Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V,** 12.

DIE GRUPPE DER DREIDIMENSIONALEN GITTER-TRANSFORMATIONEN

VON

JAKOB NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Es ist bekannt, wie man die Transformationsgruppe des zweidimensionalen Gitters, also die (durch Spiegelung erweiterte, homogene) Modulgruppe, durch Angabe eines Systems erzeugender Operationen und definierender Relationen abstrakt charakterisieren kann. Dasselbe geschieht im Folgenden für das räumliche Gitter.

Um die im Folgenden benutzte, für den Beweis der Vollständigkeit eines Relationensystems für eine unendliche diskontinuierliche Gruppe oft anwendbare Methode am einfachsten Fall zu illustrieren, wird im § 1 das ebene Gitter ausführlich behandelt.

§ 1.

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$

die Matrix einer homogenen linearen ganzzahligen Substitution

$$x_i' = e_{i1}\, x_1 + e_{i2}\, x_2 \qquad (i = 1, 2)$$

mit der Determinante

$$D = |e_{ik}| = \pm 1 ,$$

und es sei bezeichnet

$$s_{ik} = e_{i1}\, e_{k1} + e_{i2}\, e_{k2} = s_{ki} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Dann ist

$$D^2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = s_{11}\, s_{22} - s_{12}^2 = 1.$$

Nimmt man an, es sei gleichzeitig

$$2\,|s_{12}| \leqq s_{11}$$
$$2\,|s_{12}| \leqq s_{22},$$

so folgt wegen der Ganzzahligkeit der s_{ik} aus der letzten Gleichung

$$s_{11} = s_{22} = 1, \quad s_{12} = 0,$$

also dass M orthogonal ist. Bezeichnet $\mathfrak{v}_i$ den Vektor mit den Komponenten e_{i1}, e_{i2} und $|\mathfrak{v}_i| = \sqrt{s_{ii}}$ seine Länge, so erfüllt also ein transformiertes, nicht orthogonales Gitter mindestens eine der folgenden vier Ungleichungen:

$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_1|$$
$$|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_1|$$
$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_2|$$
$$|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_2|.$$

Im Einheitsparallelogramm eines nicht orthogonalen Gitters ist also die kürzeste Diagonale stets kürzer als die längste Seite. Als Erzeugende der gesuchten Transformationsgruppe G wählen wir daher zunächst die Substitutionen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$O_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$12 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(12^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$21 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denn mittels 12 und 21 kann man eine beliebige Matrix M nach dem Vorstehenden auf eine orthogonale reduzieren, und jede orthogonale wird durch P, O_1, O_2 erzeugt. — Die Zahl $\sigma(M) = |\mathfrak{v}_1|^2 + |\mathfrak{v}_2|^2 = s_{11} + s_{22} = \Sigma e_{ik}^2$ kann als Mass für die »Schiefe« des Gitters dienen.

Wir benutzen folgende Bezeichnungsweise: Sind M und N die Matrizen zweier Substitutionen, so ist die Substitution MN mittels der Matrizenmultiplikation (Zeile von $M \times$ Spalte von N) erklärt. M_N bedeutet $N^{-1}MN$, und $M \rightleftarrows N$ bedeutet die Relation $MN = NM$, oder anders geschrieben $M_N = M$. Endlich bezeichnet $\{M, N\}$ die aus M und N erzeugte Untergruppe, und $\{M, N\} \rightleftarrows \{M', N'\}$ bedeutet, dass man zu irgend zwei Elementen E bezw. E' aus diesen beiden Gruppen stets zwei andere F und F' so finden kann, dass $EE' = F'F$ ist.

Aus der Definition der Erzeugenden bestätigt man unmittelbar die Richtigkeit folgender Relationen:

(1)	$P^2 = 1$	(5)	$12_P = 21$
(2)	$O_1^2 = 1$	(6)	$12_{O_1} = 12^{-1}$
(3)	$O_{1P} = O_2$	(7)	$12_{O_2} = 12^{-1}$
(4)	$O_1 \rightleftarrows O_2$	(8)	$O_1 \cdot P \cdot 12 \cdot 21^{-1} \cdot 12 = 1.$

Es soll gezeigt werden, dass dies Relationensystem für G vollständig ist, d. h. dass jede in G gültige Relation zwischen den Erzeugenden eine formale Folge aus (1)—(8) ist.

Aus (2) bezw. (3) folgt formal durch Transformation mit P wegen (1):

(9) $$O_2^2 = 1$$

(10) $$O_{2P} = O_1.$$

(3) und (10) besagen, dass $P \rightleftarrows \{O_1, O_2\}$, und wegen (4) kann dann jedes Element aus $\{P, O_1, O_2\} = \Omega$ in der Form

(11) $$O_1^\alpha O_2^\beta P^\gamma$$

geschrieben werden, wo α, β, γ wegen (2), (9) und (1) auf die Werte 0 und 1 beschränkt werden können. Die Normalform (11) stellt also jedenfalls nicht mehr als 8 Elemente dar; da aber Ω seiner Bedeutung nach 8 orthogonale Transformationen enthält, ist (1)—(4) für Ω vollständig.

Aus (5), (6) und (7) folgt durch Transformation mit P wegen (3), (10) und (1):

$$21_P = 12 \tag{12}$$

$$21_{O_2} = 21^{-1} \tag{13}$$

$$21_{O_1} = 21^{-1}. \tag{14}$$

(5)—(7) und (12)—(14) sagen aus, dass $\Omega \rightleftarrows \{12, 21\} = Z$; aber (8) zeigt, dass G nicht das »direkte Produkt« von Ω und Z ist. ω bezw. ζ sei das allgemeine Zeichen für eine Operation aus Ω bezw. Z.

Aus (8) folgt durch Transformation mit P:

$$O_2 \cdot P \cdot 21 \cdot 12^{-1} \cdot 21 = 1. \tag{15}$$

Ein $\zeta = \Pi\,(12, 21)$, das Exponenten beiderlei Zeichens enthält, enthält zwei benachbarte Faktoren 12 und 21 mit entgegengesetzten Exponentenzeichen. Aus (8) oder (15) und danach (5)—(7), (12)—(14) bekommt man dann eine Umformung

$$\zeta = \omega \cdot \zeta',$$

wo ζ' mindestens einen Faktor weniger enthält. In endlich vielen Schritten kann man daher jedes Element g aus G in die »Normalform«

$$g = O_1^{\alpha} O_2^{\beta} P^{\gamma} \cdot \Pi\,(12,\ 21) \tag{16}$$

bringen, wo die Exponenten in Π entweder alle positiv oder alle negativ sind und $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$. Treten in Π überhaupt von 0 verschiedene Exponenten auf, so ist $\sigma(\Pi) > 3$, da σ mit jedem neuen Faktor 12 oder 21 wächst, daher auch $\sigma(g) > 3$. Das Einheitselement wird daher in (16) eindeutig dargestellt, indem α, β, γ und alle Exponenten in Π verschwinden müssen.

Ist nun

$$(17) \qquad \Pi_1 (P, O_1, O_2, 12, 21) = \Pi_2 (P, O_1, O_2, 12, 21)$$

eine in G gültige Relation, so forme man die linke Seite von

$$(18) \qquad \Pi_1 \Pi_2^{-1} = 1$$

in die Normalform (16) um, was einer formalen Anwendung von (1)—(8) entspricht. Wie gezeigt, wird (18) dadurch zu einer Identität, also folgt (17) formal aus (1)—(8), w. z. b. w.

