbinom{n-s-1}{s}(2\alpha)^{n-2s-1} \end{cases}$$

et particulièrement pour $n = 1$

$$(1\text{ bis}) \qquad f_1(\alpha) = \alpha, \quad g_1(\alpha) = 1,$$

ce qui donnera, pour les solutions de l'équation de Fermat

$$(2) \qquad A_n^2 - (\alpha^2 - 1)B_n^2 = 1,$$

l'expression générale

$$(3) \qquad A_n = f_n(\alpha), \quad B_n = g_n(\alpha).$$

Cela posé, désignons par

$$(4) \qquad (s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n), \ldots.$$

une suite de solutions ou de l'équation (2) ou de l'équation de Lagrange correspondante

$$(5) \qquad u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = (-1)^{\delta}\,\omega\,,$$

nous avons à démontrer les deux propositions suivantes:

I. Les éléments de la suite (4) satisfont aux formules récursives

$$(6) \qquad \begin{cases} s_n = \alpha\, t_n - t_{n-1} \\ t_n = \alpha\, t_{n-1} + s_{n-1}. \end{cases}$$

En effet, la dernière de ces deux formules n'est autre chose que la formule récursive de LAGRANGE, tandis que la première des formules susdites est une conséquence immédiate de cette autre formule récursive

$$(7) \qquad s_n = \alpha\, s_{n-1} + (\alpha^2-1)\, t_{n-1}.$$

Appliquons ensuite les formules (6), nous aurons immédiatement la seconde des propositions susdites:

II. Les éléments de la suite (4) satisfont à la condition

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{s_n - s_{n-1}}{\alpha - 1} = t_n + t_{n-1} \\[2ex] \dfrac{s_n + s_{n-1}}{\alpha + 1} = t_n - t_{n-1}. \end{cases}$$

Quant à l'équation de LAGRANGE, remarquons tout d'abord que l'équation spéciale

$$(9) \qquad u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = r^2+s^2-2\,rs\,\alpha$$

admet les solutions réciproques

$$(9\ \text{bis}) \qquad (\alpha r - s,\ r),\quad (\alpha s - r,\ s),$$

il est évident que cette autre équation spéciale

$$(10) \qquad u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = 2\,rs\,\alpha + r^2 + s^2$$

a les solutions réciproques

$$(10\ \text{bis}) \qquad (\alpha r + s,\ r),\quad (\alpha s + r,\ s),$$

tandis que les solutions générales de ces équations deviennent respectivement

$$(11)\quad \begin{cases} \left(rf_n(\alpha)-sf_{n-1}(\alpha),\ \ rg_n(\alpha)-sg_{n-1}(\alpha)\right), \\ \left(sf_n(\alpha)-rf_{n-1}(\alpha),\ \ sg_n(\alpha)-rg_{n-1}(\alpha)\right), \\ \left(rf_n(\alpha)+sf_{n-1}(\alpha),\ \ rg_n(\alpha)+sg_{n-1}(\alpha)\right), \\ \left(sf_n(\alpha)+rf_{n-1}(\alpha),\ \ sg_n(\alpha)+rg_{n-1}(\alpha)\right), \end{cases}$$

Or, dans les formules (9) et (10), il faut supposer inégaux les deux positifs entiers r et s, car l'hypothèse $r = s$ conduira, après une légère modification, aux équations irrésolubles

$$(12)\quad \begin{cases} u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = 2-2\alpha \\ u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = 2\alpha+2, \end{cases}$$

équations que nous avons à étudier plus amplement, dans l'article qui suit.

Revenons maintenant à l'équation générale (5), nous avons à démontrer la proposition fondamentale:

III. L'équation de LAGRANGE

$$u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = (-1)^{\delta}\omega$$

est toujours irrésoluble, pourvu que $\omega \leqq 2\alpha-2$.

En effet, étudions tout d'abord les équations susdites qui admettent, dans l'intervalle I_1, une solution (u, v), nous aurons

$$u = \alpha-s, \quad v = 1,$$

ce qui donnera, en vertu de (9),

$$\omega = 2s\alpha-s^2-1 \geqq 2\alpha-2.$$

Supposons ensuite qu'il n'existe aucune solution située dans l'intervalle I_1, puis désignons par (u, v) et (u_1, v_1) deux solutions réciproques, nous aurons donc

$$u \geqq \alpha, \quad v \geqq 1; \quad u_1 \geqq \alpha, \quad v_1 \geqq 1,$$

où les signes d'égalité ne sont pas simultanés, ce qui donnera, en vertu de la propriété fondamentale des solutions réciproques,

$$\omega = u v_1 + u_1 v \geqq 2\alpha,$$

et nous savons dès à présent que le paramètre $\omega = 2\alpha - 2$ n'est pas admissible.

XXI. Sur l'équation $(\alpha+1)u^2 - (\alpha-1)v^2 = 2$.

Il nous reste encore d'étudier plus amplement les deux équations irrésolubles (12) de l'article précédent, savoir

$$u^2 - (\alpha^2 - 1)v^2 = 2 - 2\alpha \tag{1}$$

et l'équation obtenue de celle-ci, en changeant le signe de α.

A cet effet, posons, conformément aux formules (8) de l'article précédent,

$$\left\{ \begin{aligned} \varkappa_n(\alpha) &= \frac{f_n(\alpha) + f_{n-1}(\alpha)}{\alpha + 1} = g_n(\alpha) - g_{n-1}(\alpha) \\ \lambda_n(\alpha) &= \frac{f_n(\alpha) - f_{n-1}(\alpha)}{\alpha - 1} = g_n(\alpha) + g_{n-1}(\alpha), \end{aligned} \right. \tag{2}$$

ces polynomes entiers sont tous deux du degré $n-1$ par rapport à α, et nous aurons immédiatement la proposition:

I. L'identité algébrique

$$(\alpha+1)u^2 - (\alpha-1)v^2 = 2 \tag{3}$$

admet comme solution générale, en polynomes entiers,

$$u = \varkappa_n(\alpha), \quad v = \lambda_n(\alpha),$$

de sorte que l'on aura, quel que soit l'indice n,

$$(\alpha+1)\varkappa_n^2(\alpha) - (\alpha-1)\lambda_n^2(\alpha) = 2. \tag{4}$$

Quant à ces polynomes curieux $\varkappa_n(\alpha)$ et $\lambda_n(\alpha)$, les premiers deviennent

$$(1, 1), \ (2\alpha - 1, \ 2\alpha + 1), \ (4\alpha^2 - 2\alpha - 1, \ 4\alpha^2 + 2\alpha - 1),$$

tandis que les définitions (2) donnent immédiatement

$$\varkappa_n(\alpha) = (-1)^{n-1}\lambda_n(-\alpha), \tag{5}$$

et il résulte, en vertu de la formule (7) de l'article précédent,

$$(6)\qquad \begin{cases} \varkappa_n(\alpha) = f_{n-1}(\alpha) + (\alpha-1)\,g_{n-1}(\alpha) \\ \lambda_n(\alpha) = f_{n-1}(\alpha) + (\alpha+1)\,g_{n-1}(\alpha), \end{cases}$$

de sorte que nous aurons les identités

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_n(\alpha) + \varkappa_n(\alpha) = 2\,g_n(\alpha) \\ \lambda_n(\alpha) - \varkappa_n(\alpha) = 2\,g_{n-1}(\alpha) \\ (\alpha+1)\,\varkappa_n(\alpha) - (\alpha-1)\,\lambda_n(\alpha) = 2\,f_{n-1}(\alpha), \end{cases}$$

dont la dernière, combinée avec (4), donnera

$$(8)\qquad \begin{cases} (\alpha+1)\,\varkappa_n(\alpha)\,g_{n-1}(\alpha) = \lambda_n(\alpha)\,f_{n-1}(\alpha) - 1 \\ (\alpha-1)\,\lambda_n(\alpha)\,g_{n-1}(\alpha) = \varkappa_n(\alpha)\,f_{n-1}(\alpha) + 1. \end{cases}$$