Nachträglich kann man dann die Erzeugendenzahl reduzieren und z. B. P und 12, das weiterhin mit U bezeichnet sei, als Erzeugende wählen.[1] Denn aus (5), (8) und (3) ergeben sich

$$\begin{aligned} 21 &= U_P \\ O_1 &= P U U_P^{-1} U \\ O_2 &= U U_P^{-1} U P. \end{aligned}$$

Das vollständige Relationensystem zwischen P und U erhält man nun, indem man in den übrigen fünf Relationen die gefundenen Ausdrücke für 21, O_1, O_2 einsetzt: (1) bleibt ungeändert, und man erhält aus (2)

$$(19) \qquad (PUPU^{-1}PU)^2 = 1$$

und aus (4), in der Form $(O_1 O_2)^2 = 1$ geschrieben:

$$(20) \qquad (UPU^{-1}PU)^4 = 1,$$

während (6) und (7) keine neuen Bindungen zwischen P und U mehr liefern. So führt z. B. (6), in der Form $(O_1 \cdot 12)^2 = 1$ geschrieben, zu der Relation

[1] Dass auch die erweiterte Modulgruppe durch nur zwei Substitutionen erzeugbar ist, findet sich übrigens m. W. in der Literatur nicht bemerkt.

$$(PUPU^{-1}PU^2)^2 = 1;$$

die linke Seite dieser Relation kann aber, identisch in $P = P^{-1}$ und U, in

$$(PUPU^{-1}PU)^2\,(PUPU^{-1}PU)_U^2$$

umgeformt werden, die Relation folgt also aus (1) und (19). Entsprechendes gilt für (7). Wir haben also dieses abstrakte Schema für G:

Erzeugende: P, U;

Definierende Relationen $\Big\}$ $P^2 = (PUPU^{-1}PU)^2 = (PU^{-1}PU^2)^4 = 1.$

Will man die invariante Untergruppe $\overline{G}$ von G haben, die zu der Determinante $D = +1$ gehört, die also die Gitterorientierung erhält, so weiss man, wegen $D(U) = +1$, $D(P) = -1$, dass die Erzeugende P in den Elementen von $\overline{G}$ eine gerade Anzahl von Malen auftritt. Man kann also

$$V = U_P \quad (= 21)$$

einführen und $\overline{G} = \{U, V\}$ schreiben. (19) und (20) ergeben die Relationen

(21) $$VU^{-1}VUV^{-1}U = 1,$$

(22) $$(UV^{-1}U)^4 = 1.$$

Um die Vollständigkeit eines Relationensystems für $\overline{G}$ auf die bekannte Vollständigkeit für G stützen zu können, ist zu berücksichtigen, dass die Transformation von (19) und (20) mit P zwar in G nichts Neues liefern kann, wohl aber möglicherweise in $\overline{G}$, das ja P nicht enthält. Die Ausrechnung ergibt zwei Relationen, die leicht aus (21) und (22) gefolgert werden, sodass in der Tat (21) und (22) für $\overline{G}$ vollständig sind. — Führt man statt V als neue Erzeugende neben U

$$T = UV^{-1}U$$

ein, was wegen $V = UT^{-1}U$ möglich ist, so erhält man für $\overline{G}$ das Schema:

Erzeugende: T, U;
Definierende Relationen: $UT^{-1}UT^{-1}UT = T^4 = 1$.

Will man endlich von hier zu der Gruppe F der inhomogenen Modulsubstitutionen hinabsteigen, die in $\overline{G}$ als Faktorgruppe enthalten ist, so geschieht dies durch Hinzufügung der Relation

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^2 = 1,$$

wonach man für F das übliche[1] Schema hat:

Erzeugende: T, U;
Definierende Relationen: $(UT)^3 = T^2 = 1$.

Diese Methode suchen wir nun im § 2 für das räumliche Gitter anzuwenden, indem wir zum Zwecke des Vollständigkeitsbeweises wieder die Konstruktion einer für das Einheitselement eindeutigen Normalform anstreben. Die Bezeichnungen werden im Wesentlichen ungeändert übernommen, um einen kurzen Ausdruck zu ermöglichen.

§ 2.

Es sei $M = (e_{ik})$ die Matrix einer ganzzahligen Substitution

$$x_i' = e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + e_{i3}x_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

[1] Vgl. F. Klein, Vorl. über die Theorie der ell. Modulfunktionen. Ausgearbeitet von R. Fricke. Teubner 1890. Bd. I pg. 452—454. U ist dort mit S bezeichnet.

mit der Determinante

$$D = |e_{ik}| = \pm 1.$$

Es bezeichne $\mathfrak{v}_i$ den Vektor mit den Komponenten e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} und $|\mathfrak{v}_i|$ seine Länge, ferner

$$s_{ik} = e_{i1}e_{k1} + e_{i2}e_{k2} + e_{i3}e_{k3} = s_{ki},$$

$$\sigma(M) = |\mathfrak{v}_1|^2 + |\mathfrak{v}_2|^2 + |\mathfrak{v}_3|^2 = \sum_i s_{ii} = \sum_{i,k} e_{ik}^2.$$

H ü l f s s a t z: Gilt für jedes i und $k \neq i$ die Ungleichung

$$2\,|s_{ik}| \leqq s_{ii},$$

so ist M orthogonal.

Beweis: Wir können annehmen, es sei $s_{11} \leqq s_{22} \leqq s_{33}$, und setzen

$$\begin{aligned} s_{22} &= s_{11} + h, \qquad & h \geqq 0 \\ s_{33} &= s_{22} + k, \qquad & k \geqq 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 1 &= D^2 \\ = |s_{ik}| = s_{11}s_{22}s_{33} &- (s_{11}s_{23}^2 + s_{22}s_{13}^2 + s_{33}s_{12}^2) + 2\,s_{12}s_{13}s_{23} \\ &\geqq s_{11}(s_{11}+h)(s_{11}+h+k) \\ -\left[s_{11}\frac{(s_{11}+h)^2}{4} + (s_{11}+h)\frac{s_{11}^2}{4} + (s_{11}+h+k)\frac{s_{11}^2}{4}\right] &- \frac{s_{11}^2(s_{11}+h)}{4} \\ &= \frac{s_{11}}{4}(3\,s_{11}h + 3\,h^2 + 4\,hk + 3\,s_{11}k). \end{aligned}$$

Daraus folgt $h = 0$ und (zunächst für $s_{11} > 1$, dann aber auch für $s_{11} = s_{22} = 1$) $k = 0$.

Die Zahl $s_{11} = s_{22} = s_{33}$ ist dann wegen

$$1 = s_{11}^3 - s_{11}(s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2) + 2\,s_{12}s_{13}s_{23}$$

ungerade, etwa $s_{11} = 2n+1$ und also $|s_{ik}| \leqq n$ $(i \neq k)$, also

$$1 \geqq (2n+1)^3 - (2n+1)\,3n^2 - 2n^3 = 9n^2 + 6n + 1,$$

also $n = 0$, also M orthogonal, w. z. b. w.

Für eine nicht orthogonale Matrix lässt sich also stets ein i und k so finden, dass eine der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\mathfrak{v}_i + \mathfrak{v}_k| &< |\mathfrak{v}_i| \\ |\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_k| &< |\mathfrak{v}_i| \end{aligned}$$

erfüllt ist. Das Grundparallelepiped eines schiefen Gitters ist also immer so schief, dass in mindestens einer Seitenfläche die kürzere Diagonale kürzer ist, als die längere Seite.

Mit ik sei die Substitution

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i + x_k \\ x_h' &= x_h \qquad (h \neq i) \end{aligned}$$

bezeichnet; dann lässt sich also jede Substitution durch fortgesetzte Prämultiplikation mit Faktoren $ik^{\pm 1}$ auf eine orthogonale reduzieren, und zwar so, dass dabei das »Schiefemass« $\sigma(M)$ monoton abnimmt.

Als Erzeugende der Gruppe Ω orthogonaler Substitutionen nehmen wir zunächst die folgenden:

$$P_{ik} = P_{ki}: \begin{cases} x_i' = x_k \\ x_k' = x_i \\ x_h' = x_h \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i \neq k \\ h \neq i,\ k \end{pmatrix}$$

$$O_i: \begin{cases} x_i' = -x_i \\ x_h' = x_h \qquad (h \neq i). \end{cases}$$

Zwischen diesen bestehen die Relationen[1]

[1] Verschieden bezeichnete Indices sind verschieden.

$$
(A)\left\{\begin{array}{ll}
(1) & P_{ik}^2 = 1 \\
(2) & P_{ik_{P_{kl}}} = P_{il} \\
(3) & O_i^2 = 1 \\
(4) & O_i \rightleftarrows O_k \\
(5) & O_{i_{P_{ik}}} = O_k \\
(6) & O_{i_{P_{kl}}} = O_i .
\end{array}\right.
$$

(A) ist für Ω vollständig. Denn (5) und (6) besagen, dass

$$\{O_i\} \rightleftarrows \{P_{ik}\}.$$

Ist also wieder ω das Zeichen für ein Element aus Ω, so kann man umformen:

$$\omega = \Pi(O_i, P_{ik}) = \Pi_1(O_i) \cdot \Pi_2(P_{ik}).$$

$\Pi_1(O_i)$ kann wegen (3) und (4) in die Form

$$O_1^{\alpha_1} O_2^{\alpha_2} O_3^{\alpha_3} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1)$$

gebracht werden. In $\Pi_2(P_{ik})$ kann die Faktorenzahl mittels (1) und (2) verkleinert werden, solange ein Faktor zweimal auftritt, und auch noch, wenn P_{12}, P_{13}, P_{23} je einmal auftreten; es bleibt also entweder kein Faktor übrig (1 Möglichkeit), oder ein Faktor (3 Möglichkeiten), oder 2 Faktoren; in diesem letzteren Fall kann man mittels (2) erreichen, dass der erste Faktor P_{12} ist. Jedes ω kann also

$$\omega_n = O_1^{\alpha_1} O_2^{\alpha_2} O_3^{\alpha_3} P_{12}^{\beta_1} P_{13}^{\beta_2} P_{23}^{\beta_3} \quad (\alpha_i, \beta_i = 0, 1; \ \beta_2 \cdot \beta_3 = 0)$$

geschrieben werden. Diese »Normalform« stellt 48 Elemente dar, ist also für Ω eindeutig, womit die Vollständigkeit von (A) erkannt ist.

Wir erzeugen nun die Gesamtgruppe G durch die ik, P_{ik} und O_i. Dann haben wir zunächst folgende weitere Relationen:

$$
(\mathrm{B}) \left\{ \begin{array}{ll}
(7) & ik_{P_{ik}} = ki \\
(8) & ik_{P_{il}} = lk \\
(9) & ik_{P_{kl}} = il \\
(10) & ik_{O_l} = ik, \quad \text{d. h. } ik \rightleftarrows O_l \\
(11) & ik_{O_i} = ik^{-1} \\
(12) & ik_{O_k} = ik^{-1}.
\end{array} \right.
$$

(B) besagt, dass $\Omega \rightleftarrows \{ik\}$. Jedes Element g aus G kann also geschrieben werden:

$$g = \omega \cdot \Pi(ik)$$

(G ist aber nicht das direkte Produkt von Ω und $\{ik\}$, wie (13) zeigt). Wir haben nun noch die Relationen

$$
(\mathrm{C}) \left\{ \begin{array}{ll}
(13) & O_i P_{ik} \cdot ik \cdot ki^{-1} \cdot ik = 1 \\
(14) & ik \rightleftarrows il \\
(15) & ik \rightleftarrows lk \\
(16) & ik \cdot kl \cdot ik^{-1} \cdot kl^{-1} \cdot il^{-1} = 1.
\end{array} \right.
$$

(16) sagt aus, dass il der »Kommutator« von ik und kl ist. Wegen (14) und (15) ist er mit beiden vertauschbar. Man sieht daher die Tragweite der Relation (16) am besten, wenn man sie in der Form schreibt:

$$(16\,\mathrm{a}) \qquad ik \cdot kl = il \cdot kl \cdot ik = kl \cdot il \cdot ik = kl \cdot ik \cdot il.$$

Der Rest dieses § bringt den Nachweis dafür, dass (A), (B), (C) für G vollständig ist. Wir benutzen dazu, dass jedes Element g von G in der Form

$$g = \omega \cdot \Pi(ik)$$

geschrieben werden kann, und betrachten ein solches Produkt $p = \Pi(ik)$. Bezeichnen wir einen Augenblick die Faktoren desselben mit

$$p = F_1 \cdot F_2 \ldots F_r,$$

so heisse die Folge positiver Zahlen $\geqq 3$:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma(F_1 \cdot F_2 \ldots F_r) \\ \sigma_2 &= \sigma(F_2 \cdot F_3 \ldots F_r) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_r &= \sigma(F_r) \\ \sigma_{r+1} &= \sigma(1) = 3 \end{aligned}$$

das »Diagramm« von p. Es hängt von der besonderen Wahl der Produktdarstellung von p ab. Aus dem Hülfssatz folgt, dass es für p eine Produktdarstellung

$$p = F_1' \cdot F_2' \ldots F_s' \cdot \omega$$

gibt, in der das Diagramm von $F_1' \cdot F_2' \ldots F_s' = p_n$ monoton abnimmt. Die Vertauschung eines ω mit einem $\Pi(ik)$ mittels (B) lässt, da sie nur einer Umbenennung der Variablen entspricht, die Faktorenzahl und das Diagramm von $\Pi(ik)$ ungeändert. Also lässt sich jedes g in der Form schreiben:

$$g_n = \omega_n \cdot p_n,$$

wo ω_n die obige Normalform für ω ist. In dieser Normalform g_n ist das Einheitselement von G nur auf eine Weise darstellbar, denn wegen $\sigma(1) = 3$ kann p_n, dessen Diagramm monoton ist, überhaupt keinen Faktor enthalten, und in ω_n ist die 1 eindeutig. Unsere Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, zu zeigen, dass sich jedes p unter alleiniger Verwendung von (A), (B) und (C) in die Form $p = \omega \cdot p_n$ umformen lässt. Und hierzu genügt es, zu zeigen, dass, wenn das Diagramm von p nicht monoton ist und λ die grösste der vorkommenden Diagrammzahlen ist, eine aus (A), (B), (C) folgende Umformung $p = \omega \cdot p'$

gefunden werden kann, wo keine Diagrammzahl von p' grösser als λ ist und λ im Diagramm von p' einmal weniger vorkommt.