De plus, il résulte, en vertu de (18),

$$\lambda_n(\alpha) - \varkappa_n(\alpha) = \lambda_{n-1}(\alpha) + \varkappa_{n-1}(\alpha) = \lambda_{n-1}(\alpha) - \varkappa_{n-1}(\alpha) + 2\,\varkappa_{n-1}(\alpha),$$

ce qui donnera la formule curieuse

$$(9)\qquad \lambda_n(\alpha) = \varkappa_n(\alpha) + 2\left(\varkappa_{n-1}(\alpha) + \varkappa_{n-2}(\alpha) + \ldots + \varkappa_1(\alpha)\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(10)\qquad g_n(\alpha) = \varkappa_n(\alpha) + \varkappa_{n-1}(\alpha) + \ldots + \varkappa_1(\alpha),$$

de sorte que nous aurons, en changeant le signe de α, puis appliquant l'identité (5),

$$(11)\qquad g_n(\alpha) = \lambda_n(\alpha) - \lambda_{n-1}(\alpha) + \ldots + (-1)^{n-1}\lambda_1(\alpha).$$

Revenons maintenant à l'équation irrésoluble (1), nous aurons

$$\left(u^2 + (\alpha^2-1)\,v^2\right)^2 - (\alpha^2-1)\,(2\,u\,v)^2 = 4\,(\alpha-1)^2,$$

de sorte que les formules

$$u = (\alpha-1)\,\lambda_n(\alpha), \quad v = \varkappa_n(\alpha)$$

donnent, en vertu de (4),

$$(12)\qquad \begin{cases} f_{2n-1}(\alpha) = (\alpha-1)\,\lambda_n^2(\alpha) + 1 = (\alpha+1)\,\varkappa_n^2(\alpha) - 1 \\ g_{2n-1}(\alpha) = \varkappa_n(\alpha)\,\lambda_n(\alpha), \end{cases}$$

formules qui sont analogues aux formules de Lagrange

$$f_{2n}(\alpha) = 2f_n^2(\alpha)-1\,, \quad g_{2n}(\alpha) = 2f_n(\alpha)\,g_n(\alpha).$$

Or, remarquons les identités

$$f_n(\cos x) = \cos nx\,, \quad g_n(\cos x) = \frac{\sin nx}{\sin x}\,,$$

il est évident que les identités algébriques que nous venons de développer ne sont autre chose que des formules trigonométriques élémentaires.

Cela posé, nous avons à étudier l'équation indéterminée, obtenue de l'identité algébrique (4), en supposant que α soit un positif entier quelconque, ce qui nous conduira tout d'abord à démontrer la proposition:

II. Soit α un positif entier quelconque, l'équation indéterminée

$$(2\alpha+1)\,u^2-(2\alpha-1)\,v^2 = 2 \tag{13}$$

admet, comme solution générale,

$$u = \varkappa_n(2\alpha)\,, \quad v = \lambda_n(2\alpha). \tag{14}$$

En effet, il est évident que ces nombres satisfont à l'équation susdite, de sorte qu'il nous ne reste que de démontrer que l'équation (13) n'admet pas d'autres solutions.

Or, soit (u, v) une solution quelconque de (13), les nombres

$$s = (2\alpha+1)\,u\,, \quad t = v$$

satisfont évidemment à l'équation

$$s^2-(4\alpha^2-1)\,t^2 = 2\,(2\alpha+1)\,,$$

ce qui donnera

$$\left(s^2+(4\alpha^2-1)\,t^2\right)^2-(4\alpha^2-1)\,(2st)^2 = 4\,(2\alpha+1)^2\,,$$

de sorte qu'il existe un indice m, tel que

$$A_m = (2\alpha-1)\,v^2+1 = (2\alpha+1)\,u^2-1$$
$$B_m = uv\,,$$

et, je dis que, dans ces formules, l'indice m est nécessairement impair.

Soit, en effet, m un nombre pair, savoir $m = 2r$, on aura
$$(2\alpha + 1) u^2 = 2 A_r^2,$$
ce qui est inadmissible.

Posons donc $m = 2r + 1$, il résulte, en vertu de (12),
$$u = \varkappa_r(2\alpha), \quad v = \lambda_r(2\alpha).$$

Cela posé, nous aurons de même cette autre proposition:

III. Soit α un positif entier quelconque, l'équation indéterminée

$$(\alpha + 1) u^2 - \alpha v^2 = 1 \tag{15}$$

admet, comme solution générale,

$$u = \varkappa_n(2\alpha + 1), \quad v = \lambda_n(2\alpha + 1). \tag{16}$$

Soit, dans l'équation (15), α un carré exact, nous retrouvons l'équation de FERMAT, étudiée dans l'article VI; posons ensuite α^2 au lieu de α, puis tenons compte des degrés des polynomes en question, nous aurons

$$\alpha \lambda_n(2\alpha^2 + 1) = \varphi_{2n-1}(\alpha), \quad \varkappa_n(2\alpha^2 + 1) = \psi_{2n-1}(\alpha). \tag{17}$$

Soit, au contraire, dans (15), $\alpha + 1$ un carré exact, on aura de même

$$\alpha \varkappa_n(2\alpha^2 - 1) = f_{2n-1}(\alpha), \quad \lambda_n(2\alpha^2 - 1) = g_{2n-1}(\alpha). \tag{18}$$

On voit que l'équation (13) conduira à des résultats analogues concernant les équations de LAGRANGE

$$u^2 - (\sigma^2 \pm 2) v^2 = \mp 2, \tag{19}$$

où les signes correspondent, pourvu que $2\alpha \pm 1$ soit un carré exact.

En effet, posons $\sigma = \alpha\sqrt{2}$, nous aurons, pour les signes supérieurs

$$u_n = \sqrt{2}\, \varphi_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \quad v_n = \psi_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \tag{20}$$

tandis qu'il résulte, pour les signes inférieurs, les formules analogues

$$(21) \qquad u_n = \sqrt{2}\, f_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \quad v_n = g_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right).$$

XXII. Sur les bases régulières.

En terminant cette étude sur les équations de Lagrange, nous avons à revenir à la base

$$15130 = 5\,(55^2+1) = 123^2+1\,,$$

mentionnée dans l'article XI.

A cet effet, démontrons tout d'abord le théorème curieux:

I. Désignons par a une base régulière. puis supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$(1) \qquad u^2 - a v^2 = a - (-1)^{\delta} \omega\,,$$

cette autre équation indéterminée

$$(2) \qquad a\,(a^2 y^2 + 1) = x^2 + (-1)^{\delta} \omega$$

est aussi résoluble et admet une infinité de solutions.

En effet, il est évident que l'équation (2) se présente sous la forme

$$(3) \qquad x^2 - a\,(ay)^2 = a - (-1)^{\delta} \omega\,,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1), dans laquelle les nombres v sont multiples de a.

Or, soit

$$(4) \qquad (u_1,\, v_1)\ (u_2,\, v_2)\ \ldots\ldots\ (u_n,\, v_n)\ \ldots\ldots$$

une suite quelconque formée des solutions de l'équation (1), nous savons que le diviseur a appartient à cette suite; c'est-à-dire qu'une infinité des nombres v_n est multiple de a.

Soit ensuite v_μ le premier des v_n qui soit multiple de a, les nombres

$$(5) \qquad x = u_{\mu+ak}\,, \quad y = v_{\mu+ak}\,,$$

où k est un entier non négatif, mais quelconque du reste, représentent l'ensemble des valeurs de x et de y tirées de la suite (4).

Cela posé, on aura immédiatement, comme corollaire du théorème I, cet autre:

II. Soit a une base régulière qui admet le paramètre $a-1$, il existe une infinité de bases de première espèce parmi les nombres

$$a(a^2k^2+1). \tag{6}$$

ou k est un positif entier.