Ist das Diagramm von p nicht monoton, so gibt es einen Index h, sodass $\sigma_h < \lambda$, $\sigma_{h+1} = \lambda$ ist. Wir setzen $I = F_{h+2} F_{h+3} \ldots F_r$ und betrachten den Endbestandteil $\pi = F_h F_{h+1} I$ von p. Wir können $F_h = 12$ annehmen, da wir dies durch Umbenennung der Variablen (d. h. Transformation mit einem ω) stets erreichen können; enthält ferner F_{h+1} den Index 3, so können wir den Exponenten von F_{h+1} als $+1$ annehmen, da wir das durch Zeichenwechsel in x_3 (d. h. Transformation mit O_3) erreichen können, ohne $F_h = 12$ zu ändern; endlich können wir F_{h+1} als von 12^{-1} verschieden annehmen, da wir sonst einfach $F_h F_{h+1}$ streichen können. Somit haben wir für F_{h+1} folgende Möglichkeiten, die wir einzeln erledigen müssen:

1) 32 2) 12 3) 21 4) 21^{-1} 5) 13 6) 23 7) 31.

Wir setzen dabei $I = (e_{ik})$ und haben $\sigma(I) \leqq \lambda$ wegen der Maximaleigenschaft von λ im Diagramm von p.

Fall 1) $\pi = 12 \cdot 32 \cdot I$.

Die beiden Faktoren wirken unabhängig von einander auf die Matrix $M(I)$ ein. Also ist $\sigma(12 \cdot I) < \sigma(I) \leqq \lambda$. In

$$\pi_1 = 32 \cdot 12 \cdot I$$

tritt also λ einmal weniger auf. $\pi = \pi_1$ folgt aus (15).

Fall 2) $\pi = 12 \cdot 12 \cdot I$.

Hier soll also sein:

$$\sigma(12 \cdot I) \geqq \sigma(I)$$

d. h.

$$\sum_i (e_{1i} + e_{2i})^2 \geqq \sum_i (e_{1i})^2$$

oder

$$2 s_{12} + s_{22} \geqq 0 \qquad (\alpha)$$

und ferner

$$\sigma(12\cdot 12\cdot I) < \sigma(12\cdot I)$$

d. h.

$$\sum_i (e_{1i}+2e_{2i})^2 < \sum_i (e_{1i}+e_{2i})^2$$

oder

$$2s_{12}+3s_{22} < 0. \tag{β}$$

Die Ungleichung (β) steht im Widerspruch zu (α), wegen $s_{ii} > 0$, also ist der Fall 2) unmöglich.

Fall 3) $\pi = 12\cdot 21\cdot I$.

Hier soll sein:

$$2s_{12}+s_{11} \geqq 0 \tag{α}$$

und:

$$4s_{12}+3s_{11}+s_{22} < 0 \tag{β}$$

(α) und (β) stehen im Widerspruch, der Fall ist also unmöglich.

Fall 4) $\pi = 12\cdot 21^{-1}\cdot I$.

Wir setzen $\pi_1 = P_{12}O_1\cdot 12^{-1}I$, wobei $\pi = \pi_1$ aus (13) folgt. Dann ist $\sigma(12^{-1}\cdot I) = \sigma(\pi) < \lambda$. Den Faktor $P_{12}O_1$ schafft man mittels (B) über den Anfangsbestandteil $F_1\cdot F_2\ldots F_{h-1}$ von p hinweg nach vorne, ohne dass dabei an dem Diagramm dieses Teils etwas geändert wird. λ tritt dann einmal weniger auf. — Analog denke man sich stets im Folgenden bei Umformungen auftretende Faktoren ω über $F_1\ldots F_{h-1}$ hinweg an den Anfang des Produkts geschafft.

Fall 5) $\pi = 12\cdot 13\cdot I$.

Die Voraussetzungen: $\sigma(13\cdot I) \geqq \sigma(I)$, bezw. $\sigma(12\cdot 13\cdot I) < \sigma(13\cdot I)$ besagen, dass

$$\sum_i (e_{1i}+e_{3i})^2 \geqq \sum_i e_{1i}^2 \quad \text{bezw.} \quad \sum_i (e_{1i}+e_{3i}+e_{2i})^2 < \sum_i (e_{1i}+e_{3i})^2,$$

sodass wir für die s_{ik} folgende Ungleichungen haben:

$$2s_{13} + s_{33} \geqq 0 \qquad (\alpha)$$
$$2s_{12} + 2s_{23} + s_{22} < 0. \qquad (\beta)$$

Es sei $\pi_1 = 13 \cdot 12 \cdot I$. Die Umformung von π in π_1, deren Zulässigkeit aus (14) folgt, genügt unserer Forderung, λ einmal weniger hervorzurufen, falls $\sigma(12 \cdot I) < \sigma(13 \cdot I)$, also $2s_{12} + s_{22} < 2s_{13} + s_{33}$ ist. Wir nehmen also das Gegenteil an und notieren die Ungleichungen:

$$2s_{12} + s_{22} - 2s_{13} - s_{33} \geqq 0 \qquad (\gamma)$$
$$2s_{12} + s_{22} \geqq 0 \qquad (\delta) \text{ aus } (\gamma) + (\alpha)$$
$$s_{23} < 0. \qquad (\varepsilon) \text{ » } (\beta) - (\delta)$$

Die Umformung $\pi \twoheadrightarrow \pi_2 = 32^{-1} \cdot 13 \cdot 32 \cdot I$ mittels (16 a) genügt, falls $\sigma(32 \cdot I) < \sigma(I)$. Wir nehmen also das Gegenteil an und notieren:

$$2s_{23} + s_{22} \geqq 0 \qquad (\zeta)$$
$$s_{12} < 0. \qquad (\eta) \text{ aus } (\beta) - (\zeta)$$

$\pi \twoheadrightarrow \pi_3 = 23^{-1} \cdot 12 \cdot 23 \cdot I$ mittels (16 a) genügt, falls $\sigma(23 \cdot I) < \sigma(I)$; also:

$$s_{23} + s_{33} \geqq 0 \qquad (\vartheta)$$
$$s_{13} < 0. \qquad (\iota) \text{ aus } (\beta) - (\gamma) - (\vartheta)$$

Wir wenden nun den Hülfssatz auf die (z. B. wegen (ε)) nicht orthogonale Matrix I an. Die Differenz zweier Vektoren ist wegen (ε), (η), (ι) stets grösser als die einzelnen Summanden. Wir prüfen die Vektorsummen und finden:

$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_3| \geqq |\mathfrak{v}_1| \text{ wegen } (\alpha)$$
$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_1| \quad \text{»} \quad (\delta)$$
$$|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3| \geqq |\mathfrak{v}_2| \quad \text{»} \quad (\vartheta)$$
$$|\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_3| \quad \text{»} \quad (\zeta).$$

Also ist nach dem Hülfssatz entweder $|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$ oder $|\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|$.

Ist $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$, also $2s_{12}+s_{11} < 0$, so genügt die Umformung:

$$\pi \rightarrow \pi_4 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 13 \cdot 23 \cdot 21 \cdot I,$$

denn nach Annahme ist $\sigma(21 \cdot I) < \sigma(I)$, ferner aber $\sigma(23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(21 \cdot I)$, denn $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1|$ folgt aus

$$2s_{23}+2s_{13}+s_{33} < 0 \qquad \text{aus} \quad (\beta)-(\gamma);$$

wir haben also $\sigma(23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(I)$, und da die erste und dritte Zeile der Matrix noch ungeändert sind, folgt $\sigma(13 \cdot 23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(13 \cdot I) = \lambda$; und endlich ist $\sigma(12^{-1} \cdot 13 \cdot 23 \cdot 21 \cdot I) = \sigma(\pi_4) = \sigma(\pi) < \lambda$. Es ist noch zu zeigen, dass $\pi = \pi_4$ aus (C) folgt. Es ist

$$\pi_4 \underset{(14)}{=} O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 13 \cdot 21 \cdot 23 \cdot I \underset{(16\,a)}{=} O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I$$
$$\underset{(13)}{=} 12 \cdot 13 \cdot I = \pi,$$

wobei unter dem Gleichheitszeichen jedesmal die verwendete Relation angegeben ist; (13) ist dabei in der Form

$$(13\,a) \qquad O_k P_{ik} \cdot ik^{-1} \cdot ki \cdot ik^{-1} = 1$$

verwendet, die aus (13) durch Transformation mit O_i unter Benutzung von (A) und (B) hervorgeht.

Also sei $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| \geqq |\mathfrak{v}_2|$ angenommen, und also $|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|$. Wir notieren:

$$2s_{12}+s_{11} \geqq 0 \qquad (\varkappa)$$
$$2s_{13}+s_{11} < 0 \qquad (\mu)$$
$$s_{33} > s_{11}. \qquad (\nu) \text{ aus } (\alpha)-(\mu)$$

$\pi_5 = O_3 P_{13} O_2 P_{23} \cdot 32^{-1} \cdot 13^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I$ genügt, falls $\sigma(13^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I) < \lambda$, d. h. falls $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$; denn es ist $\sigma(31 \cdot I) < \sigma(I)$ nach (μ) und $\sigma(23 \cdot 31 \cdot I) < \sigma(13^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I)$ nach (ν). $\pi = \pi_5$ folgt so:

$$\pi_5 \underset{(15)}{=} O_3 P_{13} O_2 P_{23} \cdot 32^{-1} \cdot 23 \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} O_3 P_{13} \cdot 32 \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot I$$
$$\underset{(8),\,(10)}{=} 12 \cdot O_3 P_{13} \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} 12 \cdot 13 \cdot I = \pi.$$

Wir nehmen also $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| \geqq |\mathfrak{v}_2|$ an, also

$$2s_{23}+2s_{12}+2s_{13}+s_{33}+s_{11} \geqq 0. \qquad (\xi)$$

Dann genügt $\pi_6 = O_3 P_{13}\cdot 13^{-1}\cdot 12\cdot 32\cdot 31\cdot I$, denn $\sigma(31\cdot I) < \sigma(I)$ nach (μ), $\sigma(32\cdot 31\cdot I) < \sigma(31\cdot I)$ nach (β). Es ist also nur noch zu zeigen, dass $\sigma(12\cdot 32\cdot 31\cdot I) < \lambda$, also dass gilt:

$$\text{(U)} \qquad |\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2|+|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_3|+|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3|.$$

Dazu wenden wir den Hülfssatz auf die Matrix mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3' = \mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2$ an. Es ist

$$\begin{array}{lll}
|\mathfrak{v}_1 \pm \mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_1| & \text{nach } (\delta) \text{ und } (\eta) \\
|\mathfrak{v}_2 \pm \mathfrak{v}_1| \geqq |\mathfrak{v}_2| & \text{» } (\varkappa) \text{ » } (\eta) \\
|\mathfrak{v}_3' - \mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_3'| & \text{» } (\beta) \\
|\mathfrak{v}_3' + \mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_3'| & \text{» } (\delta) \text{ » } (\zeta) \\
|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3'| > |\mathfrak{v}_2| & \text{» } (\delta) \text{ » } (\zeta) \text{ und } (\xi) \\
|\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_3'| > |\mathfrak{v}_2| & \text{» } (\xi) \text{ » } (\beta) \\
|\mathfrak{v}_3' - \mathfrak{v}_1| > |\mathfrak{v}_3'| & \text{» } (\mu) \text{ » } (\eta) \\
|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_3'| > |\mathfrak{v}_1|, & \text{» } (\zeta) \text{ » } (\nu)
\end{array}$$

also ist nach dem Hülfssatz

entweder $|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3'| < |\mathfrak{v}_1|$

oder $|\mathfrak{v}_3'+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3'|$.

Die erste Ungleichung besagt:

$$\begin{aligned}
0 &\geqq 3s_{11}+s_{22}+s_{33}+4s_{12}+4s_{13}+2s_{23} \\
&= [s_{11}+2s_{22}-s_{33}+4s_{12}+2s_{23}]+2\,[2s_{23}+2s_{12}+2s_{13}+s_{33}+s_{11}] \\
&\qquad -2\,[s_{22}+2s_{12}+2s_{23}]+s_{22}.
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung besagt:

$$\begin{aligned}
0 &\geqq 3s_{11}+2s_{12}+2s_{13} \\
&= [s_{11}+2s_{22}-s_{33}+4s_{12}+2s_{23}]+[2s_{23}+2s_{12}+2s_{13}+s_{33}+s_{11}] \\
&\qquad -2\,[2s_{22}+2s_{12}+2s_{23}]+s_{11}.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt wegen (ξ) und (β)

$$0 > s_{11}+2s_{22}-s_{33}+4s_{12}+2s_{23},$$

welches mit der zu beweisenden Ungleichung (U) gleichbedeutend ist.

$\pi = \pi_6$ folgt so:

$$\pi_6 \underset{(16\,a)}{=} O_3 P_{13} \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot 12 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} 13 \cdot 12 \cdot I \underset{(14)}{=} 12 \cdot 13 \cdot I = \pi.$$

Damit ist der Fall 5 erledigt.

Fall 6) $\pi = 12 \cdot 23 \cdot I$. — Nach Voraussetzung ist:

$$\begin{array}{ll} 2s_{23} + s_{33} \geqq 0 & (\alpha) \\ s_{22} + s_{33} + 2s_{23} + 2s_{12} + 2s_{13} < 0 & (\beta) \\ s_{22} + 2s_{12} + 2s_{13} < 0. & (\gamma) \text{ aus } (\beta) - (\alpha) \end{array}$$

$\pi \twoheadrightarrow \pi_1 = 23 \cdot 13 \cdot 12 \cdot I$ mittels (16 a). Hier ist $\sigma(13 \cdot 12 \cdot I) < \sigma(I)$ nach (β). Also genügt π_1, falls $\sigma(12 \cdot I) < \sigma(23 \cdot I) = \lambda$. Wir nehmen also das Gegenteil an:

$$\begin{array}{ll} 2s_{12} + s_{22} - 2s_{23} - s_{33} \geqq 0 & (\delta) \\ 2s_{12} + s_{22} \geqq 0 & (\varepsilon) \text{ aus } (\delta) + (\alpha) \\ s_{13} < 0. & (\zeta) \text{ » } (\gamma) - (\varepsilon) \end{array}$$

$\pi \twoheadrightarrow \pi_2 = 23 \cdot 12 \cdot 13 \cdot I$ mittels (16 a) genügt analog, falls nicht

$$\begin{array}{ll} s_{13} - s_{23} \geqq 0 & (\eta) \\ 2s_{13} + s_{33} \geqq 0 & (\vartheta) \text{ aus } (\eta) \text{ und } (\alpha) \\ s_{23} < 0. & (\iota) \text{ » } (\zeta) \text{ » } (\eta) \end{array}$$

$\pi \twoheadrightarrow \pi_3 = O_3 P_{23} \cdot 23^{-1} \cdot 13 \cdot 32 \cdot I$ genügt, falls nicht $\sigma(32 \cdot I) \geqq \sigma(23 \cdot I)$, d. h.