A cet effet, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

$$a(a^2y^2+1) = x^2+1, \tag{7}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x^2-a(ay)^2 = a-1, \tag{8}$$

et cette équation est résoluble, parce que a est une base régulière, et l'équation de Lagrange

$$u^2-av^2 = a-1 \tag{9}$$

est supposée résoluble.

On voit, en vertu de (9), que la base a est toujours la somme de deux carrés premiers entre eux.

Soit donc a une base de première espèce, les équations (7) et (9) admettent le même nombre de couples des suites coordonnées,

Soit, au contraire, a une base de seconde espèce, les solutions de l'équation

$$u^2-av^2 = 1-a,$$

toujours résoluble, ne donnent aucune solution de l'équation (7).

Exemple I. Soit $a = 5$, nous aurons, en vertu de (8), à résoudre l'équation

$$x^2 - 125\,y^2 = 4. \tag{10}$$

Soit donc (u_n, v_n) et (u_n', v_n') les éléments généraux des deux suites coordonnées formées des solutions de l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - 125\,v^2 = \pm 4,$$

de sorte que (u_1, v_1) est la solution primitive $(11, 1)$, la solution complète de l'équation (10), ou, ce qui est la même chose, de l'équation

$$5\,(25\,y^2 + 1) = x^2 + 1, \tag{11}$$

est formée des couples

$$x_n = u_{2n}, \qquad y_n = v_{2n}$$
$$x_n' = u_{2n-1}, \quad y_n' = v_{2n-1},$$

de sorte que nous aurons

$$x_1' = 123, \quad y_1' = 1,$$

valeurs qui conduiront à la base 15130.

Exemple II. Soit $a = 221$, cette base de seconde espèce est régulière, parce que l'on aura

$$A_1 = 1665, \quad B_1 = 112.$$

De plus, l'équation

$$u^2 - 221\,v^2 = 220 \tag{12}$$

admet deux couples de suites coordonnées, dont les éléments primitifs sont

$$(21, 1), \quad (47, 3).$$

Désignons ensuite par (s_n, t_n) et (s_n', t_n'), (σ_n, τ_n) et (σ_n', τ_n') les éléments généraux des deux couples de suites en question, la solution complète de l'équation indéterminée

$$221\,(221^2\,y^2 + 1) = x^2 + 1 \tag{13}$$

est formée par les deux couples de suites coordonnées

$$(s_{\varkappa + 221 k}, \; t_{\varkappa + 221 k}) \quad (s'_{\lambda + 221 l}, \; t'_{\lambda + 221 l})$$
$$(\sigma_{\mu + 221 m}, \; \tau_{\mu + 221 m}) \quad (\sigma'_{\nu + 221 n}, \; \tau'_{\nu + 221 n}),$$

où $t_\varkappa$ et t'_λ, τ_μ et τ'_ν sont les premiers des nombres t_n et t'_n, τ_n et τ'_n qui soient multiples de 221.

Quant à la base 5, nous avons encore à résoudre l'équation indéterminée

$$5\,(25\,y^2 + 1) = x^2 + 4\,, \tag{14}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x^2 - 125\,y^2 = 1\,, \tag{15}$$

de sorte que nous aurons généralement

$$x_k = A_{2k}, \quad y_k = B_{2k}, \tag{16}$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - 125\,B_m^2 = (-1)^m. \tag{17}$$

Cela posé, les bases de première espèce définies par l'équation (14), se présentent sous la forme

$$a_k = 5\,(25\,B_{2k}^2 + 1) = A_{2k}^2 + 4\,, \tag{18}$$

et nous aurons

$$A_2 = 930249\,, \quad B_2 = 83204.$$

TABLES NUMÉRIQUES

concernant les sommes de deux carrés, inférieures à 1500.

Table I.

Les 243 bases de première espèce.