$$\begin{array}{ll} s_{22} \geqq s_{33} & (\varkappa) \\ 2s_{23} + s_{22} \geqq 0 & (\mu) \text{ aus } (\varkappa) + (\alpha) \\ s_{12} < 0. & (\nu) \text{ » } (\beta) - (\mu) - (\vartheta) \end{array}$$

$\pi = \pi_3$ folgt so: $\pi_3 \underset{(15)}{=} O_3 P_{23} \cdot 13 \cdot 23^{-1} \cdot 32 \cdot I \underset{(9)\,(10)}{=} 12 \cdot O_3 P_{23} \cdot 23^{-1} \cdot 32 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} 12 \cdot 23 \cdot I = \pi$. Wegen (ζ), (ι), (ν) ist die Differenz zweier Vektoren stets grösser, als der einzelne Summand. Ferner ist

$$
\begin{array}{ll}
|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3| \geqq |\mathfrak{v}_2| & \text{nach } (\alpha) \\
|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_3| & \text{» } (\mu) \\
|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_1| & \text{» } (\varepsilon) \\
|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3| \geqq |\mathfrak{v}_1| & \text{» } (\vartheta),
\end{array}
$$

also ist nach dem Hülfssatz

$$
\begin{array}{ll}
\text{entweder} & |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2| \\
\text{oder} & |\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|.
\end{array}
$$

Ist $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$, also $|\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_1|$, so genügt $\pi_4 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 23 \cdot 21 \cdot I \underset{(14)\,(13\,\mathrm{a})}{=} \pi$; denn $\sigma(21 \cdot I) < \sigma(I)$; und $\sigma(23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(\pi)$ wegen $|\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2| \underset{(\alpha)}{\leqq} |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3|$. Ist $|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|$, also $|\mathfrak{v}_3| > |\mathfrak{v}_1|$, so genügt $\pi_5 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 31^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I \underset{(16\,\mathrm{a})}{=} \pi_4$; denn $\sigma(31 \cdot I) < \sigma(I)$, $\sigma(23 \cdot 31 \cdot I) < \sigma(31^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I) < \sigma(\pi)$, weil

$$|\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3| \underset{(\varkappa)}{\leqq} |\mathfrak{v}_2| \underset{(\alpha)}{\leqq} |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3|.$$

Fall 7) $\pi = 12 \cdot 31 \cdot I$. — Nach Voraussetzung ist

$$
\begin{array}{ll}
2s_{13}+s_{11} \geqq 0 & (\alpha) \\
2s_{12}+s_{22} < 0 & (\beta) \\
s_{12} < 0. & (\gamma) \text{ aus } (\beta)
\end{array}
$$

$\pi \rightarrowtail \pi_1 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 31 \cdot 21 \cdot I \; (\underset{(15)}{=} O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 21 \cdot 31 \cdot I \underset{(13\,\mathrm{a})}{=} 12 \cdot 31 \cdot I)$ genügt, ausser wenn

$$
\begin{array}{ll}
2s_{12}+s_{11} \geqq 0 & (\delta) \\
s_{11} > s_{22}. & (\varepsilon) \text{ aus } (\delta)-(\beta)
\end{array}
$$

$\pi \rightarrowtail \pi_2 = 31 \cdot 32^{-1} \cdot 12 \cdot I \; (\underset{(16\,\mathrm{a})}{=} \pi)$ genügt, ausser wenn $\sigma(32^{-1} \cdot 12 \cdot I) \geqq \lambda$, d. h.

$$
\begin{array}{ll}
2s_{22}-s_{11}+2s_{12}-2s_{13}-2s_{23} \geqq 0 & (\zeta) \\
s_{22}-2s_{23} > 0. & (\eta) \text{ aus } (\zeta)+(\alpha)-(\beta)
\end{array}
$$

$\pi \rightarrowtail \pi_3 = 32^{-1} \cdot 31 \cdot 12 \cdot I \; (\underset{(16\,\mathrm{a})}{=} \pi)$ genügt, ausser wenn $\sigma(31 \cdot 12 \cdot I) \geqq \lambda$, d. h.

$$
\begin{array}{ll}
s_{22}+2s_{12}+s_{23} \geqq 0 & (\vartheta) \\
\qquad s_{23} > 0 & (\iota) \text{ aus } (\vartheta)-(\beta) \\
\qquad s_{13} < 0. & (\nu) \text{ aus } (\beta)-(\varepsilon)-(\zeta)-2\times(\iota)
\end{array}
$$

$\pi \rightarrow \pi_4 = O_1 P_{13}\cdot 31^{-1}\cdot 32^{-1}\cdot 13\cdot I \; (\underset{(14)}{=} O_1 P_{13}\cdot 32^{-1}\cdot 31^{-1}\cdot 13\cdot I \underset{(8)\,(11)}{=} 12\cdot O_1 P_{13}\cdot 31^{-1}\cdot 13\cdot I \underset{(13\,a)}{=} \pi)$ genügt, ausser wenn $\sigma(32^{-1}\cdot 13\cdot I) \geqq \lambda$; denn $\sigma(32^{-1}\cdot 13\cdot I) > \sigma(13\cdot I)$ wegen (η). Also:

$$
\begin{array}{ll}
s_{33}+s_{22}-s_{11}-2s_{23} \geqq 0 & (\varkappa) \\
s_{33}-2s_{23} > 0. & (\mu) \text{ aus } (\varkappa)+(\varepsilon)
\end{array}
$$

Nun wende man den Hülfssatz auf die Matrix $12\cdot I$ mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1' = \mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3$ an. Es ist

$$
\begin{array}{lll}
|\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_1'| & \text{nach } (\beta) \\
|\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_1'| & \text{aus } (\zeta)+(\alpha)+2\times(\iota) \\
|\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_1'| > |\mathfrak{v}_2| & \text{nach } (\varepsilon) \\
|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1'| > |\mathfrak{v}_2| & \text{aus } (\delta)+(\zeta)+(\alpha)+2\times(\iota) \\
|\mathfrak{v}_2\pm\mathfrak{v}_3| > |\mathfrak{v}_2| & \text{nach } (\iota) \text{ und } (\mu) \\
|\mathfrak{v}_3\pm\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_3| & \quad \text{»} \quad (\iota) \quad \text{»} \quad (\eta) \\
|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1'| > |\mathfrak{v}_3| & \text{aus } (\vartheta)+(\alpha)+(\iota) \\
|\mathfrak{v}_3-\mathfrak{v}_1'| > |\mathfrak{v}_3| & \quad \text{»} \quad (\zeta)+(\varepsilon) \\
|\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_3| > |\mathfrak{v}_1'|. & \quad \text{»} \quad (\mu)-2\times(\nu)
\end{array}
$$

Also ist nach dem Hülfssatz $|\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_1'|$, d. h.

$$
\begin{array}{ll}
s_{33}+2s_{13}+2s_{23} < 0 & (\xi) \\
s_{33}+2s_{13} < 0. & (\varrho) \text{ aus } (\xi)-2\times(\iota)
\end{array}
$$

Wegen (ϱ) ist $|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_1|$. Wir setzen $\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1''$ und wenden den Hülfssatz auf die Matrix mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1''$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ an. Da $|\mathfrak{v}_2\pm\mathfrak{v}_3| > |\mathfrak{v}_2|$ und $> |\mathfrak{v}_3|$ ist, wie früher gezeigt, und $|\mathfrak{v}_1''-\mathfrak{v}_3| = |\mathfrak{v}_1| > |\mathfrak{v}_1''|$ ist, prüfen wir:

$$
\begin{array}{ll}
|\mathfrak{v}_1''+\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_1''| & \text{aus } (\vartheta)+(\iota) \\
|\mathfrak{v}_1''-\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_1''| & \quad \text{»} \quad (\eta)-2\times(\gamma) \\
|\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_1''| > |\mathfrak{v}_2|. & \quad \text{»} \quad (\alpha)+(\mu)-2\times(\gamma)
\end{array}
$$

Wenn nun $|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1''| \leqq |\mathfrak{v}_2|$, also $|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3| \leqq |\mathfrak{v}_2|$ ist, so genügt:

$\pi \rightarrow \pi_5 = O_1 P_{13} \cdot 21^{-1} \cdot 32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I \underset{(16\,a)}{(=} O_1 P_{13} \cdot 32^{-1} \cdot 31^{-1} \cdot 13 \cdot I \underset{(8)\,(11)\,(13\,a)}{=} \pi)$; denn dann ist $\sigma(21 \cdot 13 \cdot I) \leqq \sigma(13 \cdot I) < \sigma(I)$ und $\sigma(32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I) \leqq \sigma(\pi_5) = \sigma(\pi)$; also sei $|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1''| > |\mathfrak{v}_2|$; ferner ist $|\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1''| > |\mathfrak{v}_3|$ aus $(\varrho) - (\alpha)$. Also ist nach dem Hülfssatz

entweder $|\mathfrak{v}_1'' + \mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_1''|$ d. h. $3s_{33} + 2s_{13} < 0$ (ψ)

oder $|\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_1''| < |\mathfrak{v}_3|$ d. h. $s_{11} + 4s_{13} + 3s_{33} < 0.$ (χ)

Da (ψ) aus $(\chi) - (\alpha)$ folgt, gilt ψ in beiden Fällen. Dann genügt π_5.

Denn es ist $\sigma(13 \cdot I) < \sigma(I)$, ferner $\sigma(21 \cdot 13 \cdot I) < \sigma(32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I)$, weil $|\mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2|$, wie aus $(\alpha) + (\vartheta) + (\mu) - (\psi) + (\iota)$ folgt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass $\sigma(32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I) < \lambda$, also $|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3| + |\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_1| + |\mathfrak{v}_2|$, also

$$s_{11} + s_{22} + s_{33} + 4s_{12} + 2s_{23} + 2s_{13} < 0$$

ist; und das folgt aus $2 \times (\beta) + (\psi) - (\varkappa)$.

— Damit ist die Vollständigkeit des Relationensystems (A), (B), (C) für die Gruppe G bewiesen. Im nächsten § wird dies Gruppenschema auf eine kürzere — dafür aber nicht symmetrische — Form gebracht.

§ 3.

Wir haben bisher als Erzeugende der Gruppe G die 12 Operationen P_{ik}, O_i und ik benutzt. Es ist nun leicht, die Erzeugendenzahl zunächst auf 4, dann weiter auf 3 Operationen zu verkleinern. Wir bezeichnen:

$$P = P_{12}, \qquad O = O_1,$$
$$Q = P_{23} \cdot P_{12}, \quad U = 12.$$

Dann ist

$$P_{23} = QP \quad \text{wegen (1)}$$
$$P_{13} = PQ \quad \text{» (2), (nämlich} = P_{23\,P12} = (QP)_P = PQ),$$
$$\left.\begin{aligned} O_2 &= O_P \\ O_3 &= O_{PQ} \end{aligned}\right\} \quad \text{» (5)}$$
$$21 = U_P \quad \text{» (7)}$$
$$32 = U_{PQ} \quad \text{» (8)}$$
$$13 = U_{QP} \quad \text{» (9)}$$
$$23 = 13_{P12} = U_Q \quad \text{wegen (8)}$$
$$31 = 32_{P12} = U_{PQP} \quad \text{» (9).}$$

Also ist $G = \{P, Q, O, U\}$. Ein vollständiges Relationensystem zwischen diesen erhält man, wenn man die eben gefundenen Ausdrücke für die P_{ik}, O_i, ik in (A), (B), (C) einsetzt. Vereinfacht man das sich ergebende System nach Möglichkeit dadurch, dass man Relationen, die eine Folge der übrigen sind, fortlässt, so lässt sich das Ergebnis auf die folgende Form bringen[4]:

$$(D) \quad G = \{P, Q, O, U\} \left\{ \begin{array}{ll} (D_1):\ P^2 = 1 & (D_6):\ U \rightleftarrows O_{Q^2} \\ (D_2):\ (QP)^2 = 1 & (D_7):\ U_O = U^{-1} \\ (D_3):\ Q^3 = 1 & (D_8):\ U_{POP} = U^{-1} \\ & (D_9):\ OPUU_P^{-1}U = 1 \\ (D_4):\ O^2 = 1 & \\ (D_5):\ O \rightleftarrows QP & \\ \multicolumn{2}{l}{\quad (D_{10}):\ U \rightleftarrows U_{QP}} \\ \multicolumn{2}{l}{\quad (D_{11}):\ U \rightleftarrows U_{PQ}} \\ \multicolumn{2}{l}{\quad (D_{12}):\ UU_QU^{-1}U_Q^{-1} = U_{QP}.} \end{array} \right.$$

Die Relation (D_9) zeigt, dass man O durch P und U ausdrücken kann:

[4] Ich unterdrücke die Zwischenrechnung und verweise auf die weitgehend analoge entsprechende Durchrechnung in meinem Aufsatz: »Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen«. Math. Ann. (Im Erscheinen).

$$(D_9): \quad O = PUU_P^{-1}U$$

unter Benutzung von (D_4). Substituiert man diesen Ausdruck für O in den übrigen Gleichungen, so erhält man, indem ausser (D_9) auch (D_7) und (D_8) entbehrlich werden, das folgende Schema:

$$\begin{array}{c} (E) \\ G = \{P, Q, U\} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (E_1): \; P^2 = 1 & (E_4): \; (PUU_P^{-1}U)^2 = 1 \\ (E_2): \; (QP)^2 = 1 & (E_5): \; PUU_P^{-1}U \rightleftarrows QP \\ (E_3): \; Q^3 = 1 & (E_6): \; PUU_P^{-1}U \rightleftarrows U_Q \\ \multicolumn{2}{c}{(E_7): \; U \rightleftarrows U_{QP}} \\ \multicolumn{2}{c}{(E_8): \; U \rightleftarrows U_{PQ}} \\ \multicolumn{2}{c}{(E_9): \; UU_Q U^{-1} U_Q^{-1} = U_{QP}} \end{array} \right.$$

Hier ist $D(P) = -1$, $D(Q) = +1$, $D(U) = +1$. Gittertransformationen mit Erhaltung der Orientierung, deren Gruppe $\overline{G}$ heissen möge, enthalten also die Erzeugende P eine gerade Anzahl von Malen. Also ist $\overline{G} = \{Q, U, Q_P, U_P\}$. Wegen (E_2) ist $Q_P = Q^{-1}$, also ist $\overline{G} = \{Q, U, U_P\}$. Zur Erzeugung dieser die Orientierung erhaltenden Gruppe $\overline{G}$, die in G invariant vom Index 2 enthalten ist, müssen wir also neben Q und U noch eine Operation mit Determinante $+1$ einführen. Es ist dazu am bequemsten, auf das Schema (D) zurückzugreifen, und dort O, für welches $D(O) = -1$ ist, durch die neue Erzeugende

$$T = PO, \qquad D(T) = +1,$$

zu ersetzen, was wegen $O = PT$ möglich ist. Wegen (D_4) ist dann $(PT)^2 = 1$, also $T_P = T^{-1}$. Wegen (D_9) ist $T = UU_P^{-1}U$, also $U_P = UT^{-1}U$. Also ist $\overline{G} = \{Q, T, U\}$, da man Q_P, T_P und U_P durch Q, T, U ausdrücken kann, und $G = \{Q, T, U, P\}$ ist. (E_4) nimmt die Form

$$UT^{-1}UT^{-1}UT = 1$$

an, sodass wir $UT^{-1}U = U_T^{-1}$ und also $U_P = U_T^{-1}$ haben.