2	5	10	13	17	26	29	37	41
50	53	58	61	65	73	74	82	85
89	97	101	106	109	113	122	125	130
137	145	149	157	170	173	181	185	193
197	202	218	226	229	233	241	250	257
265	269	274	277	281	290	293	298	313
314	317	325	337	338	346	349	353	362
365	370	373	389	394	397	401	409	421
425	433	442	445	449	457	458	461	481
485	493	509	521	530	533	538	541	554
557	565	577	586	593	601	610	613	617
626	629	634	641	653	661	673	677	685
697	701	709	730	733	746	754	757	761
769	773	778	785	794	797	809	818	821
829	842	845	853	857	865	877	881	901
914	922	925	929	937	941	949	953	962
965	970	977	985	986	997	1009	1010	1013
1018	1021	1025	1033	1037	1042	1049	1061	1066
1069	1073	1082	1090	1093	1097	1105	1109	1114
1117	1129	1130	1138	1153	1157	1165	1181	1189
1193	1201	1213	1217	1226	1229	1237	1241	1249
1250	1258	1261	1277	1285	1289	1297	1301	1306

1313	1322	1325	1354	1361	1370	1373	1378	1381
1385	1402	1409	1417	1418	1429	1433	1445	1450
1453	1465	1466	1481	1489	1490	1493		

Table II.

Les 44 couples de nombres $4a+1$ et $4a+5$ étant tous deux des bases de première espèce.

13, 17	37, 41	61, 65	85, 89	97, 101
109, 113	145, 149	181, 185	193, 197	229, 233
265, 269	277, 281	313, 317	349, 353	397, 401
421, 425	445, 449	457, 461	481, 485	613, 617
673, 677	697, 701	757, 761	769, 773	853, 857
877, 881	925, 929	937, 941	949, 953	1009, 1013
1021, 1025	1033, 1037	1069, 1073	1093, 1097	1105, 1109
1153, 1157	1189, 1193	1213, 1217	1237, 1241	1285, 1289
1297, 1301	1381, 1385	1429, 1433	1489, 1493	

Table III.

Les 41 bases de seconde espèce et leurs décompositions.

34	146	178	194	205	221	305	377	386
410	466	482	505	514	545	562	578	650
674	689	706	725	745	793	802	850	866
890	898	905	1154	1186	1202	1205	1234	1282
1345	1346	1394	1405	1469.				

$$34 = 2\cdot 17 = 5^2+3^2$$
$$146 = 2\cdot 73 = 11^2+5^2$$
$$178 = 2\cdot 89 = 13^2+3^2$$
$$194 = 2\cdot 97 = 13^2+5^2$$
$$205 = 5\cdot 41 = 14^2+3^2 = 13^2+6^2$$
$$221 = 13\cdot 17 = 14^2+5^2 = 11^2+10^2$$
$$305 = 5\cdot 61 = 17^2+4^2 = 16^2+7^2$$
$$377 = 13\cdot 29 = 19^2+4^2 = 16^2+11^2$$
$$386 = 2\cdot 193 = 19^2+5^2$$