Das Schema für $G = \{Q, T, U, P\}$ zerfällt nun in zwei Teile, einen P enthaltenden Teil:

$$(F) \qquad P^2 = 1\,, \quad Q_P = Q^{-1}\,, \quad T_P = T^{-1}\,, \quad U_P = U_T^{-1}\,,$$

mittels dessen die Stellung der invarianten Untergruppe $\overline{G}$ innerhalb G gekennzeichnet wird, und das Schema für $\overline{G}$, das die übrigen aus (D) erhaltenen Relationen enthält. Man kann es hier auf folgende Form bringen:

$$\begin{array}{c} (H) \\ \overline{G} = \{Q, T, U\} \end{array} \left\{ \begin{array}{llll} (H_1): & Q^3 = 1 & (H_4): & (UT^{-1})^3 = T^2 \\ (H_2): & T^4 = 1 & (H_5): & U_{T_Q^2} = U^{-1} \\ (H_3): & (QT)^2 = 1 & & \\ & (H_6): & U_T \rightleftarrows U_Q & \\ & (H_7): & U_T \rightleftarrows U_{Q^{-1}} & \\ & (H_8): & U U_Q U^{-1} U_Q^{-1} = U_{T_Q}. & \end{array} \right.$$

Man darf dies Schema einer schon in § 1 gemachten Bemerkung zufolge erst dann als das Schema für $\overline{G}$ ansprechen, wenn die Transformation der einzelnen Relationen mit P keine neuen liefert; (H) geht durch Transformation mit P mittels (F) in sich über.

Die Aeqvivalenz des Schemas $(F) + (H)$ für G mit dem in § 2 benutzten Schema (A) + (B) + (C), erkennt man übrigens, anstatt durch (D) zu gehen, leichter direkt, indem man formal definiert:

$$\begin{aligned} 12 &= U \\ 21 &= U_P \\ P_{12} &= P \\ O_1 &= PT \end{aligned}$$

und dann, ebenfalls per definitionem, der Transformation mit Q eine zyklische Permutation der Indizes in diesen Ausdrücken entsprechen lässt, z. B. $23 = U_Q$, $O_2 = (PT)_Q$

u. s. w. Dann ergeben sich die Relationen (1)—(16) durch leichte Rechnung aus (F) und (H).

Für das geometrische Studium der Gittertransformationen ist es natürlich ausreichend, sich mit der die Orientierung erhaltenden Gruppe $\overline{G}$ zu beschäftigen. Die geometrische Bedeutung der Erzeugenden geht aus den Matrizen hervor:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q ist also eine Drehung durch $\frac{2\pi}{3}$ um die Gerade $x = y = z$ und T eine Drehung durch $\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse. Diese beiden erzeugen die orthogonale Gruppe $\overline{\Omega}$, die Oktaedergruppe; und (H_1), (H_2), (H_3) ist ein bekanntes Schema für diese Gruppe. U endlich ist die Affinität, welche durch die Substitution

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

bestimmt wird. Die Potenzen von U sind also alle verschieden, und das Mass und die Art der Verknüpfung von U mit den Drehungen Q und T wird durch die Gleichungen (H_4)—(H_8) vollständig beschrieben.

Zum Schluss sei eine Bemerkung über den Zusammenhang mit freien Gruppen angefügt. Seien a_1, a_2, a_3 die erzeugenden Operationen einer freien Gruppe Φ (ohne verbindende Relationen zwischen den a_i). Wir bezeichnen vier Isomorphismen von Φ mit sich selbst, wie folgt:

$$P: \begin{cases} a_1{}' = a_2 \\ a_2{}' = a_1 \\ a_3{}' = a_3 \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} a_1{}' = a_2 \\ a_2{}' = a_3 \\ a_3{}' = a_1 \end{cases}$$

$$O: \begin{cases} a_1{}' = a_1^{-1} \\ a_2{}' = a_2 \\ a_3{}' = a_3 \end{cases} \qquad U: \begin{cases} a_1{}' = a_1\, a_2 \\ a_2{}' = a_2 \\ a_3{}' = a_3 \end{cases}$$

Dann erzeugen diese die gesamte Gruppe der Selbstisomorphismen von Φ, $I_\Phi = \{P, Q, O, U\}$, und das Gruppenschema ist[5]:

$$\begin{array}{c} I_\Phi : \\ = \{P, Q, O, U\} \end{array} \begin{cases} P^2 = 1 & U \rightleftarrows O_{Q^2} & U_{O_P} = U^{-1} \\ (QP)^2 = 1 & U \rightleftarrows U_O & O\,P\,U_O^{-1} U_P^{-1} U = 1 \\ Q^3 = 1 & U \rightleftarrows U_{OQP} & \\ O^2 = 1 & U \rightleftarrows U_{PQ} & \\ O \rightleftarrows QP & U\, U_Q\, U^{-1}\, U_Q^{-1} = U_{QP} & \\ O \rightleftarrows O_Q & & \end{cases}$$

Ist $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ein Isomorphismus von Φ, und bezeichnet e_{ik} die Exponentensumme von a_k in α_i, so ist (e_{ik}) eine Matrix mit Determinante ± 1, also in G. G ist also Faktorgruppe von I_Φ, und die zugehörige invariante Untergruppe I_Φ° von I_Φ ist die Gruppe derjenigen Isomorphismen, die zur Einheitsmatrix gehören. Nun geht das Schema (D) von G aus dem Schema von I_Φ durch Hinzufügung der einzigen Relation

$$U_O\, U = 1$$

hervor. $U_O\, U$ ist der Isomorphismus

$$U_O\, U: \begin{cases} a_1{}' = a_2^{-1}\, a_1\, a_2 \\ a_2{}' = a_2 \\ a_3{}' = a_3\,. \end{cases}$$

Dass $U_O\, U$ in G, nicht aber in I_Φ der Einheit entspricht, ist der Ausdruck dafür, dass die Variabeln unserer linearen

[5] Siehe die unter [4] zitierte Abhandlung.

Substitutionen, nicht aber die Erzeugenden a_i von Φ vertauschbar sind. Die obige Tatsache besagt nun, dass die zur Einheitsmatrix gehörige invariante Untergruppe I°_{Φ} durch alle Transformierten von $U_0 U$ mit beliebigen Elementen von I_{Φ} erzeugt wird.

Es scheint mir eine für die Grundaufgaben der allgemeinen Gruppentheorie bedeutungsvolle Frage zu sein, ob diese Tatsache unabhängig von der Beschränkung auf die Variablenzahl 3, für die sie hier allein bewiesen ist, ihre Gültigkeit bewahrt.

Kopenhagen, Oktober 1923.

Færdig fra Trykkeriet d. 13. Marts 1924.