$$
\begin{array}{llll}
410 = & 2\cdot5\cdot41 & = 19^2+7^2 & = 17^2+11^2 \\
466 = & 2\cdot233 & = 21^2+5^2 & \\
482 = & 2\cdot241 & = 19^2+11^2 & \\
505 = & 5\cdot101 & = 21^2+8^2 & = 19^2+12^2 \\
514 = & 2\cdot257 & = 17^2+15^2 & \\
545 = & 5\cdot109 & = 23^2+4^2 & = 17^2+16^2 \\
562 = & 2\cdot281 & = 21^2+11^2 & \\
578 = & 2\cdot289 & = 23^2+7^2 & \\
650 = & 2\cdot13\cdot25 & = 23^2+11^2 & = 19^2+17^2 \\
674 = & 2\cdot237 & = 25^2+7^2 & \\
689 = & 13\cdot53 & = 25^2+8^2 & = 20^2+17^2 \\
706 = & 2\cdot353 & = 25^2+9^2 & \\
725 = & 25\cdot29 & = 26^2+7^2 & = 23^2+14^2 \\
745 = & 5\cdot149 & = 27^2+4^2 & = 24^2+13^2 \\
793 = & 13\cdot61 & = 28^2+3^2 & = 27^2+8^2 \\
802 = & 2\cdot401 & = 21^2+19^2 & \\
850 = & 17\cdot50 & = 29^2+3^2 & = 27^2+11^2 \\
866 = & 2\cdot433 & = 29^2+5^2 & \\
890 = & 2\cdot5\cdot89 & = 29^2+7^2 & = 23^2+19^2 \\
898 = & 2\cdot449 & = 27^2+13^2 & \\
905 = & 5\cdot181 & = 29^2+8^2 & = 28^2+11^2 \\
1154 = & 2\cdot577 & = 25^2+23^2 & \\
1186 = & 2\cdot593 & = 31^2+15^2 & \\
1202 = & 2\cdot601 & = 29^2+19^2 & \\
1205 = & 5\cdot241 & = 34^2+7^2 & = 26^2+23^2 \\
1234 = & 2\cdot617 & = 35^2+3^2 & \\
1282 = & 2\cdot641 & = 29^2+21^2 & \\
1345 = & 5\cdot269 & = 36^2+7^2 & = 33^2+16^2 \\
1346 = & 2\cdot673 & = 35^2+11^2 & \\
1394 = & 2\cdot17\cdot41 & = 37^2+5^2 & = 35^2+13^2 \\
1405 = & 5\cdot281 & = 37^2+6^2 & = 27^2+26^2 \\
1469 = & 13\cdot113 & = 38^2+5^2 & = 37^2+10^2
\end{array}
$$

Table IV.

Fractions continues et premières solutions des équations de Fermat qui correspondent aux 41 bases de seconde espèce.

34 (35, 6)
5, 1, (4)
1 9 2

146 (145, 12)
12, (12)
1 2

178 (1601, 120)
13, 2, 1, (12)
1 9 17 2

194 (195, 14)
13, 1, (12)
1 25 2

205 (39689, 2772)
14, 3, 6, 1, (4)
1 9 4 21 5

221 (1665, 112)
14, 1, 6, (2)
1 25 4 13

305 (489, 28)
17, 2, (6)
1 16 5

377 (233, 12)
19, 2, (2)
1 16 13

386 (111555, 5678)
19, 1, 1, 1, 4, 1, (18),
1 25 14 23 7 31 2

410 (81, 4)
20, (4)
1 10

466 (938319425, 43466808)
21, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 5, 1, 3, 1, (20)
1 25 18 15 14 23 15 7 30 9 33 2

482 (483, 22)
21, 1, (20)
1 41 2

505 (809, 36)
22, 2, (8)
1 21 5

514 (4625, 204)
22, 1, 2, (22)
1 30 15 2

545 (1961, 84)
23, 2, 1, (8)
1 16 29 5

562 (220938497, 9319728)
23, 1, 2, 2, 2, 4, 1, 5, 1 (22)
1 33 14 17 18 9 34 7 39 2

578 (577, 24)
24, (24)
1 2

650 (51, 2)
25, (2)
1 25

674 (675, 26)
25, 1, (24)
1 49 2

689 (105, 4)
26, (4)
1 13

706 (34595, 1302)
26, 1, 1, 3, (26)
1 30 23 15 2

725 (9801, 364)
26, 1, 12, (2)
1 49 4 25

745 (12769001, 467820)
27, 3, 2, 1, 1, 5, 2, (10)
1 16 19 24 29 9 24 5

793 (4393, 156)
28, 6, (4)
1 9 13

802 (295496099, 10434330)
28, 3, 7, 1, 3, 6, (28)
1 18 7 39 14 9 2

850 (2449, 84)
29, 6, (2)
1 9 25

866 (42435, 1442)
29, 2, 2, 1, (28)
1 25 17 41 2

890 (179, 6)
29, 1, (4)
1 49 10

898 (899, 30)
29, 1, (28)
1 57 2

905 (361, 12)
30, (12)
1 5

1154 (1155, 34)
33, 1, (32)
1 65 2

1186 (6320195, 183522)
34, 2, 3, 1, 1, 4, (34)
1 30 17 33 34 15 2

1202 (10817, 312)
34, 1, 2, (34)
1 46 23 2

1205 (7174089, 206668)
34, 1, 2, 2, 16, 1, (12)
1 49 20 29 4 61 5

1234 (586327869067265, 16691023073856)
35, 7, 1, 3, 1, 4, 4, 2, 9, 1, 1, 2, 3, 1, 1, (34)
1 9 50 15 47 14 15 30 7 39 30 25 18 31 39 2

1282 (3410326403, 95247138)
35, 1, 4, 7, 1, 3, 9, 1, (34)
1 57 14 9 49 18 7 63 2

1345 (4841, 132)
36, 1, 2, (14)
1 49 24 5

1346 (340550115, 9282362)
36, 1, 2, 4, 1, 9, 1, 2, (36)
1 50 23 14 55 7 46 25 2

1394 (12545, 336)
37, 2, 1, (36)
1 25 49 2

1405 (2249, 60)
37, 2, (14)
1 36 (5)

1469 (760265, 19836)
38, 3, 18, 1, (4)
1 25 4 61 13

Table V.

Solutions des équations simultanées

$$a = p^2 + q^2, \quad q \pm 1 = pv, \quad u = p + qv, \quad u^2 - av^2 = a - 1,$$

a étant une base de seconde espèce.

$34 = 5^2 + 3^2$,	$p = 3$	$q = 5$	$v = 2$	$u = 13$
$146 = 11^2 + 5^2$,	$p = 5$	$q = 11$	$v = 2$	$u = 27$
$178 = 13^2 + 3^2$,	$p = 3$	$q = 13$	$v = 4$	$u = 55$
$205 = 14^2 + 3^2$,	$p = 3$	$q = 14$	$v = 5$	$u = 73$
$221 = 11^2 + 10^2$,	$p = 10$	$q = 11$	$v = 1$	$u = 21$
$221 = 14^2 + 5^2$,	$p = 5$	$q = 14$	$v = 3$	$u = 47$
$377 = 19^2 + 4^2$,	$p = 4$	$q = 19$	$v = 5$	$u = 99$
$386 = 19^2 + 5^2$,	$p = 5$	$q = 19$	$v = 4$	$u = 81$
$466 = 21^2 + 5^2$,	$p = 5$	$q = 21$	$v = 4$	$u = 89$
$545 = 17^2 + 16^2$,	$p = 16$	$q = 17$	$v = 1$	$u = 33$
$650 = 23^2 + 11^2$,	$p = 11$	$q = 23$	$v = 2$	$u = 57$
$689 = 25^2 + 8^2$,	$p = 8$	$q = 25$	$v = 3$	$u = 83$
$745 = 27^2 + 4^2$,	$p = 4$	$q = 27$	$v = 7$	$u = 193$
$866 = 29^2 + 5^2$,	$p = 5$	$q = 29$	$v = 6$	$u = 179$
$890 = 29^2 + 7^2$,	$p = 7$	$q = 29$	$v = 4$	$u = 123$
$1186 = 31^2 + 15^2$,	$p = 15$	$q = 31$	$v = 2$	$u = 77$
$1205 = 34^2 + 7^2$,	$p = 7$	$q = 34$	$v = 5$	$u = 177$
$1345 = 36^2 + 7^2$,	$p = 7$	$q = 36$	$v = 5$	$u = 187$

TABLE DES MATIÈRES

TABLES NUMÉRIQUES

concernant les sommes de deux carrés, inférieures à 1500.

Forelagt paa Mødet den 9. Februar 1923.
Færdig fra Trykkeriet den 4. Juli 1923.